

Тема 5. Мимобіжні прямі. Перетин геометричних елементів. Перша та друга позиційна задачі

5.1 Дві прямі

Прямі можуть перетинатися (рис. 5.1), якщо мають одну власну чи невідмінну спільну точку (бути паралельними рис. 5.2), або бути мимобіжними (рис. 5.3), якщо вони не мають спільної точки.

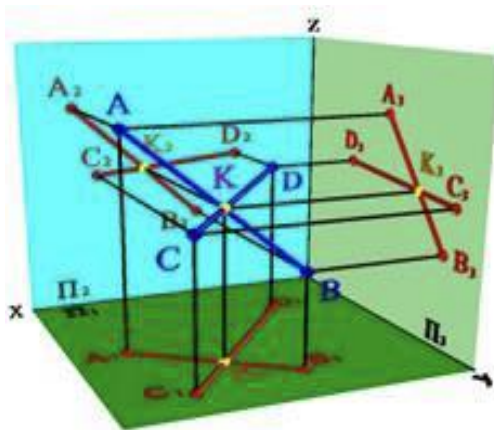


Рисунок 5.1 – Прямі, що перетинаються

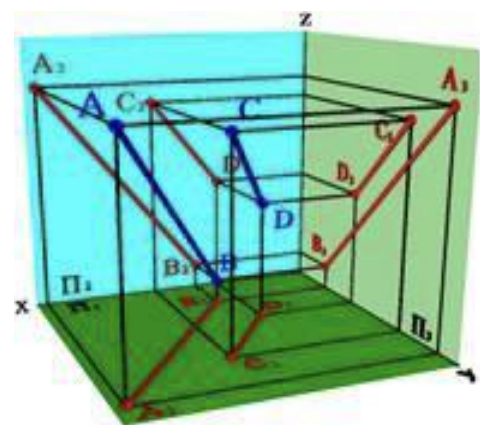


Рисунок 5.2 – Паралельні прямі

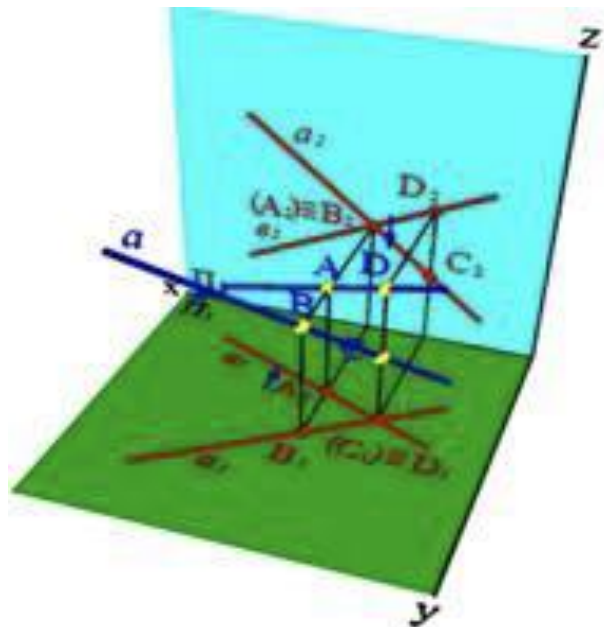


Рисунок 5.3 – Мимобіжні прямі

Сформулюємо властивості: якщо точки перетину однойменних проєкцій прямих належать одній вертикальній лінії зв'язку, – прямі перетинаються (рис. 5.4а);

якщо однойменні проєкції прямих паралельні між собою (мають невласну точку перетину), – прямі паралельні (рис. 5.4б);

якщо точки перетину однойменних проєкцій прямих не належать одній вертикальній чи горизонтальній лінії зв'язку – прямі мимобіжні (рис. 5.5).

