Тема 8. Цілі рівняння

Лінійні рівняння з однією змінною

Лінійним рівнянням з однією змінною називають рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a та b — відомі числа.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ — єдиний корінь лінійного рівняння;

якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то $0 \cdot x = b$ і рівняння коренів не має;

якщо $a = 0$, $b = 0$, то $0 \cdot x = 0$ і коренями рівняння є всі дійсні числа.

Рівняння, які зводяться до лінійних:

$2x-2(x-3)=10;$ $2x-2x+6=10;$ $0x=4.$	$2x+2(x-3)=10;$ $2x+2x-6=10;$ $4x=16;$ $x=4.$	$2x-2(x-5)=10;$ $2x-2x+10=10;$ $0x=0.$
Відповідь. Коренів немає.	Відповідь. 4.	Відповідь. Довільне число.

Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням (рівнянням другого степеня з однією змінною) називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — відомі числа, до того ж $a \neq 0$. Якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$, то квадратне рівняння називають повним. Якщо ж $b = 0$ або $c = 0$, то квадратне рівняння називають неповним.

Розглянемо випадки.

1) $c = 0$, $b \neq 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 + bx = 0$; $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$. Наприклад,

$3x^2 - 7x = 0$; $x(3x - 7) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x=0; \\ 3x-7=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1=0; \\ x_2=\frac{7}{3}. \end{array}\right.$ Відповідь. 0; $\frac{7}{3}$;

2) $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 + c = 0$; $ax^2 = -c$; $x^2 = -\frac{c}{a}$. а) $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, якщо $-\frac{c}{a} \geq 0$, тобто $\frac{c}{a} \leq 0$; б) якщо $-\frac{c}{a} < 0$, тобто $\frac{c}{a} > 0$, то рівняння коренів не має. Наприклад: **а)** $9x^2 - 64 = 0$;

$x^2 = \frac{64}{9}$; $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{8}{3}; \\ x_2=-\frac{8}{3}. \end{array}\right.$ Відповідь. $\pm\frac{8}{3}$; **б)** $4x^2 + 25 = 0$; $4x^2 = -25$; $x^2 = -\frac{25}{4}$; $x \in \varnothing$.

Відповідь. $\varnothing$;

3) $b = 0$, $c = 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 = 0$; $x_1 = x_2 = 0$ $(a \neq 0)$. Наприклад: $25x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Відповідь. 0;

4) $b \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом квадратного рівняння* і позначають літерою D. Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значення дискримінанта.

Умова	*Корені*
$D = b^2 - 4ac > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = b^2 - 4ac = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$
$D = b^2 - 4ac < 0$	коренів немає

Наприклад, $5x^2 - 18x + 9 = 0$. $D = (-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 324 - 180 = 144 > 0$.

$x_1 = \frac{18+\sqrt{144}}{2\cdot 5} = \frac{18+12}{10} = 3$; $x_2 = \frac{18-\sqrt{144}}{2\cdot 5} = \frac{18-12}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Відповідь. 3; $\frac{3}{5}$.

Квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт дорівнює одиниці ($a = 1$), називають *зведеним*. Другий коефіцієнт та вільний член зведеного квадратного рівняння позначають відповідно p та q, і рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Вієта. Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену. Тобто якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Наприклад, корені зведеного рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ дорівнюють $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Тоді $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$; $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q, то m і n — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. Наприклад, –3 і –4 є відповідно сумою та добутком коренів квадратного рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тому коренями рівняння є числа –4 і 1.

Біквадратні рівняння

Біквадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — відомі числа, до того ж $a \neq 0$. Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводять до квадратного. Наприклад, розв'язати рівняння $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$. Зробимо заміну $x^2 = t$. Тоді $x^4 = \left(x^2\right)^2 = t^2$. Отримуємо рівняння $t^2 - 6t - 7 = 0$. Корені цього рівняння $t_1 = 7$, $t_2 = -1$. Повертаємося до змінної x: $x^2 = 7$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ або $x^2 = -1$; коренів немає. Відповідь. $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

Двочленні рівняння

Алгебраїчне рівняння називають двочленним рівнянням, якщо воно має вигляд $x^n - a = 0$ ($n \in N$).

За будь-якого парного n ($n = 2k$, $k \in N$), якщо $a > 0$, рівняння $x^{2k} - a = 0$ має два дійсні корені: $x_1 = \sqrt[2k]{a}$, $x_2 = -\sqrt[2k]{a}$. Якщо $a = 0$, то рівняння має один корінь $x = 0$. Якщо $a < 0$, рівняння не має дійсних коренів. Наприклад: **а)** $x^6 - 64 = 0$; $x^6 = 64$; $x_1 = \sqrt[6]{64} = 2$; $x_2 = -\sqrt[6]{64} = -2$. Відповідь. ±2; **б)** $x^4 + 16 = 0$; $x^4 = -16$; $x \in \varnothing$. Відповідь. $x \in \varnothing$.

За будь-якого непарного n ($n = 2k - 1$, $k \in N$), рівняння $x^{2k-1} - a = 0$ має один дійсний корінь ($a \in R$): $x = \sqrt[2k-1]{a}$. Наприклад: **а)** $x^3 - 27 = 0$; $x^3 = 27$; $x = \sqrt[3]{27} = 3$. Відповідь. 3; **б)** $x^5 + 32 = 0$; $x^5 = -32$; $x = \sqrt[5]{-32} = -2$. Відповідь. –2.

Якщо $a = 0$ за будь-якого $n \in N$ рівняння $x^n - a = 0$ має один корінь $x = 0$. Наприклад: **а)** $x^5 = 0$; $x = 0$. Відповідь. 0; **б)** $x^8 = 0$; $x = 0$. Відповідь. 0.

Цілі раціональні рівняння вищих степенів

Рівняння виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($n \in N$, $a_0 \neq 0$) називають алгебраїчним рівнянням степеня n.

Якщо $n = 1$, то $a_0x + a_1 = 0$ — лінійне рівняння.

Якщо $n = 2$, то $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ — квадратне рівняння.

Алгебраїчне рівняння степеня n має не більше n дійсних коренів.

Нехай $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Для рівняння $P_n(x) = 0$ справедлива теорема Безу (див. тему 3). Розв'язання рівнянь вищих степенів, які мають хоча б один цілий корінь, виконують у такій послідовності:

1) знаходять множину дільників вільного члена a_n;

2) за теоремою Безу перевіряють, які з дільників є коренями рівняння $P_n(x) = 0$;

3) діленням у стовпчик знаходять частку від ділення $P_n(x)$ на $x - x_1$, де x_1 — корінь рівняння $P_n(x) = 0$;

4) записують частку $Q_{n-1}(x)$ як многочлен степеня $(n - 1)$;

5) визначають, якщо це можливо, корені многочлена $Q_{n-1}(x)$, які є також коренями початкового рівняння і т. д.

Наприклад, знайти корені рівняння $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$. Випишемо дільники вільного члена (–18): ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18. Оскільки $P(1) = 0$, то поділимо многочлен $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18$ на двочлен $x - 1$ і визначимо многочлен-частку:

	1	–9	4	21	–18
1	1	–7	–3	18	0

$2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0. \end{array}\right.$ Аналогічно визначаємо корінь рівняння $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0$. Коренем рівняння є число 2.

	2	–7	–3	18
2	2	–3	–9	0

Маємо: $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - 3x - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = 3; \\ x = -1{,}5. \end{array}\right.$

Відповідь. –1,5; 1; 2; 3.

Рівняння з модулями

Найпростіше рівняння з модулем $|f(x)| = a$ рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x) = a; \\ f(x) = -a, \end{array}\right.$ якщо $a \ge 0$. Якщо ж $a < 0$, то рівняння коренів не має. Наприклад, розв'язати рівняння $|2x - 3| = 5$.

$|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 5; \\ 2x - 3 = -5; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 4; \\ x = -1. \end{array}\right.$ Відповідь. –1; 4.

Розв'язуючи рівняння, які містять змінну під знаком модуля, найчастіше застосовують такі методи:

1) розкриття модуля за означенням. Наприклад, розв'язати рівняння $|x - 1| = 2x - 5$. Розглянемо два випадки, коли підмодульний вираз $x - 1$ невід'ємний і коли він від'ємний. Якщо $x - 1 \ge 0$, то $|x - 1| = x - 1$; якщо $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$. Тоді початкове рівняння еквівалентне сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x - 1 \ge 0; \\ x - 1 = 2x - 5; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x - 1 < 0; \\ -x + 1 = 2x - 5; \end{array}\right. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \ge 1; \\ x = 4; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 1; \\ x = 2. \end{array}\right. \end{array}\right.$ Перша система має розв'язок $x = 4$, а друга система розв'язків не має. Відповідь. 4;

2) піднесення обох частин рівняння до квадрата. Наприклад, розв'язати рівняння $|2 - x| = 2x - 10$. Якщо $2x - 10 < 0$; $x < 5$, то рівняння розв'язків не має, оскільки $|2 - x| \ge 0$. У випадку коли $2x - 10 \ge 0$, обидві частини рівняння невід'ємні й тому при піднесенні обох частин до квадрата одержимо рівносильну початковому рівнянню систему: $\left\{\begin{array}{l} 2x - 10 \ge 0; \\ (2 - x)^2 = (2x - 10)^2; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2x \ge 10; \\ 4 - 4x + x^2 = 4x^2 - 40x + 100; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x \ge 5; \\ x^2 - 12x + 32 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x \ge 5; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 8; \\ x_2 = 4; \end{array}\right. \end{array}\right. x = 8.$

Відповідь. 8.

Спосіб піднесення до квадрата найбільше підходить для розв'язування рівнянь виду $|f(x)| = |g(x)|$. Наприклад, розв'язати рівняння $|2x - 3| = |x + 7|$; $(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$; $4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 14x + 49$; $3x^2 - 26x - 40 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{4}{3}; \\ x_2 = 10. \end{array}\right.$ Відповідь. $-\frac{4}{3}$; 10;

3) метод інтервалів (проміжків). Даний метод полягає у наступному: а) прирівнюють до нуля вирази, які стоять під знаком модуля; б) отримані значення відкладають на числовій прямій, яка при цьому розбивається на проміжки (інтервали), на кожному з яких визначається знак підмодульного виразу; в) розв'язують отримані рівняння на кожному з інтервалів. Цей метод доцільно використовувати тоді, коли рівняння містить більше одного модуля. Наприклад, розв'язати рівняння $|3 - x| - |x + 2| = 5$. Нанесемо на числову пряму значення x, за яких $3 - x = 0$ і $x + 2 = 0$, тобто $x = 3$ і $x = -2$. Числова пряма при цьому розіб'ється на три проміжки: $(-\infty; -2]$, $(-2; 3]$, $(3; +\infty)$.

Розв'яжемо рівняння на кожному з цих проміжків.

1) $x \in (-\infty; -2]$. На цьому проміжку $|3 - x| = 3 - x$, $|x + 2| = -x - 2$; $3 - x - (-x - 2) = 5$; $3 - x + x + 2 = 5$; $0x = 0$; x — будь-яке число із заданого проміжку, тобто $x \in (-\infty; -2]$;

2) $x \in (-2; 3]$. На цьому проміжку $|3 - x| = 3 - x$, $|x + 2| = x + 2$; $3 - x - (x + 2) = 5$; $3 - x - x - 2 = 5$; $-2x = 4$; $x = -2$ і $-2 \notin (-2; 3]$;

3) $x \in (3; +\infty)$. На цьому проміжку $|3 - x| = -(3 - x) = -3 + x$, $|x + 2| = x + 2$; $-3 + x - (x + 2) = 5$; $-3 + x - x - 2 = 5$; $0x = 10$; $x \in \varnothing$.

Одержимо: $x \in (-\infty; -2]$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -2]$.

Рівняння з параметрами

1. *Лінійні рівняння з параметром.*

Якщо в рівнянні, крім букв, що позначають невідомі, є одна або кілька інших букв, то таке рівняння називають *рівнянням з буквеними коефіцієнтами*. Буквені коефіцієнти в рівнянні називають *параметрами*. Наприклад, якщо в рівнянні $(a + 3) \cdot x = 7$ x — змінна, а буква a позначає якесь число, то кажуть, що це рівняння з параметром a.

Розв'язати рівняння з параметром означає знайти його корені для всіх значень параметра.

Рівняння з параметрами розв'язують так само, як і рівняння без параметрів, але лише доти, доки кожне перетворення можна виконати однозначно. Якщо ж якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язання потрібно розбити на різні випадки залежно від значення параметра.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $(a + 3) \cdot x = 7$, потрібно розглянути такі випадки:

1) якщо $a + 3 = 0$, тобто $a = -3$, одержимо рівняння $0x = 7$, яке не має коренів;

2) якщо $a + 3 \neq 0$, тобто $a \neq 3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a + 3}$, до того ж він єдиний.

Відповідь. Якщо $a = -3$, то рівняння коренів не має; якщо $a \neq 3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a + 3}$.

Узагалі будь-яке лінійне рівняння з параметром можна звести до рівняння виду $ax = b$, де a та b — деякі числа. Наприклад, розв'язати рівняння $4x + c = c^2x + 2$. $4x + c = c^2x + 2 \Leftrightarrow 4x - c^2x = 2 - c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4 - c^2)x = 2 - c \Leftrightarrow (2 - c)(2 + c)x = 2 - c$. Якщо $2 - c = 0$, тобто $c = 2$, то рівняння набуває виду $0x = 0$. Це рівняння має безліч коренів. Якщо $2 + c = 0$, тобто $c = -2$, одержимо $0x = 4$. Це рівняння не має коренів. Якщо $c \neq 2$ і $c \neq -2$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{2 - c}{(2 - c)(2 + c)} = \frac{1}{2 + c}$.

Відповідь. Якщо $c = 2$, то $x \in R$; якщо $c = -2$, то $x \in \varnothing$; якщо $c \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{2 + c}$.

