Лекція 25. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

План

1. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.
2. Похідна неявної функції.
3. Екстремум функції двох змінних.
4. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

1. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x;y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x;y) \in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{yx}.$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z = f(x;y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right)$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Приклад. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\; dx\, dy - \sin x \sin y\, dy^2.$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$$

Теорема 19. Якщо функція $z = f(x;\, y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2. Похідна неявної функції

Якщо існує неперервна функція однієї змінної $y = f(x)$, така що відповідні пари $(x;\, y)$ задовольняють умову $F(x;\, y) = 0$, тоді ця умова називається *неявною формою функції* $f(x)$, а сама функція $f(x)$ називається *неявною функцією*, яка задовольняє умову $F(x; y) = 0$.

Припустимо, що неперервна функція $y = f(x)$ задана в неявній формі $F(x, y) = 0$ і що $F'_y(x, y) \neq 0$. Похідну $\frac{dy}{dx}$ обчислюємо за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \; F'_y(x, y) \neq 0.$$

Приклад. Знайти похідну від неявної функції $y^5 + 2x^2 y^2 + xy - 42 = 0$ в точці $x = 1$, $y = 2$.

Маємо $F'_x = 4xy^2 + y$, $F'_y = 5y^4 + 4x^2 y + x$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2 y + x}.$$

Для $x = 1$, $y = 2$ маємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{18}{89}$.

Аналогічно частинні похідні функції двох незалежних змінних $z = f(x;\, y)$, яку задано за допомогою рівняння $F(x;\, y;\, z) = 0$, де $F(x;\, y;\, z)$ — диференційовна функція змінних x, y, z, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (2)$$

за умови, що $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3-3xyz=5$.

У даному разі $F(x,y,z)=z^3-3xyz-5$. Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy.$$

Тоді за формулами (2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

3. Екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;y)\leq f(x_0;y_0)$ $\left[f(x;y)\geq f(x_0;y_0)\right]$, тоді ця точка $(x_0;y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z=f(x;y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z=f(x;y)$ має екстремум у точці $(x_0;y_0)$, тоді в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Теорема 2 (достатня умова екстремуму). Нехай функція $z=f(x;y)$ має екстремум у точці $(x_0;y_0)$, неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0;y_0)=0$ та $f'_y(x_0;y_0)=0$, а також $f''_{x^2}(x_0;y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0;y_0)=B$, $f''_{y^2}(x_0;y_0)=C$. Якщо:

1) $AC-B^2>0$ **і** $A<0$**,** тоді $(x_0;y_0)$ точка максимуму функції $z=f(x;y)$;

2) $AC-B^2>0$ **і** $A>0$, тоді $(x_0;y_0)$ точка мінімуму функції $z=f(x;y)$;

3) $AC-B^2<0$, тоді в точці $(x_0;y_0)$ немає екстремуму.

4) $AC-B^2=0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z=f(x;y)$ на екстремум

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.

5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі теореми 2.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x;y)=2x+8y-x^2-2y^2$.

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x}=2-2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=8-4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $\begin{cases} 2-2x=0 \\ 8-4y=0 \end{cases}$.

Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=1$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, звідки дістаємо, що $\Delta=8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $A<0$.

4. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Функція, що неперервна в замкненій обмеженій області D, досягає в ній найбільшого та найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційована функція може набувати цих значень лише в точках екстремуму. Тому потрібно знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x;y)=0$, $f'_y(x;y)=0$, і обчислити значення функції в цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області.

Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+y^3-3xy$ в області, обмеженій прямими $x=-1$, $x=2$, $y=-1$, $y=3-x$ (Рис. 1).

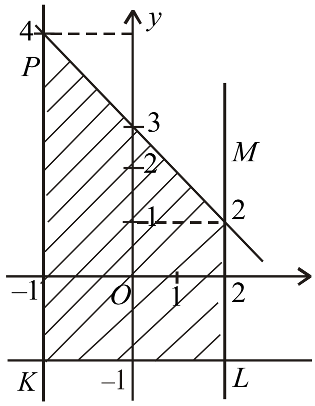

Рисунок – 1

1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: :$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0;\,0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *y*: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *x*: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;\ -1)$, $M(2;1)$, $P(-1;\ 4)$, $T\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0;0)=0$, $f(1;1)=-1$, $f(-1;-1)=-5$, $f(2;-1)=13$, $f(2;1)=3$, $f(-1;4)=75$, $f\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)=0$.

Отже, $z_{\min}=-5$, і це значення досягається в точці $(-1;\ -1)$, $z_{\max}=75$, і це значення досягається в точці $(-1;\ 4)$.