Тема 22. Елементарні функції та їхні властивості

Поняття функції

Змінну y називають функцією від змінної x, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *одне* певне значення змінної y. При цьому змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією* (від аргументу x).

Якщо змінна y є функцією від аргументу x, то записують: $y = f(x)$ (читають: y дорівнює f від x). Значення функції для $x = x_0$ позначають через $f(x_0)$. Так, якщо функцію задано формулою $y = 2x - 3$, то можна записати: $f(x) = 2x - 3$. Тоді, наприклад, $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 3 = 2$.

Область визначення і множина значень функції

Множину значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають *областю визначення* функції; множину значень, яких набуває залежна змінна (функція), називають *областю значень* функції.

Область визначення функції $y = f(x)$ позначають $D(f)$ або $D(y)$, а область значень — $E(f)$ або $E(y)$.

Якщо вираз $f(x)$ є многочленом, то областю визначення функції $y = f(x)$ є множина всіх дійсних чисел; якщо $f(x)$ — раціональний дріб, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім тих значень x, для яких знаменник дробу дорівнює нулю; якщо функція задана формулою $y = \sqrt{f(x)}$, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність $f(x) \geq 0$.

Наприклад, розглянемо функцію $y = \dfrac{5}{x-4}$. Вираз $\dfrac{5}{x-4}$ має зміст для всіх значень x, крім $x = 4$. Тому областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x = 4$, тобто $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Нулі функції. Проміжки знакосталості

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку. Якщо $x = -1$, $x = 4$ або $x = 6$, то значення функції дорівнює нулю. Такі значення аргументу x називають *нулями функції*.

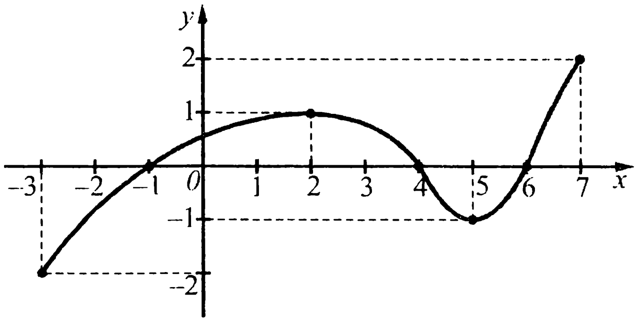


Рис. 1

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Нулі функції розбивають її область визначення на *проміжки знакосталості* — проміжки, на яких функція набуває значень одного знака.

Наприклад, нулем функції $y = x - 2$ є лише одне значення x: $x - 2 = 0$; $x = 2$; нулями функції $y = x^2 - 2x$ є числа 0 та 2.

Зростання, спадання функції

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на рисунку 1. На проміжку $[-3; 2]$ графік «іде вгору»: якщо збільшувати значення x із цього проміжку, то відповідні значення функції збільшуватимуться. Наприклад, візьмемо значення аргументу $x_1 = -3$ і $x_2 = -1$, тоді $x_2 > x_1$. Оскільки $f(x_1) = f(-3) = -2$, а

$f(x_2) = f(-1) = 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Більшому значенню аргументу (x_2) відповідає більше значення функції ($f(x_2)$). Кажуть, що на проміжку [–3; 2] функція $y = f(x)$ *зростає* (або *є зростаючою*). Такою ж вона є й на проміжку [5; 7].

На проміжку [2; 5] графік функції $y = f(x)$ «іде вниз»: якщо збільшувати значення аргументу, то відповідні значення функції зменшуватимуться. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ *спадає* (або *є спадною*).

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають *зростаючою функцією*; якщо ж функція спадає на всій області визначення, то її називають *спадною функцією*.

Наприклад, на рисунку 2 зображено графік функції, областю визначення якої є проміжок [–1; 5]. Ця функція є зростаючою, бо вона зростає на всій області визначення. Функція, графік якої зображено на рисунку 3, є спадною, бо вона спадає на всій області визначення — проміжку [–1; 5].

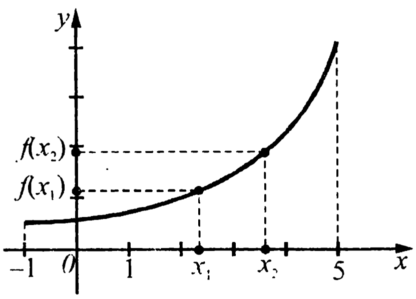


Рис. 2

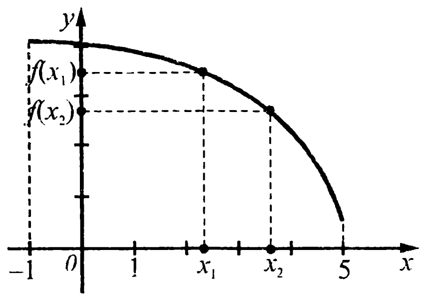


Рис. 3

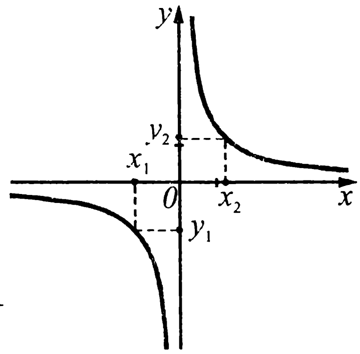


Рис. 4

Зростаючими, наприклад, є функції $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$, а спадними — функції $y = -2x$, $y = -x$. Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 1, є ні зростаючою, ні спадною. Вона лише зростає або спадає на окремих проміжках.

Парні та непарні функції

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, її графік зображено на рисунку 5. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^2 = x^2$, то $f(-x) = f(x)$. Функцію $f(x) = x^2$ називають *парною*.

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Область визначення парної функції симетрична відносно початку координат, бо разом із точкою x вона містить і точку $-x$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y (див., наприклад, рис. 5). Тому для побудови графіка парної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно осі y.

На рисунку 6 зображено графік функції $f(x) = x^3$. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^3 = -(x^3)$, то $f(-x) = -f(x)$. Функцію $f(x) = x^3$ називають *непарною*.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ теж належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Розглянемо функцію $f(x) = 2x + 3$. Область її визначення — множина всіх дійсних чисел — симетрична відносно початку координат. Для цієї функції $f(-x) = -2x + 3$. Рівності $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ не виконуються для всіх значень x, наприклад, для $x = 1$ ($f(1) = 5$; $f(-1) = 1$; $f(-1) \neq f(1)$ і $f(-1) \neq -f(1)$). Ця функція є ні парною, ні непарною; функція $f(x) = \sqrt{x}$, де $x \geq 0$, також є ні парною, ні непарною, бо область визначення функції (проміжок $[0; +\infty)$) не симетрична відносно початку координат.

