Міністерство освіти і науки України

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до практичних занять

для студентів всіх спеціальностей
денної форми навчання

Луцьк 2016

УДК 51(075)
ББК 22.11 я 73
В 55

До друку ____________________ Голова Навчально-методичної ради Луцького НТУ
(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій Луцького НТУ
____________________ директор бібліотеки.
(підпис)

Затверджено Навчально-методичною радою Луцького НТУ,

протокол № __від ___ ______ 20___ року

Рекомендовано до видання Навчально-методичною радою ТК Луцького НТУ,

протокол №__від ___ ______ 20___ року

____________________ Голова навчально-методичної ради ТК Луцького НТУ
(підпис)

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії природничо-математичних дисциплін ТК Луцького НТУ

протокол №__від ___ ______ 20___ року

Укладач: ________________Ю.В.Боровська, викладач Технічного коледжу Луцького НТУ
(підпис)

Рецензент: ________________Б.І.Дутчак, кандидат фізико-математичних наук
(підпис)

Відповідальний
за випуск: _____________ Ю.В.Боровська, викладач Технічного коледжу Луцького НТУ
(підпис)

Вища математика [Текст]: Методичні вказівки до практичних занять для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання / Ю.В.Боровська − Луцьк: Технічний коледж ЛНТУ, 2016. − 79 с.

Методичні вказівки до практичних занять для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання складено відповідно до діючої програми з вищої математики. Вміщені задачі і приклади до основних розділів вищої математики, список літератури. Пропоноване видання можна використовувати на лекціях, при підготовці до практичних робіт, а також при самостійній підготовці студентів. Мета цієї розробки – допомогти студентам при підготовці до практичних занять.

Зміст

Вступ

В сучасних умовах навчальний процес вимагає постійного вдосконалення, так як і в освіті, в науці відбувається зміна пріоритетів і соціальних цінностей: науково-технічний прогрес все більше усвідомлюється як засіб досягнення такого рівня виробництва, який найбільшою мірою відповідає задоволенню потреб людини, розвитку духовного багатства особистості. Тому підготовка фахівців технічного спрямування – це одне із найважливіших загальнодержавних завдань і нашої системи освіти. Саме вона закладає основи розвитку виробництва, науки, техніки.

Для підготовки висококваліфікованих спеціалістів, конкуренто-спроможних на світовому ринку праці, для господарської діяльності та науки слід забезпечити належний рівень математичної підготовки студентів, тому що математика відіграє важливу роль у формуванні таких якостей сучасного фахівця, як професіональна компетентність, творче мислення, навички до самостійної наукової роботи. Математичні методи та математичне моделювання широко використовуються для розв'язання практичних задач різних галузей науки, техніки, економіки, виробництва.

Сьогодні перед викладачем стоїть завдання не просто навчити студентів опановувати певний обсяг знань, а виробляти вміння вчитися, застосовувати набуті знання у практичній діяльності.

Методичні вказівки створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки фахівців технічних спеціальностей і посилення прикладної її спрямованості. Вони ставлять за мету допомогти студенту самостійно оволодіти розв'язуванням задач та прикладів з курсу вищої математики. Це й визначило структуру посібника.

Методичний посібник включає теми практичних занять, приклади розв'язання типових задач, перелік завдань з кожної теми. Подані завдання дозволяють підготуватись студентам до практичних занять та перевірити знання.

І. Теми практичних занять

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 1. Визначники. Їх властивості. Способи обчислення.

Тема 2. Дії над матрицями. Обернена матриця. Ранг матриці.

Тема 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 4, 5. Лінійні операції над векторами. Розклад вектора по базису. Скалярний, векторний та мішаний добутки.

РОЗДІЛ ІІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 6. Рівняння прямої на площині.

Тема 7. Рівняння площини. Пряма в просторі.

Тема 8. Рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи.

РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 9,10. Знаходження простих границь. Знаходження границь з використанням важливих границь. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції, їх застосування при обчисленні границь.

Тема 11. Дослідження функцій на неперервність. Класифікація точок розриву.

РОЗДІЛ V. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 12. Диференціювання найпростіших, раціональних та ірраціональних функцій. Похідна добутку, частки двох функцій.

Тема 13. Диференціювання складної, параметрично заданої функції. Диференціювання оберненої, неявно заданої функції.

Тема 14. Диференціал. Похідні вищих порядків.

Тема 15. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Тема 16. Дослідження функцій на монотонність, екстремум. Найбільше та найменше значення функції на сегменті.

Тема 17. Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти графіка.

Тема 18. Дослідження функції та побудова її графіка.

РОЗДІЛ VI. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Тема 19. Комплексні числа, дії над ними.

РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 20, 21. Безпосереднє інтегрування. Заміна змінної та інтегрування частинами.

Тема 22. Інтегрування раціональних функцій.

Тема 23, 24. Інтегрування деяких ірраціональних та тригонометричних функцій.

Тема 25. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами. Заміна змінної в означеному інтегралі.

Тема 26. Застосування визначеного інтегралу.

Тема 27. Обчислення невласних інтегралів.

Розділ VIII. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОЇ ЗМІННИХ

Тема 28. Область існування функції багатьох змінних. Задання областей нерівностями. Знаходження частинних похідних, диференціалу.

Тема 29. Диференціювання складної, неявної функції. Похідні вищих порядків. Екстремум.

ІІ. Практичні заняття

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 1. Визначники. Їх властивості. Способи обчислення.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 7\cdot 2 = 1;$

б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$

в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\sin\alpha - \sin\beta\sin\beta = \sin(\alpha-\beta).$

Приклад 2. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 3 + 5\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 4 - 5\cdot 1\cdot 3 = 40;$

б) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 =$

$= 2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc;$

в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta -$

$-\sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha).$

Приклад 3. Знайти алгебраїчні доповнення елементів a_{23}, a_{31} визначника

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(0-3) = 3, \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 = 13$$

Приклад 4. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -14 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & -14 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 0 & -100 & 39 \\ 0 & -35 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -100 & 39 \\ -35 & 12 \end{vmatrix} = -165.$$

Для утворення нулів у рядку або стовпчику зручно мати розв'язувальний елемент, що дорівнює одиниці. Даний визначник такого елемента не має. Для його утворення можна, наприклад, помножити останній рядок визначника на (–1) і додати до передостаннього, при цьому визначник не зміниться.

Помножимо елементи першого стовпчика спочатку на (–1) і складемо з відповідними елементами другого стовпчика, тоді на місці елемента a_{32} утвориться нуль. Далі множимо всі елементи того ж першого стовпчика на –3 і складаємо з елементами третього стовпчика. На місці елемента a_{33} знову утворився нуль. У такий же спосіб, помноживши перший стовпчик на (–1) і склавши з останнім, на місці елемента a_{34} також утвориться нуль. Слід зазначити, що для утворення нулів у рядку працюють з елементами стовпчиків, а для утворення нулів у стовпчиках — з елементами рядків.

Далі, використовуючи теорему Лапласа, розкладаємо визначник 4-го порядку за елементами третього рядка і одержуємо визначник третього порядку. Для його знаходження можна застосувати відповідне правило, але ми ще раз утворимо нулі.

Для одержання одиниці до елементів першого стовпчика додамо відповідні елементи третього стовпчика. На місці елемента a_{11} утворилася –1. Далі помножимо елементи першого рядка на 7 і складемо з відповідними елементами другого рядка, одержимо нуль на місці елемента a_{21}. Аналогічно, помноживши елементи першого рядка на 2 і склавши з елементами третього рядка, одержимо нуль на місці елемента a_{31}. Після застосування теореми Лапласа одержуємо визначник другого порядку і остаточний результат.

Задачі

1. Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

2. Розкладаючи за третім рядком, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Розкладаючи за другим стовпчиком, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначники з числовими елементами, утворюючи нулі в рядках або стовпчиках:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Тема 2. Дії над матрицями. Обернена матриця. Ранг матриці.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти матрицю $C = AB$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Кількість стовпців матриці $A_{2\times 2}$ дорівнює кількості рядків матриці $B_{2\times 3}$, тому за означенням маємо

$$C_{2\times 3} = A_{2\times 2}B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2\,.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13\,; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19\,;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8\,; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9\,; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Складемо обернену матрицю

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язання

1. Поміняємо перший і другий рядок місцями для того, щоб елемент $a_{11} \neq 0$

2. Щоб отримати в першому стовпці всі решта нулі, перший рядок домножимо на (-1) і додамо до третього рядка; перший рядок домножимо на (-2) і додамо до четвертого рядка;

3. Елемент $a_{22} = 1$. Щоб отримати нулі, другий рядок додамо до третього рядка; другий рядок домножимо на 3 і додамо до четвертого рядка;

4. Вилучимо нульові рядки.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -21 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці $r(A) = 2$

Задачі

1. Знайти добутки матриць:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення полінома $3A^2 - 2A - 5$ від матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Знайти значення полінома $A^3-7A^2+13A-E$ від матриці

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

4. Знайти обернені до таких матриць:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

5. Обчислити ранги матриць:

1. $\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix}47 & -67 & 35 & 201 & 155\\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86\\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52\end{pmatrix}$.

Тема 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Розв'язати методом Крамера систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17 \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначник системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4$

Використаємо формули $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3,\ x_2 = \frac{8}{4} = 2,\ x_3 = \frac{4}{4} = 1$$

Відповідь. (3; 2; 1).

Приклад 2. Записати і розв'язати в матричній формі систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

Позначимо через $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

Система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі $AX = B$. Матричний розв'язок системи буде $X = A^{-1}B$.

Для знаходження оберненої матриці A^{-1}:

1. Обчислюємо визначник матриці A: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 4$

Оскільки $\Delta \neq 0$,то для матриці A існує обернена A^{-1}, а значить, можна знайти єдиний розв'язок вихідної системи.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4$ $\qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 27) = 12$

$A_{13} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 36 = -12$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -(10-8) = -2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = (16-18) = 2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(6-3) = 3$

$A_{33} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$

3. Обернена матриця має вигляд:

$$A^{1} = \frac{1}{\Delta} A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 12 & 1 & -3 \\ -12 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Знаходимо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5+7 \\ 9+\frac{5}{2}-\frac{21}{2} \\ -9+5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$.

Відповідь. (-1; 1; 3).