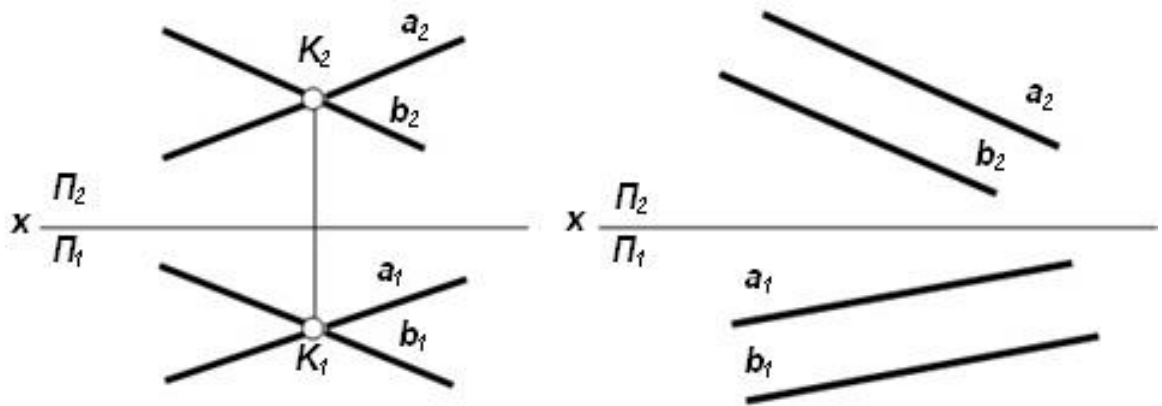


Рисунок 5.4 – Проєкції прямих

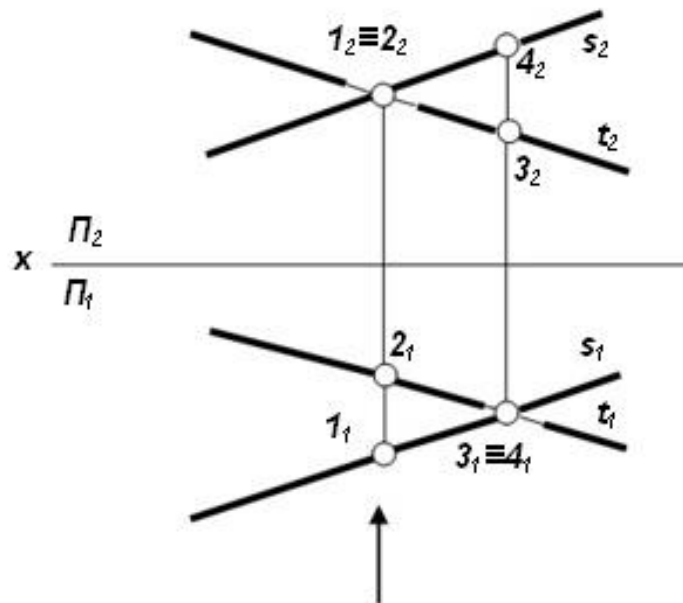


Рисунок 5.5 – Мимобіжні прямі

Звернемося до рис. 5.5, де зображено дві мимобіжні прямі. Фронтальні проєкції перетинаються в точці  $12=22$ , а горизонтальні – в точці  $31=41$ . Ці точки називаються конкуруючими. Конкуруючі точки (точки, що належать одній проєціюючій прямій) використовують при визначенні видимості геометричних фігур.

Для визначення "перекривання" їх на проєкціях візьмемо конкуруючі точки  $12=22$  відносно поля  $\Pi_2$ , точки  $31=41$  відносно поля  $\Pi_1$ . Завдяки тому, що точка 3 розміщена вище точки 4, на полі  $\Pi_1$  пряма s "перекриває" пряму t. Точка 1 знаходиться ближче точки 2, тому на полі  $\Pi_2$  пряма s "перекриває" пряму t.

Дві прямі, що перетинаються, або мимобіжні прямі утворюють між собою кут. Кут між мимобіжними чи прямими, що перетинаються, проєціюється в натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо прямі горизонтальні, і на фронтальній, якщо вони фронтальні (рис. 5.7а).

Розглянемо взаємну перпендикулярність двох прямих. Прямий кут перетину чи мимобіжності проєціюється в натуральну величину на горизонтальній проєкції, якщо хоча б одна його сторона горизонтальна, та на фронтальній, якщо хоча б одна його сторона фронтальна (рис 5.6).