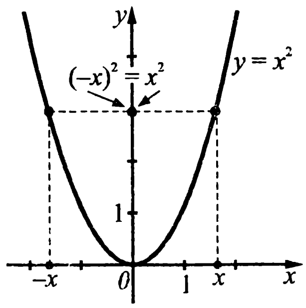


Рис. 5

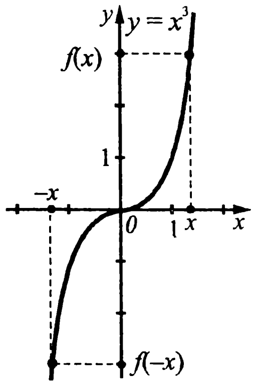


Рис. 6

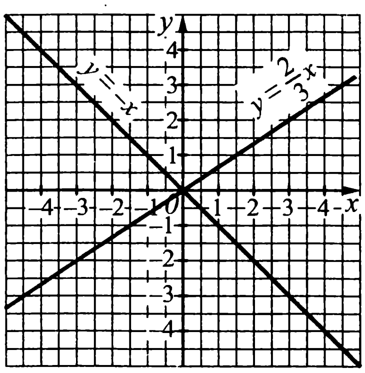
Область визначення та графік непарної функції симетричні відносно початку координат. Тому для побудови графіка непарної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно початку координат.

Періодичність функції

Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T > 0$, що для будь-якого числа x із області визначення функції виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$. Число T називають *періодом функції*. Найменше додатне число, яке є періодом функції називають *найменшим додатним періодом*, або *основним періодом* цієї функції, і позначають T_0. Наприклад, основним періодом функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є число 2π, а функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ — π.

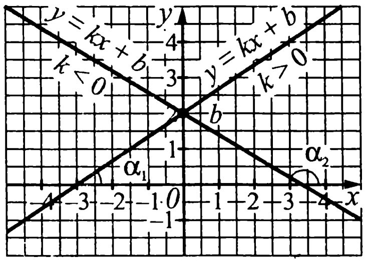
Пряма пропорційність $y = kx$ ($k \neq 0$)

Функцію, задану формулою $y = kx$ ($k \neq 0$), де x та y — змінні, k — число, називають *прямою пропорційністю*. Число k називають *коефіцієнтом пропорційності*. Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат під кутом α ($k = \operatorname{tg}\alpha$). Коефіцієнт k називають також *кутовим коефіцієнтом прямої*. Для побудови прямої достатньо знати дві точки. Оскільки графік прямої пропорційності проходить через початок координат, то достатньо знайти ще одну точку.



Лінійна функція $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

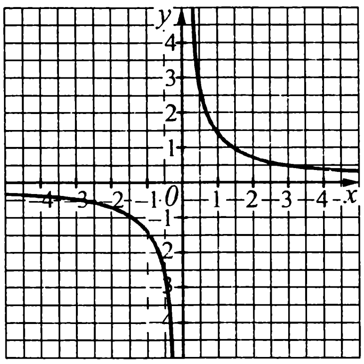
Функцію, задану формулою $y = kx + b$, де x та y — змінні, k і b — числа, називають *лінійною функцією*. Число k називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Графіком лінійної функції є пряма, яка проходить під кутом α ($k = \operatorname{tg}\alpha$) до осі абсцис.



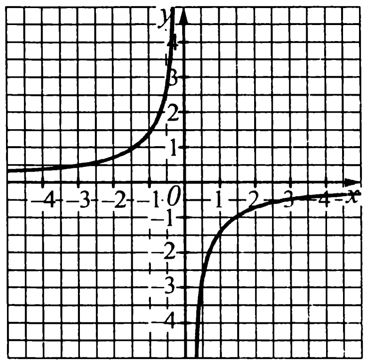
Пряма $y = kx + b$ перетинає вісь ординат у точці $(0; b)$ і вісь абсцис у точці $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$.

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, де x та y — змінні, k — число, називають *оберненою пропорційністю*. Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ є *гіпербола*, частини графіка — *вітки гіперболи*. Графік не перетинає осей координат.



$y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$



$y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множина значень функції: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Функцію, задану формулою $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, де x та y — змінні, a, b і c — числа $(a \neq 0)$, називають *квадратичною функцією*. Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є *парабола* з вершиною у точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, де $D = b^2 - 4ac$. Віссю симетрії параболи є пряма $x = -\frac{b}{2a}$, яка паралельна до осі y.

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз і значення $-\frac{D}{4a}$ є найбільшим значенням функції, тобто $E(y) = \left(-\infty; \frac{-D}{4a}\right]$; якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору і значення $-\frac{D}{4a}$ є найменшим значенням функції, тобто $E(y) = \left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$.

Якщо $D < 0$, то парабола не перетинає осі абсцис; якщо $D = 0$, то парабола дотикається до осі x у вершині; якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь x у точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ і $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

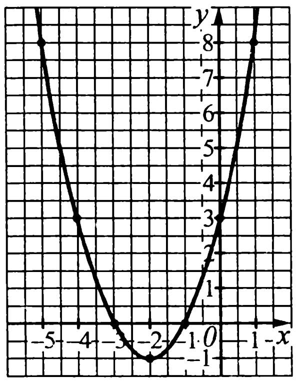
Парабола перетинає вісь y в точці з координатами $(0; c)$.

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 + 4x + 3$. Оскільки $a = 1 > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, $b = 4$, $c = 3$. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ — парабола перетинає вісь x у двох точках. Вершина параболи має координати: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$; $y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$. Точки перетину з віссю x: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4-2}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4+2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$. Точка перетину з віссю y: $(0; 3)$.

Знайдемо значення функції для кількох цілих значень x, близьких до абсциси вершини:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
y	8	3	0	–1	0	3	8

Тоді графік має вигляд:



Приклад 1. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{1}{3}(2x+1)$. Знайти $f(-5)$.

А	Б	В	Г	Д
3	–1	1	–3	$3\frac{2}{3}$

■ $f(-5) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-5) + 1) = \frac{1}{3}(-10+1) = \frac{1}{3} \cdot (-9) = -3.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 2. Вказати проміжки, на яких функція $f(x) = -5x + 15$ набуває від'ємних значень.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; -3)$	$(-3; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

■ Функція набуває від'ємних значень на тих проміжках, де $f(x) < 0$. Розв'яжемо нерівність: $-5x + 15 < 0$; $-5x < -15$; $x > 3$; $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{|x|-3}+\dfrac{x^2+4}{(x-1)^2-4}$. У відповідь записати суму найменшого додатного і найбільшого від'ємного цілих значень цієї області.

■ Для того, щоб знайти область визначення функції, необхідно розв'язати таку систему: $\begin{cases}|x|-3\ge 0; & (1)\\ (x-1)^2-4\ne 0. & (2)\end{cases}$ Розглянемо (1): $|x|-3\ge 0$; $|x|\ge 3$; $\left[\begin{array}{l}x\ge 3;\\ x\le -3;\end{array}\right.$ $x\in(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. Розглянемо (2): $(x-1)^2-4\ne 0$; $(x-1)^2\ne 4$; $\left[\begin{array}{l}x-1\ne 2;\\ x-1\ne -2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\ne 3;\\ x\ne -1.\end{array}\right.$

Отже, $x\in(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$.

Найбільше від'ємне ціле значення дорівнює –3, найменше ціле додатне значення — 4, а їх сума дорівнює $-3+4=1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 4. Вказати проміжок, якому належать нулі функції $y=x^3+2x^2-x-2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-5; 3)$	$[-2; 1)$	$(-2; +\infty)$	$[0; 1]$

■ Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння $x^3+2x^2-x-2=0$; $x^2(x+2)-(x+2)=0$; $(x+2)(x^2-1)=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-2;\\ x=-1;\\ x=1.\end{array}\right.$ Числа –2; –1 і 1 належать проміжку (–5; 3).

