РОЗДІЛ VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Лекція 14. Похідна функції. Основні правила диференціювання

План

1. Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст

2. Диференціювання суми, добутку, частки двох функцій

3. Диференціювання складної, оберненої, параметрично заданої та неявної функції

1. Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_0 з цього проміжку, надамо аргументу x_0 довільного приросту Δx, але такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала проміжку. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 і позначається:

$$y', y'_x, \frac{dy}{dx}, f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ *в точці* x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Приклад. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $f(x) = x^2$ в точці x_0.

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Відшукаємо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Таким чином, $f'(x_0) = 2x_0$.

Механічний зміст похідної

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється за законом $s = s(t)$, то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$: $v(t) = s'(t)$.

Геометричний зміст похідної

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha.$$

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

2. Диференціювання суми, добутку, частки двох функцій

Теорема. *Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо* $y = c$, *де c = const, то* $y' = 0$.

Теорема. *Якщо функції* $u(x), v(x)$ *є диференційованими в точці* x_0, *то в цій точці є диференційованими їх сума, різниця, добуток і частка (у випадку* $v(x_0) \neq 0$*). При цьому мають місце рівності:*

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(uv)' = u'v + v'u;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Теорема. *Сталий множник можна виносити за знак похідної:*

$$(cu)' = cu', c = const.$$

<u>Приклад.</u> Обчислити похідну для функції $y = tgx$.

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Таким чином, $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$.

3. Диференціювання складної, оберненої, параметрично заданої та неявної функції

Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тоді $y = f\big(\varphi(x)\big)$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

Теорема. *Якщо* $y = f(u)$ *та* $u = \varphi(x)$ *— диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює* $y'_x = f'_u u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція диференційовна.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

<u>Приклад.</u> Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $(y^2)' = 2yy'$. Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції. Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції $y = f(x), x = \varphi(y)$ $\big(f\big(\varphi(y)\big) = y\big)$.

Теорема. *Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній у дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.*

Похідна параметрично заданої функції. Нехай функцію y від x задано параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \omega(t) \end{cases} (t_1 < t < t_2).$$

Треба знайти $y'_x = \frac{dy}{dx}$. Нехай функції $\varphi(t), \omega(t)$ диференційовні і при цьому $\varphi'(t) \neq 0$, тоді користуючись означенням диференціала $dy = \omega'(t)dt$, $dx = \varphi'(t)dt$. Отже, маємо

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)}.$$