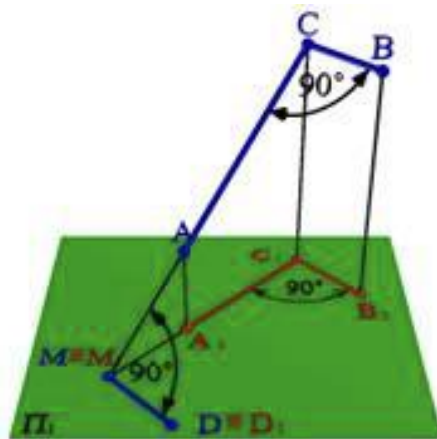


Рисунок 5.6 – Взаємна перпендикулярність прямих

На рис. 1.40б показано прямий кут перетину, одна сторона якого горизонтальна. Цей кут зображується на полі  $\Pi_1$  в натуральну величину.

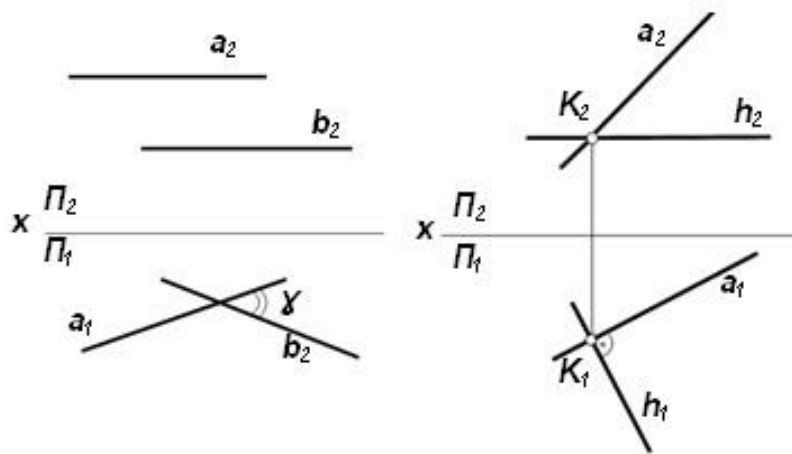


Рисунок 5.7 – Кут між прямими

## 5.2 Пряма та площина

Пряма може лежати у площині, перетинати площину (під довільним чи прямим кутом) або бути їй паралельною, тобто перетинати у невластній точці. Задача на перетин прямої з площиною вважається першою основною позиційною задачею.

Розглянемо випадок коли пряма паралельна до площини. У такому випадку (рис. 5.8) проекція лінії перетину площини з допоміжною площиною  $1_2 2_2$  паралельна проекції прямої  $n_2$ .