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 5. За якого значення параметра c графік функції $y=\log_2(x+c)$ проходить через точку (2; 3)?

А	Б	В	Г	Д
7	4	1	6	4,5

■ $x=2$; $y=3$. $\log_2(2+c)=3$; $2+c=2^3$; $c=8-2$; $c=6$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Знайти множину значень функції $y=\sin x-3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[-10; 4]$	$[2; 4]$	$(-\infty; +\infty)$	$[-3; 3]$

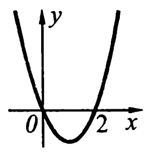
■ За властивістю функції $y=\sin x$, множиною її значень є $[-1; 1]$, тобто $-1\le\sin x\le 1$. Додамо до всіх частин подвійної нерівності число –3 й отримаємо: $-1-3\le\sin x-3\le 1-3$; $-4\le\sin x-3\le -2$. Отже, множиною значень функції $y=\sin x-3$ є проміжок $[-4; -2]$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 7. Знайти область визначення функції $f(x)=\log_{0,5}(2x-x^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(-\infty; 0)\cup(2; +\infty)$	інша відповідь	$(-\infty; 0]\cup[2; +\infty)$	$[0; 2)$

■ За властивістю логарифмічної функції областю визначення функції $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$ є усі значення x, які задовольняють умову $2x - x^2 > 0$. Розв'яжемо утворену нерівність: $2x - x^2 > 0$; $x^2 - 2x < 0$; $x(x-2) < 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $x \in (0; 2)$.



Відповідь. **А.** ■

Приклад 8. Яке з наведених чисел входить до множини значень функції $y = 2^x + 4$?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
5	жодне з чисел не входить	3	4	0

■ Знайдемо множину значень функції $y = 2^x + 4$. Оскільки $0 < 2^x < +\infty$, то $4 < 2^x + 4 < +\infty$. Тому множиною значень функції $y = 2^x + 4$ є $y \in (4; +\infty)$. З указаних у відповідях чисел у проміжок $(4; +\infty)$ входить лише число 5.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Графіку функції, заданої формулою $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ належать точки $A(-2; a)$, $B(2; b)$, $C\left(\frac{1}{2}; c\right)$. Знайти a, b і c. У відповідь записати їхню суму.

■ $A(-2; a)$: $-2 < 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = -\frac{4}{x}$, якщо $x < 0$. Маємо: $y = -\frac{4}{-2} = 2$. Отже, $a = 2$;

$B(2; b)$: $2 > 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = \frac{4}{x}$, якщо $x > 0$. Маємо: $y = \frac{4}{2} = 2$. Отже, $b = 2$;

$C\left(\frac{1}{2}; c\right)$: $\frac{1}{2} > 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = \frac{4}{x}$, якщо $x > 0$. Маємо: $y = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$. Отже, $c = 8$.

Сума знайдених значень дорівнює: $2 + 2 + 8 = 12$.

Відповідь. 12. ■

Приклад 10. Функція спадає, якщо $x < 0$. Вкажіть найменше з чисел.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$f\left(-\frac{3}{8}\right)$	$f\left(-\frac{7}{10}\right)$	$f\left(-\frac{3}{4}\right)$	$f\left(-\frac{3}{5}\right)$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$

■ Оскільки функція спадна, то більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Найменше із запропонованих чисел відповідає найбільшому значенню аргументу.

Відповідь. **А.** ■

Завдання 22.1–22.29 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

22.1. Знайти область визначення функції $y = \lg\left(x^2 - 6x + 8\right)$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; 2]\cup[4; +\infty)$	$(-\infty; 2)\cup(4; +\infty)$	$(2; 4)$	$(-\infty; 2)\cup(2; 4)\cup$ $\cup(4; +\infty)$

22.2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1{,}5; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[1{,}5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[3; +\infty)$

22.3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(-1; 4)$	$(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$	$(-\infty; -1)\cup[4; +\infty)$

22.4. Яка з множин є областю визначення функції $y = \sqrt[4]{-\log_3 x + 1}$?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[0; 4]$	$[-3; 3)$	$(-\infty; 3]$	$(0; 3]$

22.5. Вказати область визначення функції $y = \sqrt{\left(x^2 + 2\right)\left(2 + \log_5 \dfrac{1}{x}\right)}$.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5]$	$(0; 2]$	$(0; 25]$	$(2; +\infty)$	$(-2; +\infty)$

22.6. Знайти множину значень функції $y = -x^2 + 4x - 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]$	$(-\infty; -1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 5]$	$[-5; +\infty)$

22.7. Обчислити відстань від початку координат до вершини параболи $y = -x^2 + 10x - 13$.

А	Б	В	Г	Д
5	13	12	17	10

22.8. Знайти множину значень функції $y = -2\cos x + 5$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[2; 5]$	$[-2; -5]$	$[3; 7]$	R

22.9. Знайти множину значень функції $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

А	Б	В	Г	Д
[–1; 1]	[–5; 1]	[1; 3]	[–5; –2]	[–3; 3]

22.10. Знайти множину значень функції $y = 3 - 2\sin 5x$.

А	Б	В	Г	Д
[1; 5]	[2; 4]	[3; 5]	[1; 3]	[–1; 1]

22.11. Дано функцію $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Знайти $f(x + 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x+1) = \frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{2}{1+x}$	$f(x+1) = -\frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{1+x}{1-x}$	$f(x+1) = -\frac{2}{1+x}$

22.12. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^3 + x$	$y = x^6 + 3x$	$y = x^2 + \|x\|$	$y = \frac{x}{x-1}$	$y = \sin x + \mathrm{tg} x$

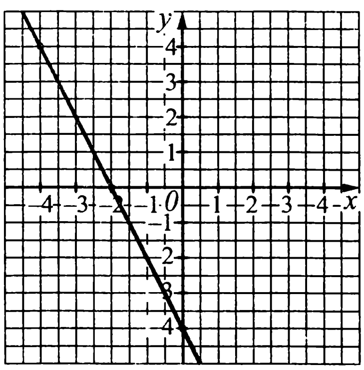
22.13. Яка з наведених функцій є непарною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x + \|x\|$	$y = \sin^2 x$	$y = \frac{x^2}{x-1}$	$y = \sqrt[3]{\|x\|}$	$y = \sqrt[3]{x}$

22.14. Функція $f(x)$ — парна, а функція $g(x)$ — непарна. $f(-7) = -11$, $g(5) = -2$. Обчислити $2f(-7) - 3g(-5)$.

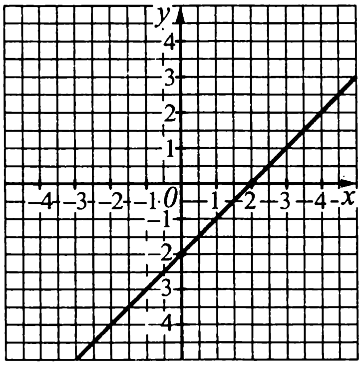
А	Б	В	Г	Д
–28	–16	28	16	29

22.15. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



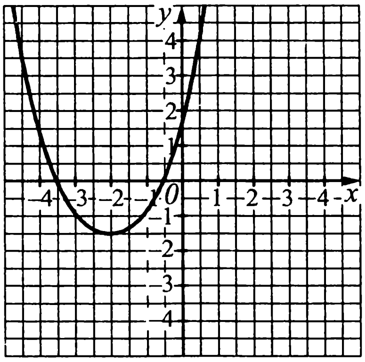
А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 4$	$y = 2x - 4$	$y = 2x + 4$	$y = -2x - 4$	$y = -4x - 4$

22.16. За ескізом графіка $y = ax + b$ вказати знаки параметрів a і b.