Квадратні рівняння з параметрами

Розв'язання квадратного рівняння з параметром слід розпочинати із запитання «А чи є рівняння квадратним?». Якщо коефіцієнт біля x^2 може набувати нульового значення, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ перетвориться в лінійне рівняння $bx + c = 0$. Наприклад, розв'язати рівняння $ax^2 + 2x + 1 = 0$. Розв'язання почнемо з випадку, коли $a = 0$. Тоді одержимо рівняння $2x + 1 = 0$, звідки $x = -0,5$. Якщо ж $a \neq 0$, то обчислимо: $D = 4 - 4a = 4(1 - a)$. Далі, якщо $a > 1$, то $D < 0$ і $x \in \varnothing$. Якщо $a = 1$, то $D = 0$ і $x = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$. Якщо $a < 1$, то $D > 0$ і $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Відповідь. Якщо $a > 1$, то $x \in \varnothing$; якщо $a = 0$, то $x = -0,5$; якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$, якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x(x - 4) = x^2 + 8$.

А	Б	В	Г	Д
-2	2	$-2; 2$	$\varnothing$	$x \in R$

■ $x(x - 4) = x^2 + 8$; $x^2 - 4x = x^2 + 8$; $-4x = 8$; $x = -2$.
Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4x + 3x^2 = 7$.

■ $4x + 3x^2 = 7$; $3x^2 + 4x - 7 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100$.

$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 + 10}{6} = \frac{6}{6} = 1$; $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-2\frac{1}{3}$; 1. ■

Приклад 3. Обчислити відношення меншого кореня квадратного рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$ до його більшого кореня.

А	Б	В	Г	Д
6	-6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$

■ $x^2 + 5x - 6 = 0$; $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 : x_2 = -6 : 1 = -6$.
Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
1	$0; 2$	$-2; 0; 1$	$\varnothing$	$-2; 1$

■ $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$; $x(x + 2)(x - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = -2; \\ x = 1. \end{array}\right.$

Відповідь. **В.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|x-5|=3$.

А	Б	В	Г	Д
8	2; 8	–8; –2	–2	коренів немає

■ $|x-5|=3$; $\left[\begin{array}{l} x-5=3; \\ x-5=-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=8; \\ x=2. \end{array}\right.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Знайти $x_1^2+x_2^2$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2-12x+13=0$.

А	Б	В	Г	Д
157	131	144	169	118

■ За теоремою Вієта $x_1\cdot x_2=13$, $x_1+x_2=12$. Піднесемо обидві частини рівності $x_1+x_2=12$ до квадрата: $(x_1+x_2)^2=12^2$; $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=144$; $x_1^2+x_2^2=144-2x_1x_2$; $x_1^2+x_2^2=144-2\cdot 13$; $x_1^2+x_2^2=144-26$; $x_1^2+x_2^2=118$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $|2x+3|-5x-18=0$.

А	Б	В	Г	Д
–5; –3	–5	3	–3	5

■ $|2x+3|-5x-18=0$; $|2x+3|=5x+18$; $\begin{cases}(2x+3)^2=(5x+18)^2; \\ 5x+18\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2+12x+9=25x^2+180x+324; \\ x\ge -\dfrac{18}{5};\end{cases}$

$\begin{cases}21x^2+168x+315=0; \\ x\ge -3{,}6;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+8x+15=0; \\ x\ge -3{,}6;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=-5; \\ x=-3; \end{array}\right. \\ x\ge -3{,}6;\end{cases}$ $x=-3$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $x^4-x^3-27x+27=0$.

А	Б	В	Г	Д
–1; –3	–3; 1	–1; 3	1; 3	1; 27

■ $x^4-x^3-27x+27=0$; $x^3(x-1)-27(x-1)=0$; $(x-1)(x^3-27)=0$; $(x-1)(x-3)(x^2+3x+9)=0$; $\left[\begin{array}{l} x-1=0; \\ x^3-27=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=3. \end{array}\right.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Розв'язати рівняння $2x^8+x^4-15=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt[4]{2{,}5}$	±3	–3; 2,5	$\pm\sqrt{2{,}5}$

■ Нехай $x^4=t$, $t\ge 0$. Тоді $x^8=t^2$. Маємо: $2t^2+t-15=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 15=121$; $t_1=\dfrac{-1+11}{4}=2{,}5$, $t_2=\dfrac{-1-11}{4}=-3$ — не задовольняє умову $t\ge 0$. Повертаємося до заміни: $x^4=2{,}5$; $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{2{,}5}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x^2 - 2|x| - 8 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
±4	$-2; 4$	$\pm2; \pm4$	$-4; -2$	±2

■ $x^2 - 2|x| - 8 = 0$; $|x|^2 - 2|x| - 8 = 0$; $|x| = -2$ — рівняння коренів не має; $|x| = 4$, $x = \pm4$.
Відповідь. **А.** ■

Приклад 11. Розв'язати рівняння $(x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 10x = 24$.

А	Б	В	Г	Д
$-1; 1; 4; 6$	$-4; -1; 1; 6$	$-6; -1; 1; 4$	$-6; -4; -1; 1$	$-4; 6$

■ $(x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 10x = 24$; $(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) = 24$. Нехай $x^2 - 5x = t$, тоді одержимо:

$$t^2 - 2t - 24 = 0; \left[\begin{aligned} &t_1 = 6; \\ &t_2 = -4. \end{aligned}\right. \text{ Повернемося до заміни: } \left[\begin{aligned} &x^2 - 5x = 6; \\ &x^2 - 5x = -4; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} &x^2 - 5x - 6 = 0; \\ &x^2 - 5x + 4 = 0; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} &x_1 = 6; \\ &x_2 = -1; \\ &x_3 = 1; \\ &x_4 = 4. \end{aligned}\right.$$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. Розв'язати рівняння $(x^2 + 4x)^2 - 2(x + 2)^2 = 7$.

А	Б	В	Г	Д
$-5; -1; 1; 3$	$-5; -3; -1; 1$	$-3; -1; 1; 5$	$-1; 1; 3; 5$	$-3; -1; 1; 5$

■ Запишемо дане рівняння у вигляді $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x + 4) = 7$; $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0$. Введемо заміну $t = x^2 + 4x$; $t^2 - 2t - 15 = 0$; $\left[\begin{aligned} &t_1 = -3; \\ &t_2 = 5. \end{aligned}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{aligned} &x^2 + 4x = -3; \\ &x^2 + 4x = 5; \end{aligned}\right.$

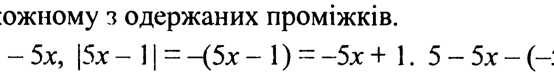
$$\left[\begin{aligned} &x^2 + 4x + 3 = 0; \\ &x^2 + 4x - 5 = 0; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} &x_1 = -3; \\ &x_2 = -1; \\ &x_3 = -5; \\ &x_4 = 1. \end{aligned}\right.$$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 13. Розв'язати рівняння $||5 - 5x| - |5x - 1|| = 3$. У відповідь записати добуток коренів. Якщо коренів безліч, то у відповідь записати число 100, якщо коренів немає, то у відповідь записати число 200.

■ Розкриємо зовнішній модуль й одержимо: $\left[\begin{aligned} &|5 - 5x| - |5x - 1| = 3; \quad (1) \\ &|5 - 5x| - |5x - 1| = -3. \quad (2) \end{aligned}\right.$ Розв'яжемо рівняння (1).

Для цього знайдемо нулі підмодульних виразів: $5 - 5x = 0$ і $5x - 1 = 0$, звідки $x = 1$ та $x = 0{,}2$. Нанесемо одержані значення на числову пряму.



Розв'яжемо рівняння на кожному з одержаних проміжків.

1) $x \in (-\infty; 0{,}2]$. $|5 - 5x| = 5 - 5x$, $|5x - 1| = -(5x - 1) = -5x + 1$. $5 - 5x - (-5x + 1) = 3$; $5 - 5x + 5x - 1 = 3$; $0x = -1$; $x \in \varnothing$;

2) $x \in (0{,}2; 1]$. $|5 - 5x| = 5 - 5x$, $|5x - 1| = 5x - 1$. $5 - 5x - (5x - 1) = 3$; $5 - 5x - 5x + 1 = 3$; $-10x = -3$; $x = 0{,}3$; $0{,}3 \in (0{,}2; 1]$;

3) $x \in (1; +\infty)$. $|5 - 5x| = -(5 - 5x) = -5 + 5x$; $|5x - 1| = 5x - 1$. $-5 + 5x - (5x - 1) = 3$; $-5 + 5x - 5x + 1 = 3$; $0x = 7$; $x \in \varnothing$.

Отже, рівняння (1) має розв'язок $x = 0{,}3$.

Аналогічно можна одержати, що розв'язком рівняння (2) є $x = 0{,}9$.

Тоді добуток коренів дорівнює $0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.

Відповідь. 0,27. ■

Приклад 14. Розв'язати рівняння $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$. У відповідь записати суму коренів.

■ Якщо рівняння має цілий корінь, то він є дільником вільного члена 48, тобто це може бути ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±16; ±24; ±48. Перевірка показує, що число –2 є коренем вихідного рівняння. Поділимо многочлен $x^3 + 12x^2 + 44x + 48$ на двочлен $x + 2$.

Отримаємо: $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$; $(x + 2)(x^2 + 10x + 24) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x^2 + 10x + 24 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = -4; \\ x = -6. \end{array}\right.$

Тоді сума коренів рівняння дорівнює $-2 + (-4) + (-6) = -12$.

Відповідь. –12. ■

Приклад 15. Розв'язати рівняння $(a^2 - 3a - 4)x + 16 = a^2$. У відповідь записати значення параметра a, за якого рівняння має безліч коренів.

■ Запишемо дане рівняння у вигляді $(a - 4)(a + 1)x = a^2 - 16$; $(a - 4)(a + 1)x = (a - 4)(a + 4)$.

Якщо $a = -1$, то $0x = -15$; $x \in \varnothing$;

якщо $a = 4$, то $0x = 0$; $x \in R$;

якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = \dfrac{(a-4)(a+4)}{(a-4)(a+1)} = \dfrac{a+4}{a+1}$.

Відповідь. 4. ■

Приклад 16. За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ найменша?

■ За умови $D = (2 - a)^2 + 4(a + 3) \geq 0$ за теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -a - 3. \end{cases}$ Тоді: $x_1^2 + x_2^2 =$ $= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (a-2)^2 + 2(a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9$. Сума $x_1^2 + x_2^2$ набуває найменшого значення, якщо $a = 1$. Якщо $a = 1$, то корені існують, оскільки $D = 1^2 + 4 \cdot (1 + 3) > 0$.

Відповідь. 1. ■

Завдання 8.1–8.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

8.1. Розв'язати рівняння $ax + b = c$, це $a \neq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \dfrac{a}{b-c}$	$x = \dfrac{a}{c-b}$	$x = \dfrac{b-c}{a}$	$x = \dfrac{c-b}{a}$	$x = \dfrac{c+b}{a}$

8.2. Розв'язати рівняння $\frac{1}{7}x - 2 = 0$ і $-0{,}2x = 4$ та записати добуток їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
–70	$-\dfrac{1}{70}$	–28	280	–280

8.3. Розв'язати рівняння $|x - 1| = 3$ та знайти суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	4	2	–2	–4

8.4. Знайти дискримінант рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
64	–64	8	–31	49

8.5. Знайти суму коренів рівняння $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
5	–2,5	2,5	–7	–3,5

8.6. Скласти зведене квадратне рівняння з коренями $\sqrt{2}$ і $\sqrt{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 3\sqrt{2}x + 16 = 0$	$x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$	$x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	Скласти неможливо

8.7. Знайти суму цілих чисел, що належать відрізку, кінцями якого є корені квадратного рівняння $10x^2 + 7x - 12 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	0	1	–5

8.8. Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 3x + 2| = 2$?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

8.9. У першій пачці зошитів було удвічі більше, ніж у другій. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій стало в 4 рази менше зошитів, ніж у першій. Скільки зошитів було у другій пачці?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість зошитів у другій пачці позначено через x?

А	Б	В	Г	Д
$2x = 4(x - 10)$	$4(2x + 10) = x - 10$	$2x + 10 = 4x - 10$	$2x + 10 = 4(x - 10)$	$x + 2 + 10 = 4(x - 10)$

8.10. Одну й ту ж відстань один автомобіль проїхав за 3 год, а інший — за 2 год. Знайти швидкість руху автомобіля, який їхав повільніше, якщо його швидкість на 24 км/год менша від швидкості іншого автомобіля.

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо шукану швидкість позначено через x км/год?

А	Б	В	Г	Д
$3(x - 24) = 2x$	$3(x + 24) = 2x$	$3x = 2(x + 24)$	$\frac{x}{3} = \frac{x + 24}{2}$	$3x = 2x + 24$

8.11. У першості з волейболу було зіграно 21 матч, при цьому кожна команда зіграла з іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у першості?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість команд позначено через x?

А	Б	В	Г	Д
$x(x + 1) = 2$	$\frac{x(x-1)}{2} = 21$	$\frac{x(x+1)}{2} = 21$	$x + x - 1 = 21$	$x(x - 1) = 21$

8.12. За якої умови рівняння $ax + b = cx + d$ не має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$a = 0, c \neq 0$	$a \neq c, d \neq b$	$a \neq c, d = b$	$a = c, d \neq b$	$a = c, d = b$

8.13. Коренем рівняння $kx = 3$ є число 0,2. Знайти корінь рівняння $kx = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{15}$	15	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$

8.14. Знайти значення параметра a, за якого рівняння $(a^2 - 1)x = a^2 + 5a - 6$ має безліч коренів.