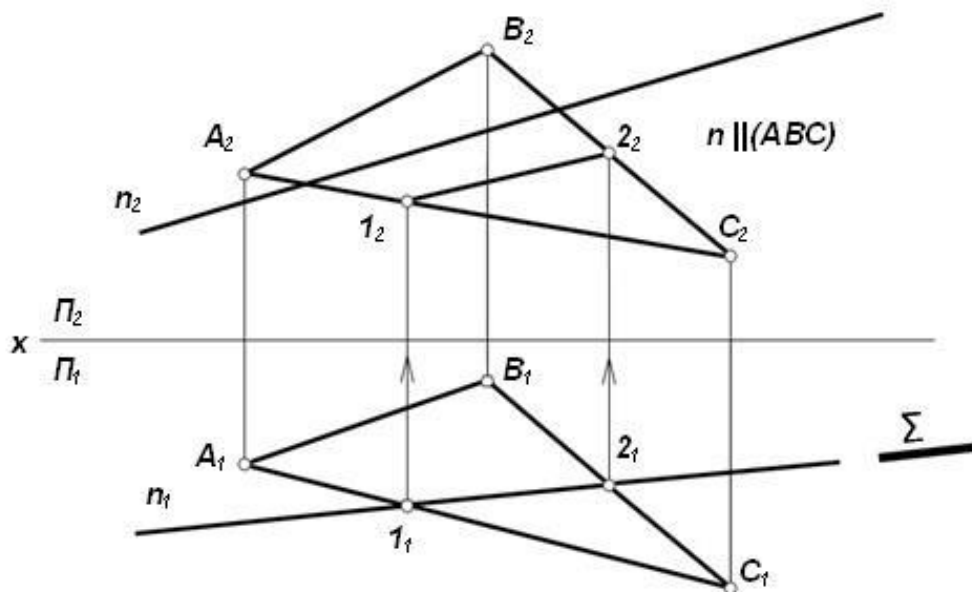


Рисунок 5.8 – Пряма, паралельна до площини

Тобто, пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині.

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються та належать площині. Беручи до уваги властивості проєкцій прямого кута, з усієї множини прямих площини за такі лінії доцільно вибрати лінії рівня, тобто горизонталь та фронталь.

На рис. 5.9 показано трикутний відсік, сторона якого  $AC$  є горизонталлю, а  $AB$  – фронталлю. Щоб із точки  $K$  опустити перпендикуляр на площину цього відсіку, досить провести фронтальну проєкцію його перпендикулярно до фронтальної проєкції фронталі  $A_2B_2$ , а горизонтальну – перпендикулярно до горизонтальної проєкції горизонталі  $A_1C_1$ . Звідси: проєкція прямої, перпендикулярної до площини, на горизонтальній проєкції площини перпендикулярна до проєкції горизонталі, на фронтальній – перпендикулярна до проєкції фронталі площини.

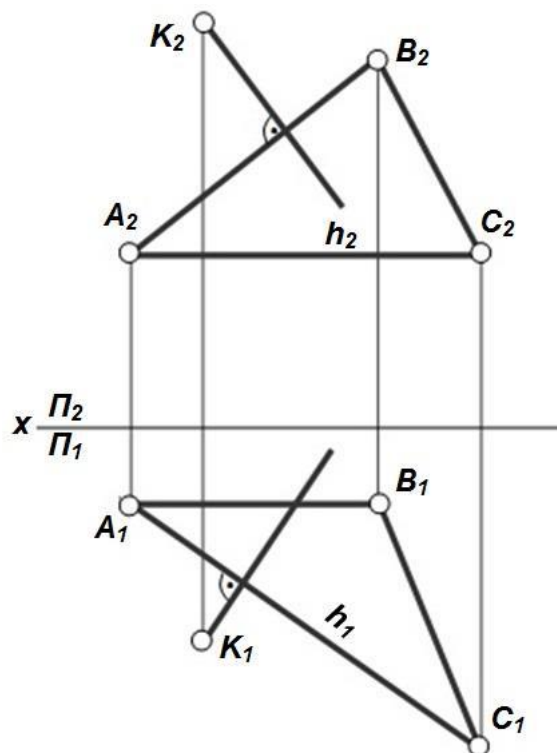


Рисунок 5.9 – Трикутний відсік

Загальний випадок перетину прямої із площиною буде розглянуто нижче.

### 5.3 Дві площини

Якщо дві площини не співпадають, то вони завжди перетинаються (під довільним чи прямим кутом). Якщо лінія їх перетину – невласна пряма, – площини паралельні. Тому, щоб з'ясувати взаємне положення двох площин, знаходять лінію їх перетину, що є другою головною позиційною задачею.

Коли лінія перетину двох площин – невласна пряма, то площини паралельні між собою.

Ознакою паралельності є паралельність двох прямих, що перетинаються, однієї площини, двом прямим, що перетинаються, другої; – найчастіше це горизонталі та фронталі площин (сліди).

На рис. 5.10 показано дві паралельні площини. Одну задано слідами, а другу – трикутним відсіком  $ABC$ ; сторона відсіку  $AB$  є фронталлю, а  $AC$  – горизонталлю площини.