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$	$a > 0, b = 0$

22.17. За ескізом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ знайти значення параметрів a, b і c.



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b < 0, c < 0$

22.18. За яких значень a парабола $y = 9x^2 - 12x + 35a$ має з віссю абсцис дві точки перетину?

А	Б	В	Г	Д
$a = \frac{4}{35}$	$a < \frac{4}{35}$	$a > \frac{4}{35}$	$a < \frac{18}{35}$	$a < \frac{16}{35}$

22.19. Вказати функцію, в якої основний період дорівнює π.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin(x + \pi)$	$y = \cos(2x + 1)$	$y = \mathrm{tg}(3x + \pi)$	$y = \mathrm{ctg}(4x + 2)$	$y = \pi$

22.20. Знайти основний період функції $y = \cos^2 6x$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3}$	3π	$\frac{\pi}{3}$	6π	$\frac{\pi}{6}$

22.21. Знайти основний період функції $y = 2\cos\frac{x}{3} + 3\,\mathrm{tg}\frac{x}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{24}$	6π	24π	8π	функція неперіодична

22.22. Вказати функцію, обернену до функції $y = 4x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x+1}{4}$	$y=\frac{1}{4x-1}$	$y=\frac{x}{4}+1$	$y = 4x + 1$	$y = -4x + 1$

22.23. Вказати функцію, обернену до функції $y = x^2 - 2$, $x \in [0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{x^2-2}$	$y=\sqrt{x}-2$	$y=\sqrt{x}+2$	$y=-\sqrt{x+2}$	$y=\sqrt{x+2}$

22.24. Вказати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо $g(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x^2}{x^2+1}$	$y=x^2+1$	$y=\frac{x}{x^2+1}$	$y=\frac{x^2+1}{x}$	$y=\frac{x^2+1}{x^2}$

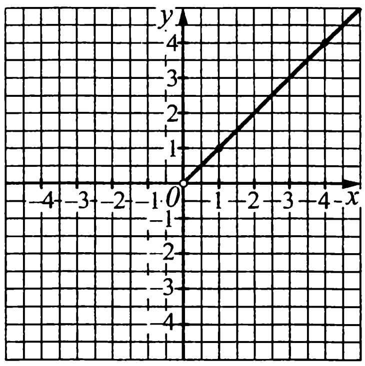
22.25. Вказати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо $g(x)=\sqrt{x+1}$, $f(x)=x^2-1$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}$, $D(y) = [-1; +\infty)$	$y=x$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y=\sqrt{x}$, $D(y) = [0; +\infty)$	$y=\sqrt{x^2}$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y=x$ $D(y) = [-1; +\infty)$

22.26. Знайти множину значень функції $y=5^{\sin x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	R	$[-5; 5]$	$\left[\frac{1}{5}; 5\right]$	$[-1; 1]$

22.27. Графік якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x^2}{x}$	$y=\sqrt{x^2}$	$y=10^{\lg x}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$	$y=\|x\|$

22.28. Знайти множину значень функції $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(0; +\infty)$	$(0; 1]$	$\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$	$\left[0; \dfrac{1}{2}\right)$

22.29. Знайти найбільше ціле значення функції $y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{25}{3}$	0	75	8	–1

Завдання 22.30–22.40 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

22.30. Установити відповідність між функціями (1–4) та областями їх визначення (А–Д).

1 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{x-1}$

2 $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$

3 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$

4 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$

А $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Б $(-2;1)$

В $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

Г $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

Д $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$

22.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y=\sqrt{\dfrac{5+x}{x-1}}$

2 $y=\lg\dfrac{5-x}{x-1}$

3 $y=\sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}}$

4 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{5-x}}$

А $(1; 5)$

Б $[1; 5]$

В $[1; 5)$

Г $(-\infty; -5]\cup(1; +\infty)$

Д $(1; 5]$

22.32. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y=\sqrt{x^2+9}+1$

2 $y=2^x-4$

3 $y=-x^2+4x-8$

4 $y=-3^x+4$

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; -4]$

В $(-\infty; 4)$

Г $[4; +\infty)$

Д $(-4; +\infty)$

22.33. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y = 2\arcsin x$
2 $y = 2\arccos x$
3 $y = 2\mathrm{arctg}\, x$
4 $y = 2\mathrm{arcctg}\, x$

А $(-\pi; \pi)$
Б $[-\pi; \pi]$
В $(0; \pi)$
Г $(0; 2\pi)$
Д $[0; 2\pi]$

22.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх найменшими додатними періодами (А–Д).

1 $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$
2 $y = \mathrm{ctg}\, 2x$
3 $y = \cos\dfrac{x}{2}$
4 $y = \sin 2x$

А $\dfrac{\pi}{4}$
Б $\dfrac{\pi}{2}$
В π
Г 2π
Д 4π

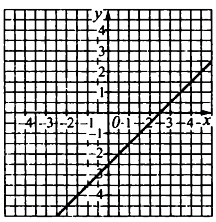
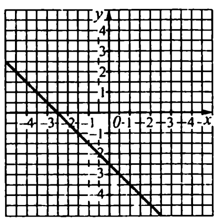
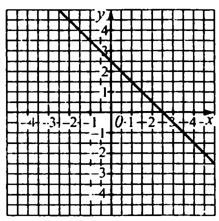
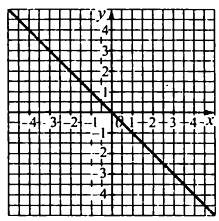
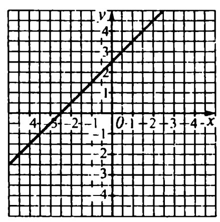
22.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та оберненими до них функціями (А–Д).

1 $y = 3x$
2 $y = \dfrac{3}{x}$
3 $y = -3x$
4 $y = -\dfrac{x}{3}$

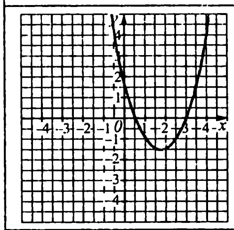
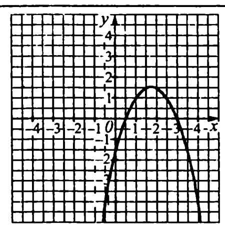
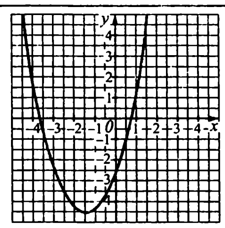
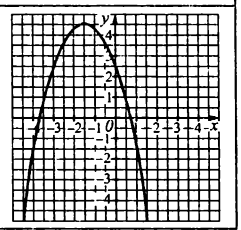
А $y = \dfrac{3}{x}$
Б $y = -\dfrac{3}{x}$
В $y = -3x$
Г $y = \dfrac{x}{3}$
Д $y = -\dfrac{x}{3}$

22.36. Дано лінійну функцію $y = ax + b$. Установити відповідність між знаками коефіцієнтів a й b (1–4) та ескізами графіків (А–Д).

