Тема 7. Пряма і площина в просторі

Теоретичні відомості

Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) *Загальне рівняння площини* $Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n} = (A, B, C)$ – *вектор нормалі.*

б) *Рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і має вектор нормалі* $\vec{n} = (A, B, C)$ має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

в) *Рівняння площини у відрізках на осях* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

г) *Рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ обчислюють

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

де $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори даних площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o, z_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s}(m, n, p)$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \text{ (}\textit{канонічне рівняння}\text{)}$$

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt,\ t\epsilon R.$$

б) *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

в) Дві площини, що перетинаються $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ де $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$, $\overrightarrow{n_1}$ не паралельний до $\overrightarrow{n_2}$, однозначно задають пряму. Таке рівняння називається *загальним рівнянням прямої в просторі*.

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою

$$|cos(\widehat{\vec{n},\vec{s}})|=sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;4;-3)$.

Розв'язання. Рівняння площини має вигляд

$$2(x-3)+4(y+1)+(-3)(z-2)=0,$$

$$2x-6+4y+4-3z+6=0,$$

$$2x+4y-3z+4=0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;4;-3)$ паралельно векторам $\overrightarrow{s_1}=(2;-3;-1)$, $\overrightarrow{s_2}=(-3;2;0)$.

Розв'язання. Рівняння площини запишеться

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-4 & z-(-3)\\ 2 & -3 & -1\\ -3 & 2 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Безпосереднім обчисленням матимемо шукане рівняння площини

$$2x + 3y - 5z - 29 = 0.$$

Приклад 3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3; -2; 2)$ паралельно площині $2x - 2y + 5z + 4 = 0$.

Розв'язання. Задана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2; -2; 5)$. Тому, внаслідок паралельності площин, шукана площина також перпендикулярна до цього вектора. Її рівняння буде мати вигляд

$$2(x - 3) - 2\big(y - (-2)\big) + 5(z - 2) = 0.$$

Після спрощення $2x - 2y + 5z - 20 = 0$.

Приклад 4. Знайти відстань між двома паралельними площинами $2x - y + 2z + 9 = 0$ і $-4x + 2y - 4z + 21 = 0$.

Розв'язання. На одній із площин, наприклад, першій, виберемо довільну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до другої площини. Нехай $x_0 = z_0 = 0$. З першого рівняння знаходимо $2 \cdot 0 - y_0 + 2 \cdot 0 + 9 = 0$. Звідси $y_0 = 9$. Знаходимо відстань від точки $M_0(0; y_0; 0)$ до другої площини:

$$d = \frac{|-4 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 4 \cdot 0 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 6{,}5.$$

Приклад 5. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$ паралельно вектору $\vec{s}(4; 3; -2)$.

Розв'язання. Канонічне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-2} = t;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - 2}{4} = t, \\ \dfrac{y + 3}{3} = t, \\ \dfrac{z - 1}{-2} = t. \end{cases}$$

Звідки маємо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t, \\ z = 1 - 2t, t \epsilon R. \end{cases}$$

Приклад 6. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 11 = 0, \\ 3x = 2y + z - 17 = 0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

Розв'язання. За напрямний вектор прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів даних площин $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; -3), \overrightarrow{n_2} = (3; 2; 1)$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$(1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2)\vec{\imath} - (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3)\vec{\jmath} + (2 \cdot 1 - 1 \cdot 3)\vec{k} = 7\vec{\imath} - 11\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Отже, напрямний вектор $\vec{s} = (7; -11; 1)$.

Питання для самоперевірки

1. Який вектор називається нормальним вектором площини?

2. Виведіть рівняння площини, що проходить через дану точку і має даний нормальний вектор.

3. Отримайте загальне рівняння площини і проведіть його аналіз.

4. Як знайти кут між двома площинами?

5. Запишіть умову паралельності й умову перпендикулярності двох площин.

6. Запишіть рівняння прямої: параметричне, загальне, через дві дані точки.

7. Як перейти від загального рівняння прямої до канонічного?

8. Як знайти кут між двома прямими?

9. Як знайти кут між прямою і площиною?

10. Запишіть умову паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

Вправи

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;5;-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(-2;1;4)$.

Відповідь: $-2x+y+4z+9=0$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1;-2;4)$ паралельно векторам векторам $\vec{s}_1=(3;1;-2)$; $\vec{s}_2=(2;2;1)$.

Відповідь: $5x-7y+4z-25=0$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;-3;2)$, $M_2(2;0;3)$, $M_3(-1;-3;2)$.

Відповідь: $20x-17y-9z-13=0$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;1;-4)$ паралельно площині $2x-2y+5z-7=0$.

Відповідь: $2x-2y+5z+16=0$.

5. Знайти кут між площинами $x-2y+2z-3=0$ і $3x+4y-7=0$.

Відповідь: $arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

6. Чи паралельні площини $2x-3y+5z+8=0$, $-4x+5y-10z+7=0$?

Відповідь: ні.

7. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1;7)$ паралельно вектору $\vec{s}=(4;-1;3)$.

Відповідь: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-7}{-3}, \begin{cases} x=2+4t, \\ y=1-t, \\ z=7-3t. \end{cases}$

8. Пряма задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x-y-2z+5=0 \\ x+2y-2z+2=0. \end{cases}$ Знайти її канонічне рівняння.

Відповідь: $\frac{x}{6}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{7}$.

9. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ і площини $2x-3y++z-14=0$.

Відповідь: $M(-1;-5;1)$.