Приклад 3. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання

1. Виконуємо перетворення над розширеною матрицею системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right) : 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right) \times(-3) \times(-4) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 2 & -2,5 & -1 & -0,5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) : (-2,5) \times 3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 2,2 & -4,4 \end{array}\right) : 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Оскільки ранги основної і розширеної матриці співпадають ($r=3$) і ранг системи дорівнює кількості невідомих, то система має один розв'язок.

2. За останньою матрицею складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1+0,5x_2+x_3=0,5 \\ x_2+0,4x_3=0,2 \\ x_3=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=-2 \\ x_2=0,2-0,4x_3=0,2-0,4\cdot(-2)=1 \\ x_1=0,5-0,5x_2-x_3=0,5-0,5+2=2 \end{cases}$$

(2; 1; -2) - розв'язок системи.

Відповідь. (2; 1;-2).

Задачі

1. Розв’язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.

1. $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1; \\ 3x_1+7x_2=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} ax_1+bx_2=ad; \\ bx_1+cx_2=bd. \end{cases}$

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь двома з трьох методів: методом Крамера, методом Гауса, методом оберненої матриці.

1. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-y-2z=8 \\ 2x+y+3z=3 \\ x-3y+z=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y-z=-5 \\ 3x-2y+2z=3 \\ 5x-y+3z=4 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x-2y-3z=8 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ x-2y-3z=8 \\ 3x+y-8z=11 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 4x-3y-2z=-1 \\ x+2y+3z=8 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+y+2z=-4 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2ax_1-23x_2+29x_3=4; \\ 7x_1+ax_2+4x_3=7; \\ 5x_1+2x_2+ax_3=5. \end{cases}$

РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 4,5. Вектори. Лінійні операції над векторами. Розклад вектора по базису. Скалярний, векторний та мішаний добутки.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Написати розклад вектора $\overline{x}=(2;5;0)$ у базисі $\overline{e_1}=(1;2;-1)$, $\overline{e_2}=(3;6;1)$, $\overline{e_3}=(3;9;3)$.

Розв'язання

Використаємо формулу розкладу вектора за базисом

$$\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_1\overline{e_2}+...+x_n\overline{e_n}$$

$$x_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+x_2\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1=1, x_2=0, x_3\frac{1}{3}$.

Так, $\overline{x}=\overline{e_1}+\frac{1}{3}\overline{e_3}$ - розклад вектора $\overline{x}$ в базисі $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$.

Відповідь. $\overline{x}=\overline{e_1}+\frac{1}{3}\overline{e_3}$

Приклад 2. Дано три точки *A* (1, 1, 1), *B* (2, 2, 1) і *C* (2, 1, 2). Знайти кут φ = ∠ *BAC*.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(1;0;1)$. Згідно з формулою кута між векторами маємо:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}, \text{ отже, } \varphi = 60°.$$

Приклад 3. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2};\ \ |\vec{q}|=3\ \ i\ \ \widehat{\vec{p}\vec{q}}=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=6\vec{p}-\vec{q}$, а друга $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=4\vec{p}+5\vec{q}$. Довжина довільного вектора визначається за формулою: $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a}\,\vec{a})}$. Тоді:

$$|d_1|=\sqrt{(6\vec{p}-\vec{q})^2}=\sqrt{36(\vec{p})^2-12\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}^2}=$$

$$=\sqrt{36\left(2\sqrt{2}\right)^2-12\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cos\frac{\pi}{4}+9}=15;$$

$$\left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{\left(4\vec{p}+5\vec{q}\right)^2} = \sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p}\cdot\vec{q} + 25\vec{q}^2} =$$

$$= \sqrt{16\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{4} + 25\cdot 9} = \sqrt{593}.$$

Приклад 4. Знайти площу і висоту BD трикутника, вершинами якого є: $A(1;-2;8)$; $B(0;0;4)$; $C(6;2;0)$.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-4)$ і $\overrightarrow{AC} = (5;4;-8)$. Модуль їх векторного добутку буде дорівнювати подвоєній площі трикутника:
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}$; звідки $s = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 7\sqrt{5}$.

Знайдемо висоту трикутника: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{105}$; $h = \frac{2s}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$.

Приклад 5. Для піраміди з вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$ обчислити об'єм, площу грані ABC і висоту, опущену на цю грань.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AO} = (-5;-2;0)$; $\overrightarrow{AB} = (-3;3;0)$; $\overrightarrow{AC} = (-4;0;4)$. Модуль мішаного добутку $\left|\left(\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\right| = = \left\|\begin{matrix} -5 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{matrix}\right\| = 84$ у шість разів більший за об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, тобто $V_{\text{пір}} = 14$ куб.од. Для обчислення площі грані ABC знайдемо $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{matrix}\right\| = 12\sqrt{3}$. Тоді $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$, а висота піраміди $h = \frac{3V}{S} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Задачі

1. Визначити відстань точки $A(12;-3;4)$ від початку координат і від осей координат.

2. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

3. Знайти $3\vec{m}^2-2(\vec{m}\vec{n})+4\vec{n}^2$, якщо $|m|=\frac{1}{3}$; $|\vec{n}|=b$; $\left(mn\right)=\frac{\pi}{3}$.

4. Знайти $|\vec{a}\,|$, якщо $\vec{a}=2\vec{m}-4\vec{n}$; $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1\,\left(\widehat{mn}\right)=\frac{\pi}{2}$.

5. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$; $\vec{в}=\vec{m}-3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=5$; $|n|=1$ і $\left(\widehat{mn}\right)=30^\circ$.

6. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

7. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3;-2)$, $N(1;6)$, $P(-4;2)$.

Відповідь. $A(-2;-6)$, $B(8;2)$, $C(-6;10)$.

8. Дані координати вершин піраміди $A_1(1;2;3)$, $A_2(2;0;0)$, $A_3(3;2;5)$, $A_4(4;0;0)$. Треба знайти: а) довжину ребра A_1A_2 та A_1A_4; б)кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4; в) площу грані $A_1A_2A_3$

9. Чи знаходяться точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$ в одній площині?

10. Дано піраміду з вершинами $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$ і $D(2;3;8)$. Обчислити її об'єм і висоту, опущену на грань ABC.

11. Обчислити висоту AD і площу трикутника з вершинами в точках $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ і $C(4;5;-2)$.

РОЗДІЛ III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 6. Рівняння прямої на площині.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-5;4)$ і $B(3;-2)$.

Розв'язання

Використаємо рівняння $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$\dfrac{x+5}{3+5}=\dfrac{y-4}{-2-4}, \dfrac{x+5}{8}=\dfrac{y-4}{-6}\Bigg| \cdot(-24), -3(x+5)=4(y-4), -3x-4y-7=0$

Отже, $3x-4y-7=0$ - шукане рівняння.

Відповідь. $3x-4y-7=0$

Приклад 2. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок A $(-2, 3)$, B $(0, 3)$, C $(5, 6)$, належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Розв'язання

Для перевірки того, чи лежать точки *A, B, C* на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

A: $3(-2)-5\cdot 3+15\neq 0$, B: $3\cdot 0-3\cdot 5+15=0$, C: $3\cdot 5-5\cdot 6+15=0$.

Таким чином, точка A не лежить на прямій, а точки B і C лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при y: $\dfrac{3}{5}x-y+3=0$, а далі запишемо його у вигляді $y=\dfrac{3}{5}x+3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$\dfrac{3x}{15}-\dfrac{5y}{15}+1=0$, або $\dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{3}=1$,

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад 3. Дано трикутник $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. Знайти відстань від вершини B до медіани, що проходить через точку A.

Розв'язання

Знайдемо координати основи медіани: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{7-13}{2}=-3$. Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки: $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y-2}{-3-2}$, або $5x+3y-11=0$. Відстань від точки

$B(3;7)$ до медіани знайдемо за формулою: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5\cdot 3+3\cdot 7-11|}{\sqrt{25+9}}=\frac{25}{\sqrt{34}}$.

Приклад 4. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x+7y-6=0$ і $5x-5y+1=0$.

Розв'язання

Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x,\ y)$ — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}$. Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x+7y-6=5x-5y+1$ і $x+7y-6=-5x+5y+1$, або, після перетворень: $4x-12y+7=0$, $6x+2y-5=0$.

Приклад 5. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x+7y-6=0$ і $5x-5y+1=0$.

Розв'язання

Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x,\ y)$ — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}.$$

Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x+7y-6=5x-5y+1$ і $x+7y-6=-5x+5y+1$, або, після перетворень: $4x-12y+7=0$, $6x+2y-5=0$.

Задачі

1. Написати рівняння перпендикулярів до прямої $2x-5y-10=0$ в точках її перетину з осями системи координат.

2. У трикутнику з вершинами $A(-2;0)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$ проведені висота BD і медіана BM. Написати рівняння сторони AC, медіани BM і висоти BD.

3. Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і: 1) паралельна прямій $y=4x+3$; 2) перпендикулярна прямій $y=\frac{1}{2}x+1$; 3) утворює кут, що дорівнює 45°, з прямою $y=2x+5$; 4) нахилена під кутом в 60° до прямої $y=x-1$.

4. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: $x+3y=0$; $x=3$; $x-2y+3=0$.

5. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника — $y=3$ та $x-y+4=0$. Скласти рівняння третьої сторони, якщо вона проходить через початок системи координат.

6. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо $y=3x+5$ — рівняння гіпотенузи, а $C(4;-1)$ — вершина прямого кута.

7. Знайти точки перетину медіан і висот трикутника з вершинами в точках: $A(-4;2)$, $B(2;-5)$ і $C(5;0)$.

8. Написати рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$ і паралельні його сторонам.

9. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(3;5)$, $B(6;1)$ — його вершини, а $M(4;0)$ — точка перетину медіан.

10. Знайти відстані точок $A(4;3)$, $B(2;1)$, $C(1;0)$ від прямої $3x+4y-10=0$.

11. Знайти відстань між прямими $2x-3y-6=0$ і $4x-6y-25=0$.

12. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від початку координат і прямої $3x-4y+12=0$.

13. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точку $A(-2;1)$ на відстані 4 одиниць від точки $B(3;1)$.

14. Скласти рівняння прямої, паралельної прямим $4x-6y-3=0$ і $2x-3y+7=0$, що проходить посередині між ними.

15. Через початок системи координат і точку $(1;3)$ проходять дві паралельні прямі. Написати їх рівняння, якщо відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$ одиниць.

Тема 7. Рівняння площини. Пряма в просторі.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;1;1), (2;3;4), (4;3;1).

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Розкривши визначник, дістанемо

$$2(z-1)+9(y-1)-6(z-1)-6(x-1)=0$$

Отже, $-6x+9y-4z+1=0$ - шукане рівняння площини.