А	Б	В	Г	Д
1	± 1	$-6; 1$	$-6; \pm 1$	0

8.15. За якого значення a рівняння $a^2x - 2a^2 = 49x + 14a$ має єдиний корінь?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)$	$(7; +\infty)$	$(-\infty; -7)\cup(7; +\infty)$	$(-7; 7)$	$(-\infty; -7)\cup$ $\cup(-7; 7)\cup(7; +\infty)$

8.16. За якого значення t значення виразу $-0{,}3t + 18$ на 5 більше від значення виразу $0{,}1t + 1$?

А	Б	В	Г	Д
–16,25	16,25	30	55	–30

8.17. Знайти суму коренів рівняння $|4x - 8| + |2 - x| = 4$.

А	Б	В	Г	Д
2,8	1,2	1,6	4	3

8.18. Знайти корінь рівняння $|x - 1| + |x + 3| = 6{,}2$, який належить проміжку $(-\infty; -3)$.

А	Б	В	Г	Д
–4,1	–2,1	–4	–5	–6

8.19. Вказати всі значення a, за яких рівняння $|x - 5| - 1 = a$ має два корені.

А	Б	В	Г	Д
$a > 5$	$a < 4$	$a > 1$	$a \geq -1$	$a > -1$

8.20. Знайти всі значення a, за яких один з коренів рівняння $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ дорівнює –2.

А	Б	В	Г	Д
$a = \pm 2$	$a = 2$	$a = 4$	$a = \pm 4$	$a = -2$

8.21. За яких значень m рівняння $4x^2 + 2x - m = 0$ має тільки один корінь?

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,5	0,25	–0,25	±0,25

8.22. Знайти всі значення c, за яких рівняння $3x^2 - 2x + c = 0$ має хоча б один спільний корінь з рівнянням $x^2 + x - 2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$c = -5, c = -1{,}6$	$c = 8, c = 1$	$c = -16, c = -1$	$c = 8, c = -1$	$c = 5, c = 1{,}6$

8.23. x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 3x - 5 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти $x_1^2 + x_2^2$.

А	Б	В	Г	Д
–1	19	4	–4	–19

8.24. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 7|x| + 10 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

Завдання 8.25–8.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $ax + b = c, a \neq 0$
2 $ax - b = c, a \neq 0$
3 $ax - b + c = 0, a \neq 0$
4 $ax + b + c = 0, a \neq 0$

А $\frac{a}{c+b}$
Б $\frac{c+b}{a}$
В $\frac{-c-b}{a}$
Г $\frac{b-c}{a}$
Д $\frac{c-b}{a}$

8.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $5x - 0,(3) = 5x - \frac{1}{3}$
2 $5x - 2 = 5x + 2$
3 $|5x - 2| = 2$
4 $5x - 2 = 2$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Безліч

8.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $7x + 2 = 5x + 6$
2 $7x - 2 = 6 - 5x$
3 $7x - 2 = -6 - 5x$
4 $7x + 6 = -6 - 5x$

А $-\frac{1}{3}$
Б -1
В 0
Г $\frac{2}{3}$
Д 2

8.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $x^2 - 4x = 0$
2 $2x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$
3 $-x^2 + 2x + 1,5 = 0$
4 $x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$

А $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$
Б $\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}$
В $0; 4$
Г $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{13}}{2}$
Д $\frac{2+\sqrt{10}}{2}; \frac{3+\sqrt{11}}{4}$

8.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$
2 $x^2 + 2x - 3 = 0$
3 $x^2 + 4x + 3 = 0$
4 $x^2 - 2x - 3 = 0$

А $\varnothing$
Б $\{-1; -3\}$
В $\{-1; 3\}$
Г $\{-3; 1\}$
Д $\{1; 3\}$

8.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $x^2 - 6x + 1 = 0$
2 $x^2 - 6x - 1 = 0$
3 $x^2 - 6x + 2 = 0$
4 $x^2 - 6x + 4 = 0$

А $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$
Б $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$
В $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$
Г $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{11}$
Д $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$

8.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д), якщо x_1 та x_2 — корені квадратного рівняння $x^2 - 5x - 4 = 0$.

1 $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2$
2 $x_1^2 + x_2^2$
3 $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$
4 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

А -20
Б 1
В 33
Г 65
Д 17

8.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
2 $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
3 $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
4 $x^5 + 5x^3 - 36x = 0$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Чотири

8.33. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $|x - 3| = 4$
2 $|x - 4| = -3$
3 $|x + 4| = 3$
4 $|x + 3| = 4$

А $\varnothing$
Б $\{1; 7\}$
В $\{-7; 1\}$
Г $\{-7; -1\}$
Д $\{-1; 7\}$

8.34. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $|2x - 3| = 2x - 3$
2 $|2x - 3| = -2x + 3$
3 $|2x - 3| = -x^2 - 1$
4 $|-1 - x^2| = x^2 + 1$

А $(-\infty; 1{,}5]$
Б $(-\infty; +\infty)$
В $[0; +\infty)$
Г $[1{,}5; +\infty)$
Д $\varnothing$

Розв'яжіть завдання 8.35–8.49. Відповідь запишіть десятковим дробом.

8.35. Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{5}+\frac{2x-5}{4}+\frac{4x-1}{20}=4-x$.

8.36. За якого значення параметра a сума коренів рівняння $x^2-(a^2-17a+83)x-21=0$ буде найменшою?

8.37. Розв'язати рівняння $x^6-3x^3+2=0$. У відповідь записати найменший корінь.

8.38. Розв'язати рівняння $x^3+9x^2+9x+1=0$. У відповідь записати суму коренів.

8.39. Розв'язати рівняння $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.40. Розв'язати рівняння $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$. У відповідь записати добуток коренів.

8.41. Розв'язати рівняння $|3x^2-x|=8+x$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.42. Розв'язати рівняння $|x+1|+|x-5|=20$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

8.43. Батько старший від сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим від сина удвічі?

8.44. У двоцифровому числі цифра десятків утричі більша, ніж цифра одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане цими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 36. Знайти це число.

8.45. Розв'язати рівняння $(x+2)(x+1)x(x-1)=24$. У відповідь записати додатний корінь.

8.46. Розв'язати рівняння $x^4+(x-4)^4=82$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.47. Розв'язати рівняння $x^3-5x^2-2x+24=0$. У відповідь записати найменший корінь.

8.48. Розв'язати рівняння $||x+1|-|x-3||=|x|$. У відповідь записати суму коренів.

8.49. Розв'язати рівняння $|x^2-9|+|x^2-16|=7$. У відповідь записати кількість цілих коренів.

Тема 9. Цілі нерівності

Якщо два вирази зі змінною сполучити одним зі знаків — >, <, ≥, ≤, то одержимо *нерівність зі змінною. Розв'язком нерівності* називають будь-яке значення змінної, за якого нерівність зі змінною перетворюється у правильну числову нерівність. Наприклад, число 3 є розв'язком нерівності $2x + 5 < 20$, бо $2 \cdot 3 + 5 < 20$; $11 < 20$ — правильна нерівність. *Розв'язати нерівність* зі змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує. Наприклад, будь-яке число, менше за 7,5 ($x \in (-\infty; 7{,}5)$), перетворює нерівність $2x + 5 < 20$ у правильну, а всяке інше — у неправильну, тому розв'язком цієї нерівності є проміжок $x \in (-\infty; 7{,}5)$.

Нерівності називають *рівносильними*, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків. Наприклад, нерівності $x^2 \le 1$ і $|x| \le 1$ рівносильні, оскільки вони мають одну й ту саму множину розв'язків — відрізок $[-1; 1]$.

Множина розв'язків нерівності, як правило, нескінченна, тому зробити перевірку її розв'язків, як правило, неможливо. Отже, розв'язуючи нерівність, потрібно проводити рівносильні перетворення.

Основні властивості рівносильності нерівностей:

- якщо доданок перенести з одної частини нерівності в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Наприклад, нерівність $x - 7 < 4$ рівносильна нерівності $x < 4 + 7$;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише додатних значень (зокрема, на додатне число), то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Наприклад, нерівність $3x < 15$ рівносильна нерівності $x < \frac{15}{3}$;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише від'ємних значень (зокрема, на від'ємне число), і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Наприклад, нерівність $-8x \ge 4$ рівносильна нерівності $x \le \frac{4}{-8}$.

Лінійні нерівності

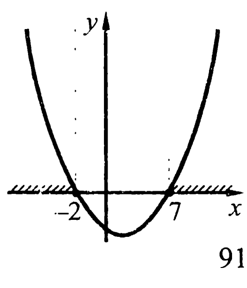
Нерівності виду $ax <> b$, де a, b — числа, x — змінна, $<>$ — один зі знаків >, <, ≥, ≤, називають *лінійними*. Розглянемо нерівність $ax > b$. Якщо $a > 0$, то $ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$; якщо $a < 0$, то $ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$; якщо $a = 0$, то нерівність $0x > b$ правильна за будь-якого значення x, якщо b — від'ємне число ($b < 0$), і не має розв'язків, якщо b — невід'ємне число ($b \ge 0$). Наприклад, розв'язати нерівність $12 - 7x \ge 33$ $\; -7x \ge 33 - 12$; $-7x \ge 21$; $x \le -3$. Відповідь. $(-\infty; -3]$.

Квадратні нерівності

Нерівності виду $ax^2 + bx + c \lozenge 0$, де a, b, c — числа, $a \ne 0$, x — змінна, $\lozenge$ — один зі знаків >, <, ≥, ≤, називають ***квадратними***. Наприклад, $7x^2 + 3x - 11 \le 0$, $x^2 - 8 > 0$ — квадратні нерівності. Розв'язання квадратних нерівностей зводять до відшукання проміжків, на яких відповідна квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних, від'ємних, невід'ємних, недодатних значень.

Наприклад, розв'язати нерівність $x^2 - 5x - 14 \ge 0$.

Графіком квадратичної функції $y = x^2 - 5x - 14$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору (бо $a = 1 > 0$). Знайдемо нулі цієї функції: $x^2 - 5x - 14 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 7$. Визначаємо, що функція набуває невід'ємних значень ($y \ge 0$), якщо $x \in (-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$. Ці проміжки і є розв'язками даної нерівності.



Відповідь. $(-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$.

Раціональні нерівності

Нерівності виду $P(x)\Diamond 0$, де $P(x)$ — многочлен, $\Diamond$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають ***раціональними***. Раціональними також називають нерівності, які набувають вказаного вигляду після розкривання дужок та зведення подібних доданків. Наприклад, $5x^3-4x^2-2x-1\geq 0$; $x(x-7)^3(2x^2+9)>0$ — раціональні нерівності. Лінійні та квадратичні нерівності є раціональними.

Метод інтервалів

Нехай потрібно розв'язати нерівність $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)>0$. Не порушуючи загальності, візьмемо, наприклад, $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$.

1. Позначимо на осі Ox точки 1, 2, 3, 4 — нулі множників лівої частини нерівності. Вони поділять вісь Ox на проміжки $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

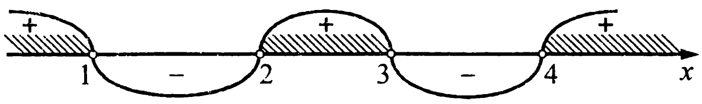
2. Для будь-якого x, що міститься праворуч від 4, будь-який двочлен лівої частини нерівності додатний, тому $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(4; +\infty)$.

3. Для будь-якого x, що лежить між точками 3 й 4, останній множник у добутку $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ від'ємний, а решта — додатні, тому $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)<0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(3; 4)$.

4. Для будь-якого x, що лежить між точками 2 і 3, останніх два множники в добутку $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ від'ємні, а решта додатні, тому $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(2; 3)$.

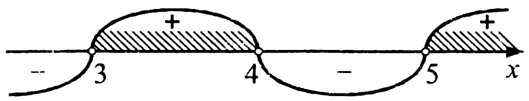
5. Аналогічно одержимо, що $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$ для x із проміжку $(-\infty; 1)$.

Отже,



Відповідь. $(-\infty; 1)\cup(2; 3)\cup(4; +\infty)$.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x-3)(x-4)(x-5)>0$. Встановимо нулі множників: $x=3$, $x=4$, $x=5$. Розташуємо знайдені числа на числовій осі.



Отже, $x\in(3; 4)\cup(5; +\infty)$. Відповідь. $x\in(3; 4)\cup(5; +\infty)$.

Розглянемо розв'язання нерівностей виду $P(x)<>0$, де $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $x_1<x_2<\ldots<x_n$, $n\geq 1$, $n\in N$, і не всі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — різні. У цьому випадку добуток однакових двочленів записують у вигляді степеня цього двочлена. Для розв'язання таких нерівностей використовують загальний метод інтервалів.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x+8)(x-1)^2(x-5)<0$. Ліва частина цієї нерівності є добутком, який містить множник $(x-1)^2$. Цей множник за будь-яких значень x, крім 1, є додатним числом. Тому для всіх $x\neq 1$ добуток має той же знак, що й добуток $(x+8)(x-5)$. Отже, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases}(x+8)(x-5)<0;\\ x\neq 1.\end{cases}$ Множиною розв'язків нерівності $(x+8)(x-5)<0$ є проміжок $(-8; 5)$. Щоб знайти всі розв'язки нерівності $(x+8)(x-1)^2(x-5)<0$, потрібно із проміжку $(-8; 5)$ виключити число 1. У результаті одержимо $x\in(-8; 1)\cup(1; 5)$. Узагалі під час переходу через нуль множника парної кратності чергування знаків не відбувається.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x-2)^3(x+1)(x-4)>0$. Позначимо на координатній прямій нулі множників: -1, 2 і 4. Рухаючись справа наліво при переході через нуль множника $(x-2)^3$ — значення 2, добуток $(x-2)^3(x+1)(x-4)$ змінює знак так само, як і добуток $(x-2)(x+1)(x-4)$, оскільки множник $(x-2)^3$ змінює знак (непарний степінь числа має той самий знак, що й перший степінь цього ж числа). У результаті одержимо відповідь $x \in (-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

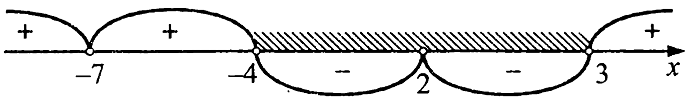
Загальний метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \geq 1$, $n \in N$, якщо не всі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ різні.