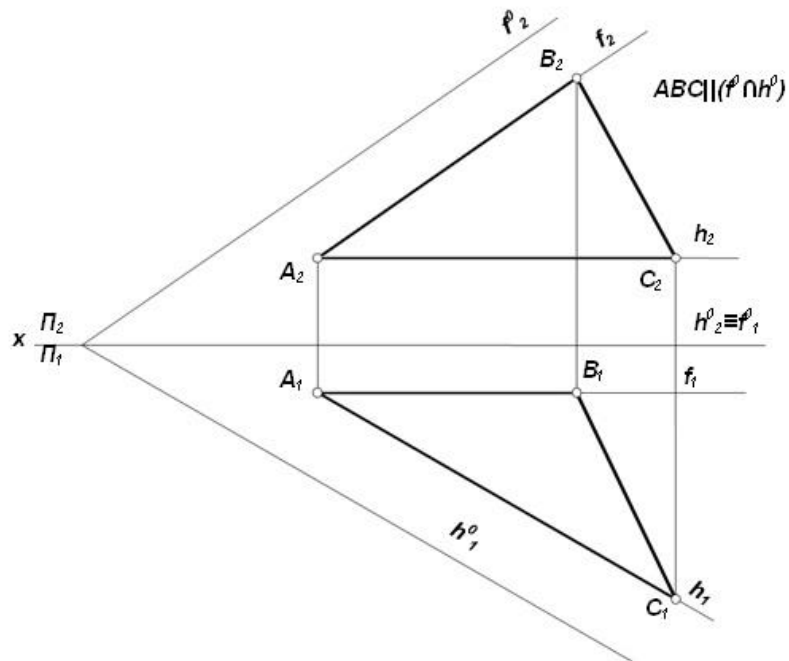


Рисунок 5.10 – Паралельні прямі

Дві площини перпендикулярні, якщо одна із площин проходить через перпендикуляр до другої площини.

Проведемо площину, перпендикулярно до заданої, використовуючи розглянуту властивість, відповідно проведення перпендикуляра до площини. На рис. 5.11 площину задано горизонталлю  $h$  та фронталлю  $f$ . Через точку  $B$  до цієї площини проведемо перпендикуляр  $n$ . Якщо через будь-яку точку прямої  $n$  провести довільну пряму, то вона разом з перпендикуляром задає площину, перпендикулярну до заданої. Беручи до уваги, що пряму проводять довільно, їх може бути нескінченна множина.

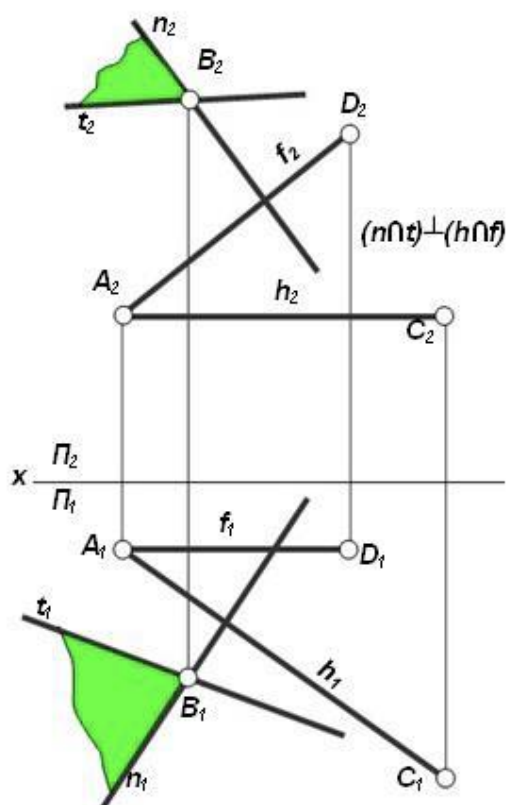


Рисунок 5.11 – Перпендикулярні прямі

#### 5.4 Перша позиційна задача. Знаходження точки перетину прямої та площини

При розв'язанні цієї задачі розрізнятимемо три різні випадки розміщення двох геометричних елементів: а) обидва геометричні елементи є проєціюючими відносно однієї й тієї ж площини проєкцій; б) один геометричний елемент – проєціюючий, другий – загального положення; в) обидва геометричні елементи займають загальне положення.