Відповідь. $-6x+9y-4z+1=0$.

Приклад 2. Знайти довжину висоти AH піраміди, заданої координатами своїх вершин:

$$A(-1;2;-1), B(1;0;2), C(0;1;-1), D(2;0;-1).$$

Розв'язання

Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A(-1;2;-1)$ до площини BCD.

Знайдемо рівняння площини BCD: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0$

Розкривши визначник, маємо $3x+6y+z-5=0$.

Знайдемо довжину висоти AH:

$$AH=\frac{\left|3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-5\right|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{46}}$$

Відповідь, $\frac{3}{\sqrt{46}}$

Приклад 3. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(1;-2;3)$, перпендикулярно до площини $2x+3y-z+8=0$

Розв'язання

Оскільки пряма l перпендикулярна до площини, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини: $\bar{s}=\bar{n}=(2;1;-1)$.

Тепер одержуємо рівняння прямої l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{x-3}{-1}$.

Відповідь, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{x-3}{-1}$

Приклад 4. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{1}.$$

Розв'язання

Знайдемо напрямний вектор шуканої прямої. Оскільки пряма лежить у площині *Oxz*, її напрямний вектор перпендикулярний до осі *Oy,* тобто $\vec{s}=(m,\ 0,\ p)$. З умови перпендикулярності маєм $3m+p=0$, отже, $m=1$, $p=-3$. Шукане рівняння має вигляд: $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$.

Задачі

1. Обчислити висоту піраміди, опущену з вершини S, якщо $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

2. Обчислити відстань між площинами $11x-2y-10z+15=0$ і $11x-2y-10z-45=0$.

3. Через лінію перетину площин $4x-y+3z-1=0$ і $x+5y-z+12=0$ провести площину, що: 1) проходить через точку $(1;1;1)$, 2) паралельна осі *OY*, 3) перпендикулярна до площини $2x-y+5z-3=0$.

4. Перевірити, чи лежать точки $(3;0;1)$, $(0;2;4)$, $\left(1;\frac{4}{3};3\right)$ на одній прямій.

5. Визначити кут між прямими $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ і $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$.

6. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої

$$\begin{cases}2x-3y-3z-9=0;\\ x-2y+z+3=0.\end{cases}$$

7. Через точку $(2;-5;3)$ провести пряму:

1) паралельно прямій $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$;

2) паралельно прямій $\begin{cases}2x-y+3z-1=0;\\ 5x+4y-z-7=0.\end{cases}$

8. У площині *Oxz* знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

9. Чи перетинаються прямі:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{5}$ і $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$;

2) $\begin{cases}4x+z-1=0;\\ x-2y+3=0\end{cases}$ і $\begin{cases}3x+y-z+4=0;\\ y+2z-8=0.\end{cases}$

10. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ і точку $(3;4;0)$.

11. Знайти проекцію точки $(2;3;4)$ на пряму $x=y=z$.

12. Через пряму $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+4y-3z+7=0$.

13. Через точку $(2;-5;3)$ провести пряму, паралельну прямій

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$$

14. З усіх прямих, що перетинають дві прямі:

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-10}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$,

знайти ту, яка паралельна прямій $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$.

15. Визначити кут між двома прямими

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 4x+y-6z=2 \\ y-3z=-2. \end{cases}$$

Практичне заняття 8. Рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння кола з центром у точці (5; -7), що проходить через точку (2; -3).

Розв'язання

Знайдемо радіус кола як відстань між двома точками:

$$d = R^2 = (2-5)^2 + (-3+7)^2 = 25$$

Отже, $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25$ - шукане рівняння кола.

Відповідь, $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку $M(5;0)$, якіцо фокальна відстань дорівнює 6.

Розв'язання

$|F_1F_2| = 2c = 6, c = 6:2 = 3$. Точка $M(5;0)$ належить еліпсу, тому

$\frac{25}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1, a^2 = 25, a^2 - c^2 = b^2, b^2 = 25 - 9 = 16$

Отже, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ - шукане рівняння.

Відповідь, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Приклад 3. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x = -3\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;

3) ексцентриситет дорівнює ε = 2, а уявна піввісь b = 3;

4) асимптоти задано рівнянням $y = \pm\frac{5}{3}x$.

Розв'язання

1) Координати фокусів F_1 (– c; 0); F_2 (c; 0), тому з умови 2c = 8; c = 4, відстань між директрисами $6 = \frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon = \frac{c}{a}$ маємо: a^2 = 12, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 12 = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\dfrac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то a = b. Отже, з урахуванням формули $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і a = 6; b = 6. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\dfrac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{3}$, або $b=\dfrac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\quad a^2=\frac{171}{25},\quad b^2=19.$$

Отже, $\dfrac{25x^2}{171}-\dfrac{y^2}{19}=1$.

Приклад 4. Скласти рівняння параболи, що має фокус $F=(0;-3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Oy.

Розв'язання

Оскільки фокус знаходиться у нижній півплощині, то й парабола, що міститься у нижній півплощині, симетрична відносно осі Oy. Її рівняння $x^2=-2py$. Фокус має координати $F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right)$. За умовою $-\dfrac{p}{2}=-3 \;\Rightarrow\; p=6$. Отже, рівняння параболи $x^2=-12y$.

Задачі

1. Знайти рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів AB: $A(1;4)$, $B(-3;2)$.

2. Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки: $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.

3. Визначте центр і радіус кола, що задане рівнянням: $x^2+y^2-8x+6y+21=0$.

4. Звести до канонічного вигляду рівняння кіл:

1) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$;

5. Скласти рівняння кола, що торкається осі OY у точці $A(0; -3)$ і має радіус $R = 2$.

6. Задано еліпс. Знайти: 1) його півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис; 5) побудувати його.

а) $4x^2 + 9y^2 = 25$; б) $x^2 + 15y^2 = 15$.

7. Дано рівняння еліпса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Обчислити довжини осей, координати фокусів та його ексцентриситет.

8. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що:

1) півосі його дорівнюють 4 і 2 одиницям;
2) відстань між фокусами дорівнює 6, а велика піввісь — 5 одиницям;
3) велика піввісь дорівнює 10 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;
4) мала піввісь дорівнює 3 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) сума півосей дорівнює 8, а відстань між фокусами — також 8 одиницям.

9. Задано гіперболу. Знайти: 1) півосі a та b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис; 6) побудувати гіперболу.

а) $9x^2 - 64y^2 = 1$; б) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

10. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{1}{2}x$ і одну з точок на гіперболі $M\left(12; 3\sqrt{3}\right)$, скласти рівняння гіперболи.

11. Написати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, а її фокуси знаходяться в вершинах цього еліпса.

12. Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює 2.

13. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює: 1) 60°, 2) 90°.

14. Через точку $A(2;1)$ провести таку хорду параболи $y^2 = 4x$, яка поділялася б цією точкою навпіл.

15. Через точку $P(5; -7)$ провести дотичну до параболи $y^2 = 8x$.

16. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 9,10. Знаходження простих границь. Знаходження границь з використанням важливих границь. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції, їх застосування при обчисленні границь.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{9-x^2}{x-1}=\frac{9-2^2}{2-1}=5$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6,$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_1=3; x_2=2$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=(4+4)(\sqrt{4}+2)=8\cdot 4=32$$

Приклад 4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cos 2x}{7x}=$$

$$=\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{5}{7}\cos 0=\frac{5}{7}$$

Приклад 5. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{2x}=\lim_{\frac{3}{4x}\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{\frac{4x\cdot 3}{3\cdot 4x}\cdot 2x}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Приклад 8. Н.м.в. $\alpha(x)=x$ та $\beta(x)=\sin 2x$ є н.м.в. *одного порядку мализни* при $x\to 0$, бо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Приклад 9. Н.м.в. $\alpha(x)=x^n\ (n>1)$ є вищого порядку мализни порівняно з н.м.в. $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0.$$

Задачі

1. Знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. 16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

19. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha^n}{(\sin\alpha)^m}$; $m, n\in N$. 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. 24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$. 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

2. Задана функція $y=x^3$.

а) Показати, що Δy та Δx при $x\to 0\ (x\neq 0)$ є н.м.в. одного порядку мализни.

б) Перевірити, що при x = 0 змінна величина Δy є н.м.в. вищого порядку мализни, ніж н.м.в. Δx.

в) При якому значенні x прирости Δx та Δy будуть еквівалентними н.м.в?

Тема 11. Дослідження функцій на неперервність. Класифікація точок розриву.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Довести неперервність функції $y=\dfrac{x^2+9}{x^2-x}$ в точці $x=3$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x^2-x}=\frac{9+9}{9-3}=3;\ f(3)=\frac{3^2+9}{3^2-3}=3$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$, то задана функція неперервна в точці $x=3$, що і треба було довести.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x, x\le 1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$

Розв'язання

1. Точка $x_0=1$ є "підозрілою" на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку $(-\infty;1]$ маємо $y=x$, на проміжку $(1,+\infty)$ - іншу залежність: $y=x+1$).
2. Функція неперервна на проміжку $(-\infty;1)$ і $(1;+\infty)$.
3. Знаходимо $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=2$.
4. $1\ne 2$, тому за означенням функція $y=\begin{cases} x, x\le 1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$- має в точці $x=1$ неусувний розрив 1-го роду.

Приклад 3. Показати, що при $x=4$ функція $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ має розрив.

Якщо $x\to 4-0$, то $\dfrac{1}{x-4}\to -\infty,\ \lim\limits_{x\to 4-0} y=-\dfrac{\pi}{2}$. Якщо $x\to 4+0$, то $\dfrac{1}{x-4}\to +\infty,\ \lim\limits_{x\to 4+0} y=\dfrac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x\to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x=4$ є точкою розриву 1-го роду.

Задачі

1. Дослідити на неперервність функції, схематично побудувати їх графіки:

1. $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$.
2. $f(x)=\lg\left(x^2+3x\right)$.
3. $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$.
4. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$.

5. $f(x)=\ln(2x+1)$. 6. $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

2. Знайти точки розриву функції $y=1/\left((x-1)(x-5)\right)$.

3. Який характер розриву функції $y=1/\left(1-e^{1-x}\right)$ в точці $x = 1$?

4. Розрив якого роду мають нижченаведені функції? Побудувати їх графіки.

1. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. 2. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

3. $y=\dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$. 4. $y=1-2^{\frac{1}{\sin x}}$.

