Лекція 8. Пряма у просторі

План

1. ***Різні види рівнянь прямої***
2. ***Кут між двома прямими***
3. ***Кут між прямою і площиною***

1. *Різні види рівнянь прямої*

Залежно від способу задання прямої в просторі можна розглядати різні її рівняння.

1. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_o, y_o, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s}(m, n, p)$. Нехай $M(x, y, z) -$ довільна точка прямої, тоді $\overrightarrow{M_0M}||\vec{s}$ і пряма лінія на площині може бути задана векторним рівнянням у параметричній формі

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}t, \tag{1}$$

де $\vec{s} -$ напрямний вектор прямої l, $\overrightarrow{r_0} -$ радіус-вектор фіксованої точки $M_0(x_o, y_o, z_0)$ на прямій, $\vec{r}(t) -$ радіус-вектор довільної точки на прямій, t – параметр.

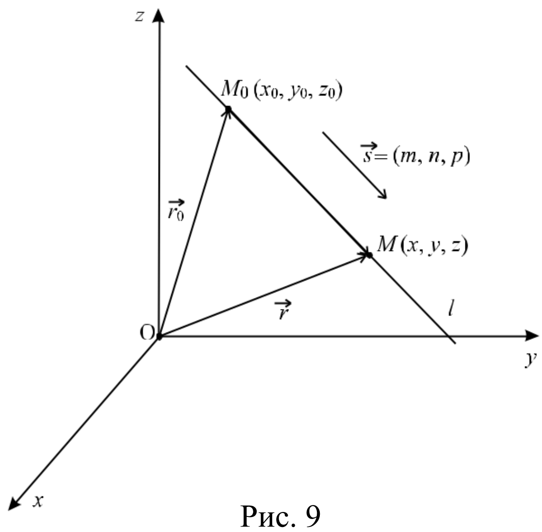

Рис. 9

2. Із рівняння (1) отримуємо три скалярні рівняння:

$$x = x_0 + mt,\; y = y_0 + nt,\; z = z_0 + pt, \tag{2}$$

які називаються *параметричними рівняннями прямої.*

3. Розв’язуючи рівняння системи (2) відносно t та прирівнюючи отримані співвідношення, приходимо до *канонічних рівнянь прямої*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{3}$$

Якщо $m=0,\ n\neq 0,\ p\neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox. Аналогічно рівняння, в яких лише $n=0$ або $p=0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m=n=0,\ p\neq 0,$ або $m=p=0, n\neq 0,$ або $n=p=0, m\neq 0,$ то рівняння (3) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox.

4. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

5. Дві площини, що перетинаються

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases} \tag{5}$$

де $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$, $\overrightarrow{n_1}$ не паралельний до $\overrightarrow{n_2}$ однозначно задають пряму. Рівняння (5) називається *загальним рівнянням прямої в просторі*. Напрямний вектор цієї прямої

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}, \tag{6}$$

а для знаходження координат точки $M_0(x_o,y_o,z_0)$ одну з координат, наприклад $x=x_0$, беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases}B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_0,\\B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_0.\end{cases}$$

2. Кут між двома прямими

Розглянемо випадки взаємного розташування двох прямих в просторі. Дві прямі в просторі можуть бути мимобіжними або перетинатися, або паралельними, або співпадати. У будь-якому випадку вони утворюють деякий кут (між їх напрямними векторами $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$). Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \qquad (7)$$

то величина кута φ між ними визначається за формулою

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot|\overrightarrow{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Тепер можна записати *умову перпендикулярності прямих*:

$$\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=0 \text{ або } m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Умова паралельності прямих

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Необхідною і достатньою умовою перетину непаралельних прямих, заданих рівняннями (7):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Якщо дана умова не виконується, то прямі (7) є мимобіжними.

3. Кут між прямою і площиною

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою l і її ортогональною проекцією на площину l' (рис. 10).

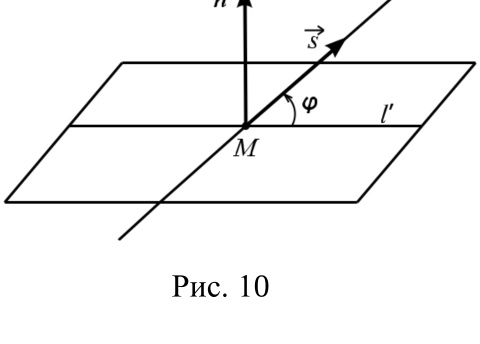

Рис. 10

Величина кута φ між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$|cos(\widehat{\vec{n},\vec{s}})| = sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: якщо пряма паралельна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \text{ або } Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярностіі прямої і площини: якщо пряма перпендикулярна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Розглянемо детальніше випадки взаємного розташування прямої і площини. Пряма (3) і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть перетинатися, бути паралельними або пряма може лежати в площині.

Перейдемо від канонічних рівнянь (3) до параметричних (2) і підставимо значення x, y, z з рівнянь (2) в рівняння площини. Отримаємо рівняння відносно невідомого параметра t:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$$

$$(Am + Bn + Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (8)$$

Можливі випадки:

а) При $Am + Bn + Cp \neq 0$ рівняння має єдиний розв’язок:

$$t = -Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D/Am + Bn + Cp.$$

Підставивши це значення t в параметричні рівняння прямої (2), знайдемо координати точки перетину M (рис. 10).

б) При $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ рівняння (8) не має розв’язку, пряма не має спільних точок з площиною.

в) При $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ будь-яке t є розв’язком рівняння (8), тобто будь-яка точка прямої належить площині. Це і є *умови приналежності прямої і площини.*