

## Лекція 9. Криві другого порядку

### План

1. Коло
2. Еліпс
3. Гіпербола
4. Парабола

#### 1. Коло

*Лінією (кривою) другого порядку* називають множину  $M$  точок площини, декартові координати  $x, y$  яких задовольняють алгебраїчне рівняння другої степені

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_0 = 0, \quad (1)$$

де  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  – сталі дійсні числа, причому хоча б одне із чисел  $a_1, a_2, a_3$  відмінне від нуля. Рівняння (1) називають *загальним рівнянням лінії другого порядку*.

*Колом* називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу). Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (2)$$

визначає коло з центром в точці  $C_0(x_0, y_0)$  радіусом  $R$ . Якщо центр кола є початком координат, то його рівняння запишеться

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3)$$

Якщо в рівнянні (2) розкрити дужки, то отримаємо

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \quad (4)$$

де  $m = -2x_0, n = -2y_0, p = x_0^2 + y_0^2 - R^2$  і називають *загальним рівнянням кола*. Для того щоб від рівняння (4) знову перейти до рівняння (2) потрібно в лівій частині (4) виділити повні квадрати

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p.$$

## 2. Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих даних точок  $F_1, F_2$  є величина стала  $2a, a > b$ , більша за  $F_1F_2$ .

Канонічне рівняння еліпса з півосями  $a, b$  з центром в початку координат і вершинами  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , розташованими на осях координат, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Відстані між вершинами називаються *осями еліпса*:  $A_1A_2 = 2a$  – велика (фокальна) вісь і  $B_1B_2 = 2b$  – мала вісь для еліпса у котрого  $a > b$  (рис. 11, а) і навпаки  $A_1A_2 = 2a$  – мала вісь, а  $B_1B_2 = 2b$  – велика вісь для еліпса у котрого  $b > a$  (рис. 11, б). Точки  $F_1$  і  $F_2$  називаються *фокусами*, а  $F_1F_2 = 2c$  – відстань між фокусами. Відповідно до означення будь-яка точка  $M$  еліпса задовольняє умові  $F_1M + F_2M = 2a$  і  $b^2 = a^2 - c^2$  у випадку  $a > b$  або  $F_1M + F_2M = 2b$  і  $a^2 = b^2 - c^2$  у випадку  $b > a$ .

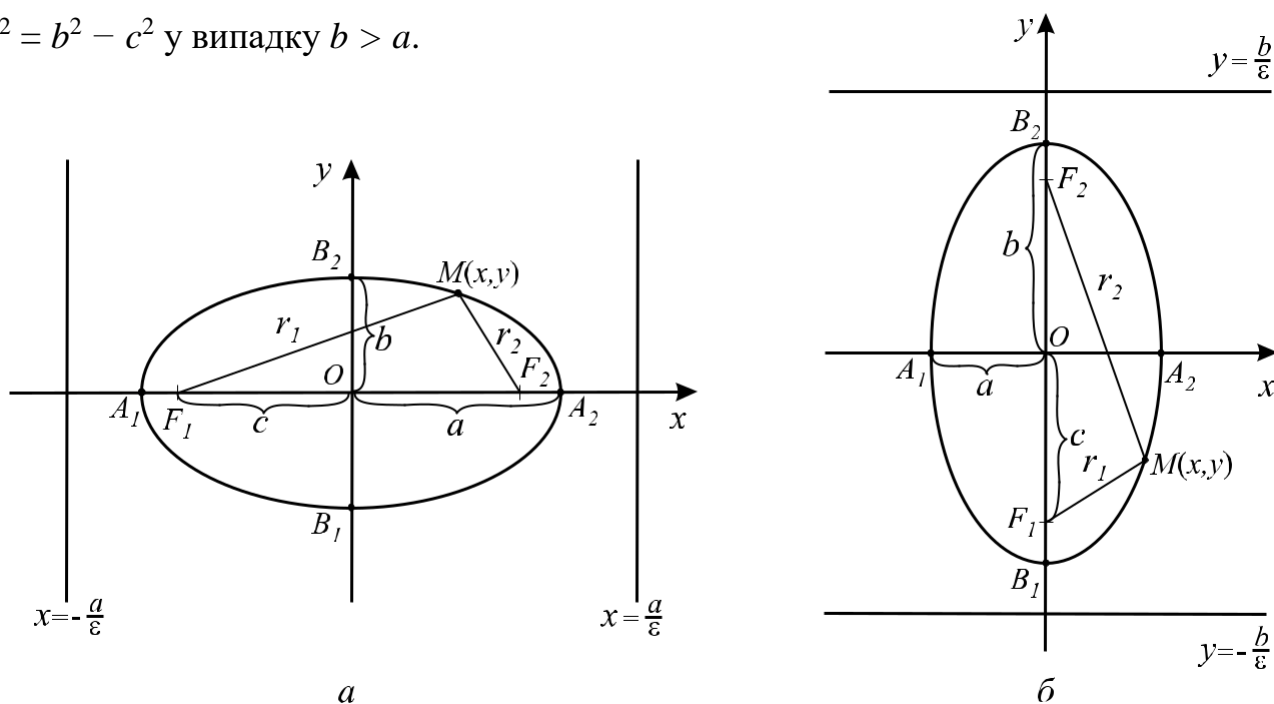


Рис. 11

Число  $\varepsilon$ , рівне відношенню відстані між фокусами  $F_1F_2$  до довжини великої осі, називається *ексцентриситетом еліпса*:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (a > b), \quad \varepsilon = \frac{c}{b} \quad (b > a).$$

В будь-якому випадку  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

З вище приведених формул для відношення осей дістаємо:

$$\text{якщо } (a > b), \text{ то } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

$$\text{якщо } (b > a), \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отже, якщо  $\varepsilon = 0$ , то  $b = a$ , тобто еліпс перетворюється в коло;  $\varepsilon \rightarrow 1$ , то відношення осей  $b/a$  ( $a/b$ ) зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі  $Ox$  ( $Oy$ ).