5. $y=\dfrac{1}{1-2^{\cos x}}$. 6. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

5. Дослідити на неперервність, визначити характер точок розриву, побудувати графіки функцій:

1. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2 \text{ при } x\le 2;\\ x \text{ при } x>2.\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} \text{ при } 0\le x\le 1;\\ 4-2x \text{ при } 1<x<2{,}5;\\ 2x-7 \text{ при } 2{,}5\le x<\infty.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2x+5 \text{ при } x\le -1;\\ \dfrac{1}{x} \text{ при } x>-1.\end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases}x^2 \text{ при } 0\le x\le 1;\\ 2-x \text{ при } 1<x\le 2.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}0{,}5x^2 \text{ при } |x|<2,\\ 2{,}5 \text{ при } |x|=2,\\ 3 \text{ при } |x|>2.\end{cases}$ 6. $y=\begin{cases}x^2+1, \text{ якщо } x>1,\\ x+1, \text{ якщо } x<1,\\ 3, \text{ якщо } x=1.\end{cases}$

Тема 12. Диференціювання найпростіших, раціональних та ірраціональних функцій. Похідна добутку, частки двох функцій.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функцій а) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$; б) $y = x^2$ в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Розв'язання

а) надамо x приросту Δx, тоді y набуде приросту Δy:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left(2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4\right) -$$

$$-\left(2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

За означенням похідної маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7\right) = 6x^2 + 10x - 7;$$

б) надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

За означенням похідної маємо:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(3) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад 2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання.

1. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ - рівняння шуканої дотичної.

2. $y_0 = 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$.

$$f'(x_0) = f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 4(1+\Delta x) - 1 + 4}{\Delta x} =$$

3. $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 - 4\Delta x - 1 + 4}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-2 + \Delta x)}{\Delta x} = -2.$$

Підставляємо значення $x_0 = 1, y_0 = -3, f'(x_0) = -2$ у рівняння дотичної:

$y + 3 = -2(x - 1)$, або $y = -3 - 2x + 2$, або $y = -1 - 2x$.

Приклад 3. Який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Знаходимо похідну $y'=\frac{10}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$, $y'=3$, таким чином $\text{tg}\alpha=3$, звідки $\alpha=\text{arctg}3\approx 71^\circ 34'$.

Приклад 4. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

а) $f(x)=x^3-x^2+x-4$;

б) $y=\sqrt[3]{x^5}$;

в) $y=x^2\cdot\cos x$;

г) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$;

д) $y=x\sqrt{x}\left(3\ln x-2\right)$.

Розв'язання

а) $f'(x)=(x^3-x^2+x-4)'=(x^3)'-(x^2)'+(x)'-4'=$
$=3x^2-2x+1+0=3x^2-2x+1$;

б) задана функція є степеневою, що стає очевидним, коли записати її у вигляді $y=x^{\frac{5}{3}}$. Застосовуючи правило диференціювання степеневої функції, знаходимо:

$$y'=(x^{\frac{5}{3}})'=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2};$$

в) задана функція y є добутком двох функцій $y=u\cdot v$, де $u=x^2$, $v=\cos x$. Отже, застосовуємо правило диференціювання добутку функцій:

$$y'=(x^2\cdot\cos x)'=(x^2)'\cdot\cos x+x^2\cdot(\cos x)'=2x\cdot\cos x+x^2\cdot(-\sin x)=$$
$$=2x\cdot\cos x-x^2\cdot\sin x=x(2\cos x-x\cdot\sin x);$$

г) $y'=\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^3)'(x^2+1)-x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}==\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$.

д) $y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln x-2\right)\right)'=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{x}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\left(3\ln x-2\right)=$

$$=3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x-3x^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

Задачі

1. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функцій:

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ при $x = 1$; $\Delta x = 0,1$;

2) $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 2$; $\Delta x = 0,01$;

2. Використовуючи означення похідної як $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, знайти похідні функцій:

1) $x = 3x^2 - 4x$; 2) $y = \cos 3x$;

3) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 4) $y = \sqrt{4x+1}$;

4. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$:

1) в точці $x = 2$;

2) в точці перетину з віссю *OY*.

5. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. $y = 3x^4 - \dfrac{4}{x} + 2\,arctg\, x$;
2. $y = \dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$
3. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$.
4. $y = 2^{3x} / 3^{2x}$.
5. $y = \dfrac{\ln x}{4x}$.

Тема 13. Диференціювання складної, параметрично заданої функції. Диференціювання оберненої, неявно заданої функції.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=(3x^3-1)^5$.

Розв'язання

$y=(3x^3-1)^5$ - складена функція $y=u^5$, де $u=3x^3-1$, тоді $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, $y'=(u^5)'\cdot(3x^3-1)'=5u^4\cdot 9x=5(3x^3-1)^4\cdot 9x=45x(3x^3-1)^4$.

При обчисленні похідної складеної функції явне введення допоміжної букви и для позначення проміжного аргументу не є обов'язковим. Тому похідну даної функції знаходять відразу як добуток похідної степеневої функції u^5 на похідну від функції $3x^3-1$;

$$y'=((3x^3-1)^5)'=5(3x^3-1)^4\cdot(3x^3-1)'=5\cdot(3x^3-1)^4\cdot 9x=45x(3x^3-1)^4.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=1-\sqrt{t} \end{cases}$

Розв'язання

Використаємо формулу $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t=-\frac{1}{2\sqrt{t}},\ x'_t=-2t,\ y'_x=\frac{-1}{2\sqrt{t}(-2t)}=\frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції y, задані неявно рівнянням $xy+\sin y=0$.

Розв'язання

$$\left(xy+\sin y\right)'=0'$$

$$y+xy'+y'\cos y=0$$

$$x'y+xy'+(\sin y)'=0$$

$$y'(x+\cos y)=-y$$

Отже, $y'=\dfrac{-y}{x+\cos y}$.

Приклад 4. Знайти похідні функцій:

а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

б) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$;

в) $y=x^{x^2}$;

г) $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Розв'язання:

а) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

б) $y'=\operatorname{tg}\sqrt{x}\,\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}-1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}^3\sqrt{x}$$

в) логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y=x^2\ln x$. Звідки: $(\ln y)'=\dfrac{1}{y}\cdot y'$,

$\dfrac{y'}{y}=x^2\cdot\dfrac{1}{x}+2x\ln x,\quad \dfrac{y'}{y}=x(1+2\ln x)$,

г) логарифмуючи функцію, маємо: $\ln y=\operatorname{tg}x\ln\sin x,\quad \dfrac{y'}{y}=\operatorname{tg}x\dfrac{1}{\sin x}\cos x+$

$$+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x=1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x,$$

$$y'=y\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right)=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

Задачі

1. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$. 2. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

3. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$. 4. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\sin x)+\ln\cos(\sin x)$.

5. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$. 6. $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$

7. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$ 8. $y=\sin\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

9. $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$. 10. $y=x^5\sqrt[3]{x^6-8}$.

11. $y=e^{-x^2}\ln x$ 12. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

2. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ 2. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

3. $x^3+y^3-3axy=0$. 4. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

5. $y^3-3y+2ax=0$. 6. $y^2-2xy+b^2=0$.

7. $x^4+y^4=x^2y^2$. 8. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$.

9. $2y\ln y=x$. 10. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

11. $x^y=y^x$. 12. $y=\cos(x+y)$.

13. $\cos(xy)=x$. 14. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

3. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1. $x=a\cos\varphi$; $y=b\sin\varphi$.

2. $x=a\cos^3\varphi$; $y=b\sin^3\varphi$.

3. $x=a(\varphi-\sin\varphi)$; $y=a(1-\cos\varphi)$.

4. $x=1-t^2$; $y=t-t^3$.

5. $x=\frac{t+1}{t}$; $y=\frac{t-1}{t}$.

6. $x=\ln(1+t^2)$; $y=t-\operatorname{arctg}t$.

7. $x=\varphi(1-\sin\varphi)$; $y=\varphi\cos\varphi$.

8. $x=\frac{1+t^2}{t^2-1}$; $y=\frac{t}{t^2-1}$.

9. $x=e^t\sin t$; $y=e^t\cos t$.

4. Знайти похідні функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання:

1. $y=x^{x^2}$. 2. $y=x^{x^x}$.

3. $y=(\sin x)^{\cos x}$. 4. $y=(\ln x)^x$.

5. $y=\sqrt[x]{(x+1)^2}$. 6. $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$.

7. $y=\frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$. 8. $y=x^{\ln x}$.

Тема 14. Диференціал. Похідні вищих порядків.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \mathrm{tg}\left(3x+1\right)$.

Оскільки $y' = 2x\mathrm{tg}\left(3x+1\right) + \dfrac{3x^2}{\cos^2\left(3x+1\right)}$, то за формулою диференціала функції дістанемо

$$dy = \left(2x\mathrm{tg}\left(3x+1\right) + \frac{3x^2}{\cos^2\left(3x+1\right)}\right)dx\,.$$

Приклад 2. Знайти похідну 3-го порядку функції $y = 3x^2 - 2x + 1$.

Розв'язання

$$y' = \left(3x^2 - 2x + 1\right)' = 3\cdot 2x - 2\cdot 1 + 0 = 6x - 2$$

$$y^n = \left(6x-2\right)' 6\cdot 1 - 0 = 6 \qquad y^m = \left(6\right)' = 0$$

Приклад 3. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \dfrac{1}{2}x + 7$. Знайти $y', y'', y''', \dots$.

Розв'язання

Маємо:

$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \dfrac{1}{2}$, $y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$, $y''' = 60x^2 + 48x - 18$,
$y^{(4)} = 120x + 48$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = ... = 0$.

Приклад 4. Знайти диференціал 3-го порядку функції $y = x^3 + e^{-2x}$

Розв'язання

Диференціал 3-го порядку функції знайдемо за формулою $d^3y = y^{(3)}dx^3$

$$y'\left(x^3 + e^{-2x}\right)' = 3x^2 + e^{-2x}\left(-2x\right)' = 3x^2 - 2e^{-2x}$$

$$y^n = \left(3x^2 - 2e^{-2x}\right)' = 6x + 4e^{-2x}, y^m = \left(6x + 4e^{-2x}\right)' = 6 - 8e^{-2x}$$

Отже, $d^3y = \left(6 - 8e^{-2x}\right)dx^3$.

Приклад 4. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1,012}$.

Розв'язання

Використаємо рівність $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

$$x_0 = 1, \Delta x = 0,012,\ f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'\left(x\right) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}},\ f\left(x_0\right) = f(1) = 1,\ f'\left(x_0\right) = f'(1) = \frac{1}{3}$$

Отже, $\sqrt[3]{1,012} \approx 1 + \dfrac{1}{3}\cdot 0,012 \approx 1,004$.