1	2	3	4
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$

А	Б	В	Г	Д
				

22.37. Дано квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) та знаками коефіцієнтів a, b і c (А–Д).

1	2	3	4
			

А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b > 0, c < 0$

22.38. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками їх зростання (А–Д).

1 $y = x^2 - 3$
2 $y = (x - 3)^2$
3 $y = -x^2 + 3$
4 $y = -(x + 3)^2$

А $(-\infty; 0]$
Б $[0; +\infty)$
В $(-\infty; -3]$
Г $[-3; +\infty)$
Д $[3; +\infty)$

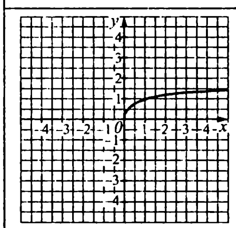
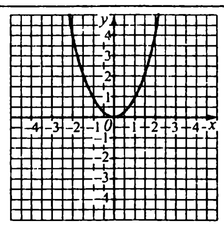
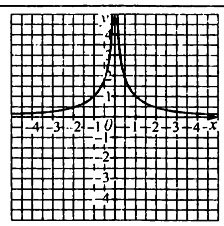
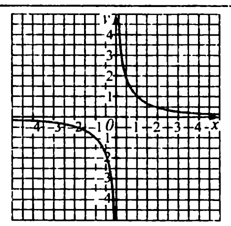
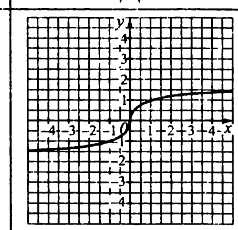
22.39. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх парністю (А–Д).

1 $y = 0$
2 $y = x^3 + \mathrm{tg}x$
3 $y = x^4 - \sin x$
4 $y = x^5 \sin x$

А на парність не досліджується
Б парна
В непарна
Г ні парна, ні непарна
Д парна і непарна

22.40. Установити відповідність між функціями (1–4) та ескізами їх графіків (А–Д).

1	2	3	4
$y = \sqrt[5]{x}$	$y = \dfrac{1}{x^5}$	$y = \dfrac{1}{x^4}$	$y = \sqrt[4]{x}$

А	Б	В	Г	Д
				

Розв'яжіть завдання 22.41–22.53. Відповідь запишіть десятковим дробом.

22.41. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}{3 - x}$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу в області визначення.

22.42. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\log_{0,3} \dfrac{x-1}{x+5}}$. У відповідь записати найменше ціле значення аргументу.

22.43. Знайти область визначення функції $y=\log_{x+4}\left(9-8x-x^2\right)$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.44. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{(x+4)(3-x)}{\lg\left(x^2+1\right)}}$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.45. Знайти область визначення функції $y=\arcsin\dfrac{x-5}{6}-\lg\left(x^2-10x+24\right)$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.46. Знайти область визначення функції $y=\arccos\dfrac{x-4}{x}$. У відповідь записати найменше значення аргументу.

22.47. Знайти область значень функції $y=3\sin^2 x+2\cos^2 x$. У відповідь записати кількість цілих значень функції.

22.48. Скільки різних цілих значень набуває функція $f(x)=\sqrt{8\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x-2\sin 2x\cos 2x\right)}$?

22.49. Знайти найменший додатний період T_0 функції $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{5}$. У відповідь записати значення $T_0:\pi$.

22.50. Знайти нулі функції $y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}$.

22.51. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{\log_{x-2}\left(x^2-8x+15\right)}$. У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не належать області визначення функції.

22.52. За якого найбільшого значення параметра a функція $f(x)=\ln\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$ буде непарною?

22.53. За яких значень параметра a число π є періодом функції $f(x)=\dfrac{\cos x}{a+\sin x}$?

Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то шляхом його перетворення можна отримати графіки низки інших функцій.

Графік функції $y = f(x) \pm a$, де $a > 0$

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$, тоді $f(x_1)$ і $f(x_1) + a$ є значеннями відповідно функцій $y = f(x)$ і $y = f(x) + a$ у цій точці. Тоді точка $A_1(x_1; f(x_1))$ належить графіку функції $y = f(x)$, а точка $A_1'(x_1; f(x_1) + a)$ — графіку функції $y = f(x) + a$. Але точку $A_1'(x_1; f(x_1) + a)$ можна одержати перенесенням точки A_1 угору на відстань a одиниць, якщо $a > 0$, або вниз на відстань $|a|$, якщо $a < 0$. Оскільки вибрана точка x_1 — довільна точка з області визначення функцій, то аналогічно можна одержати будь-яку точку графіка функції $y = f(x) + a$ з графіка функції $y = f(x)$.

Узагалі, *графік функції $y = f(x) + a$, де $a > 0$, можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі y на a одиниць угору, якщо $a > 0$, і на a одиниць униз, якщо $a < 0$.*

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x) + 4$. Оскільки $4 > 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x) + 4$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 4 одиниці вгору (див. рис. 1).

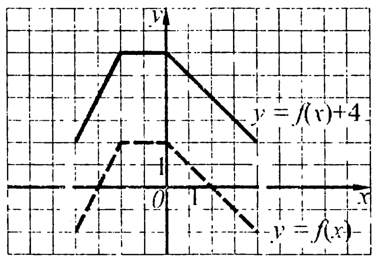
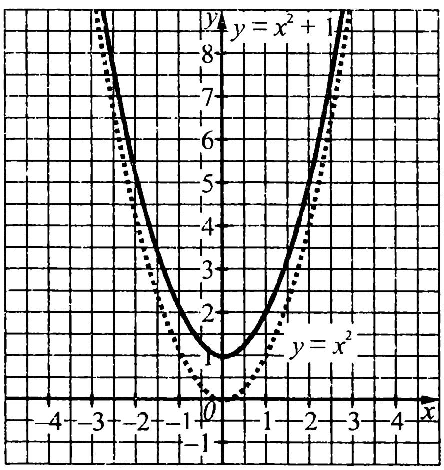


Рис. 1

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 + 1$. Будуємо графік функції $y = x^2$ і паралельно переносимо графік вгору на 1 одиницю вздовж осі y (оскільки $1 > 0$). Одержуємо графік функції $y = x^2 + 1$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(x \pm b)$, де $b > 0$

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$ і $y_1 = f(x_1)$. Знайдемо значення y_2 функції $y = f(x + b)$ у точці $x_1 - b$. Одержимо: $y_2 = f((x_1 - b) + b) = f(x_1) = y_1$. Отже, значення функції $y = f(x + b)$ відносно значення функції $y = f(x)$ зміщується на відстань $|b|$ праворуч, якщо $b > 0$, або ліворуч, якщо $b < 0$.

Узагалі, *графік функції* $y = f(x + b)$, *можна одержати із графіка функції* $y = f(x)$ *за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на b одиниць праворуч, якщо* $b < 0$, *і на b одиниць ліворуч, якщо* $b > 0$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x + 3)$. Оскільки $3 > 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x + 3)$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 3 одиниці ліворуч (див. рис. 2).

