

Тема 12. Диференціал. Похідні вищих порядків.
Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя
Теоретичні відомості

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x , то приріст функції $\Delta f(x)$ можна подати у вигляді

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається вираз $f'(x)\Delta x$ і позначається $df(x)$ або dy . Диференціалом незалежної змінної x вважають її приріст Δx і позначають dx . Отже, диференціал функції обчислюють за формулою

$$dy = f'(x)dx.$$

При досить малих значеннях Δx

$$dy \approx \Delta y \text{ або } f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Оскільки в цій формулі точка x – фіксована, а Δx набуває будь-яких досить малих значень, то її можна переписати у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x = x - x_0.$$

Даною формулою зручно користуватись тоді, коли відомо значення функції $f(x)$ в точці x_0 і треба знайти її значення в точці $x_0 + \Delta x$, де Δx досить мале.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому інтервалі (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням похідна другого порядку (друга похідна) цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Аналогічно похідна третього порядку (третья похідна) $y''' = (y'')'$ і т.д.

Правило Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційованих функцій, якщо є невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ або } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

де a – число або один із символів $\pm\infty$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)},$$

якщо границя справа існує.

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів. Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = x^2$; б) $y = \sin x$.

Розв'язання.

а) $dy = (x^2)' dx = 2x dx$;

б) $dy = (\sin x)' dx = \cos x dx$.

Приклад 2. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено знайти $\operatorname{arctg} 0,97$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} 0,97$ є частинне значення функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0,97$.

Нехай $x_0 = 1$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 0,97 - 1 = -0,03$;

$$f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Диференціюючи $f(x) = \operatorname{arctg} x$, знаходимо $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

При $x_0 = 1$ $f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. Застосовуючи формулу наближеного обчислення, одержимо

$$\operatorname{arctg} 0,97 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0,03) \approx 0,785 - 0,015 = 0,77.$$

Приклад 3. $y = x^5 - 7x^3 + 2$; $y''' - ?$

Розв'язання. Знайдемо спочатку y' :

$$y' = 5x^4 - 21x^2;$$

$$y'' = (y')' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x;$$

$$y''' = (y'')' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42.$$

Приклад 4. Знайти границі функцій використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$$

Розв'язання.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(2 \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{2 \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{2} = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x)$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність вигляду $[0 \cdot \infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається диференціалом функції?
2. Пригадайте формулу для знаходження диференціала функції.
3. Запишіть формулу, яку використовують для наближених обчислень за допомогою диференціала.

4. Що називається другою похідною або похідною другого порядку функції $y = f(x)$?
5. Як знаходиться похідна n –го порядку функції $y = f(x)$?
6. Сформулюйте правило Лопіталя.

Вправи

1. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = x$; б) $y = \ln x$.

Відповідь: а) dx ; б) $\frac{dx}{x}$.

2. Обчислити похідні вищих порядків:

а) $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$; $y''' - ?$

Відповідь: $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$.

б) $y = \cos^2 x$; $y''' - ?$

Відповідь: $4 \sin 2x$.

в) $y = \frac{1}{1-x}$; $y^{(5)} - ?$

Відповідь: $y = \frac{5!}{(1-x)^6}$.

3. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\ln x}$.

Відповідь: ∞ .

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Відповідь: 2.

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4. Заміняючи приріст функції диференціалом, наближено знайти:

a) $\operatorname{arctg} 1,02$.

Відповідь: 0,795.

б) $\operatorname{arcsin} 0,4983$.

Відповідь: 0,52164.

в) $e^{0,2}$.

Відповідь: 1,2.

г) $\ln 0,97$.

Відповідь: $-0,03$.