На рис. 5.12а показано перший випадок, коли площина – трикутний відсік  $ABC$  та пряма  $l$  – займають горизонтально проєціююче положення. Горизонтальна проєкція трикутного відсіку ніби збирає на себе проєкції всіх фігур, що належать площині відсіку. Належність горизонтальних проєкцій відсіку та прямої дозволяє стверджувати, що в цьому випадку пряма  $l$  належить площині відсіку.

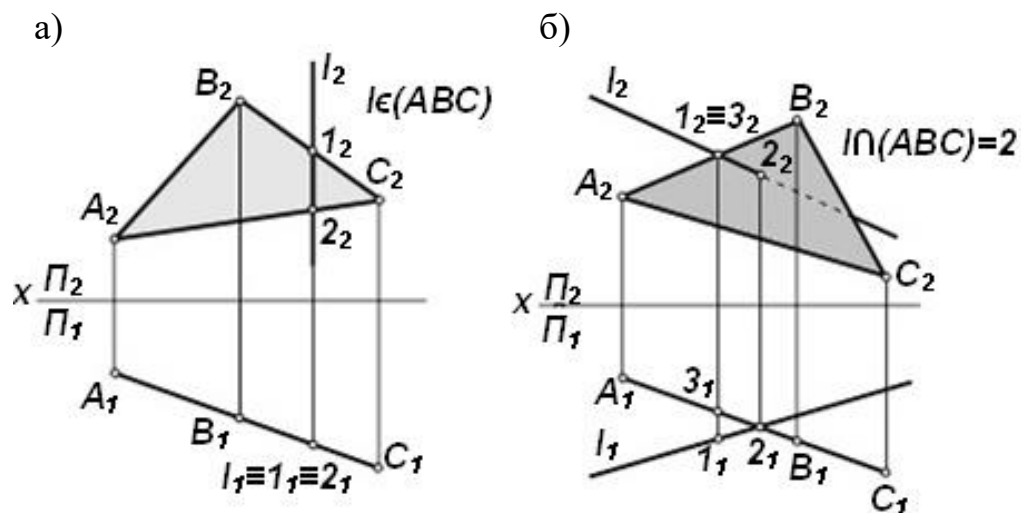


Рисунок 5.12 – Точка перетину прямої і площини

На рис. 5.12б показано другий випадок, коли площина у вигляді трикутного відсіку знаходиться в горизонтально-проєціюючому положенні, а пряма  $l$  займає загальне положення. У цьому випадку точка 2 перетину прямої з площиною визначається безпосередньо на полі  $\Pi_1$  як точку перетину проєкції прямої та площини; фронтальна проєкція точки 2 визначається за вертикальною відповідністю.

З метою підвищення наочності рисунка вважаємо трикутний відсік непрозорим, і тоді частина відрізка прямої буде невидимою, бо він "перекривається" на полі  $\Pi_2$ , площиною. Позначимо на полі  $\Pi_2$  точку перетину прямої  $l$  із стороною відсіку  $A_2B_2$ , за допомогою вертикальної лінії зв'язку визначимо точку  $1_1$  на прямій та точку  $3_1$  – на площині. Оскільки точка 1 ближче до спостерігача, ніж точка 3, пряма в цій точці "перекриває" сторону  $A_2B_2$ , і тому



відрізок прямої до точки перетину з площиною видимий, а далі частина його закривається площиною.

Для визначення точки перетину прямої з площиною в загальному випадку доцільно застосувати метод заміни площин проєкцій для приведення розташування геометричних елементів відповідно до рис. 5.12б.

На рис. 5.13 задано площину трикутником, а пряму відрезком загального положення. Для того, щоб визначити точку перетину прямої із площиною, достатньо перевести площину у проєціююче положення.

