РОЗДІЛ VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 11. Похідна функції. Основні правила диференціювання. Диференціювання функцій: складної, заданої неявно та параметрично

Теоретичні відомості

За означенням *похідна функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 обчислюється за формулою

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

якщо границя існує і скінченна. Тут $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) -$ *приріст функції*, $\Delta x -$ *приріст аргументу* ($\Delta x \neq 0$).

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

<u>Механічний зміст похідної</u>

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється за законом $s = s(t)$, то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$: $v(t) = s'(t)$.

<u>Геометричний зміст похідної</u>

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha.$$

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

<u>Правила диференціювання</u>

1. $C' = 0$ ($C = const$);
2. $(Cu)' = Cu'$;

3. $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$;

4. $(uv)' = u'v + v'u$;

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Таблиця основних елементарних функцій

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n -$ будь-яке дійсне число)
2. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Нехай $y = f[u(x)] -$ *складна функція*, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут $u -$ проміжний аргумент, $x -$ незалежна змінні. Тоді $y' = f'(u)u'(x)$.

Правило. Похідна складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ по проміжному аргументу u і похідної внутрішньої функції $u(x)$ по незалежній змінній x.

Якщо кожному числу x множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x;y)$ задовольняє рівняння $F(x,y)=0$, то кажуть, що функцію $y=f(x)$, $x\epsilon X$, *задано неявно.*

Незважаючи на те, що рівняння $F(x,y)=0$ не розв'язане відносно y, можна знайти похідну $y'=y'(x)$. Для цього потрібно:

1. обидві частини рівняння $F(x,y)=0$ продиференціювати по x, вважаючи, що y є функцією від x;

2. одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Нехай функція $y=f(x)$ задана *параметрично*

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\omega(t)' \end{cases} \qquad t-\text{параметр.}$$

Її похідна обчислюється

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Обчислити похідну функції $f(x)=x^2$ за означенням.

Розв'язання. Знайдемо приріст функції: $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$. Для даної функції

$$\Delta f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2=$$
$$=2x\Delta x+\Delta x^2=\Delta x(2x+\Delta x).$$

Знаходимо похідну функції за формулою:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Приклад 2. Обчислити похідну функції $y=-4\sin x$.

Розв'язання. $y'=(-4\sin x)'=-4(\sin x)'=-4\cos x$.

Приклад 3. Обчислити похідну функції $y=\sin\frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. $y'=\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)'=0$.

Приклад 4. Обчислити похідну функції $y=x^3-\frac{1}{x^4}+6\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x^{-4} + 6x^{2/3}$. Знайдемо похідну

$$y' = 3x^2 + 4x^{-5} + 6 \cdot \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 5. Знайти похідну від добутку $y = (x^2 - 1)tg\ x$.

Розв'язання.

$$y' = (x^2 - 1)'tg\ x + (x^2 - 1)(tg\ x)' = 2xtg\ x + (x^2 - 1)\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \frac{\arccos x}{x^2 + e^x}$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{(\arccos x)'(x^2 + e^x) - \arccos x(x^2 + e^x)'}{(x^2 + e^x)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^2 + e^x) - \arccos x(2x + e^x)}{(x^2 + e^x)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + e^x + \arccos x(2x + e^x)\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}(x^2 + e^x)^2}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \frac{x^5 + 3^x}{\log_3 5}$.

Розв'язання. $y' = \frac{(x^5 + 3^x)'}{\log_3 5} = \frac{5x^4 + 3^x \ln x}{\log_3 5}$.

Приклад 8. Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = \frac{4}{15}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$.

Розв'язання. Знаходимо похідну $y' = \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$. При $x = 1$ $y'(1) = 1$,

тобто $tg\alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^{\circ}$.

Приклад 9. Знайти похідну складеної функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

Розв'язання. Поклавши $u = x^2 + 5$, маємо $y = \sqrt{u}$. Тому

$$y' = (\sqrt{u})'u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}}(x^2 + 5)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію, не вводячи проміжний аргумент:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Приклад 10. Знайти похідну складеної функції $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Розв'язання. Поклавши $u = 5x^2 + 7x + 2$, одержимо $y = u^3$. Надалі будемо писати так: $y = u^3, u = 5x^2 + 7x + 2$.

$$y' = (u^3)' \cdot u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(5x^2 + 7x + 2)'$$
$$= 3(5x^2 + 7x + 2)^2(10x + 7).$$

Приклад 11. Знайти похідну складеної функції $y = \sin 15x$.

Розв'язання. $y = \sin u,\ u = 15x$.