Задачі

1. Знайти диференціали функцій:

1. $y=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2-\sqrt{x}\right)$. 2. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$.

3. $x=\dfrac{1}{1-t^2}$. 4. $y=\left(1+x-x^2\right)^3$.

5. $\mathrm{y}=\mathrm{tg}^2 x$. 6. $y=5^{\ln \mathrm{tg}\, x}$.

7. $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$. 8. $y=\ln \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)$.

2. Знайти похідні вищих порядків:

1. $y=x^2-3x+2$; $y''=?$
2. $y=1-x^2-x^4$; $y'''=?$
3. $f(x)=(x+10)^6$; $f'''(2)=?$
4. $f(x)=x^6-4x^3+4$; $f^{\mathrm{IV}}(1)=?$
5. $y=\left(x^2+1\right)^3$; $y''=?$
6. $y=\cos^2 x$; $y'''=?$
7. $f(x)=e^{2x-1}$; $f''(0)=?$
8. $f(x)=\mathrm{arctg}\, x$; $f''(1)=?$

3. Знайти наближено, використовуючи рівність $\Delta y \approx dy$:

1. $\mathrm{arctg}\, 1{,}02$. 2. $\mathrm{arctg}\, 0{,}97$.

3. $\sin 48^\circ$. 4. $\cos 63^\circ$.

5. $\mathrm{tg}\, 48^\circ$. 6. $\mathrm{ctg}\, 27^\circ$.

7. $\sqrt[3]{68}$. 8. $\sqrt[5]{240}$.

4. Обчислити Δy та dy для функції $y=x^2-2x$ при $x=3$ та $\Delta x=0{,}01$.

Тема 15. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Розв'язання

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Розв'язання

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Розв'язання

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Розв'язання

Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через *y*, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1.$

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання

При $x\to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}},\quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1};\quad \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Задачі

1. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^{3}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{m}-a^{m}}{x^{n}-a^{n}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{c^{x}-d^{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{2}}-1}{\cos x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x\sqrt{1-x^{2}}}$.

14. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^{x}-e^{a}\right)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{x}}{\operatorname{tg} x-x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\dfrac{x^{3}}{6}-\dfrac{x^{2}}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^{2}}{2}-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{3}}-1-x^{3}}{\sin^{6}2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)^{4}-4x+2x^{2}-\dfrac{4}{3}x^{3}+x^{4}}{6\sin x-6x+x^{3}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1-x\right)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

23. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^{n}e^{-x}\right)$.

Тема 16. Дослідження функцій на монотонність, екстремум. Найбільше та найменше значення функції на сегменті.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0$ $\left(f'(x)=0\right)$. Звідки $x_1=1,\quad x_2=3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty,\ +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty,\ 1)$, (1, 3), (3, $+\infty$).

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x=0\in(-\infty,1),\quad y'(0)=3>0;$$

$$x=2\in(1,3),\quad y'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1<0;$$

$$x=4\in(3,+\infty),\quad y'(4)=4^2-4\cdot 4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення x = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}.$$

Табл. 1

x	(– ∞, 1)	1	(1, 3)	3	(3, + ∞)
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$	$\searrow$	$y_{\min}(3)=1$	$\nearrow$

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$$

На інтервалі:

1) $(-\infty,\ 1)$ — функція зростає;

2) (1, 3) — спадає;

3) $(3,\ +\infty)$ — зростає.

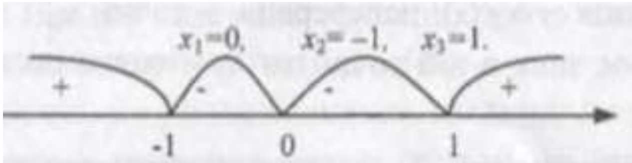
Крім того,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right) = \pm\infty .$$

Приклад 2. Дослідити функцію $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ на зростання (спадання) та екстремуми.

Розв'язання

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$$

1. $D(f):(-\infty;+\infty)$;
2. $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$
3. $f'(x) = 0, 15x^4 - 15x^2 = 0, x^2(x^2 - 1) = 0$
4. 

5. $f(x)$ зростає при $x \in (-\infty;-1);(1;\infty)$; $f(x)$ спадає при $x \in (-1;1)$

$x_{\max} = -1, y_{\max} = f(-1) = 3\cdot(-1)^5 - 5(-1)^3 + 1 = -3 + 5 + 1 = 3$

$x_{\min} = 1, y_{\min} = f(1) = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 + 1 = -1$

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$ при $x \in [1;3]$.

Розв'язання

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2,\ x \in [1;3]$$

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
2. $f'(x) = 0,\ 3x^2 + 6x - 24 = 0,\ x^2 + 2x - 12 = 0$

$$x_1 = -4, x_2 = 2$$

3. $x_1 = -4 \notin [1;3]$
4. $f(1) = 2, f(2) = -6, f(3) = 4$
5. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4$ $\qquad \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

Відповідь, $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4$ $\qquad \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

Задачі

1. Знайти інтервали монотонності таких функцій:

1. $y = x^2(a - x)^2$.
2. $y = x + \dfrac{a^2}{x}; (a > 0)$.
3. $y = x\sqrt{2 - x^2}$.
4. $y = (x-2)^5(2x+1)^4$.

5. $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2};(a>0)$. 6. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

7. $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$. 8. $y=x-e^x$.

9. $y=x^2e^{-x}$. 10. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

2. Визначити екстремуми функцій:

1. $y=2x^3-3x^2$. 2. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

3. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. 4. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$.

5. $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^4+4x^3+30\right)}$. 6. $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$.

7. $y=x-\ln(1+x)$. 8. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

9. $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$. 10. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

1. $y=x^4-2x^2+5;\ [-2;2]$. 2. $y=x+2\sqrt{x};\ [0;4]$.

3. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;[-1;2]$. 4. $y=x^3-3x^2+6x-2;[-1;1]$.

5. $y=\sqrt{100-x^2};\ [-6;8]$. 6. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ [0;1]$.

7. $y=\dfrac{x-1}{x+1};[0;4]$.

8. $y=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x};\ (0<x<1);\ (a>0;b>0)$.

9. $y=\sin 2x-x;\ \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. 10. $y=2\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x;\ \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Тема 17. Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти графіка.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y=e^{-x^2}$.

Маємо $y'=-2xe^{-x^2}$, $\quad y''=4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2-\frac{1}{2}=0,\ \text{звідки}\ x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо в табл. 2.

Табл. 2

x	$\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

Приклад 2. Визначити асимптоти кривої $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm0} y=\lim_{x\to\pm0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ є похилою асимптотою.

Приклад 3. Знайти асимптоти функції $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Розв'язання

1. Знайдемо одну із односторонніх границь функції в точці $x-1$:

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x-1}{x+1}=\left[\frac{-}{+0}\right]=-\infty$$

$x-1$ - точка розриву другого роду заданої функцій

Отже, $x-1$ - *вертикальна* асимптота.

2. Знайдемо похилу асимптоту $y=kx+b$, використавши формули

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x+1)x}=0, b=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$$

Оскільки $k=0$, то $y=1$ - *горизонтальна* асимптота.

Задачі

1. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

1. $y=x^3-5x^2+3x-5$. 2. $y=\left(x+1\right)^4+e^x$.

3. $y=x^4-12x^3+48x^2-50$. 4. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

5. $y=3x^5-5x^4+3x-2$. 6. $y=\left(x+2\right)^6+2x+2$.

7. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$; $\left(a>0\right)$. 8. $y=a\sqrt[3]{x-b}$.

9. $y=e^{\sin x}$; $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$. 10. $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

2. Знайти асимптоти таких ліній:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 2. $xy=a$.

3. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$. 4. $y=c+\dfrac{a^3}{\left(x-b\right)^2}$.

5. $2y\left(x+1\right)^2=x^3$. 6. $y^3=a^3-x^3$.

7. $y^3=6x^2+x^3$. 8. $y^2\left(x^2+1\right)=x^2\left(x^2-1\right)$.

9. $xy^2+x^2y=a^3$. 10. $y\left(x^2-3bx+2b^2\right)=x^3-3ax^2+a^3$.

Тема 18. Дослідження функції та побудова її графіка.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ \ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to1\pm0} y=\lim_{x\to1\pm0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}(x-1)^2}=+\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ \ 2x-1=0,\ \ x=\frac{1}{2},\ \ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x = 0$, $y=\frac{-1}{1}=-1,\ \ (0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 3:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3};\quad y'=0\Rightarrow$$

$-2x=0\Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

Табл.3

x	$(-\infty,\ 0)$	0	(0, 1)	1	$(1,\ +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	$\searrow$	$y_{\min}$ (–1)	$\nearrow$	Не існує	$\searrow$

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум: $y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1$.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$: при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0$ $(-)$;

при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0$ $(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 4.

Табл. 4

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$	1	$(1,\ +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

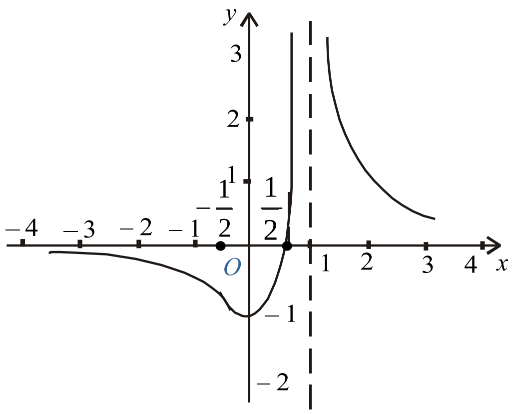
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на мал.1: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).



Мал.1

Задачі

1. Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки:

1. $y = \frac{x}{1+x^2}$.
2. $y = \frac{1}{1+x^2}$.
3. $y = \frac{x}{x^2-1}$.
4. $y(x-1)(x-2)(x-3) = 1$.
5. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.
6. $y = \left(x^2-1\right)^3$.
7. $y = 32x^2\left(x^2-1\right)^3$.
8. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
9. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
10. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

РОЗДІЛ VI. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Тема 19. Комплексні числа, дії над ними.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z=-2\sqrt{3}+2i$.