1. Привести раціональну нерівність до виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \geq 1$, $n \in N$, якщо не всі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ різні, то добуток однакових двочленів записують у вигляді степеня цього двочлена $P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_n)^{k_n}$, $k_m \geq 1$, $k_m \in N$.

2. Знайти нулі множників, що розташовані в лівій частині нерівності, і розташувати їх на осі Ox у відповідному порядку.

3. Над проміжком праворуч від найбільшого нуля многочлена $P(x)$ поставити знак «+». Потім, рухаючись справа наліво, при переході через черговий нуль змінювати знак на протилежний, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у непарному степені, і зберігати знак, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у парному степені.

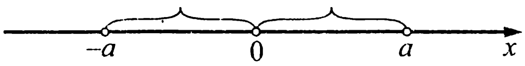
Наприклад, розв'язати нерівність $(x + 7)^4(x + 4)^3(x - 2)^2(x - 3) < 0$. Знайдемо нулі множників: $x = -7$, $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$.



Отже, $x \in (-4; 2) \cup (2; 3)$.

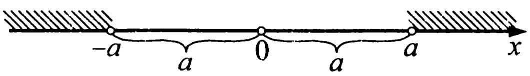
Розв'язування нерівностей з модулем

Розглянемо нерівність $|x| < a$, де $a > 0$. Скористаємося геометричною інтерпретацією модуля числа.



Нерівність виду $|x| < a$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, меншу ніж a, тобто $-a < x < a$, $x \in (-a; a)$. Якщо ж $a \leq 0$, то дана нерівність розв'язків не має. Наприклад, розв'язати нерівність $|5x - 1| < 9$. Задана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 5x - 1 < 9; \\ 5x - 1 > -9, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} 5x < 10; \\ 5x > -8; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2; \\ x > -1{,}6; \end{cases}$ $x \in (-1{,}6; 2)$.

Нерівність виду $|x| > a$, де $a > 0$, задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a, тобто нерівність виду $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} x > a; \\ x < -a. \end{array}\right.$



Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $|x| > a$ є множина $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності $|x| < a$ є множина $x \in (-\infty; +\infty)$, оскільки модуль як невід'ємна величина завжди більша за від'ємне число. Наприклад, розв'язати нерівність $|4x - 5| > 7$. Задана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} 4x - 5 > 7; \\ 4x - 5 < -7, \end{array}\right.$ звідки $\left[\begin{array}{l} 4x > 12; \\ 4x < -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 3; \\ x < -0{,}5; \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (3; +\infty)$.

Розв'язуючи нерівність виду $|f(x)| <> |g(x)|$, застосовують піднесення обох частин нерівності до квадрата.

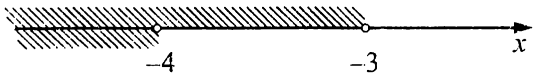
Наприклад, розв'язати нерівність $|2x-1| \le |3x+1|$. При піднесенні до квадрата обох частин нерівності одержимо: $(2x-1)^2 \le (3x+1)^2$; $4x^2-4x+1 \le 9x^2+6x+1$; $5x^2+10x \ge 0$; $x^2+2x \ge 0$; $x(x+2) \ge 0$.

$x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

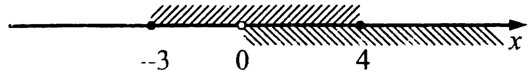
При розв'язуванні нерівностей, які містять кілька виразів під знаком модуля, можна застосувати метод інтервалів. Наприклад, розв'язати нерівність $|2x+6| + |x-4| > 10$. Зазначимо на координатній прямій точки -3 і 4. Розглянемо нерівність на кожному з утворених проміжків.

1) $x < -3$; $-2x-6-x+4 > 10$; $-3x > 12$; $x < -4$.



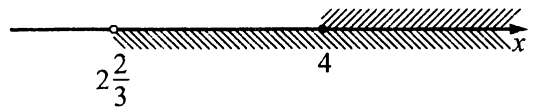
Отже, $x \in (-\infty; -4)$;

2) $-3 \le x \le 4$; $2x+6-x+4 > 10$; $x > 0$.



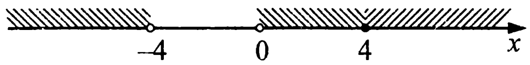
Отже, $x \in (0; 4]$;

3) $x > 4$. $2x+6+x-4 > 10$; $3x > 8$; $x > 2\frac{2}{3}$.



Отже, $x \in (4; +\infty)$.

Об'єднаємо одержані розв'язки:



Одержимо відповідь: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $4(x-2) - 3(x+1) \le 2x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-9; +\infty)$	$(-\infty; 9]$	$(-\infty; -9]$	$[-9; +\infty)$	$\left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right]$

■ $4x-8-3x-3 \le 2x-2$; $4x-3x-2x \le 8+3-2$; $-x \le 9$; $x \ge -9$; $x \in [-9; +\infty)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 2. Знайти суму найбільшого та найменшого натуральних розв'язків нерівності $2 \le \frac{x-1}{2} \le 3$.

А	Б	В	Г	Д
12	10	11	9	8

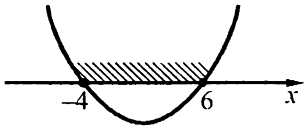
■ $2 \le \frac{x-1}{2} \le 3 \;\big|\cdot 2$; $4 \le x-1 \le 6$; $4+1 \le x \le 6+1$; $5 \le x \le 7$; $x \in [5; 7]$. Найменший розв'язок — число 5, найбільший — 7, а їх сума — $5+7=12$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x-1)(x-3) \le 27-2x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 6]$	$[-4; 5]$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; -4]\cup[6; +\infty)$	$(-4; 6)$

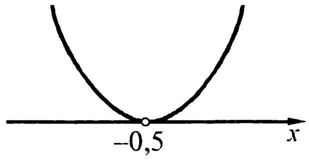
■ $(x-1)(x-3) \le 27-2x$; $x^2-3x-x+3 \le 27-2x$; $x^2-2x-24 \le 0$; $x_1=6$, $x_2=-4$. Одержимо: $x\in[-4; 6]$.



Відповідь. **А.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $4x^2+4x+1>0$.

■ $4x^2+4x+1>0$; $(2x+1)^2>0$.

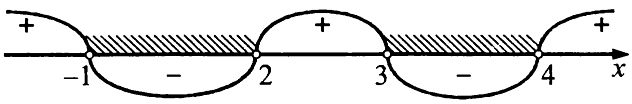


Розв'язком нерівності є всі дійсні числа, крім $x=-0{,}5$.

Відповідь. $(-\infty; -0{,}5)\cup(-0{,}5; +\infty)$. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $(x^2-6x+8)(3-x)(x+1)>0$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ $(x^2-6x+8)(3-x)(x+1)>0$; $(x-2)(x-4)(x-3)(x+1)<0$.

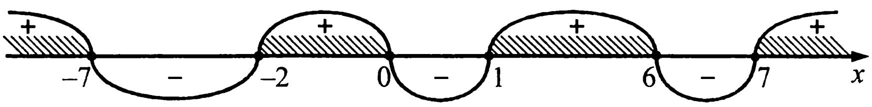


Отже, $x\in(-1; 2)\cup(3; 4)$. Цілими розв'язками нерівності є $x=0$ та $x=1$, а їх сума дорівнює $0+1=1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $(x^3-1)(x^2+2x)(6-x)(49-x^2)\ge 0$. У відповідь записати найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності.

■ $(x^3-1)(x^2+2x)(6-x)(49-x^2)\ge 0$; $x(x-1)(x^2+x+1)(x+2)(x-6)(x-7)(x+7)\ge 0$. З огляду на те, що $x^2+x+1>0$, якщо $x\in R$, поділимо обидві частини нерівності на додатне число x^2+x+1 й розв'яжемо нерівність $x(x-1)(x+2)(x-6)(x-7)(x+7)\ge 0$.



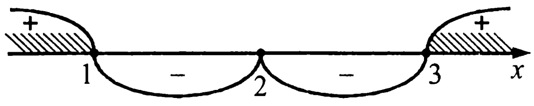
Отже, $x\in(-\infty; -7]\cup[-2; 0]\cup[1; 6]\cup[7; +\infty)$. Найбільший цілий від'ємний розв'язок дорівнює -1.

Відповідь. -1. ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $(x+1)^7(3-x)^5(x-2)^2 \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1]\cup[2; 3]$	$(-\infty; -1]\cup[3; +\infty)$	$(-\infty; -1]\cup\{2\}\cup$ $\cup[3; +\infty)$	$[1; 2]\cup[3; +\infty)$	$(-\infty; 1]\cup\{2\}\cup$ $\cup[3; +\infty]$

■ $(x+1)^7(3-x)^5(x-2)^2 \le 0$; $(x+1)^7(x-3)^5(x-2)^2 \ge 0$.



Отже, $x \in (-\infty;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ +\infty)$. ■

Приклад 8. Знайти найменший розв'язок нерівності $(x+2)^2(x-1) \ge 2(x+2)^2$ на проміжку $(-5;\ 5)$.

А	Б	В	Г	Д
4	5	3	–2	2

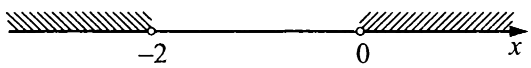
■ $(x+2)^2(x-1) \ge 2(x+2)^2$; $(x+2)^2(x-1) - 2(x+2)^2 \ge 0$; $(x+2)^2(x-1-2) \ge 0$; $(x+2)^2(x-3) \ge 0$; $x - 3 \ge 0$ або $(x + 2)^2 = 0$; $x \ge 3$ або $x = -2$. Найменшим розв'язком нерівності на проміжку $(-5;\ 5)$ є $x = -2$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x + 1| > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$	$(0;\ 2)$	$(-\infty;\ -2)$

■ $|x + 1| > 1$; $\left[\begin{array}{l} x+1>1; \\ x+1<-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>0; \\ x<-2. \end{array}\right.$



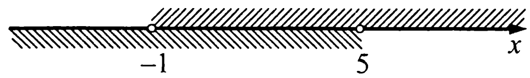
Отже, $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 10. Розв'язати нерівність $|2 - x| < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ -1) \cup (5;\ +\infty)$	$(5;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -1)$	$(-1;\ 5)$	$(-\infty;\ -5) \cup (1;\ +\infty)$

■ $|2 - x| < 3$; $|x - 2| < 3$; $\begin{cases} x-2>-3; \\ x-2<3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1; \\ x<5. \end{cases}$



Отже, $x \in (-1;\ 5)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 11. Розв'язати нерівність $|x - 1| + |x - 2| \le 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[0;\ 3]$	$[0;\ 3)$	$(0;\ 3]$	$(0;\ 3)$	$\varnothing$

■ $|x - 1| + |x - 2| \le 3$. Нулі підмодульних виразів $x = 1$ та $x = 2$.

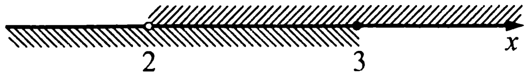
1) $x \in (-\infty;\ 1)$. $-x + 1 + (-x + 2) \le 3$; $-2x + 3 \le 3$; $-2x \le 0$; $x \ge 0$.

Отже, $x \in [0;\ 1)$;

2) $x \in [1;\ 2]$. $x - 1 + (-x + 2) \le 3$; $0x + 1 \le 3$; $0x \le 2$; x — будь-яке число.

Отже, $x \in [1;\ 2]$;

3) $x\in(2; +\infty)$. $x-1+x-2\le 3$; $2x-3\le 3$; $x\le 3$.



Отже, $x\in(2; 3]$.

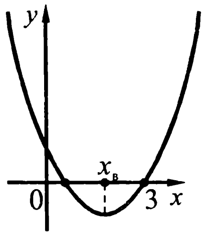
Об'єднавши всі розв'язки, одержимо: $x\in[0; 1)\cup[1; 2]\cup(2; 3] = [0; 3]$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. За якого найменшого цілого значення параметра a нерівність $(a-1)x^2-2x-a>0$ справедлива для довільного $x>3$?

■ Розглянемо випадок, коли $a=1$. Тоді одержимо $-2x-1>0$ або $x<-0{,}5$. У цьому випадку умова задачі не виконується. Нехай $a\ne 1$. Дискримінант тричлена $f(x)=(a-1)x^2-2x-a$ дорівнює: $D=4+4(a-1)a=4(a^2-a+1)>0$ за довільного значення a.

Для виконання умови $f(x)>0$ для всіх значень $x>3$ необхідно, щоб більший корінь тричлена x_2 задовольняв умову $x_2\le 3$ і щоб перший коефіцієнт був додатним.



Тоді: $$\begin{cases} a-1>0; \\ f(3)\ge 0; \\ x_в\le 3; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ 9(a-1)-6-a\ge 0; \\ \dfrac{2}{2(a-1)}\le 3; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ 8a\ge 15; \\ \dfrac{1}{a-1}-3\le 0; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ a\ge 1\dfrac{7}{8}; \\ \dfrac{1-3a+3}{a-1}\le 0; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ a\ge 1\dfrac{7}{8}; \\ \dfrac{3a-4}{a-1}\ge 0; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ a\ge 1\dfrac{7}{8}; \\ a\in(-\infty; 1)\cup\left[1\dfrac{1}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$

Одержимо: $a\ge 1\frac{7}{8}$. Тоді найменше ціле значення $a=2$.

Відповідь. 2. ■

Завдання 9.1–9.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

9.1. Розв'язати нерівність $-4x<20$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5)$	$(-\infty; -5)$	$(5; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(-4; 20)$

9.2. Розв'язати нерівність $\frac{x-1}{2}<2$.