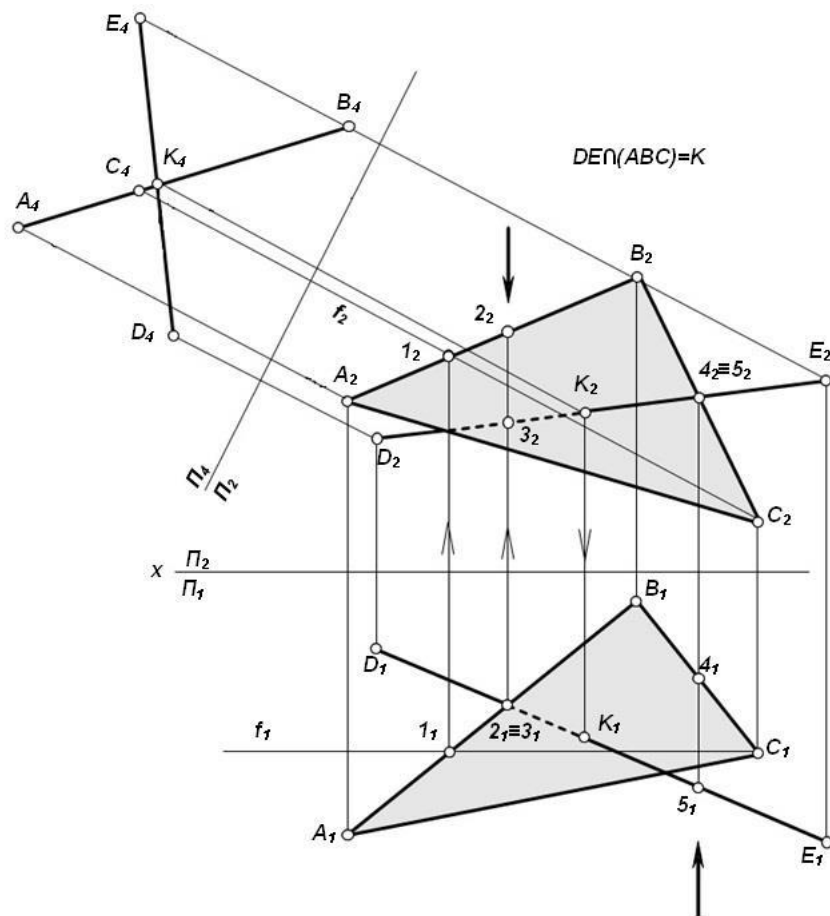


Рисунок 5.12 – Перша позиційна задача

Видимість відрізків прямої DE визначена за допомогою конкуруючих точок 2,3,4,5.

### 5.5 Друга позиційна задача. Знаходження лінії перетину двох площин

Як і при розв'язанні першої головної позиційної задачі, тут спостерігаються ті ж самі три випадки: а) обидві площини є проєціюючими відносно до однієї й тієї ж площини проєкцій; б) одна з площин – проєціююча, друга – загального положення; в) обидві площини загального положення.

На рис. 5.13а показано два вертикальні трикутні відсіки. Перетин їх горизонтальних проєкцій визначає вертикальну лінію перетину двох площин, яка за відповідністю визначається на полі  $\Pi_2$ .