Розв'язання

$$z=-2\sqrt{3}+2i, |z=r|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$$

$$tg\varphi=\frac{2}{-2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \varphi\in 2 \text{ чверті, бо } a<0, b>0$$

$$\varphi=\pi-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6},\quad \arg z=\varphi=\frac{5\pi}{6}$$

Відповідь. 4, $\frac{5\pi}{6}$

Приклад 2. Для комплексних чисел $z_1=2+3i$ та $z_2=5-4i$ знайти суму, різницю, добуток та частку.

Розв'язування.

$$z_1+z_2=(2+3i)+(5-4i)=7-i;$$

$$z_1-z_2=(2+3i)-(5-4i)=-3+7i;$$

$$z_1z_2=(2+3i)(5-4i)=10-8i+15i-12i^2=22+7i;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2+3i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)}=\frac{10+8i+15i+12i^2}{25-16i^2}=\frac{-2+23i}{41}=-\frac{2}{41}+\frac{23}{41}i.$$

Приклад 3. Подати в тригонометричній формі число – 3 + 2i.

З формул $r=\sqrt{a^2+b^2}$ маємо:

$$r=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13},\ \text{tg}\varphi=\frac{2}{-3}\approx -0,6666...$$

Тангенс від'ємний, отже, кут φ треба шукати в II або IV чверті. Отримаємо, що при a = – 3 і b = 2 синус буде додатний, а косинус — від'ємний, тобто φ буде кутом II чверті.

Приклад 4. Піднести до куба число z = 2 (cos 20° + i sin 20°).

Матимемо:

$$z^3=8(\cos 3\cdot 20+i\sin 3\cdot 20)=8(\cos 60+\sin 60)=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4+4\sqrt{3}i.$$

Приклад 5. Нехай $z = x + iy$. Записати в алгебраїчній формі вираз

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{\bar{z}^2}.$$

Згідно з означеннями дій із комплексними числами маємо:

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{\bar{z}^2}=\frac{\bar{z}^2+z^2}{z^2\cdot\bar{z}^2}=\frac{(x-iy)^2+(x+iy)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-2xyi+x^2-y^2+2xyi}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$.

Числа $z_1=1+i\sqrt{3}$ і $z_2=1-i$ представимо у вигляді:

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}=\frac{2^{60}\left(\cos\frac{60\pi}{3}+i\sin\frac{60\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{60}\left(\cos\frac{60\pi}{4}-i\sin\frac{60\pi}{4}\right)}=2^{30}\,\frac{1+i\cdot 0}{-1+i\cdot 0}=-2^{30}$.

Задачі

1. Знайти модуль і аргумент таких комплексних чисел:

1) i; 2) -3;

3) $1+i^{123}$; 4) $\frac{1-i}{1+i}$;

5) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; 6) $(-4+3i)^3$;

7) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$; 8) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

2. Записати в тригонометричній та показниковій формах комплексні числа z_1 і z_2. Обчислити z_3, z_4.

1. $z_1=2-2i$, $z_2=-\sqrt{3}-i$, $z_3=z_1z_2$, $z_4=z_1^{\,2}+z_2^{\,2}$;

2. $z_1=2+2i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=\frac{z_1^{\,3}z_2}{2}$, $z_4=\overline{(z_1+z_2)}$;

3. $z_1=3+3i$, $z_2=1-\sqrt{3}\,i$, $z_3=\frac{z_2^{\,2}}{z_1}$, $z_4=z_1^{\,2}-z_2^{\,2}$.

3. Знайти всі розв’язки рівнянь:

1. $z^2 = i$;　　2. $z^2 = 3 - 4i$;

3. $z^8 = 1 + i$;　　4. $|z| - z = 1 + 2i$;

5. $\bar{z} = z^3$;　　6. $z^6 = 64$.

4. Спростити вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}$ $(x \in R)$.　　2) $\dfrac{z^2-iz-1}{2iz}$, якщо $z = e^{i\theta}$.

5. Знайти тригонометричну форму комплексного числа $z = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha$, де $-\pi < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$.

РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 20, 21. Безпосереднє інтегрування. Заміна змінної та інтегрування частинами.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (3x^3 + x - 2 + \frac{2}{x})dx$$

Розв'язання

$$\int (3x^3 + x - 2 + \frac{2}{x})dx = \int 3x^3 dx + \int x dx - \int 2dx + \int \frac{2dx}{x} =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln x + C.$$

Приклад 2.

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-5} = t, \\ x-5 = t^2, x = t^2+5 \\ dx = \left(t^2+5\right)dl = 2tdt \end{array} \right| = \int \left(t^2+5\right) \cdot t \cdot 2tdt =$$

$$= \int 2t^4 dt + \int 10t^2 dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 10\cdot\frac{t^3}{3} + c = \frac{2\left(\sqrt{x-5}\right)^5}{5} + \frac{10\left(\sqrt{x-5}\right)^3}{3} + c$$

Приклад 3.

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \qquad dv = \sin x dx \\ du = x'dx = dx, v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x - \int \left(-\cos x\right) dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Приклад 4.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}; \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Приклад 5.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; \\ dv = x dx; \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Приклад 6.

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x; & du = e^x dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x; & du = e^x dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx \right) =$$

$$= e \sin x + e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{I}.$$

Отже, маємо:

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I \quad \text{або} \quad 2I = e^x \sin x + e^x \cos x;$$

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

Задачі

1. Знайти інтеграли:

1. $\int (x+8)^{10} dx$.
2. $\int \sqrt{1-3x}\, dx$.
3. $\int e^{\frac{x}{2}} dx$.
4. $\int \frac{dx}{10x+3}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}$.
6. $\int \frac{dx}{3-2x}$.
7. $\int \cos \frac{x+3}{3} dx$.
8. $\int \frac{dx}{(5x+2)^2}$.
9. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$.
10. $\int \frac{x^2}{x+2} dx$.

2. Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

1. $\int e^{\sin x}\cos x dx$. 2. $\int \sin^2 x\cos x dx$.

3. $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}$. 4. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

5. $\int \left(3+7x^2\right)^5 x dx$. 6. $\int \frac{x^2 dx}{\left(4x^3+9\right)^4}$.

7. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$. 8. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

9. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^2 x}{1+x^2}dx$. 10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$.

3. Знайти інтеграли, використовуючи найпростіші методи інтегрування:

1. $\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 2. $\int \frac{x+\ln(x-2)}{x-2}dx$.

3. $\int \frac{x^2+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$. 4. $\int \frac{\sin^2 x+\cos x}{\sin x}dx$.

5. $\int \frac{\cos^3 x+\sin x}{\cos x}dx$. 6. $\int \frac{x^2-\ln(x+2)}{x+2}dx$.

4. Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

1. $\int x\sin x dx.$ 2. $\int xe^{-x}dx.$

3. $\int \arcsin x dx.$ 4. $\int x5^x dx.$

5. $\int x^2\ln(1+x)dx.$ 6. $\int x\cos^2 x dx.$

5. Методом підстановки знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$ 2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

3. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. 4. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$

5. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}.$ 6. $\int \frac{\ln x dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}$.

Тема 22. Інтегрування раціональних функцій.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$

Розв'язання

Розкладемо дріб на суму найпростіших:

$$\frac{6x^2-13x+4}{x\left(x^2-3x+2\right)}=\frac{6x^2-13x+4}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\Big| \quad x(x-1)(x-2)$$

$$6x^2-13x+4=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

$$6x^2-13x+4=Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-2Bx+Cx^2-Cx$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases}6=A+B+C\\ -13=-3A-2B-C,\\ 4=2A\end{cases}\begin{cases}B=3\\ C=1\\ A=2\end{cases}$$

$$\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx=2\ln|x|+3\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$$

Приклад 2. $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx=\left|\begin{array}{l} x^4+2x \,\Big|\, \frac{x^3+8}{x} \\ - \\ \frac{x^4+8x}{-6x} \end{array} \quad \frac{x^4+2x}{x^3+8}=x-\frac{6x}{x^3+8};\right.$

$$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x=x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C;$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+B\\ x^1 & 6=-2A+2B+C\\ x^0 & 0=4A+2C\end{array}\right\}\\ x=-2\Rightarrow -12=12A\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-1\\ B=1\\ C=2\end{array}\right|=\int\left(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\left|\begin{array}{l}x-1=t\\ dx=dt\\ x=t+1\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Задачі

1. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

2. $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}.$

3. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

4. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$

5. $\int\frac{xdx}{x^4-3x^2+2}.$

6. $\int\frac{x^4dx}{(x+2)\left(x^2-1\right)}.$

7. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

8. $\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx.$

9. $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx.$

10. $\int\frac{x^3-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx.$

11. $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}.$

12. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$

13. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}.$

14. $\int\frac{\left(x^2+1\right)dx}{(x-1)^3}.$

15. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$

16. $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}.$

17. $\int\frac{dx}{1+x^3}.$

18. $\int\frac{xdx}{x^3-1}.$

19. $\int\frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx.$

20. $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}.$

Тема 23, 24. Інтегрування деяких ірраціональних та тригонометричних функцій.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. $\int \cos 5x \cdot \cos 7x dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 12x\right)dx =$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 12x + C$$

Приклад 2. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Приклад 3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx =$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

Приклад 4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt = \int\left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C.$$

Приклад 5. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t, x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} =$

$$= 6\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 6t - 6arctgt + C = 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C$$

Приклад 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)3t^2dt}{t^2} = 3\int (t^3-1)dt =$

$$= \frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$$

Приклад 7.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^2, x+1 = t^2(x-1), \\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1}; dx = \frac{-4tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-1)^2 t(-4t)dt}{(t^2+1)^2(t^2-1)^2} =$$

$$= 2\int \frac{t\cdot(-2t)dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} u=t, du=dt; \\ \frac{-2tdt}{(t^2+1)^2} = dv \Rightarrow v = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{2t}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

Задачі

1. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int \sin^2 x\cos^3 xdx.$	2. $\int \sin^3 x\cos^3 xdx.$
3. $\int (1-\sin 2x)^2 dx.$	4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx.$
5. $\int \cos^7 xdx.$	6. $\int \cos^4 xdx.$
7. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx.$	8. $\int (1+2\cos x)^2 dx.$
9. $\int \cos^2 5xdx.$	10. $\int \sin^2 x\cos^2 xdx.$
11. $\int \sin^4 xdx.$	12. $\int \sin^5 xdx.$
13. $\int \sin^3 x\cos^5 xdx.$	14. $\int \cos^4 x\sin^3 xdx.$

15. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$

16. $\int \mathrm{tg}^2 5x dx.$

17. $\int \mathrm{ctg}^3 x dx.$

18. $\int (1+2\cos x)^3 dx.$

19. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

20. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

2. Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$

3. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$

4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

5. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

8. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$

10. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$

11. $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}.$

Тема 25. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами. Заміна змінної в означеному інтегралі.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.