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$	$\left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right)$

9.3. Розв'язати нерівність $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\le 4$.

А	Б	В	Г	Д
$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$[24; +\infty)$	$(-\infty; 24)$	$(-\infty; 24]$

9.4. Розв'язати нерівність $2 < x - 7 \le 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 12]$	$(-5; -2]$	$(9; 12]$	$(-5; 5]$	$(-12; 9]$

9.5. Розв'язати нерівність $-3 \le -x + 4 < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 7]$	$[2; 7)$	$[1; 6)$	$[-3; -2)$	$(1; 6]$

9.6. Розв'язати нерівність $(x + 7)(x - 3) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 7)$	$(-\infty; 3)\cup(7; +\infty)$	$(-\infty; -7)\cup(3; +\infty)$	$(3; 7)$	$(-7; 3)$

9.7. Розв'язати нерівність $x^2 + 7x - 30 \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-10; 3]$	$(-\infty; -10]\cup[3; +\infty)$	$(-\infty; -3]\cup[10; +\infty)$	$[-3; 10]$	$(-\infty; 3]\cup[10; +\infty)$

9.8. Розв'язати нерівність $-x^2 + 3x + 10 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5)$	$(-\infty; -5)\cup(2; +\infty)$	$(-5; 2)$	$(-\infty; -2)\cup(5; +\infty)$	$(-2; 5)$

9.9. Розв'язати нерівність $x^2 > 10$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\sqrt{10}; +\infty\right)$	$\left(-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$	$\left(-\sqrt{10}; +\infty\right)$	$(-\infty; -100)\cup$ $\cup(100; +\infty)$	$\left(-\infty; -\sqrt{10}\right)\cup$ $\cup\left(\sqrt{10}; +\infty\right)$

9.10. Розв'язати нерівність $(x - 1)^2 < 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; 3)$	$(-4; 4)$	$(-3; 5)$	$(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$	$(-\infty; -4)\cup(4; +\infty)$

9.11. Розв'язати нерівність $(x - 3)(x + 5)(4 - x) \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]\cup[3; 4]$	$[-5; 3]\cup[4; +\infty)$	$[-4; -3]\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -4]\cup[-3; 5]$	$(-\infty; 4]$

9.12. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2 - x)^3(x + 2)^2(x - 3) \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
2	$[2; 3]$	0	3	Безліч

9.13. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 2)^2 (x + 3) \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]\cup[2; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$[-3; 2]$	$(-\infty; -3]\cup\{2\}$	$(-\infty; -2]\cup\{3\}$

9.14. Розв'язати нерівність $x(5 - x)^3 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; -5)\cup(0; +\infty)$	$(-\infty;0)\cup(5; +\infty)$	$(-5; 0)$	$(0; 5)$

9.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність $-x - 5 < -3x < x - 1$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

9.16. Розв'язати нерівність $(x^2 - 3x - 10)(x - 1) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)\cup(1; 5)$	$(-2; 1)\cup(5; +\infty)$	$(-5; -1)\cup(2; +\infty)$	$(-\infty; -5)\cup(-1; 2)$	$(1; +\infty)$

9.17. Знайти множину розв'язків нерівності $|x - 5| < 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -13)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; 13)$	$(-13; 3)$	$(-3; 13)$	$(-\infty; -3)\cup(13; +\infty)$

9.18. Розв'язати нерівність $|x + 4| > 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)\cup(-1; +\infty)$	$(-7; -1)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; 1)\cup(7; +\infty)$	$(1; 7)$

9.19. Розв'язати нерівність $|3x| < x + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0{,}5)$	$(0{,}5; +\infty)$	$(-0{,}25; 0{,}5)$	$(-0{,}5; 0)\cup(0; 0{,}25)$	$(0{,}25; +\infty)$

9.20. За яких значень a розв'язком нерівності $(a - 3)x \leq 7$ є проміжок $\left[\dfrac{7}{a-3}; +\infty\right)$?

А	Б	В	Г	Д
$a > 3$	$a \geq 3$	$a \neq 3$	$a < 3$	$a \leq 3$

9.21. Знайти значення параметра a, за якого розв'язками нерівності $3x - 1 < ax + 5$ є усі дійсні числа.

А	Б	В	Г	Д
3	1	5	0	6

9.22. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 4)(a - x) \geq 0$, якщо $a < 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; a]\cup[4; +\infty)$	$[a; 4]$	$[-4; a]$	$(-\infty; -4]\cup[a; +\infty)$	$[4; -a]$

Завдання 9.23–9.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

9.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $5x > 30$
2 $-5x > 30$
3 $5x < 30$
4 $-5x < 30$

А $(-\infty; -6)$
Б $(-\infty; 6)$
В $(-6; +\infty)$
Г $(-6; 6)$
Д $(6; +\infty)$

9.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-1}{3}<1$

2 $\frac{x+1}{3}<1$

3 $\frac{-x+1}{3}<1$

4 $\frac{-x-1}{3}<1$

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; 2)$

В $(-\infty; 4)$

Г $(-4; +\infty)$

Д $(-2; +\infty)$

9.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}<1$

2 $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}<1$

3 $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}<-1$

4 $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}<-1$

А $(-\infty; -12)$

Б $(-\infty; 12)$

В $(-12; 12)$

Г $(-12; +\infty)$

Д $(12; +\infty)$

9.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x-8)(x-3)<0$

2 $(x-8)(x+3)>0$

3 $(x+8)(x-3)<0$

4 $(x+8)(x+3)>0$

А $(-\infty; -8)\cup(-3; +\infty)$

Б $(-\infty; -3)\cup(8; +\infty)$

В $(-\infty; 3)\cup(8; +\infty)$

Г $(-8; 3)$

Д $(3; 8)$

9.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x-2)(x+3)<0$

2 $(2-x)(x+3)<0$

3 $(x+2)(x-3)<0$

4 $(x+2)(3-x)<0$

А $(-\infty; -3)\cup(2; +\infty)$

Б $(-\infty; -2)\cup(3; +\infty)$

В $(-3; -2)$

Г $(-3; 2)$

Д $(-2; 3)$

9.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x+3)^2x(x-1)\le 0$

2 $x^2(x+3)\,(x-1)\le 0$

3 $(x+3)x(x-1)^2\le 0$

4 $(x+3)^2x(x-1)^2\le 0$

А $(-\infty; 0]$

Б $(-\infty; 0]\cup\{1\}$

В $[-3; 1]$

Г $[-3; 0]\cup\{1\}$

Д $\{-3\}\cup[0; 1]$

9.29. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2+x-6<0$

2 $x^2-x-6<0$

3 $-x^2+x+12<0$

4 $-x^2-6x-10<0$

А $\varnothing$

Б $(-\infty; +\infty)$

В $(-2; 3)$

Г $(-3; 2)$

Д $(-\infty; -3)\cup(4; +\infty)$

9.30. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $3 < x - 2 < 5$	**А** $(-7; -5)$
2 $3 < x + 2 < 5$	**Б** $(-3; -1)$
3 $3 < -x - 2 < 5$	**В** $(-1; 3)$
4 $3 < -x + 2 < 5$	**Г** $(1; 3)$
	Д $(5; 7)$

9.31. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\|x - 2\| < 5$	**А** $(-7; -3)$
2 $\|x + 2\| < 5$	**Б** $(-7; 7)$
3 $\|x - 5\| < 2$	**В** $(-7; 3)$
4 $\|x + 5\| < 2$	**Г** $(-3; 7)$
	Д $(3; 7)$

9.32. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\|x - 3\| > 4$	**А** $(-\infty; -7)\cup(1; +\infty)$
2 $\|x - 4\| > 3$	**Б** $(-\infty; -7)\cup(-1; +\infty)$
3 $\|x + 4\| > 3$	**В** $(-\infty; -7)\cup(-1; +\infty)$
4 $\|x + 3\| > 4$	**Г** $(-\infty; -1)\cup(7; +\infty)$
	Д $(-\infty; 1)\cup(7; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 9.33–9.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

9.33. Розв'язати нерівність $\frac{2-x}{4}+1<\frac{2x-1}{10}-\frac{2x-3}{6}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

9.34. Розв'язати нерівність $7 < 1 - 3x < 16$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

9.35. Розв'язати нерівність $x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2$. У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.36. Розв'язати нерівність $2 \le x^2 + x < 6$. У відповідь записати найменший додатний розв'язок.

9.37. Розв'язати нерівність $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) \le 0$. У відповідь записати кількість додатних цілих розв'язків.

9.38. Розв'язати нерівність $x^6 - 9x^3 + 8 < 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків.

9.39. Розв'язати нерівність $(x - 2)^4 - 13(x - 2)^2 + 36 \le 0$. У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.40. Розв'язати нерівність $1 < |x - 2| < 5$. У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.41. Розв'язати нерівність $x^2 - 3|x| + 2 \le 0$. У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.42. Розв'язати нерівність $|3x - 8| < x - 2$. У відповідь записати середину проміжку, який є розв'язком нерівності.

9.43. Розв'язати нерівність $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) \le -5$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків.

9.44. Розв'язати нерівність $|x^2 - x + 1| \ge |x^2 - 3x + 4|$. У відповідь записати найменший розв'язок.

9.45. Розв'язати нерівність $|x - 1| + |x + 1| < 4$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

Тема 10. Раціональні рівняння

Раціональним називають рівняння виду $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ — раціональні вирази. Якщо хоча б один із цих виразів дробовий, то рівняння називають *дробовим*.

Наприклад, $\frac{x+1}{5x-7} = \frac{3}{4-x}$ — дробове раціональне рівняння.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, потрібно розв'язати алгебраїчне рівняння $P(x) = 0$ і вилучити ті його корені, за яких $Q(x) = 0$ (якщо такі є).

Схема розв'язування дробових раціональних рівнянь

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:

1) звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$;

2) розв'язати рівняння $P(x) = 0$;

3) перевірити корені рівняння $P(x) = 0$ на виконання умови $Q(x) \neq 0$.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{3x}{x+2} = \frac{1}{x}$; $\frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x} = 0$; $\frac{3x^2-(x+2)}{x(x+2)} = 0$; $\begin{cases} 3x^2-(x+2)=0; \\ x(x+2) \neq 0; \end{cases}$ $3x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$. За значень змінної 1 і $-\frac{2}{3}$ вираз $x(x+2)$ не дорівнює нулю. Отже, $-\frac{2}{3}$ і 1 — корені рівняння.

Зауваження. Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна спочатку знайти його ОДЗ; помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник; розв'язати одержане ціле рівняння й перевірити, чи всі знайдені розв'язки входять до ОДЗ (якщо знайдений розв'язок не входить до ОДЗ, то він не є коренем заданого рівняння).

Розв'язування рівнянь методом заміни

Розв'язати рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 9.$ Нехай $x+\frac{1}{x} = t,$ тоді $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = t^2$; $x^2 + 2x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$, звідки $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Отже, одержали рівняння $7t - 2(t^2 - 2) = 9$; $2t^2 - 7t + 5 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2{,}5; \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x} = 2{,}5; \\ x+\frac{1}{x} = 1; \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0; \\ x^2-x+1=0; \end{array}\right. \\ x \neq 0. \end{cases}$ Перше рівняння має коренями числа $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$, а друге рівняння дійсних коренів не має.

Відповідь. 2; 0,5.

Рівняння виду $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = D$ та рівняння виду $\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} + \frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c} = A$

Загальний метод розв'язування рівнянь виду $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = D$ полягає у діленні чисельника та знаменника на $x \neq 0$ та використанні заміни $t = ax + \frac{c}{x}$ в отриманому рівнянні $\frac{Ax}{ax+b_1+\frac{c}{x}} + \frac{Bx}{ax+b_2+\frac{c}{x}} = D$. За допомогою такої заміни останнє рівняння зводиться до квадратного.

Наприклад, $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$. ОДЗ: $x\neq 2\pm\sqrt{2}$. Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то, розділивши чисельник і знаменник кожного дробу у лівій частині рівняння на x, одержимо рівняння, рівносильне вихідному: $\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4}$. Виконаємо заміну: $x+\frac{2}{x}=t$. Тоді одержимо: $\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}=-\frac{5}{4}$; $\begin{cases}8(t+1)+12(t-4)=-5(t-4)(t+1);\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}t^2+t-12=0;\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t_1=-4;\\ t_2=3;\end{array}\right.\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=-4;\\ t_2=3.\end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $x+\frac{2}{x}=-4$; $\left[\begin{array}{l}x^2+4x+2=0;\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1=-2-\sqrt{2};\\ x_2=-2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ або $x+\frac{2}{x}=3$; $\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0;\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_3=1;\\ x_4=2.\end{array}\right.$

Відповідь. 1; 2; $-2\pm\sqrt{2}$.

Симетричні рівняння третього степеня

Рівняння виду $ax^3+bx^2+bx+a=0$, де $a\neq 0$, $b\in R$, називають *симетричним* рівнянням третього степеня.

1. Симетричне рівняння третього степеня має коренем число $x=-1$. Справді, $a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+a=-a+b-b+a=0$; $0=0$.

2. Діленням многочлена ax^3+bx^2+bx+a на двочлен $x+1$ рівняння зводиться до квадратного. Наприклад, розв'язати рівняння $3x^3-7x^2-7x+3=0$. Оскільки $x=-1$ — корінь рівняння, то $3x^3-7x^2-7x+3=0\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-10x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ 3x^2-10x+3=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1;\\ x_2=3;\\ x_3=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Відповідь. -1; $\frac{1}{3}$; 3.

Симетричні рівняння четвертого степеня

Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, де $a\neq 0$, $b\in R$, $c\in R$, називають *симетричним* рівнянням четвертого степеня. Для розв'язування рівняння такого виду можна:

1. Поділити обидві частини рівняння на x^2 і згрупувати вирази так: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$.

