# РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

## Лекція 1. Матриці та операції над ними

### План

***1. Основні поняття***

***2. Дії над матрицями***

### *1. Основні поняття*

*Матрицею* називають систему елементів (зокрема, чисел), розміщених у певному порядку і утворюючих таблицю. Матриці прийнято позначати великими буквами, а їх елементи, для зручності, – малими буквами з двома індексами (перший – номер рядка, другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент). Наприклад, якщо матриця $A$ складена з $m \cdot n$ елементів, розміщених в $m$ рядків і $n$ стовпців, то її позначають символом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

при цьому кажуть, що матриця $A$ розміру $m \times n$.

Елемент в $i$ −му рядку та $j$ −му стовпці матриці $A$ позначають $a_{ij}$.

Матрицю, в якій число рядків не дорівнює числу її стовпців $(m \neq n)$, називають *прямокутною*. Якщо $m = n$, то матрицю називають *квадратною*, а число $n$ − *порядком матриці.*

Матриця, яка складається з одного рядка, називається *матрицею-рядком*, з одного стовпця – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ − *бічну діагональ*.

Квадратна матриця, у якої всі елементи над головною діагоналлю або під нею дорівнюють нулю, називається *трикутною*.

Квадратна матриця, діагональні елементи якої $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ відмінні від нуля, а всі інші дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називається *одиничною*. Позначають її буквою $E$. Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою*. Позначається $\theta$.

Матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий порядок і рівні відповідні елементи.

Якщо в матриці $A$ замінимо рядки стовпцями з тими самими номерами, то одержимо нову матрицю, що називається *транспонованою* і позначається $A^T$.

Існують і інші види матриць, наприклад, симетрична $(a_{ij} = a_{ji})$ тощо.

### *2. Дії над матрицями*

*Сумою матриць* одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця того самого порядку $C = A + B; C = \left(c_{ij}\right)$, будь-який її елемент дорівнює сумі відповідних елементів матриць $A$ і $B$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

*Добутком матриці* $A = (a_{ij})$ *на деяке число* $\alpha$ називається така матриця $C$, кожен елемент $c_{ij}$ якої утворюється множенням відповідних елементів матриці $A$ на $\alpha, c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

*Різниця матриць* $A$ і $B$ визначається як сума $A$ і $(-B)$.

Для довільних матриць $A, B, C$ однакового розміру та будь-яких чисел $\alpha, \beta$ справедливі співвідношення:

1. $A + \theta = A$;
2. $A + B = B + A$;
3. $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$;
4. $A + (-A) = \theta$;
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;
6. $(\alpha \pm \beta) \cdot A = \alpha \cdot A \pm \beta \cdot A$;
7. $\alpha \cdot (A \pm B) = \alpha \cdot A \pm \alpha \cdot B$.

<u>*Приклад.*</u> Знайти матрицю $A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Використовуючи правила множення матриць на число і додавання матриць, дістанемо

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}.$$

*Добутком матриці* $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої рівний сумі добутків відповідних елементів $i -$го рядка матриці $A$ на відповідні елементи $j$ $-$го стовпця матриці $B$.

Зазначимо, що добуток $AB$ двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців матриці $A$ дорівнює числу рядків матриці $B$.

Властивості множення матриць

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
4. $A \cdot \theta = \theta \cdot A = \theta$;
5. $A \cdot E = E \cdot A = A$.

<u>*Приклад.*</u> Знайти добуток $A \cdot B$, якщо $A = (3 \quad 2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Матриця $A$ має розмір $1 \times 2$, матриця $B$ має розмір $2 \times 1$, тому добуток $A \cdot B$ існує та має розмір $1 \times 1$.

$$A \cdot B = (3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)) = (1).$$

<u>*Приклад.*</u> Знайти добуток $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>*Розв'язання.*</u>

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}.$$

Ще раз переконуємось в тому, що $A \cdot B \neq B \cdot A$.