РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Лекція 3. Множини та операції над ними

План

1.Поняття множини. Способи задання множин. Підмножина

2.Операції над множинами

3. Властивості операцій над множинами

4. Принцип двоїстості для алгебри множин

1.Поняття множини. Способи задання множин

Означення. Під **множиною** розуміють сукупність об'єктів об'єднаних за певною ознакою. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи малими.

Наприклад. $A = \{a, b, c\}$.

Зауваження.

1. Порядок розміщення елементів у фігурних дужках не істотний.

2. Один і той самий елемент в дужках двічі не пишемо.

Означення. Множина, яка не містить жодного елемента називається **порожньою**. Позначають $\emptyset$.

Означення. Множина називається **скінченною**, якщо вона містить скінченну кількість елементів, **нескінченною** – нескінченну кількість елементів. Множину називають заданою, якщо про будь-який об'єкт можна сказати чи належить він до даної множини чи ні.

1. Переліком елементів.

2. Характеристичною властивістю, тобто властивістю, яку мають елементи цієї множини і лише вони.

3. Породжуючою процедурою.

Означення. Дві множини називаються **рівними**, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Позначають $A = B$.

Умова рівності множин

$$(A = B) \leftrightarrow \big((\forall x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \rightarrow x \in A)\big)$$

Означення. Множина A називається **підмножиною** множини B, якщо кожен елемент множини A міститься в множині B. Позначають $A \subseteq B$. Іншими словами

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B)$$

Принцип подвійного включення

$$(A = B) \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Означення. Множина, яка складається з усіх підмножин даної множини M називається **булеаном** цієї множини і позначається $\beta(M)$.

2.Операції над множинами

Означення. **Об'єднанням** двох множин A і B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній із цих множин.

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

Означення. **Перерізом** двох множин A і B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать як множині A так і множині B.

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

Означення. **Різницею** двох множин A і B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B.

$$A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

Означення. **Симетричною різницею** двох множин A і B називається множина

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Виконується $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Означення. Під **універсальною множиною** розуміють множину, яка включає усі множини. Позначають E.

Означення. **Доповненням** множини A називається $\bar{A} = \{x: x \notin A\}$

3. Властивості операцій над множинами

Для довільних множин A, B, C виконуються властивості:

1. Ідемпотентність

$$A \cap A = A, \;\; A \cup A = A$$

1. Комутативність

$$A \cap B = B \cap A, \;\; A \cup B = B \cup A$$

2. Асоціативність

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Дистрибутивність

$$(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$$

$$A \cap B \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

4. Закони де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. Закони поглинання

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

6. Закони у які входить універсальна множина

$$A \cap E = A, \quad A \cup E = E$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = E$$

4. Принцип двоїстості для алгебри множин

Нехай $A -$ довільна множина, $\beta(A) -$ булеан цієї множини.

Означення. Сукупність $\left(A, \; \beta(A)\right)$ з визначеними операціями об'єднання, перерізу і доповнення називається **алгеброю множин.**

Для множин справедливе твердження.

Твердження. Якщо у тотожності з множинами, які належать до універсальної множини і містять знаки $\cup, \cap, \emptyset, E$ замінити $\cup$ на $\cap, \emptyset$ на E і навпаки, то дістанемо справедливі твердження

$$\cup \leftrightarrow \cap$$

$$\emptyset \leftrightarrow E$$

Означення. Нехай $F(X_1, X_2, \dots, X_n) -$ вираз побудований з множин $X_1, X_2, \dots, X_n$ за допомогою операцій об'єднання, перерізу і доповнення.

Виразом **двоїстим** до F називають вираз

$$F^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \overline{F\left(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}\right)}$$

Теорема: (Принцип двоїстості)

Якщо вирази $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ та $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$ побудовані лише з операцій об'єднання, перерізу і доповнення є тотожно рівними, то двоїсті до них вирази $F^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ та $G^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ також рівні.

Доведення. За умовою теореми

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

Рівність (1) має місце для довільних множин. Замість $X_1, X_2, \dots, X_n$ можна поставити доповнення до цих множин і також отримати рівні вирази

$$F\left(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}\right) = G\left(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}\right).$$

Якщо множини рівні, то доповнення до цих множин також рівні. З останньої рівності отримаємо

$$\overline{F\left(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}\right)} = \overline{G\left(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}\right)}$$

Теорема доведена.

Зауваження 1.

Для спрощення запису формул алгебри множин приймемо такі узгодження:

1) Операцію «$\cap$» будемо вважати старшою за «$\cup$».

2) Якщо знак «$\overline{}$» (доповнення) стосується виразу, то дужки можна не писати.

3) Знак перерізу можна не писати.

Зауваження 2.

По індукції можна позначити об’єднання і переріз декількох множин

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Для об’єднання і перерізу кількох множин виконуються комутативні, дистрибутивні закони, закони де Моргана.