2. Уведенням заміни $x+\frac{1}{x}=t$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, зведемо рівняння до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$. Очевидно, що $x=0$ не є коренем заданого рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$: $2x^2+x-11+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$;

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$; $\begin{cases}x+\frac{1}{x}=t;\\ 2t^2+t-15=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+\frac{1}{x}=t;\\ \left[\begin{array}{l}t_1=2{,}5;\\ t_2=-3;\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x+\frac{1}{x}=2{,}5;\\ x+\frac{1}{x}=-3;\end{array}\right.$ $\begin{cases}x\neq 0;\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-5x+2=0;\\ x^2+3x+1=0;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=2;\\ x_2=0{,}5;\\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$

Відповідь. $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2; 0,5.

Дробові раціональні рівняння з параметрами

Дробові раціональні рівняння з параметрами розв'язують, як звичайні рівняння, але тільки доти, доки кожне перетворення можна виконувати однозначно. Якщо ж перетворення не можна виконувати однозначно, то розв'язання слід розбити на кілька випадків.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2}=2+\frac{a}{x}$. ОДЗ: $x\neq-2$; $x\neq0$. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $x(x+2)$ й одержимо ціле рівняння, яке за умови $x(x+2)\neq0$ рівносильне заданому: $2x^2=2x(x+2)+a(x+2)$; $2x^2=2x^2+4x+ax+2a$; $4x+ax+2a=0$; $(4+a)x=-2a$. Якщо $4+a=0$, тобто $a=-4$, то одержимо: $0x=8$ — рівняння коренів не має; якщо $a\neq-4$, то матимемо: $x=\frac{-2a}{4+a}$. З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять до ОДЗ заданого рівняння, тобто знайдемо такі значення a, за яких $x=-2$ або $x=0$. $\frac{-2a}{4+a}=-2$; $2a=2(4+a)$; $2a=8+2a$; $0a=8$; $a\in\varnothing$. Отже, не існує такого значення a, щоб $x=-2$. Знайдемо значення a, за якого $x=0$: $\frac{-2a}{4+a}=0$; $a=0$.

Відповідь. Якщо $a=0$ або $a=-4$, то рівняння коренів не має; якщо $a\neq0$ і $a\neq-4$, то $x=\frac{-2a}{4+a}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$.

■ $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$. ОДЗ: $x\neq6\pm\sqrt{21}$. $x=0$ не є коренем даного рівняння. Розділимо чисельник і знаменник кожного із дробів на $x\neq0$ й одержимо: $\frac{x+\frac{15}{x}-10}{x+\frac{15}{x}-6}=\frac{4}{x+\frac{15}{x}-12}$. Виконаємо заміну $x+\frac{15}{x}=t$. Тоді $\frac{t-10}{t-6}=\frac{4}{t-12}$; $\begin{cases}t^2-26t+144=0;\\ t\neq6;\\ t\neq12;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t_1=18;\\ t_2=8;\end{array}\right.\\ t\neq6;\\ t\neq12;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=18;\\ t_2=8.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

$x+\frac{15}{x}=18$; $\left[\begin{array}{l}x^2-18x+15=0;\\ x\neq0;\end{array}\right.$ $x=9\pm\sqrt{66}$ або $x+\frac{15}{x}=8$; $\left[\begin{array}{l}x^2-8x+15=0;\\ x\neq0;\end{array}\right.$ $x=5$; $x=3$.

Відповідь. $9\pm\sqrt{66}$; 5; 3.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	2 і 3

■ $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$; $\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$;

$\frac{2}{(x-2)(x+2)}^{\backslash x}+\frac{x-4}{x(x+2)}^{\backslash x-2}-\frac{1}{x(x-2)}^{\backslash x+2}=0$; $\frac{2x+(x-2)(x-4)-(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=0$; $\frac{2x+x^2-6x+8-x-2}{x(x-2)(x+2)}=0$;

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0; \\ x\neq 0; \\ x\neq \pm 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=2; \\ x_2=3; \end{array}\right. \\ x\neq 0; \quad x=3. \\ x\neq \pm 2; \end{cases}$$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2{,}5.$

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	–2,5	0,5	1

■ $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2{,}5;$ ОДЗ: $x\neq 0$. Нехай $\dfrac{x^2+1}{x}=t,$ тоді $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{t}.$ Маємо: $t+\dfrac{1}{t}+\dfrac{5}{2}=0;$ $\begin{cases} 2t^2+5t+2=0; \\ t\neq 0; \end{cases}$ $t_1=-0{,}5;\ t_2=-2.$ Повернемося до заміни: $\dfrac{x^2+1}{x}=-0{,}5;$ $2x^2+2=-x;$ $2x^2+x+2=0;$ $D<0$, рівняння не має коренів; $\dfrac{x^2+1}{x}=-2;$ $x^2+1=-2x;$ $x^2+2x+1=0;$ $(x+1)^2=0;$ $x=-1.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{13x}{3x^2-5x+2}-\dfrac{12x}{3x^2+x+2}=5.$ У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

■ Перевіркою встановлюємо, що $x=0$ не є коренем рівняння. Поділимо чисельник і знаменник кожного дробу на $x\neq 0$, одержимо: $\dfrac{13}{3x-5+\frac{2}{x}}-\dfrac{12}{3x+1+\frac{2}{x}}=5.$ Нехай $3x+\dfrac{2}{x}=t,$ тоді останнє рівняння можна записати у вигляді: $\dfrac{13}{t-5}-\dfrac{12}{t+1}=5;$ $\begin{cases} 13(t+1)-12(t-5)=5(t-5)(t+1); \\ t\neq 5; \\ t\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5t^2-21t-98=0; \\ t\neq 5; \\ t\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1=-2{,}8; \\ t_2=7; \end{array}\right. \\ t\neq 5; \\ t\neq 1. \end{cases}$

Повертаючись до заміни, матимемо: $3x+\dfrac{2}{x}=-2{,}8;$ $15x^2+14x+10=0;$ $D<0$, рівняння коренів не має; $3x+\dfrac{2}{x}=7;$ $3x^2-7x+2=0;$ $x_1=\dfrac{1}{3};$ $x_2=2.$ Найбільшим коренем рівняння є $x=2$.

Відповідь. 2. ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0.$ У відповідь записати суму його коренів.

■ Поділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$ й одержимо: $2x^2+3x-4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0;$ $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-4=0.$ Нехай $x-\dfrac{1}{x}=t,$ тоді $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=t^2+2.$ Одержимо: $2(t^2+2)+3t-4=0;$ $2t^2+3t=0;$ $t(2t+3)=0;$ $\left[\begin{array}{l} t_1=0; \\ t_2=-1{,}5. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: 1) $x-\dfrac{1}{x}=0;$ $x^2-1=0;$

$x^2 = 1$; $x = \pm 1$; 2) $x - \frac{1}{x} = -1{,}5$; $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 0{,}5$. Отже, рівняння має 4 корені. Їхня сума дорівнює: $-1 + 1 - 2 + 0{,}5 = -1{,}5$.

Відповідь. –1,5. ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{1}{x} = 3x - 6$. У відповідь записати число, обернене до добутку коренів рівняння.

■ $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{1}{x} = 3x - 6$; $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{1}{x} - 3x + 6 = 0$; $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{3x^2 - 6x + 1}{x} = 0$. Урахувавши, що $x \neq 0$, одержимо: $\frac{12}{3x + \frac{1}{x} - 10} - \frac{3x + \frac{1}{x} - 6}{1} = 0$. Нехай $3x + \frac{1}{x} = t$, тоді одержимо:

$\frac{12}{t - 10} - \frac{t - 6}{1} = 0$, $\begin{cases} 12 - (t - 6)(t - 10) = 0; \\ t \neq 10; \end{cases}$ $\begin{cases} t^2 - 16t + 48 = 0; \\ t \neq 10; \end{cases}$ $\left[\begin{aligned} t_1 &= 4; \\ t_2 &= 12. \end{aligned}\right.$ Повернувшись до заміни, одержимо: $\left[\begin{aligned} 3x + \frac{1}{x} &= 4; \\ 3x + \frac{1}{x} &= 12; \end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 1 &= 0; \\ 3x^2 - 12x + 1 &= 0. \end{aligned}\right.$ Обидва рівняння мають корені. Тоді добуток коренів першого рівняння дорівнює $\frac{1}{3}$, другого — $\frac{1}{3}$, обох рівнянь — $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Число, обернене до числа $\frac{1}{9}$, — 9.

Відповідь. 9. ■

Приклад 7. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\frac{(x + a)(x - 5a)}{x + 7} = 0$ має єдиний корінь. У відповідь записати найменший з них.

■ ОДЗ: $x \neq -7$. На ОДЗ дане рівняння рівносильне рівнянню $(x + a)(x - 5a) = 0$; $x + a = 0$ або $x - 5a = 0$; $x = -a$ або $x = 5a$. З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто за яких значень a буде виконуватися рівність $x = -7$. Одержуємо: 1) $-a = -7$; $a = 7$; 2) $5a = -7$; $a = -1{,}4$. Якщо $a = 7$, то тоді $x = 5a = 35$ — єдиний корінь. Якщо $a = -1{,}4$, то тоді $x = -a = 1{,}4$ — єдиний корінь. Задане рівняння матиме єдиний корінь і тоді, коли $-a = 5a \neq 7$, тобто якщо $a = 0$. Отже, одержали: $a = 7$, $a = -1{,}4$, $a = 0$. Найменше значення a дорівнює $-1{,}4$.

Відповідь. –1,4. ■

Завдання 10.1–10.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

10.1. Розв'язати рівняння $\frac{x - 5}{x - 5} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
R	5	$\varnothing$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

10.2. Розв'язати рівняння $\frac{x - 5}{x - 5} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
5	R	$\varnothing$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

10.3. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-x}{x-3}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	R	$(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$	$(-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$	-3

10.4. Розв'язати рівняння $5x+\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{x^2-9}+10$.

А	Б	В	Г	Д
$\{2; 3\}$	$\varnothing$	$\{-3; 2; 3\}$	$\{-3; 3\}$	$\{2\}$

10.5. Розв'язати рівняння $6x+\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{x^2-9}+18$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$\{0\}$	$\{-3\}$	$\{-3; 3\}$	$\{3\}$

10.6. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^3-4x}{x^2-4}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$\{2\}$	$\{-2; 2\}$	$\{-2; 0; 2\}$	$\{0\}$

10.7. Розв'язати рівняння $\dfrac{\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)}{(x-3)(x+4)}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-4; -3; 3; 4\}$	$\{3; 4\}$	$\{-3; -4\}$	$\{-3; 4\}$	$\{-4; 3\}$

10.8. Знайти суму коренів рівняння $\dfrac{(x-3)(x-5)}{x-2}=0$.

А	Б	В	Г	Д
5	–8	–1	8	10

10.9. Розв'язати рівняння $\dfrac{3x+4}{x+1}=2$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-1\}$	$\left\{-1; -\dfrac{4}{3}\right\}$	$\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$	$\{-2\}$	$\{2\}$

10.10. Вказати інтервал, який містить корені рівняння $\dfrac{3}{x}=\dfrac{2}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; -3)$	$(-1; 2)$	$(2; 4)$	$(-2; 1)$	$(-4; -2)$

10.11. Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{x-7}+\dfrac{1}{x+4}=0$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 2)$	$(-2; -1)$	$(-4; -2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$

10.12. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}+1=0$ і вказати проміжок, якому належить більший його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(2; 3)	(4; 5)	(3; 4)	(4; +∞)

10.13. Знайти суму коренів рівняння $\frac{x}{3}=\frac{5}{x+2}$.

А	Б	В	Г	Д
2	–2	15	–15	5

10.14. Встановити значення a, за яких рівняння $\frac{x-a}{x^2-8x+15}=0$ не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a=15$	$a=3$ або $a=5$	$a=8$	$a=-3$ або $a=-5$	$a=-8$

10.15. Встановити значення a, за яких рівняння $\frac{x-5}{x+9}=\frac{a-x}{x+9}$ не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a=-23$	$a=-9$	$a=5$	$a=23$	$a=9$

10.16. За якого найменшого значення параметра a рівняння $|4x+3|=5a+3$ має розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
1,25	–3	3	–0,6	1

10.17. Катер проходить 160 км за течією річки за той же час, що й 140 км проти течії. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.
Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо власну швидкість катера позначено через x км/год?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x+2}{160}=\frac{2x}{140}$	$\frac{x-2}{140}=\frac{x}{160}$	$\frac{160}{x-2}=\frac{140}{x+2}$	$\frac{160}{x+2}=\frac{140}{x}x$	$\frac{160}{x+2}=\frac{140}{x-2}$

10.18. Робітник повинен був виготовити за деякий час 90 деталей. Щоденно він виготовляв на 3 деталі більше, ніж планувалося, і тому завдання виконав на 1 день раніше. Скільки деталей щоденно виготовляв робітник?
Кількість деталей, що виготовляє робітник за 1 день, позначено через x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{90}{x-1}-\frac{90}{x}=3$	$\frac{90}{x-3}-\frac{90}{x}=1$	$\frac{90}{x}-\frac{90}{x-3}=1$	$\frac{90}{x}-\frac{90}{x-1}=3$	$90(x-3)-$ $-90x=1$

10.19. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 300 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість першого з них на 10 км/год більша від швидкості другого, а тому він приїхав до місця призначення на 1 год раніше. Знайти швидкість кожного з автомобілів.
Швидкість першого автомобіля позначено через x км/год. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-1}-\frac{300}{x}=10$	$\frac{300}{x}-\frac{300}{x-1}=10$	$\frac{300}{x}-\frac{300}{x-10}=1$	$\frac{300}{x-10}-\frac{300}{x}=1$	$\frac{x-10}{300}-\frac{x}{300}=1$

10.20. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 60 год. За скільки годин може виконати всю роботу кожний з робітників, працюючи окремо, якщо перший з них може це зробити на 22 год швидше, ніж другий?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо час, за який може виконати завдання перший робітник, позначено через x год?