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot u' = \cos 15x(15x)' = \cos 15x \cdot 15 = 15\cos x.$$

Приклад 12. Знайти похідну складеної функції $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, (x > 0)$.

Розв'язання. $y = \operatorname{arctg} u, u = \sqrt{x}$.

$$y' = (\operatorname{arctg} u)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+x} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Приклад 13. Знайти похідну складеної функції $y = \log_5(x^2 + 4)$.

Розв'язання. Після деякого числа вправ зручно відмовитись від введення проміжного аргументу u, розуміючи його в тих місцях, де він потрібен.

$$y' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 5}(x^2+4)' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 5}2x = \frac{2x}{(x^2+4)\ln 5}.$$

Приклад 14. Знайти похідну неявної функції $5x + 3y - 7 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x: $5 + 3y' = 0$.

Розвяжемо рівняння відносно y': $3y' = -5;\ y' = -\frac{5}{3}$.

Приклад 15. Знайти похідну неявної функції $y = tg(x + y)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1 + y').$$

Виразимо y':

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} + \frac{y'}{\cos^2(x+y)}, \quad y'\left(1 - \frac{1}{\cos^2(x+y)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x+y)},$$

$$y'\frac{\cos^2(x+y) - 1}{\cos^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y)}, \ y' = \frac{1}{\cos^2(x+y) - 1}.$$

Приклад 16. Знайти похідну параметричної функції

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = cost, \quad y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{cost}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \cos^3 t.$$

Приклад 17. Знайти похідну параметричної функції

$$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}.$$

Розв'язання.

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} = \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \frac{t}{2}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається приростом аргументу і приростом функції?
2. Дайте означення похідної функції.
3. У чому полягає геометричне тлумачення похідної?
4. Яке механічне тлумачення має похідна?
5. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої.
6. Сформулюйте основні правила диференціювання функції.
7. Напишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
8. Яку функцію називають складною?
9. Згадайте правило диференціювання складної функції.
10. Яку функцію називають заданою неявно? Навести приклади.

11. У чому полягає правило диференціювання функції, заданої неявно?

12. Яка функція називається заданою параметрично?

13. Пригадайте формулу для знаходження похідної від функції, заданої параметрично.

Вправи

1. Обчислити за означенням похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{x}$; в) $y = \frac{1}{x^2}$.

Відповідь: а) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y' = -\frac{1}{x^2}$; в) $y' = -\frac{2}{x^3}$.

2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \cos\frac{\pi}{10}$; б) $y = \arcsin\frac{1}{6} + \operatorname{arctg} 2$; в) $y = -\frac{2}{3}\operatorname{tg} x$.

Відповідь: а) $y' = 0$; б) $y' = 0$; в) $y' = -\frac{2}{3\cos^3 x}$.

3. Знайти похідні функцій:

а) $y = \arcsin \mathrm{x} + \log_3 x$; б) $y = \operatorname{ctg} x - 6\cos x$; в) $y = x^3 + 3\sin x + 2e^x$.

Відповідь: а) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{xln3}$; б) $y' = -\frac{1}{\sin^3 x} + 6\sin x$;

в) $y' = 3x^2 + +3\cos x + 2e^x$.

4. Обчислити похідні функцій:

а) $y = x\ln x$; б) $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$; в) $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Відповідь: а) $y' = 1 + \ln x$; б) $y' = \frac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}\ln 2$; в) $y' = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

Обчислити похідні складених функцій:

1. $y = \sqrt{x^2 + 2}$. **Відповідь:** $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

2. $y = \sqrt[3]{x^2 + \cos x}$. **Відповідь:** $\frac{2x-\sin x}{3\sqrt[3]{(x^2+\cos x)^2}}$.

3. $y = \cos 9x$. **Відповідь:** $-9\sin 9x$.

4. $y = \arccos\frac{3x-1}{\sqrt{5}}$. **Відповідь:** $-\frac{3}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.

Обчислити похідні неявних функцій:

5. $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$. **Відповідь:** $\frac{10x+3y}{4y-3x}$.

6. $y^5 - 5axy + x^5 = 0$. **Відповідь:** $\frac{ay-x^4}{y^4-ax}$.

7. $y = \cos(x + y)$. **Відповідь:** $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

8. $y = x + \operatorname{arctg} y$. **Відповідь:** $\frac{1+y^2}{y^2}$.

Обчислити похідні параметричних функцій:

9. $\begin{cases} x = a(1-t) \\ y = a\,t \end{cases}$. **Відповідь:** -1.

10. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$. **Відповідь:** $\operatorname{tg} t$.

11. $\begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases}$. **Відповідь:** -1.