$$\int_0^2 \left(5x^3+6\right)dx=\left(5\cdot\frac{x^4}{4}+6x\right)\Big|_0^2=\left(\frac{5\cdot 2^4}{4}+6\cdot 2\right)-0=32$$

Приклад 2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx=\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right)=\frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Bigg|_0^{\ln 2}=$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2}-1\right)^5-\left(e^0-1\right)^5\right)=\frac{1}{5}\left(\left(2-1\right)^5-\left(1-1\right)^5\right)=\frac{1}{5}.$$

Приклад 3. $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=e^{2x}dx \\ du=dx, & v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=$

$$=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^{2x}dx=0-(-1)\cdot\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{2x}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4e^{2x}}$$

Приклад 4. $\displaystyle\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{matrix} x=t^2,\ \ dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3\end{array}\end{matrix}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln\left|t+1\right|\right)\Bigg|_2^3=2\left(3-\ln 4-\left(2-\ln 3\right)\right)=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Приклад 5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x,\quad du=dx; \\ \cos 2xdx=dv, \\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right|=\left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0\cdot\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 6. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{ll} 1+\sqrt{2x+1}=t, & dx=(t-1)dt; \\ x=\dfrac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_2^4 \frac{t-1}{t}dt = \int\limits_2^4 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \left(t-\ln|t|\right)\Big|_2^4 = 4-\ln 4-\left(2-\ln 2\right) = 2-\ln 2.$$

Задачі

1. Використовуючи метод підстановки, обчислити такі визначені інтеграли:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x\cos x dx.$
2. $\int\limits_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}dx.$
3. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$
4. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$
5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$
6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx.$
7. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}.$
8. $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}.$

2. Інтегруванням частинами обчислити такі визначені інтеграли:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx.$
2. $\int\limits_1^{e-1} \ln(x+1)dx.$
3. $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx.$
4. $\int\limits_0^1 x^3 e^{2x}dx.$
5. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$
6. $\int\limits_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}}dx.$
7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$
8. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx.$

3. Застосовуючи різні методи інтегрування, обчислити такі визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^e \frac{2\ln x+1}{x}\, dx.$
2. $\int\limits_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$
3. $\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx.$
4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x dx.$
5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$
6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$
7. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$
8. $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$

Тема 26. Застосування визначеного інтегралу.

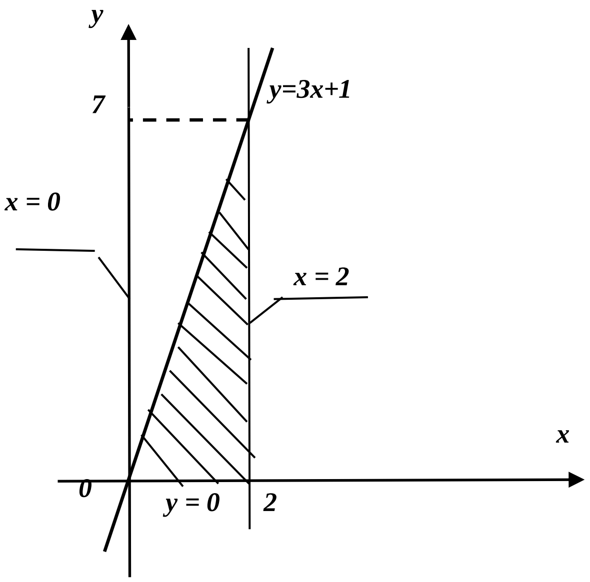
Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями

1. $y = 3x + 1, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$.

Розв'язання

Побудуємо дані лінії і визначимо фігуру, площу якої треба знайти.



Площа визначається за формулою $S = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$:

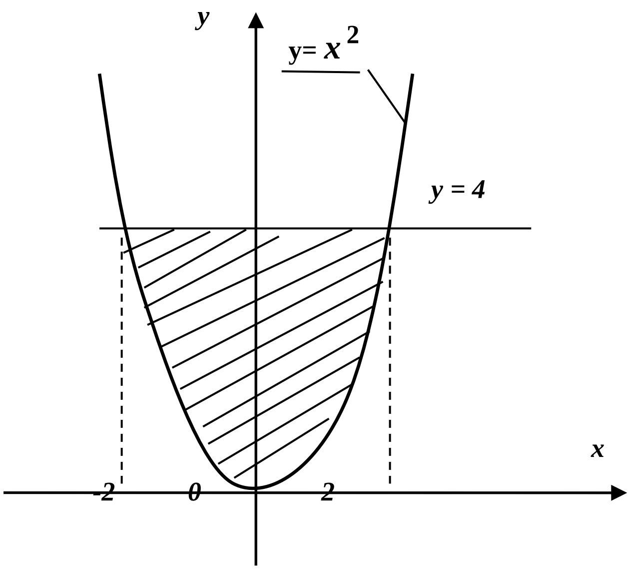
$$S = \int\limits_0^2 (3x+1)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} + x \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 = 8 \text{ кв. од.}$$

2. $y = x^2, \quad y = 4$.

Розв'язання

Фігура обмежена параболою $y = x^2$ і прямою $y = 4$.



Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину ліній $y = x^2$ та $y = 4$:

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$, звідки $x^2 = 4$, $x = \pm 2.$.

Як бачимо, фігура симетрична відносно осі Oy, тому обчислимо площу її правої половини, а загальний результат подвоємо.

Будемо мати: $S = 2\cdot\int_0^2 x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right) = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$ кв. од.

Приклад 2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від точки $x=0$ до $x=1$ ($y \ge 0$).

Розв'язання

Застосуємо формулу $L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$: $y = x^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

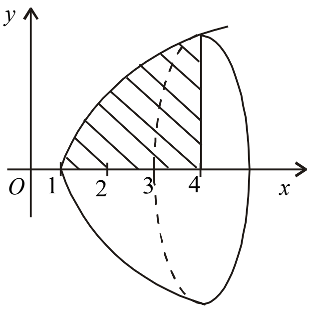
Тоді $dL = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$.

Отримаємо:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\frac{\left(1+{}^9\!/\!_4\,x\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - \sqrt{1^3}\right) =$$

$$= \frac{8}{24}\left(\frac{\sqrt{2197}}{8} - 1\right) = \frac{\sqrt{2197}}{27} - \frac{8}{27}.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x-3$, $x = 1$, $x = 4$.



У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями. За формулою $V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ об'єм тіла буде таким:

$$V = \pi\int_1^4 y^2dx = \pi\int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Bigg|_1^4 = \frac{27}{2}\pi.$$

Задачі

1. Знайти довжини дуг ліній, що задані рівняннями:

1. $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ від $x=1$ до $x=2$.

2. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ від $x=0$ до $x=2$.

3. $y^2 = 2x$ від $x=0$ до $x=1$.

4. $y = \ln x$ від $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$.

5. $y=\ln\left(1-x^2\right)$ від $x=0$ до $x=\frac{1}{2}$.

6. $y=2\sqrt{x}$ від $x=0$ до $x=1$.

2. За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

1. $y=1-x^2;\ y=x^2-7.$ 2. $4y=x^2;\ y^2=4x.$

3. $y=x^2+4x;\ y=x+4.$ 4. $y=e^x;\ y=e^{-x};\ x=1.$

5. $y=-x^2+9;\ y=2x+1.$ 6. $y=x^2;\ y=2-x^2.$

7. $y=x^2;\ y=2-x.$

8. $xy=9;\ y=6;\ x=3;\ x=0;\ y=0.$

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ 10. $y^2=2x+4;\ x=0.$

3. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням плоских фігур навколо координатних осей:

1. $y=\frac{4}{x},\ y=1,\ x=1,\ x=2,\ V_{ox}-?$

2. $y=x^2-4x,\ y=-x,\ V_{ox}-\ ?$

3. $xy=6,\ y=7-x,\ V_{oy}-\ ?$

Практичне заняття 27. Обчислення невласних інтегралів.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Згідно з формулою $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{a}^{B} f(x)dx$ матимемо:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \ln|x| \Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to+\infty} \left(\ln|B| - \ln 1\right) = \lim_{B\to+\infty} \ln|B| = +\infty .$$

Границя, нескінченна, отже інтеграл розбігається.

Приклад 2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1} dx$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1} dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} e^{-4x+1} dx = -\frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} e^{-4x+1} \Big|_{0}^{B} = -\frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} \left(e^{-4B+1} - e^{1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} e^{-4B+1} + \frac{1}{4} \lim_{B\to+\infty} e = -\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot e = \frac{e}{4}.$$

Границя скінченна, заданий інтеграл збігається.

Приклад 3. $\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2}$.

Згідно з формулою $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{b} f(x)dx$ будемо мати:

$$\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{(3x-1)} \Big|_{A}^{-5} = -\frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{\left(3\cdot(-5)-1\right)} +$$

$$+ \frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{3A-1} = \frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{3A-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{13} \cdot 0 = \frac{1}{48}.$$

Границя скінченна, інтеграл збігається.

Приклад 4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17}$.

Згідно з формулою $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx$ розіб'ємо наш невласний інтеграл на суму двох невласних інтегралів, а саме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+17} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+17} +$$

$$+ \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{x^2+2x+17}.$$

Обчислимо окремо невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+17} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot 1+1\right)-1+17} = \int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2+16} = \frac{1}{4}\cdot arctg\,\frac{x+1}{4}+C.$$

Повертаємось до границь:

$$\frac{1}{4}\lim_{A\to-\infty} arctg\,\frac{x+1}{4}\Bigg|_A^0 + \frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} arctg\,\frac{x+1}{4}\Bigg|_0^B = \frac{1}{4}\lim_{A\to-\infty}\left(arctg\,\frac{1}{4}-arctg\,\frac{A+1}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(arctg\,\frac{B+1}{4}-arctg\,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(arctg\,\frac{1}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-arctg\,\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

Границя скінченна, наш інтеграл збігається.

Зауваження. При обчисленні границь слід мати на увазі, що $arctg\left(+\infty\right)=\frac{\pi}{2}, arctg\left(-\infty\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Приклад 5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left\{x=0 - \text{особлива точка}\right\} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{x}\ \Bigg|_\varepsilon^1 =$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right)=2\lim_{\varepsilon\to+0}1-2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon}=2\cdot1-2\cdot0=2.$$

Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається.