А	Б	В	Г	Д
$x+(x+22)=60$	$x+(x-22)=60$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=60$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=\frac{1}{60}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-22}=\frac{1}{60}$

10.21. На заводі за певний термін повинні були відремонтувати 300 вагонів. Перевиконуючи план ремонту на 3 вагони за тиждень, за два тижні до закінчення терміну відремонтували 299 вагонів. Скільки вагонів ремонтували щотижня?

Кількість вагонів, які ремонтували за тиждень, позначено через x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-3}-\frac{299}{x}=2$	$\frac{300}{x}-\frac{299}{x-3}=2$	$\frac{300}{x-2}-\frac{299}{x}=3$	$\frac{300}{x}-\frac{299}{x-2}=3$	$\frac{299}{x-3}-\frac{300}{x}=2$

Завдання 10.22–10.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

10.22. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1 $\frac{x}{x-1}=-\frac{2}{x+1}$

2 $x^2+3x-2=0$

3 $\sqrt{x}(x+1)(x-2)=0$

4 $x^2+7=0$

А $(x+1)(x-2)=0$

Б $x(x-2)=0$

В $x^4+13=0$

Г $\begin{cases} x(x+1)=-2(x-1); \\ (x-1)(x+1)\neq 0 \end{cases}$

Д $x(x+1)=-2(x-1)$

10.23. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-4}{x-4}=0$

2 $\frac{x-4}{x-4}=1$

3 $\frac{x^2-16}{x+4}=0$

4 $\frac{x^2-16}{x+4}=1$

А $\{4\}$

Б $\{5\}$

В $(-\infty;\, 4)\cup(4;\, +\infty)$

Г $(-\infty;\, 5)\cup(5;\, +\infty)$

Д $\varnothing$

10.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $2x+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+10$

2 $2x^2+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+50$

3 $2x^2+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+5}+50$

4 $2x^2+\frac{x-5}{x}=\frac{x-5}{x}+50$

А $\{-5; 5\}$
Б $\{0\}$
В $\varnothing$
Г $\{-5\}$
Д $\{5\}$

10.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x-5)}=0$

2 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x+2)(x+5)}=0$

3 $\frac{(x+2)(x-5)}{(x^2-4)(x^2-25)}=0$

4 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x+5)}=0$

А $\{-2; 5\}$
Б $\{-2; -5\}$
В $\{2; 5\}$
Г $\{2; -5\}$
Д $\varnothing$

10.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{2x-4}{x-2}=1$

2 $\frac{3x+2}{x+2}=1$

3 $\frac{(2x+3)(x-2)}{x^2-4}=1$

4 $\frac{4x-3}{x-2}=-1$

А $\{1\}$
Б $\{-1\}$
В $\{0\}$
Г $\{2\}$
Д $\varnothing$

10.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{4}{x}=\frac{3}{x+1}$

2 $\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$

3 $\frac{1}{x-3}=\frac{2}{9-x}$

4 $\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-3}$

А $\{-5\}$
Б $\{-4\}$
В $\{4\}$
Г $\{5\}$
Д $\{6\}$

Розв'яжіть завдання 10.28–10.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

10.28. Розв'язати рівняння $\frac{2x-2}{x+2}+\frac{x+3}{x-3}-5=0$. У відповідь записати суму коренів.

10.29. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$.

10.30. Розв'язати рівняння $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3}{2x^2+6x}$.

10.31. Розв'язати рівняння $\frac{5}{4x^2+4x+4}-\frac{3x}{x^3-1}=\frac{1}{2(x-1)}$. У відповідь записати найменший корінь.

10.32. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$. У відповідь записати добуток коренів.

10.33. Розв'язати рівняння $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$. У відповідь записати суму коренів.

10.34. Розв'язати рівняння $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^4-8\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2=9$. У відповідь записати найбільший корінь.

Розв'язати задачі за допомогою рівнянь (10.35–10.37).

10.35. З пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює 60 км, спочатку виїхав автобус, а через 20 хв — легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год вища, ніж швидкість автобуса. Знайти швидкість автобуса у км/год, якщо він приїхав до пункту B на 10 хв пізніше від легкового автомобіля.

10.36. Бригада робітників повинна була за кілька днів виготовити 272 деталі. Перші десять днів бригада виконувала встановлену норму, а потім почала виготовляти щоденно на 4 деталі більше, ніж за нормою. Тому за один день до терміну було виготовлено 280 деталей. Скільки деталей повинна була виготовляти бригада щоденно за планом?

10.37. Басейн наповнюється водою двома трубами за 6 год. Перша труба може заповнити басейн водою на 5 год швидше, ніж друга. За скільки годин може заповнити весь басейн лише перша труба?

10.38. Розв'язати рівняння $9\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=14$. У відповідь записати суму коренів.

10.39. Розв'язати рівняння $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$. У відповідь записати найменший корінь.

10.40. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$. У відповідь записати найбільший корінь.

10.41. Розв'язати рівняння $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$. У відповідь записати найбільший корінь.

10.42. Знайти всі значення параметра a, за яких рівняння $\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}+a=0$ має тільки один корінь. У відповідь записати найбільше значення a.

Тема 11. Раціональні нерівності

Нерівності виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \lozenge 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, $\lozenge$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають *дробово-раціональними*. Шляхом виконання рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної.

1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x)\cdot Q(x) > 0;$

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x)\cdot Q(x) < 0;$

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$

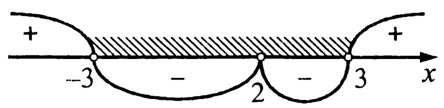
4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени відносно x. Нерівності $P(x)\cdot Q(x) > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ($P(x)\cdot Q(x) < 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$) рівносильні. Розглянемо випадок, коли многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ розкладаються у добутки двочленів виду $x - x_0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -3; \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тоді одержимо:

$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$; $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x(x-2)+2(x+3)-5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-2)} < 0$;

$\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} < 0$. Тоді $(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0$. Нулі множників: $x = 3$, $x = -3$, $x = 2$.



Отже, $x \in (-3; 2) \cup (2; 3)$.

Відповідь. $(-3; 2) \cup (2; 3)$.

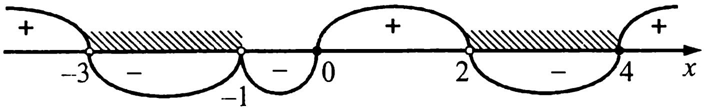
Зауваження. Розв'язки нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ та $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ є об'єднаннями розв'язків відповідних нерівностей $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ та рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Наприклад, знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$. Маємо:

$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$; $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0$; $\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0$;

$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$; $\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0; \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$

Нулі чисельника: $x = 4$, $x = 0$; нулі знаменника: $x = -3$, $x = -1$; $x = 2$.



Отже, $\left[\begin{array}{l} -3 < x < -1; \\ -1 < x \le 0; \\ 2 < x \le 4. \end{array}\right.$ Цілими розв'язками є –2; 0; 3; 4.

Відповідь. 4.

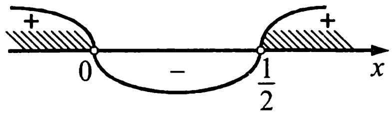
Розв'язування дробових раціональних нерівностей з параметром

Розглянемо приклад: розв'язати нерівність $\dfrac{x-2}{ax-1} < 0$. Якщо $a = 0$, то одержимо лінійну нерівність $-(x-2) < 0$, тобто $x > 2$.

Нехай $a \ne 0$, тоді дана нерівність рівносильна нерівності $a(x-2)\left(x-\dfrac{1}{a}\right) < 0$. Застосуємо для розв'язування цієї нерівності метод інтервалів. Нулі множників: $x_1 = 2$ та $x_2 = \dfrac{1}{a}$, до того ж:

1) $x_1 = x_2 = 2$, якщо $a = 0{,}5$;

2) $x_2 < x_1$, якщо $\dfrac{1}{a} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} - 2 < 0$; $\dfrac{1-2a}{a} < 0$; $2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)a > 0$; $a < 0$ або $a > 0{,}5$;



3) $x_1 < x_2$, якщо $a \in (0;\ 0{,}5)$.

Розглянемо випадки.

1) $a = 0{,}5$. У цьому випадку нерівність набуває вигляду $(x-2)^2 < 0$, що неможливо. Отже, якщо $a = 0{,}5$, то вихідна нерівність не має розв'язків;

2.1) $a < 0$. $a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2) > 0$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$;

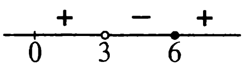
2.2) $a \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. $a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $x \in \left(\dfrac{1}{a}; 2\right)$;

2.3) $a \in (0;\ 0{,}5)$. $a(x-2)\left(x-\dfrac{1}{a}\right) < 0$; $(x-2)\left(x-\dfrac{1}{a}\right) < 0$; $x \in \left(2; \dfrac{1}{a}\right)$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$; якщо $a = 0$, то $x \in (2; +\infty)$; якщо $a \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, то $x \in \left(2; \dfrac{1}{a}\right)$; якщо $a = 0{,}5$, то $x \in \varnothing$; якщо $a > 0{,}5$, то $x \in \left(\dfrac{1}{a}; 2\right)$.

Приклад 1. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\dfrac{6-x}{3x-9} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
3; 4; 5; 6	інша відповідь	3	4	4; 5; 6

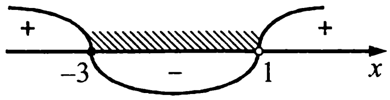
■ $\dfrac{6-x}{3x-9} \ge 0$; $\dfrac{-(x-6)}{3(x-3)} \ge 0 \,\Big|\cdot(-3)$; $\dfrac{x-6}{x-3} \le 0$; 

. Отже, $x \in (3; 6]$. Цілими розв'язками нерівності є 4; 5; 6 і їх кількість дорівнює 3.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{5x+7}{x-1} \le 2$.

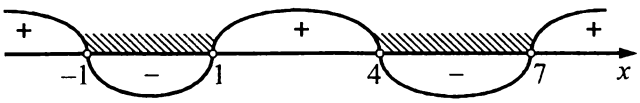
■ $\dfrac{5x+7}{x-1} \le 2$; $\dfrac{5x+7}{x-1} - 2 \le 0$; $\dfrac{5x+7-2(x-1)}{x-1} \le 0$; $\dfrac{3x+9}{x-1} \le 0 \;\Big|:3$; $\dfrac{x+3}{x-1} \le 0$;



Отже, розв'язок нерівності — $x \in [-3;\ 1)$.
Відповідь. $[-3;\ 1)$. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7} > 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

■ $\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7} > 0$; $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)} < 0$; $(x-1)(x-4)(x+1)(x-7) < 0$. Нулі множників: $x=-1$, $x=1$, $x=4$, $x=7$.



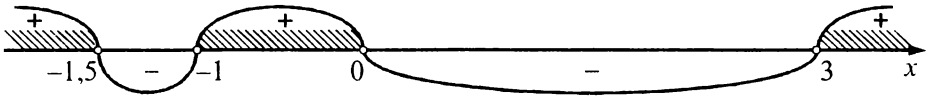
Отже, $x \in (-1;\ 1) \cup (4;\ 7)$. Цілими розв'язками є 0; 5; 6.
Відповідь. 3. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\dfrac{x}{2x+3} > \dfrac{1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup$ $\cup(3;+\infty)$	$(-1{,}5;-1)\cup$ $\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-1{,}5]\cup$ $\cup[-1;0]\cup$ $\cup[3;+\infty)$	$(-1{,}5;1)\cup(0;3)$	$(-\infty;-1{,}5)\cup$ $\cup(-1;0)\cup$ $\cup(3;+\infty)$

■ $\dfrac{x}{2x+3} > \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{x}{2x+3} - \dfrac{1}{x} > 0$; $\dfrac{x^2-(2x+3)}{x(2x+3)} > 0$; $\dfrac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} > 0$; $\dfrac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0$;

$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0$. Нулі множників: $x=-1$, $x=3$, $x=0$, $x=-1{,}5$.



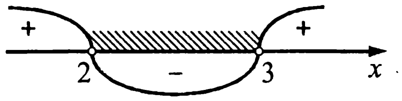
Отже, $x \in (-\infty;\ -1{,}5) \cup (-1;\ 0) \cup (3;\ +\infty)$.
Відповідь. Д. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in R$	$(2;\ 3)$	$(-\infty;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -7)\cup(2;\ 3)$

■ Оскільки $|x|+7>0$ за будь-якого значення x, то маємо: $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$; $x^2-5x+6<0$;

$(x-2)(x-3)<0$.



Отже, $x \in (2; 3)$.
Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2} \ge -3x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

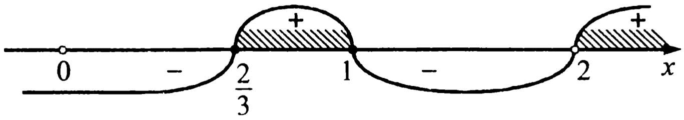
■ $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2} \ge -3x$. Знайдемо ОДЗ нерівності $x^2 - |x| - 2 \ne 0$.

1) $x \ge 0$: $x^2 - x - 2 \ne 0$; $\left[\begin{array}{l} x \ne 2; \\ x \ne -1; \end{array}\right.$ $x \ne 2$;

2) $x < 0$: $x^2 + x - 2 \ne 0$; $\left[\begin{array}{l} x \ne -2; \\ x \ne 1; \end{array}\right.$ $x \ne -2$.

Отже, $x \ne \pm 2$.

1) Нехай $x \ge 0$, $x \ne 2$, тоді отримаємо: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} \ge -3x$; $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \ge -3x$; $\dfrac{x+2}{x-2} \ge -3x$; $\dfrac{x+2}{x-2} + 3x \ge 0$; $\dfrac{x+2+3x^2-6x}{x-2} \ge 0$; $\dfrac{3x^2-5x+2}{x-2} \ge 0$; $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{x-2} \ge 0$; $(x-1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-2) \ge 0$.



