Лекція 21. Визначений інтеграл

План

1. Означення визначеного інтеграла.
2. Властивості визначеного інтеграла.
3. Інтеграл зі змінною верхньою межею.
4. Формула Ньютона-Лейбніца.
5. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.
6. Метод інтегрування частинами.

1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a < b$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин так, щоб

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ назвемо T-розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 0, 1, ..., n-1)$ та значення функції $f(\xi_i)$ у довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Позначимо через λ – найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$. Утворимо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, яка називається *інтегральною сумою* функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

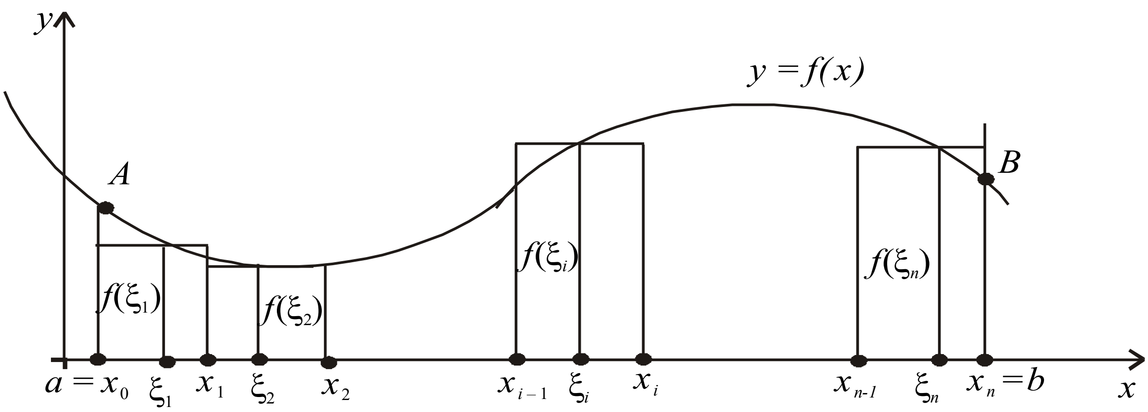
Означення 1. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i у кожному з частинних відрізків, то вона називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Числа a і b називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; dx – диференціал змінної інтегрування.

Означення 2. Функція, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної та інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ та віссю Ox:



Необхідною умовою існування визначеного інтеграла є обмеженість функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Достатньою умовою існування визначеного інтеграла є неперервність функції $f(x)$ на цьому ж відрізку.

2. Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x)=c=\text{const}$, то $\int\limits_a^b c\,dx = c\cdot(b-a).$

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int\limits_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$

VII. Якщо $f(x)\ge 0$ і інтегровна для $x\in[a,\,b],\quad b>a,$ то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ – інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f(x)$ – інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,\ b]$, $b > a$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

X. **Теорема (про середнє):** Якщо функція $f(x)$ – неперервна для $x \in [a,\ b]$, $b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a,\ b]$, що:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

3. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$. Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку $[a;x]$, де $a \leq x \leq b$, тобто для будь-якого $x \in [a;b]$ має зміст інтеграл $\int_a^x f(t)dt$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ця функція визначена на відрізку $[a;b]$ і називається *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

Теорема 1. Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

4. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 2. (Основна теорема інтегрального числення). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Якщо функція $F(x)$ є довільною її первісною на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца.*

Приклад.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

5. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо: 1) $f(x)$ – неперервна для $x \in [a; b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні для $t \in [\alpha; \beta]$; 4) при $t \in [\alpha; \beta] \Rightarrow x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)\,dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2,\ \ dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3 - \ln 4 - \left(2 - \ln 3\right)\right) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

6. Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад.

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1.$$