РОЗДІЛ VIII. Функції багатьох змінних
Лекція 24. Функції багатьох змінних. Границя. Неперервність

План

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Границя функції двох змінних. Неперервність.

1. Поняття функції багатьох змінних

Нехай задано множину D впорядкованих пар чисел (x,y). Якщо кожній парі чисел $(x,y)\in D$ за певним законом відповідає єдине число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y і записують $z=f(x,y)$.

Прикладом функції двох змінних є площа S прямокутника зі сторонами a і b, яку знаходять за формулою $S=a\cdot b$. Кожній парі значень a та b відповідає єдине значення площі, тобто S – функція двох змінних $S=f(a,b)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а x та y – незалежними змінними (аргументами). Множину пар (x,y) значень x та y, для яких функція $z=f(x,y)$ визначена називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$. Множину значень позначають $E(f)$.

Лінію, що обмежує область D, називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називають внутрішніми. Область, яка містить лише внутрішні точки, називають відкритою. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається замкненою.

Для характеристики функцій двох змінних вводиться поняття ліній рівня.

Означення. *Лінією рівня функції* $z=f(x,y)$ називається сукупність всіх точок на площині xOy, для яких виконується умова $f(x,y)=C$.

Лінії рівня можна отримати, перетнувши поверхню $z=f(x,y)$ площинами $z=C,\quad C=const$.

Нехай D – це деяка множина впорядкованих трійок (x,y,z) дійсних чисел, тобто точок $M(x,y,z)$ тривимірного простору R_3. Якщо кожній точці $(x,y,z)\in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних і записують $u=f(x,y,z)$.

Поверхнею рівня функції $u=f(x,y,z)$ називають множину всіх точок $(x,y,z)\in D(f)$, для яких задана функція набуває одне й те саме значення $c\in E(f)$: $f(x,y,z)=c$ (ізоповерхні).

Якщо число n незалежних змінних більше трьох, то їх частіше позначають: $x_1,x_2,...,x_n$. Поняття функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в цьому випадку вводиться аналогічно.

2. Границя функції двох змінних. Неперервність.

Розглянемо деяку послідовність точок $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2),...,\ M_n(x_n,y_n).$, яку позначимо $\{M_n\}$. Послідовність точок $\{M_n\}$ називають *збіжною до точки* M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M, M_0) < \varepsilon$. В цьому випадку точку M_0 називають границею послідовності $\{M_n\}$.

Всі внутрішні точки круга з центром в точці M_0 радіуса δ називають δ-*околом* точки $M_0(x_0, y_0)$.

Означення. Число А називається *границею функції* $z = f(x;y)$ *у точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якої збіжної до M_0 послідовності точок $M_1, M_2, ..., M_n$ ($M_n \neq M_0$, $M_n \in \{M\}$) , відповідна послідовность значень функції $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$, ... збігається до числа *A*. Записують $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = B$.

Означення. Число *A* називається *границею функції* $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ виконується нерівність $|f(x;y) - A| < \varepsilon$.

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена на множині *D*, точка $M_0 \in D$ і довільний δ-окіл точки M_0 містить точки множини *D*.

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервно в точці* M_0, якщо $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ Точки, в яких функція неперервна, називають *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується – *точками розриву*.

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

3. Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним *x* та *y* приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x; y_0)$, $N(x_0; y_0 + \Delta y)$ також належатимуть даному околу.

Означення. Різницю $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ називають *повним приростом* функції $z = f(x;y)$, а різниці $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$,

$\Delta_y z = f\left(x_0; y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0; y_0\right)$ називають *частинними приростами по змінних x та y* відповідно.

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

4. Диференційовність функції двох змінних. Частинні похідні.

Означення. Функція $z = f\left(x; y\right)$ називається *диференційовною* у точці $\left(x_0; y_0\right)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = f\left(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0; y_0\right) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B — числа, α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* двох змінних $f\left(x; y\right)$ у точці $\left(x_0, y_0\right)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя виду $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta x} \right)$, то вона називається *частинною похідною по змінній x (по y)* функції $z = f\left(x; y\right)$ у точці $\left(x_0; y_0\right)$ і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f'_x\left(x_0; y_0\right)$($\dfrac{\partial z}{\partial y}$, або z'_y, або $f'_y\left(x_0; y_0\right)$).

Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам’ятати, що при знаходженні z'_x змінна y вважається сталою, а при знаходженні z'_y сталою вважається змінна x.

Теорема 14 (необхідна умова диференційовності функції): Якщо функція $z = f\left(x; y\right)$ диференційовна в точці $\left(x_0; y_0\right)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Приклад. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \ +\operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, повний диференціал функції $z = f(x;y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x;y;z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Приклад. Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \text{ де}$$

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ отже,}$$

$$dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y}dy\right).$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x;y)$ у деякому околі точки $(x_0;\, y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційовна в точці $(x_0;\, y_0)$.

Теорема (диференціювання складної функції): Нехай на множині D визначена складна функція $z = f(u;v)$, де $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$, і нехай функції u, v мають у деякому околі точки $(x_0;y_0) \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $z = f(u;v)$ — неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0;v_0)$, де $u_0 = u(x_0;y_0)$, $v_0 = v(x_0;y_0)$. Тоді складна функція $z = f\left(u(x,y);\, v(x,y)\right)$ диференційовна в точці $(x_0;\, y_0)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

5. Дотична площина та нормаль

Якщо функція $z = f(x;\, y)$ диференційовна в точці $(x_0;\, y_0)$, то виконується рівність $\Delta z \approx A\Delta x + B\Delta y$, або

$$f\left(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0;\ y_0\right)\approx f'_x\left(x_0;\ y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0;\ y_0\right)\Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a=x_0+\Delta x$, $b=y_0+\Delta y$, дістанемо:

$$f\left(a;b\right)\approx f\left(x_0;\ y_0\right)+f'_x\left(x_0;\ y_0\right)\left(a-x_0\right)+f'_y\left(x_0;\ y_0\right)\left(b-y_0\right). \qquad (1)$$

На формулі (1) ґрунтується *алгоритм використання диференціала для наближених обчислень*.

Крім того, якщо в рівності (1) взяти $a=x$, $b=y$, дістанемо

$$z=f\left(x;\ y\right)\approx f\left(x_0;\ y_0\right)+f'_y\left(x_0;\ y_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(x_0;\ y_0\right)\left(y-y_0\right).$$

Це рівняння *дотичної площини*, що проходить через точку $\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$.

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F\left(x;\ y;\ z\right)=0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F\left(x;\ y;\ z\right)=0$ в точці $\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ має вигляд:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0, \ (5.4)$$

де $A=F'_x\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$, $B=F'_y\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$, $C=F'_z\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$.

Нормаль до поверхні в точці $\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ — це пряма, що проходить через точку $\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}.$$