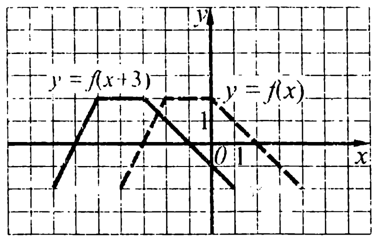
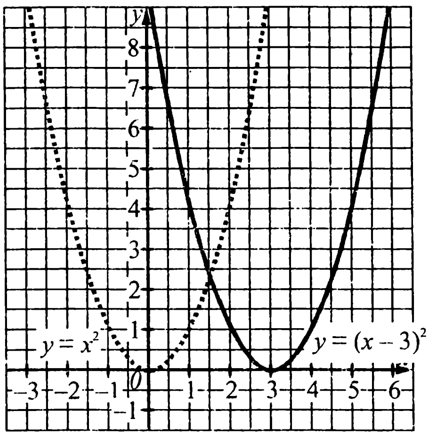


Рис. 2

Наприклад, побудувати графік функції $y = (x - 3)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$ і паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$). Одержуємо графік функції $y = (x - 3)^2$ (див. рис.).



Графік функції y = f(x + a) + b

Щоб побудувати графік функції $y = f(x + a) + b$, необхідно послідовно виконати два паралельних перенесення графіка функції $y = f(x)$ (див. розглянуті вище випадки) або виконати одне паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ на вектор $\overrightarrow{(-a; b)}$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x + 3) - 5$. Оскільки $3 > 0$, $-5 < 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x + 3) - 5$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 3 одиниці ліворуч і 5 одиниць вниз (див. рис. 3).

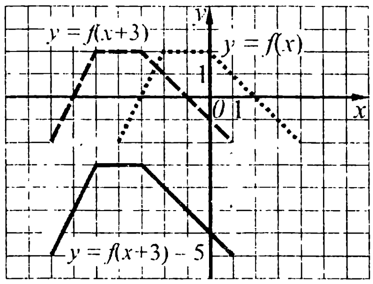
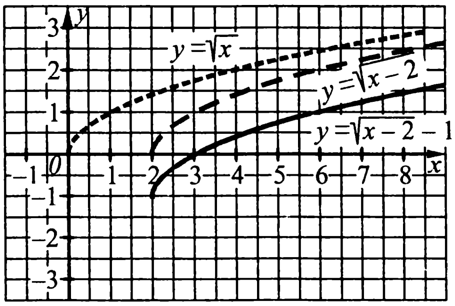


Рис. 3

Наприклад, побудувати графік функції $y = \sqrt{x-2} - 1$. Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$ і паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці вздовж осі x (оскільки $-2 < 0$), одержуючи графік функції

$y = \sqrt{x-2}$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = \sqrt{x-2} - 1$ (див. рис.).



Графік функції y = –f(x)

Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, необхідно симетрично відобразити графік функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = -f(x)$. Симетрично відображаємо графік відносно осі x (див. рис. 4).

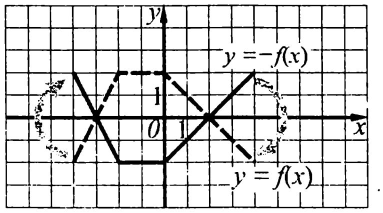
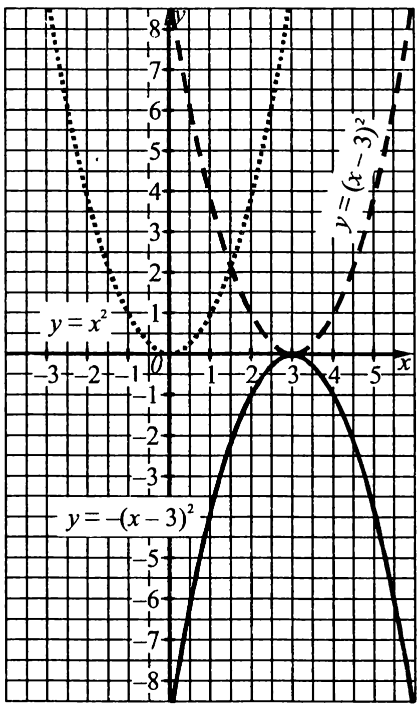


Рис. 4

Наприклад, побудувати графік функції $y = -(x-3)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$) й одержуємо графік функції $y = (x-3)^2$; відображаємо одержаний графік симетрично відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -(x-3)^2$ (див. рис.).



***Графік функції* $y = f(-x)$**

Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, необхідно симетрично відобразити графік функції $y = f(x)$ відносно осі ординат.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(-x)$. Симетрично відображаємо графік відносно осі y (див. рис. 5).

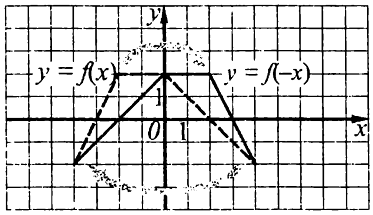
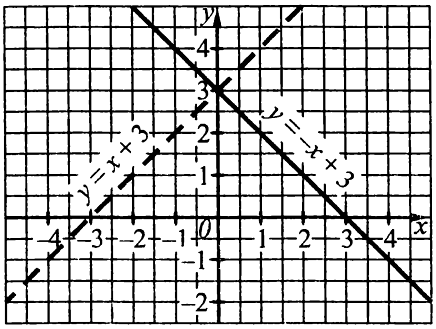


Рис. 5

Наприклад, побудувати графік функції $y = -x + 3$. Будуємо графік функції $y = x + 3$ і відображаємо одержаний графік симетрично відносно осі y й одержуємо графік функції $y = -x + 3$ (див. рис.).

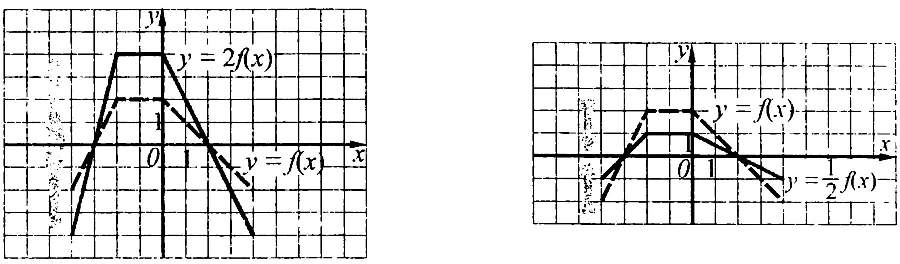


***Графік функції* $y = cf(x)$**

Щоб побудувати графік функції $y = cf(x)$, необхідно виконати розтяг графіка функції $y = f(x)$ від осі абсцис у c разів, якщо $c > 1$, або стиск до осі абсцис у $\frac{1}{c}$ разів, якщо $0 < c < 1$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графіки функцій: а) $y = 2f(x)$; б) $y = \frac{1}{2}f(x)$.

а) Оскільки $2 > 1$, то виконуємо розтяг удвічі від осі x, (див. рис. 6 а); б) оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то для побудови графіка функції $y = \frac{1}{2}f(x)$ виконаємо стиск графіка функції $y = f(x)$ до осі x (див. рис. 6 б).