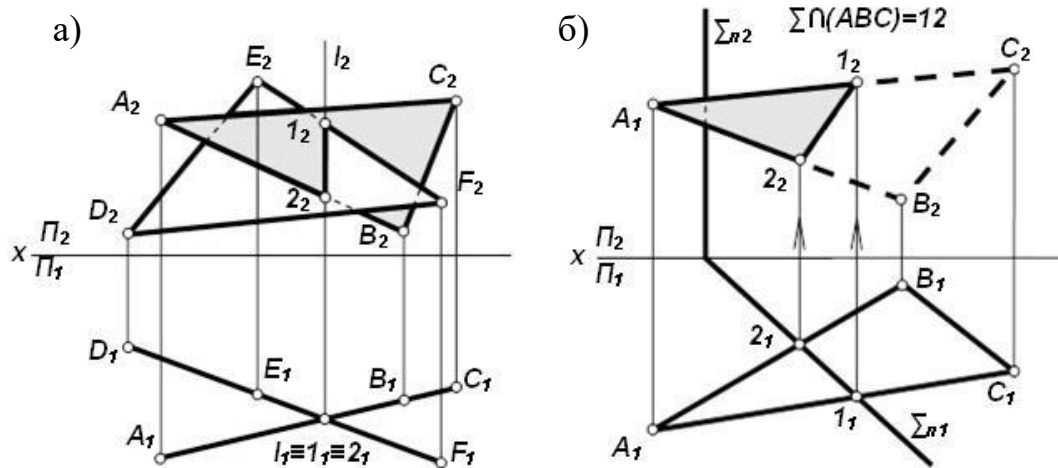


Рисунок 5.13 – Перетин площин

На рис. 5.13б одна з площин, що перетинаються, займає загальне положення, а друга – горизонтально-проєціююча. Лінія взаємного перетину площин у даному випадку збігається на полі  $\Pi_1$  з горизонтальною проєкцією проєціюючого відсіку – це пряма  $1_1 2_1$ . За вертикальною відповідністю визначається фронтальна проєкція лінії перетину двох площин.

На рис. 5.14 показано визначення лінії перетину двох відсіків загального положення. Для цього відповідно 1 позиційної задачі, одну із площин переводять у пряму лінію. Точки лінії MN – є шуканими. Видимість визначається методом конкуруючих точок.

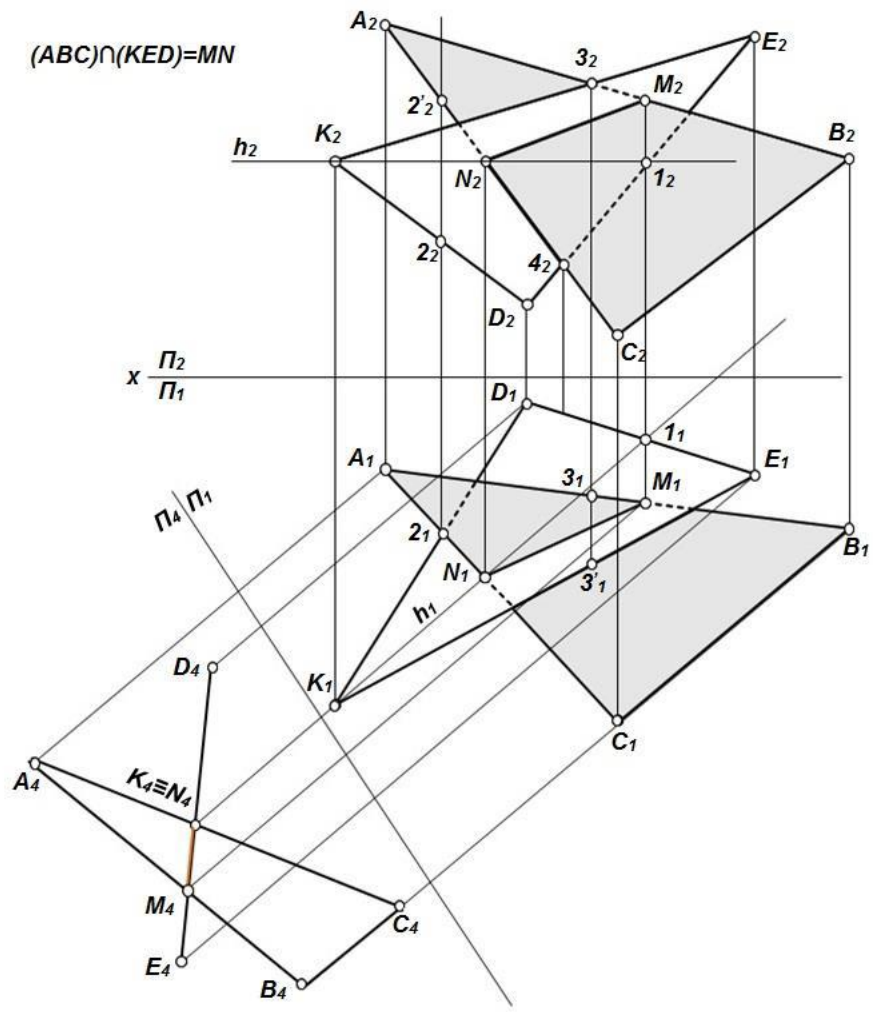


Рисунок 5.14 – Друга позиційна задача