Отже, $x \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$.

2) нехай $x < 0$, $x \ne -2$, тоді отримаємо: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2} \ge -3x$; $\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} \ge -3x$; $\dfrac{x+1}{x-1} + 3x \ge 0$; $\dfrac{x+1+3x(x-1)}{x-1} \ge 0$; $\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1} \ge 0$. Квадратний тричлен $3x^2 - 2x + 1$ має від'ємний дискримінант, перший коефіцієнт $a = 3 > 0$, тому за всіх значень x набуває тільки додатних значень, тому одержимо нерівність $x - 1 > 0$, звідки $x \in \varnothing$.

Розв'язками вихідної нерівності є $x \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$, а найменший цілий розв'язок нерівності $x = 1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$.

■ $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$; $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-3} < 3; \\ \dfrac{3x+1}{x-3} > -3. \end{cases}$ ОДЗ: $x \ne 3$. $\begin{cases} \dfrac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0; \\ \dfrac{3x+1+3x-9}{x-3} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{10}{x-3} < 0; \\ \dfrac{6x-8}{x-3} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-3 < 0; \\ (x-3)\left(x-\dfrac{4}{3}\right) > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x<3; \\ \left[\begin{array}{l} x>3; \\ x<\frac{4}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \quad x<\frac{4}{3}.$$ Отже, $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. Тоді найбільший цілий розв'язок $x = 1$.

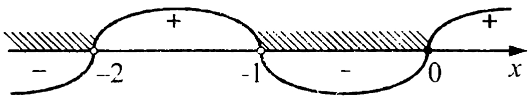
Відповідь. 1. ■

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geq 1$.

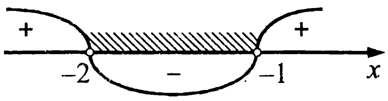
А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1)$	$(-2; -1)\cup(0; +\infty)$	$(-\infty; -2)\cup(-2; -1)\cup$ $\cup(-1; 0]$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$

■ $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geq 1$; $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1; \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \leq -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2} \geq 0; \\ \dfrac{x^2-3x+2+x^2+3x+2}{x^2+3x+2} \leq 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{-6x}{x^2+3x+2} \geq 0; \\ \dfrac{2x^2+4}{x^2+3x+2} \leq 0; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{(x+1)(x+2)} \leq 0; \\ \dfrac{x^2+2}{(x+1)(x+2)} \leq 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x+1)(x+2) \leq 0; \\ (x+1)(x+2) \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x+2) \leq 0; \\ (x+1)(x+2) \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



$x \in (-\infty; -2)\cup(-1; 0]$



$x \in (-2; -1)$

Отже, $x \in (-\infty; -2)\cup(-2; -1)\cup(-1; 0]$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\dfrac{|x^2+4a(a-x)+4|}{|x-2a|} \leq$ $\leq 2x+3-x^2$ має хоча б один розв'язок. У відповідь записати найбільше значення параметра a.

■ Перетворимо чисельник дробу: $|x^2+4a(a-x)+4| = |x^2+4a^2-4ax+4| = |(x-2a)^2+4| =$ $= (x-2a)^2+4$.

Тепер ліва частина нерівності перетвориться так:

$h(x) = \dfrac{(x-2a)^2+4}{|x-2a|} = |x-2a| + \dfrac{4}{|x-2a|} = 2\left(\dfrac{|x-2a|}{2} + \dfrac{2}{|x-2a|}\right)$. Для всіх $b>0$ виконується нерівність $b+\dfrac{1}{b} \geq 2$. Тому $\dfrac{|x-2a|}{2} + \dfrac{2}{|x-2a|} \geq 2$. Отже, $h(x) \geq 2 \cdot 2 = 4$, звідки $\dfrac{1}{2}\left(|x-2a| + \dfrac{4}{|x-2a|}\right) \geq 2$; $|x-2a| + \dfrac{4}{|x-2a|} \geq 4$. Права частина нерівності перетвориться так: $f(x) = -x^2+2x+3 = -(x^2-2x-3) =$ $= -(x^2-2x+1)+4 = -(x-1)^2+4$, тому $-(x-1)^2+4 \leq 4$. Маємо: $h(x) \geq 4$, $f(x) \leq 4$. Задана нерівність виконується лише тоді, коли $h(x) = f(x) = 4$. З умови $f(x) = 4$ випливає, що $x = 1$. Тоді умову $h(x) = 4$ можна записати так: $2 \cdot \left(\dfrac{|1-2a|}{2} + \dfrac{2}{|1-2a|}\right) = 4$. Нехай $|1-2a| = t$. Тоді $t+\dfrac{4}{t} = 4$; $t^2-4t+4 = 0$; $(t-2)^2 = 0$;

$t = 2$, тобто $|1 - 2a| = 2$; $\left[\begin{array}{l}1-2a=2;\\1-2a=-2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a=-0,5;\\a=1,5.\end{array}\right.$ Найбільше значення $a = 1,5$.

Відповідь. 1,5. ■

Завдання 11.1–11.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

11.1. Знайти множину розв'язків нерівності $x+\frac{1}{x}>\frac{1}{x}-2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-2; +\infty)$	$(-2; 0)\cup(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup$ $\cup(0; +\infty)$

11.2. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є R.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{-x^2}{x^2-4}\le 0$	$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2\ge 0$	$\frac{x^2-4}{x^2-4}\ge 0$	$\frac{x^2+1}{x^2}\ge 0$	$\frac{-x^2}{x^2+4}\le 0$

11.3. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є $\varnothing$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^2+1}{x^2+1}\le 1$	$\frac{x^2}{x^2+1}\le 1$	$\frac{x^2}{x^2+1}\ge 1$	$\frac{x^2-1}{x^2-1}\ge 0$	$\frac{x^2+1}{x^2}\ge 1$

11.4. Розв'язати нерівність $\frac{x}{x-5}\ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]\cup(5; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup(5; +\infty)$	$[0; 5)$	$(0; 5]$

11.5. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x-2}\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -5]\cup(2; +\infty)$	$[-5; 2]$	$[-5; 2)$	$(-2; 5]$

11.6. Розв'язати нерівність $\frac{(x+5)(x-3)}{x^2+4}<0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 5)$	$(-5; 3)$	$(-\infty; -5)\cup(2; 3)$	$(-\infty; -5)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$

11.7. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x^2-4}\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-5; -2)\cup(2; +\infty)$	$(-\infty; -5]\cup(-2; 2)$	$(-\infty; -5]\cup[-2; 2]$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; 5]$

11.8. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x+3}>1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5)\cup(-3; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; -3)$

11.9. Розв'язати нерівність $\frac{3x+4}{x+1} \le 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-1\frac{1}{3}; -1\right)$	[–2; –1]	[–2; –1)	$\left[-1\frac{1}{3}; -1\right]$	$(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$

11.10. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \le -x$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0]$

11.11. Розв'язати нерівність $\frac{3}{x} \le \frac{2}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup (-1; 0)$	$(-\infty; -3] \cup [-1; 0]$	[–3; –1)	(–1; 0)	(–3; –1]

11.12. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{3}{x-3} > \frac{1}{x+2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4{,}5) \cup (-2; 3)$	$(-4{,}5; -2) \cup (3; +\infty)$	(–2; 3)	$(-3; 2) \cup (4{,}5; +\infty)$

11.13. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{4x^2-4x+1}{(x+4)(x-3)} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$	(–4; 3)	$\left(-4; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup$ $\cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$

11.14. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
(–4; 3)	$(-4; 2) \cup (2; 3]$	$(-\infty; -4) \cup \{2\} \cup$ $\cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$	(–3; 4)

11.15. Обчислити найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 - x^2}{x+9} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
–9	–8	0	9	1

11.16. Розв'язати нерівність $\frac{(x-1)^2(x+7)(x+3)^3}{x^2+6x+9} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-7; -3) \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -7] \cup (-3; +\infty)$	[–7; –3)	$(-\infty; 3) \cup [7; +\infty)$	(3; 7]

11.17. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\dfrac{x(x-3)(3x-2)}{2x-3} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	інша відповідь

11.18. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \le 1$.

А	Б	В	Г	Д
(–4; 3)	(–4; 3)	(–∞; –4)	(–4; +∞)	(–4; 2)∪(2; +∞)

11.19. Знайти множину розв'язків нерівності $\left|\dfrac{1}{x-5}\right| > 1$.

А	Б	В	Г	Д
(4; 5)∪(5; 6)	(4; 6)	(–∞; 4)∪(6; +∞)	(–6; –4)	(–∞; –6)∪(–4; +∞)

11.20. Знайти множину розв'язків нерівності $\dfrac{7}{|x|+5} < 1$.

А	Б	В	Г	Д
R	(–2; 2)	(–∞; –2)∪(2; +∞)	(–∞; –5)∪(2; +∞)	(–5; 2)

11.21. Знайти множину розв'язків нерівності $\dfrac{(x+2)(x-a)}{x-4} \le 0$, якщо $-2 < a < 3$.

А	Б	В	Г	Д
[–2; *a*]	[*a*; 4)	[–2; *a*]∪(4; +∞)	(–∞; –2]∪[*a*; 4)	[*a*; 4]

11.22. Знайти множину розв'язків нерівності $\dfrac{x^2-2x-15}{(x-5)(x-a)} \le 0$, якщо $-3 < a < 5$.

А	Б	В	Г	Д
[–3; *a*]	[–3; *a*)	(–∞; –3]∪(5; +∞)	(–∞; –3]∪[5; +∞)	(–∞; –3]∪(*a*; 5)∪ ∪(5; +∞)

Завдання 11.23–11.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

11.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2 > 3$

2 $|x| \le \sqrt{3}$

3 $\dfrac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} \le 0$

4 $x-\sqrt{3} > 0$

А $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

Б $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$

В $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

Г $\left(\sqrt{3};\infty\right)$

Д $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$

11.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями (А–Д).

1 $(x+2)(x-3)<0$

2 $(x+2)(x-3)>0$

3 $\dfrac{x+2}{x-3}\ge 0$

4 $(x+2)^2>0$

А $\dfrac{x-3}{x+2}<0$

Б $\begin{cases}(x+2)(x-3)\ge 0;\\ x\ne 3\end{cases}$

В $(x+2)(x-3)\le 0$

Г $\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\ge 0$

Д $\dfrac{x+2}{x-3}>0$

11.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x+\dfrac{1}{x-2}\ge\dfrac{1}{x-2}+2$

2 $x+\dfrac{1}{x-3}>\dfrac{1}{x-3}+2$

3 $x+\dfrac{1}{x+1}\ge\dfrac{1}{x+1}+2$

4 $-x+\dfrac{1}{x-3}\le\dfrac{1}{x-3}+2$

А $[2;+\infty)$

Б $(-\infty;-2]$

В $(-2;3)\cup(3;+\infty)$

Г $(2;3)\cup(3;+\infty)$

Д $(2;+\infty)$

11.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\dfrac{x-3}{x+2}\le 0$

2 $\dfrac{x+2}{x-3}\le 0$

3 $\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}\le 0$

4 $\dfrac{(x+2)(x-3)}{5}\le 0$

А $(-2;3)$

Б $[-2;3]$

В $[-2;3)$

Г $(-2;3]$

Д $(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$

11.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\dfrac{x+3}{x^2-4}\le 0$

2 $\dfrac{x+3}{x^2-4}\ge 0$

3 $\dfrac{x^2-4}{x+3}\ge 0$

4 $\dfrac{x^2-4}{x+3}\le 0$

А $(-\infty;-3)\cup[-2;2]$

Б $(-\infty;-3]\cup(-2;2)$

В $(-\infty;-3]\cup[-2;2]$

Г $[-3;-2)\cup(2;+\infty)$

Д $(-3;-2]\cup[2;+\infty)$

11.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x+4}{x+1} > 1$

2 $\frac{x+1}{x+4} > 1$

3 $\frac{x+1}{x+4} < 1$

4 $\frac{x+4}{x+1} < 1$

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; -1)$

В $(-\infty; 4)$

Г $(-4; +\infty)$

Д $(-1; +\infty)$

11.29. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{1}{x} \le -x$

2 $\frac{1}{x} \ge -x$

3 $\frac{1}{x} \le x$

4 $\frac{1}{x} \ge x$

А $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$

Б $(-\infty; 0)$

В $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$

Г $(-1; 1)$

Д $(0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 11.30–11.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

11.30. Розв'язати нерівність $\frac{x-5}{x+5} < x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

11.31. Розв'язати нерівність $\frac{2}{x+9} < \frac{x}{x-6}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.32. Розв'язати нерівність $\frac{1}{1-x} \ge 1-2x$. У відповідь записати суму всіх додатних цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.33. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x} \le 1$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.34. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x^2-3x+2} \le \frac{1}{2}$. У відповідь записати добуток усіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.35. Розв'язати нерівність $2 + \frac{1}{x-3} + \frac{x-3}{x+2} \le \frac{1}{(x-3)(x+2)}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

11.36. Розв'язати нерівність $\frac{2}{3x+7} \le \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

11.37. Розв'язати нерівність $\frac{x-8}{x^2-5x+4} > \frac{2}{x+1}$. У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок.

11.38. Розв'язати нерівність $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$. У відповідь записати добуток усіх розв'язків.

11.39. Розв'язати нерівність $\left|\frac{2x+5}{4x+1}\right|<1$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.40. Розв'язати нерівність $1-\frac{1}{x+2}\ge\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)(x-1)}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.41. Розв'язати нерівність $\frac{x^3-3x+2}{6-x}\le 0$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.42. Розв'язати нерівність $\frac{|x+7|}{x^2+8x+7}<5$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.43. Розв'язати нерівність $\left|\frac{1}{x+1}\right|<\left|\frac{2}{x-2}\right|$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.