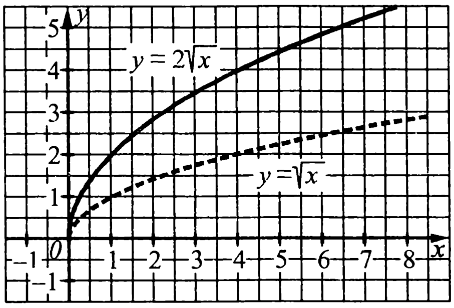


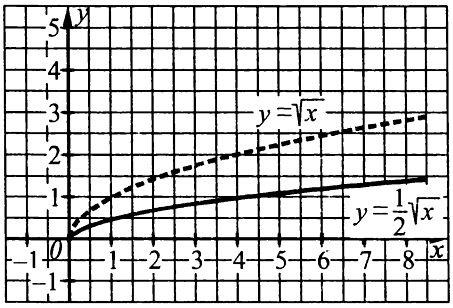
а) б)

Рис. 6

Наприклад, побудувати графіки функцій: а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. а) Виконуємо розтяг графіка функції $y = \sqrt{x}$ удвічі від осі x й одержуємо графік функції

$y = 2\sqrt{x}$; б) виконуємо стиск графіка функції $y = \sqrt{x}$ удвічі до осі x й одержуємо графік функції $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ (див. рис.).





Графік функції $y = |f(x)|$

За означенням модуля числа маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $f(x) \geq 0$, то значення функцій $y = |f(x)|$ та $y = f(x)$ однакові, якщо $f(x) < 0$, то значення цих функцій є протилежними числами. Тому графік функції $y = |f(x)|$ можна одержати так: будуємо графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка розташована нижче від осі x, симетрично відображаємо відносно цієї осі.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = |f(x)|$. Ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка розміщена над віссю x, у тому числі точки перетину графіка з віссю абсцис, залишаємо без змін, а ту частину, яка розміщена під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно цієї осі (див. рис. 7).

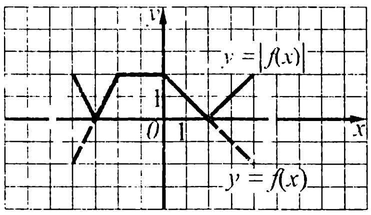
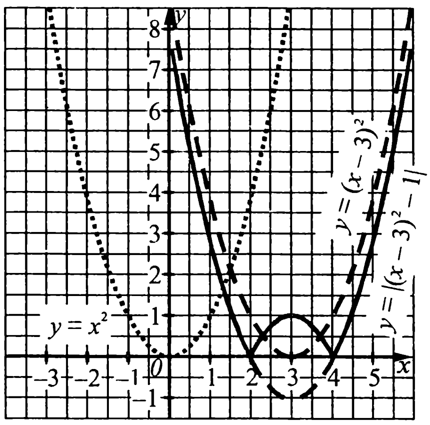


Рис. 7

Наприклад, побудувати графік функції $y = |(x - 3)^2 - 1|$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$) й одержуємо графік функції $y = (x - 3)^2$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = (x - 3)^2 - 1$; відображаємо симетрично відносно осі x ту частину графіка, яка міститься під віссю, й одержуємо графік функції $y = |(x - 3)^2 - 1|$ (див. рис.).



***Графік функції* $y = f(|x|)$**

Функція $y = f(|x|)$ — парна ($f(|-x|) = f(|x|)$). Тому достатньо побудувати графік функції $y = f(|x|)$ для $x \geq 0$ і симетрично відобразити його відносно осі ординат.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(|x|)$. Ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка розміщена праворуч осі y, у тому числі точки перетину графіка з віссю ординат, залишаємо без змін, а ту частину, яка розміщена ліворуч від абсцис, замінюємо симетричною до розташованої праворуч частини відносно осі ординат (див. рис. 8).

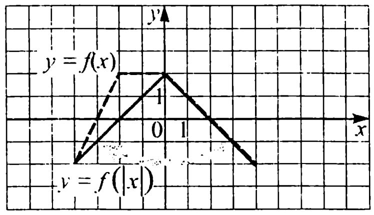
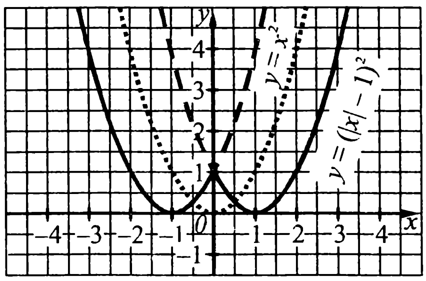


Рис. 8

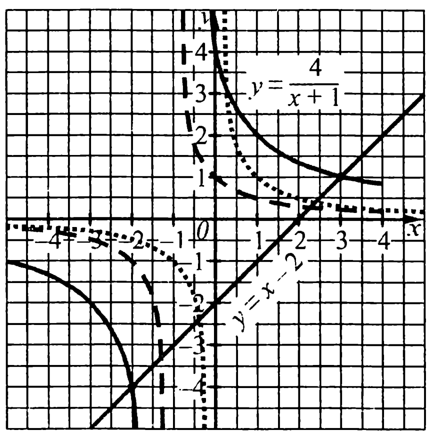
Наприклад, побудувати графік функції $y = (|x| - 1)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік ліворуч на 1 одиницю вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2$; залишаємо ту частину графіка, яка відповідає невід'ємним значенням x; симетрично відображаємо відносно осі y частину отриманого графіка для невід'ємних x й одержуємо графік функції $y = (|x| - 1)^2$.



Графічний метод розв'язування рівнянь

Часто, використовуючи побудову графіків функцій методом геометричних перетворень, зручно розв'язувати деякі види рівнянь. Для цього рівняння $f(x) = 0$ зводять до рівняння виду $g(x) = h(x)$, будують графіки рівнянь $y = g(x)$ і $y = h(x)$ та знаходять точки перетину цих рівнянь. Абсциси точок перетину є наближеними значеннями коренів рівняння, за якими, якщо це можливо, встановлюють корені.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{4}{x+1} = x - 2$. Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x+1}$ і $y = x - 2$ та знаходимо абсциси точок їх перетину.

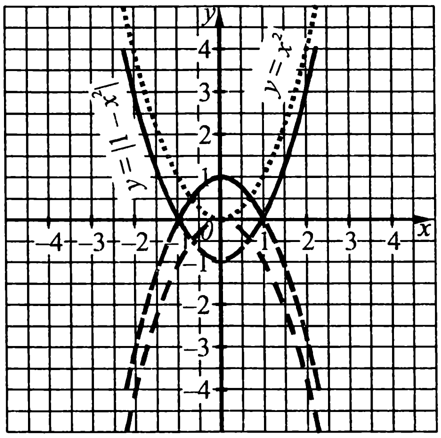


17* Капіносов А Математика. Комплексна підготовка до ЗНО

З рисунка видно, що $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Перевіркою встановлюємо, що $x_1 = 3$ і $x_2 = -2$ — корені рівняння.

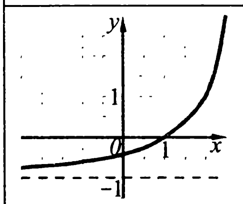
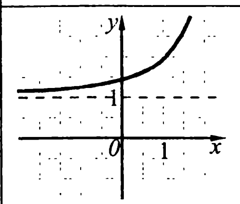
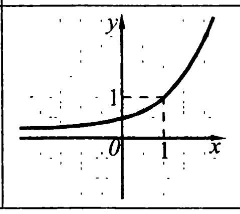
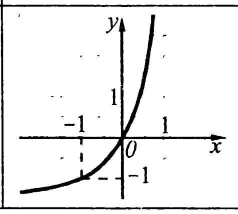
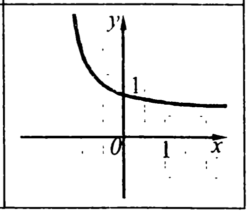
У деяких випадках за допомогою методу геометричних перетворень зручно розв'язувати рівняння з параметрами.