Відстані  $F_1M = r_1$  та  $F_2M = r_2$  точки  $M = (x, y)$  еліпса до його фокусів називаються *фокальними радіусами* точки  $M$  і визначаються за формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad a > b, \quad r_1 = b + \varepsilon y, \quad r_2 = b - \varepsilon y, \quad b > a.$$

Прямі паралельні до малої осі еліпса, називаються *директрисами еліпса*

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}, \quad a > b, \quad x = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{b^2}{c}, \quad b > a.$$

Рівняння дотичної до еліпса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  у точці  $M_0(x_0, y_0)$

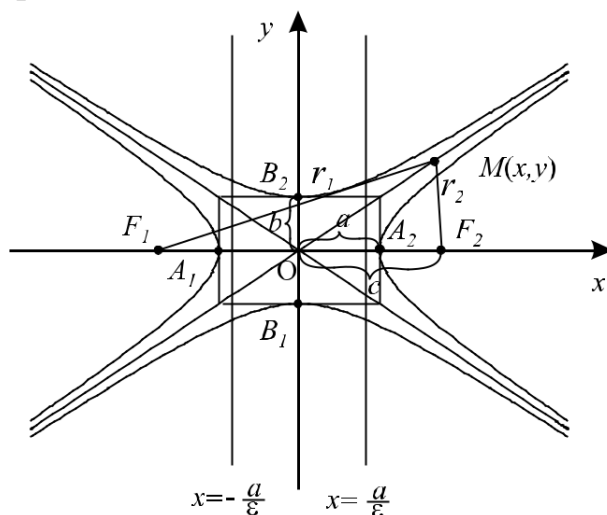
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Еліпс з центром у точці  $C_0(x_0, y_0)$  має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

### 3. Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок  $F_1, F_2$  є величина стала  $2a$  ( $0 < 2a < F_1F_2$ ).



Тобто, для будь-якої точки  $M$  виконується умова  $|F_1M - F_2M| = 2a$ .

Канонічне рівняння гіперболи (див. рис. 12) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \quad (6)$$

Параметри  $2a$ ,  $2b$  – називаються *дійсною і уявною осями* гіперболи (6);  $a$ ,  $b$  – її *півосі*; точки  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$  – *вершини*,  $Ox$  і  $Oy$  – *дійсна і уявна осі симетрії*,  $O(0, 0)$  – *центр гіперболи*.

Прямі  $y = \pm \frac{b}{a}x$  називаються *асимптотами гіперболи*. Точки  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ , де  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , – *фокуси гіперболи*. Відстань між фокусами  $2c$ . Число  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$  – *ексцентриситет гіперболи*. Відстані  $r_1$  та  $r_2$  від точки  $M(x, y)$  гіперболи до її фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки і визначаються за формулами:

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a,$$

за умови, що точка  $M(x, y)$  лежить на правій вітці гіперболи. Прямі  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon}$  – *директриси гіперболи*.

Гіпербола, для якої  $a = b$ , називається *рівносторонньою*, її рівняння  $x^2 - y^2 = a^2$ , а рівняння асимптот має вигляд  $y = \pm x$ .

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (7)$$

називається *спряженою з гіперболою* (6).

*Дотична* до гіперболи (6) у точці  $M_0(x_0, y_0)$  визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Гіпербола з центром у точці  $C_0(x_0, y_0)$  має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння асимптот гіперболи  $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ .

#### 4. Парабола

Параболою називають геометричне місце точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

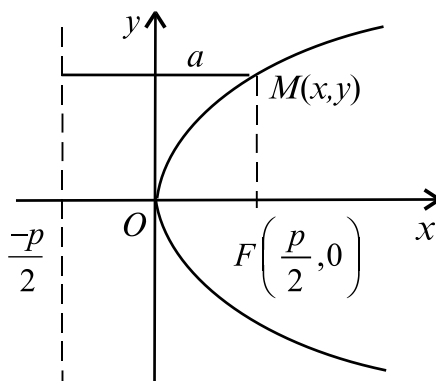


Рис. 13

Є два вигляди канонічного рівняння параболи:

$$y^2 = 2px \quad (8)$$

– парабола симетрична відносно осі  $Ox$  (рис. 13),  $p > 0$  – параметр параболи;

$$x^2 = 2py \quad (9)$$

– парабола симетрична відносно осі  $Oy$ .

В обох випадках вершина параболи, тобто точка  $O(0,0)$ , яка лежить на осі симетрії  $Ox$  ( $Oy$ ), знаходиться в початку координат.

Парабола (8) має фокус  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  і директрису  $x = -\frac{p}{2}$ ; фокальний радіус-вектор точки  $M(x, y)$  параболи визначається рівнянням  $r = x + \frac{p}{2}$ .

Парабола (9) має фокус  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$  і директрису  $y = -\frac{p}{2}$ ; фокальний радіус-вектор точки  $M(x, y)$  параболи визначається рівнянням  $r = y + \frac{p}{2}$ .

Ексцентриситет параболи  $\varepsilon = 1$ . Дотична до параболи  $y^2 = 2px$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  визначається рівністю  $yy_0 = p(x + x_0)$ . Рівняння параболи з вершиною в точці  $C_0(x_0, y_0)$  має вигляд  $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ .