Лекція 17.Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца.

План

1. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.

2. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца.

3. Завдання для самостійної роботи.

1. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.

*Означення.* Ряд називається *знакозмінним*, якщо він містить нескінченне число як додатних, так і від’ємних членів. Розглянемо поряд з знакозмінним рядом ряд, утворений з модулів членів цього ряду .

***Теорема 11.*** (Коші). Якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд, тобто

.

*Означення.* Якщо ряд, складений із абсолютних величин членів знакозмінного ряду, є збіжним то вихідний ряд є *абсолютно збіжним*. Проте, якщо ряд з модулів є розбіжним, то вихідний ряд може бути *розбіжним* або *умовно збіжним*.

*Означення.* Знакозмінний ряд називається *умовно збіжним*, якщо цей ряд збігається, а ряд із абсолютних величин його членів розбігається.

Наприклад. Дослідити на збіжність ряд .

Загальний член ряду  залежно від  може бути як додатним, так і від’ємним. Отже, ряд  - знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного: . Цей ряд буде знакододатним , так що для дослідження його на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємось ознакою порівняння рядів: ряд порівняння, він збігається, як ряд Діріхле, з . Отже, за ознакою порівняння ряд  збігається, а це означає, що за теоремою Коші збігається і ряд , причому збігається абсолютно.

2. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца.

*Означення.* Ряд, кожен член якого відрізняється знаком від попереднього, називається *знакопочерговим*.

Цей ряд має вигляд: .

Загальний член ряду  де .

***Теорема 12.(***Лейбніца). Якщо члени знакопочергового ряду спадають за абсолютною величиною  і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю (), то ряд збігається і його сума .

Наприклад. Дослідити збіжність ряду Лейбніца

**1)** .

Загальний член ряду  почергово змінює знак, отже, ряд Лейбніца – знакопочерговий. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються: 1) 2) . Таким чином, ряд Лейбніца буде збіжним, але збіжність умовна, бо ряд із абсолютних величин:  - гармонічний ряд, що розбігається.

**2) .** Скористаємося раніше доведеним, що  є розбіжним, тому вихідний ряд не є абсолютно збіжним. Дослідимо чи збігається він умовно. Знаки членів чергуються, значить, це є знакозмінний ряд. Члени за модулем спадають, бо , ,

а . . За теоремою Лейбніца даний ряд умовно збіжний.

**3)**Встановити чи цей ряд буде абсолютно збіжним чи умовно збіжним

 ?

Ряд є знакозмінним, тому для нього складемо ряд, утворений з абсолютних величин членів вихідного ряду . Скористаємося ознакою порівняння рядів  Оскільки границя існує і відмінна від

нуля, то з розбіжності ряду  слідує розбіжність ряду .

Перевіримо для заданого ряду умови теореми Лейбніца  і , то вихідний ряд є умовно збіжним.

3. Завдання для самостійної роботи.

а)дослідити збіжність числового ряду;

б) знайти область збіжності степеневого ряду.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. а) ; | б) ; | 16. а) ; | б) ; |
| 2. а) ; | б) ; | 17. а) ; | б) ; |
| 3. а) ; | б) ; | 18. а) ; | б) ; |
| 4. а) ; | б) ; | 19.а) ; | б) ; |
| 5. а) ; | б) ; | 20. а) ; | б) ; |