Приклад 6. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{4-x}$

$$\int\limits_2^4 \frac{dx}{4-x} = \left\{x=4 - \text{особлива точка}\right\} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{4-x} = -\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|4-x\right|\ \Bigg|_2^{4-\varepsilon} =$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left|4-4+\varepsilon\right|-\ln\left|4-2\right|\right)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon+\lim_{\varepsilon\to+0}\ln 2=\infty,$$

оскільки перша границя нескінченна (при $\varepsilon\to+0$ $\ln\varepsilon\to-\infty$). Тобто наш інтеграл розбігається.

Приклад 7. $\int\limits_2^4 \ln x dx$

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \left\{x=0 - \text{особлива точка}\right\} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx.$$

Обчислимо інтеграл, застосовуючи метод інтегрування частинами:

$$\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{matrix}\right| = \left(u\cdot v\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b v\cdot du\right) = x\cdot\ln x\Bigg|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 x\cdot\frac{dx}{x} = 1\cdot\ln 1-$$

$$-\varepsilon\ln\varepsilon-\int\limits_\varepsilon^1 dx = 0-\varepsilon\ln\varepsilon - x\Bigg|_\varepsilon^1 = -\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon.$$

Повертаючись до границі, отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\right)=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=$$

$=-1+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon=-1+0=-1$ (при обчисленні границі застосовано правило Лопіталя). Як бачимо,границя скінченна, наш інтеграл збігається.

Задачі

1. Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 2. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$

3. $\int\limits_{-\infty}^{3}\frac{dx}{x^2+3}$ 4. $\int\limits_{-\infty}^{-1}e^{7-2x}dx$

5. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$ 6. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x-5}$

7. $\int\limits_0^{+\infty}x\cdot\cos x dx$ 8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{4+5x^2}$

2. Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $\int\limits_2^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}$

3. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$ 4. $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$

5. $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{xdx}{\sin x^2}$ 6. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\int\limits_0^{1}x\cdot\ln xdx$ 8. $\int\limits_0^{3}\frac{dx}{2x^2+x^4}$

3. Дослідити на збіжність інтеграли:

1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$ 2. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$

3. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ 4. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sin x}$

5. $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ 6. $\int\limits_0^{1}\frac{\sin dx}{\sqrt{x^3}}$

Розділ VIII. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОЇ ЗМІННИХ

Тема 28. Область існування функції багатьох змінних. Задання областей нерівностями. Знаходження частинних похідних, диференціалу.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію:

а) $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$;

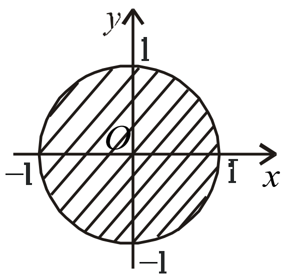
б) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$;

в) $z = \sqrt{\sin \pi \left(x^2 + y^2\right)}$.

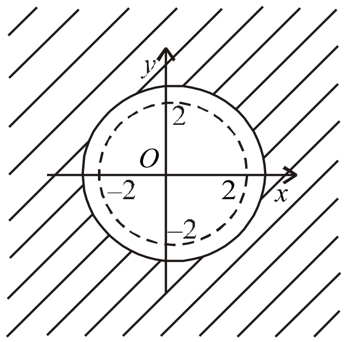
а) Функція визначена, якщо $1 - \left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (мал. 2).

б) Функція визначена, якщо $x^2 + y^2 - 4 > 0$, тобто $x^2 + y^2 > 4$ (мал. 3).

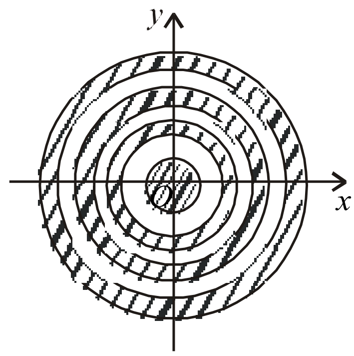
в) Функція визначена, якщо $\sin \pi \left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, тобто $2n \leq x^2 + y^2 \leq 2n + 1$ $\left(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right)$ (мал. 4).



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

Приклад 2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \ + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 3. Знайти повний диференціал функції двох змінних:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Задачі

1. Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:

1. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
2. $z = \ln\left(x^2+y\right)$.
3. $z = \log_x y$.
4. $z = \arccos x + \arcsin y$.
5. $z = \sqrt{4x^2+9y^2-36}$.
6. $z = \arcsin\frac{x}{y}$.
7. $z = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.
8. $z = \sqrt{x^2-y^2-1}$.

2. Знайти частинні похідні функцій:

1. $z = x^2+y^3-2axy$.
2. $z = x^2y^3-\sqrt{x+y}$.
3. $z = \frac{x+y}{x+y+1}$.
4. $z = (x+y)\sqrt{x-y}$.
5. $u = \frac{xy}{z}+(xy)^z$.
6. $z = \ln\left(2x^2-y^2\right)$.
7. $z = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$.
8. $z = x\cdot e^{\sin\frac{x}{y}}$.

3. Обчислити частинні похідні функцій:

1. $z = \ln\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у точці $(1;1)$.

2. $z = x^2 y^3 + \sqrt{x^2 y}$ у точці $(-1;1)$.

3. $z = \dfrac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{x^2 - xy + y^2}$ у точці $(0,1;1,1)$.

4. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

1. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2. $z = yx^y$.

3. $z = 2^{\operatorname{arctg}^2\left(xy + y^2\right)}$.

4. $z = x\cos\left(y^x\right)$.

5. $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$.

6. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$.

5. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо: $z = \dfrac{x}{y}$; $x = e^t$; $y = \ln t$.

6. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо: $z = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$; $x = 3t^2$; $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

7. Знайти $\dfrac{du}{dt}$, якщо: $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $z = H$.

8. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо: $z = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$; $u = x^2 - y; V = y^2 - x$.

Тема 29. Диференціювання складної, неявної функції.

Похідні вищих порядків. Екстремум.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідну від неявної функції $y^5+2x^2y^2+xy-42=0$ в точці $x=1,\ y=2$.

Маємо $F'_x=4xy^2+y$, $F'_y=5y^4+4x^2y+x$, звідки

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4xy^2+y}{5y^4+4x^2y+x}.$$

Для $x=1,\ y=2$ маємо $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{18}{89}$.

Приклад 2. Знайти d^2z, якщо $z=\sin x\cdot\sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\sin y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cos y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\cos y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin x\sin y,$$

$$d^2z=-\sin x\sin y\,dx^2+2\cos x\cos y\ dx\,dy-\sin x\sin y\,dy^2.$$

Приклад 3. Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ для функції $z=x^2y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=12xy.$$

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}\ \left(a>0,b>0\right).$$

1. Знайдемо z'_x і z'_y:

$$z'_x=\frac{x}{a},\ z'_y=\frac{y}{b}.$$

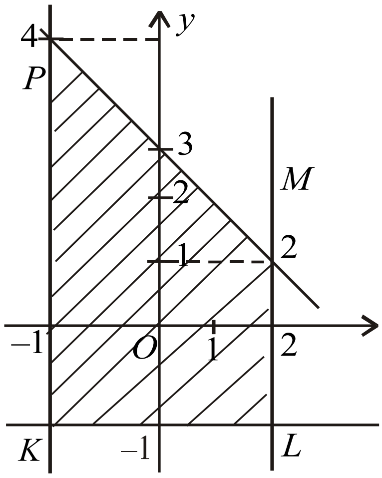
2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases}\dfrac{x}{a}=0\\ \dfrac{x}{b}=0\end{cases}.$

Отже, (0; 0) — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}:

$$z''_{xx}=\frac{1}{a},\ z''_{xy}=0,\ z''_{yy}=\frac{1}{b}.$$

Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$ (мал.5).



Мал. 5

1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $\quad : \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.

Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0;\ 0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної y: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної x: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \dfrac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;\ -1)$, $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$, $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0;0)=0$, $f(1;\ 1)=-1$, $f(-1;-1)=-5$, $f(2;-1)=13$, $f(2;\ 1)=3$, $f(-1;4)=75$, $f\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)=0$.

Отже, $z_{\min}=-5$, і це значення досягається в точці $(-1;\ -1)$, $z_{\max}=75$, і це значення досягається в точці $(-1;\ 4)$.

Задачі

1. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для таких функцій:

1. $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$. 2. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

3. $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$. 4. $z=\ln\left(x^2+y\right)$.

5. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. 6. $z=\sin^2(ax+by)$.

7. $z=e^{xe^y}$. 8. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

2. Знайти повний диференціал другого порядку $d^2 z$, якщо:

1. $z=xy^2-x^2y$. 2. $z=\ln(x-y)$.

3. $z=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$. 4. $z=x\sin^2 y$.

5. $z=e^{xy}$ 6. $z=x\ln\frac{y}{x}$.

3. Дослідити на екстремум функції:

1. $z=x^2-xy+y^2-9x-6y+20$.
2. $z=x^2+(y-1)^2$.
3. $z=x^2-(y-1)^2$.
4. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.
5. $z=x^2y^3(6-x-y)$; $x>0$; $y>0$.
6. $z=x^3+y^3-3xy$.
7. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

4. Знайти найбільше та найменше значення функції у заданих областях:

1. $z=1+x+12y$, якщо: $x\ge 0$; $y\ge 0$; $x+y\le 1$.

2. $z = x^2 y$, якщо: $x^2 + y^2 \le 1$.

3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, якщо: $0 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 2$.

4. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, якщо: $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2$.

Рекомендована література

1. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2012. — 606 с.

2. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч1: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / П.П. Овчинников, П.С. Кропивянський та інші. – К.: Техніка, 2013. – 376 с.

3. Вища математика. Конспект лекцій для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання / Боровська Ю.В. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. – 87 с.

4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. Посіб. — К.: А.С.К., 2013. — 648 с.

5. Коваленко І.П. Вища математика: Навч. Посіб. — К.: Вища шк.,2012. — 343с.

6. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2013. — 305 с.

7. Мельниченко О.П., Ревицька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. − Біла Церква.– 2012.− 83с.

Вища математика [Текст]: Методичні вказівки до практичних занять для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання / Ю.В.Боровська − Луцьк: Технічний коледж ЛНТУ, 2016. − 79 с.

Комп'ютерний набір Ю.В.Боровська
Редактор Ю.В.Боровська

Підп. до друку 2016р.
Формат 60х84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк. ___. Обл.-вид. арк. 2,5.
Тираж ___ прим. Зам. __

Редакційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – РВВ Луцького НТУ