Наприклад, знайти всі значення параметра a, для яких рівняння $|1 - x^2| = a$ має три корені. Будуємо графік функції $y = x^2$; симетрично відображаємо одержаний графік відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -x^2$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = 1 - x^2$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |1 - x^2|$.



Рівняння $|1 - x^2| = a$ матиме три корені, якщо $a = 1$ (графіки функцій $y = |1 - x^2|$ і $y = 1$ перетинаються у трьох точках).

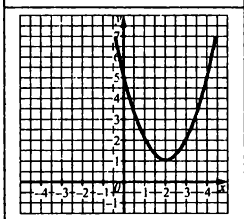
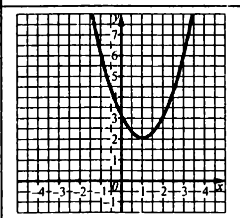
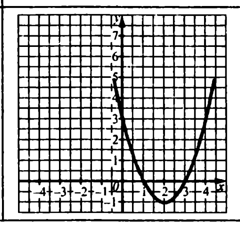
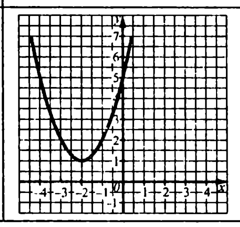
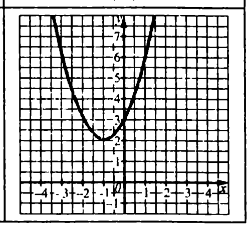
Приклад 1. Серед наведених графіків указати графік функції $y = 2^{x-1} - 1$.

А	Б	В	Г	Д
				

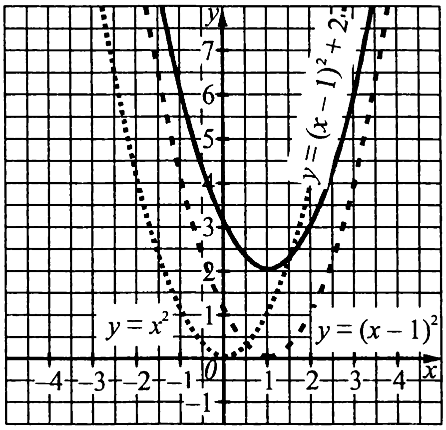
■ Це графік функції $y = 2^x$, зміщений на 1 одиницю праворуч відносно осі y та опущений на 1 одиницю вниз відносно осі x.

Відповідь. А. ■

Приклад 2. Серед наведених графіків указати графік функції $y = (x - 1)^2 + 2$.

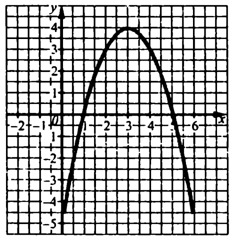
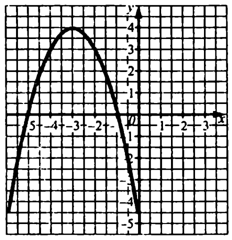
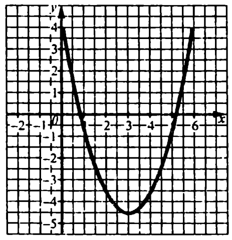
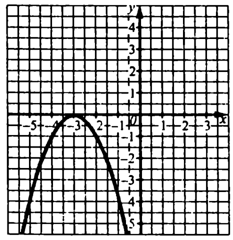
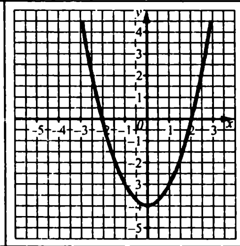
А	Б	В	Г	Д
				

■ Будуємо графік функції $y = x^2$; переносимо графік праворуч на 1 одиницю вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2$; паралельно переносимо одержаний графік угору на 2 одиниці вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 2$.

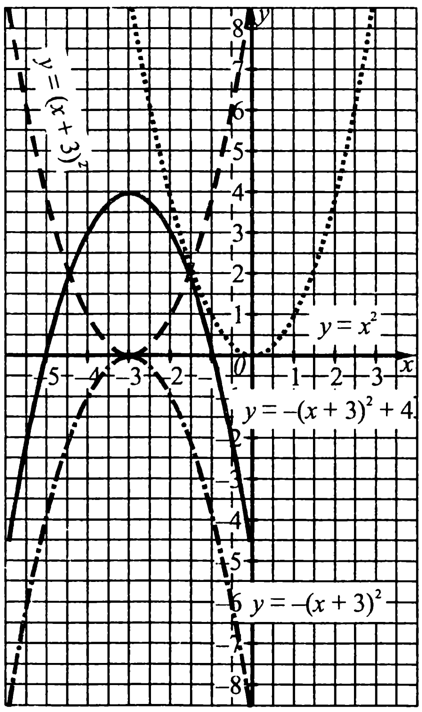


Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Серед наведених графіків указати графік функції $y = -(x + 3)^2 + 4$.

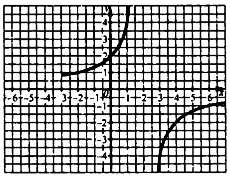
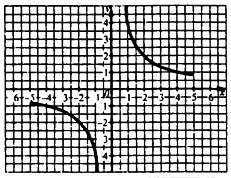
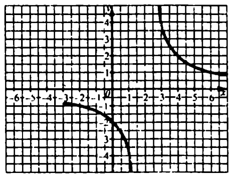
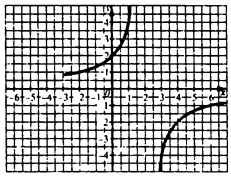
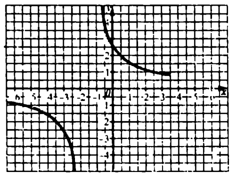
А	Б	В	Г	Д
				

■ Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік ліворуч на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x + 3)^2$; відображаємо отриманий графік симетрично відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -(x + 3)^2$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 4 одиниці й одержуємо графік функції $y = -(x + 3)^2 + 4$.

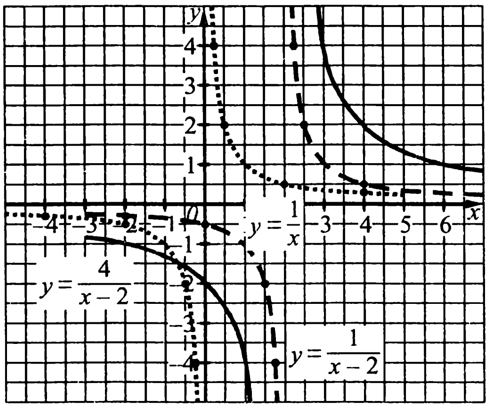


Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Серед наведених графіків указати графік функції $y = \dfrac{4}{x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
				

■ Будуємо графік функції $y = \dfrac{1}{x}$; паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = \dfrac{1}{x-2}$; розтягуємо отриманий графік у 4 рази від осі x й одержуємо графік функції $y = \dfrac{4}{x-2}$.

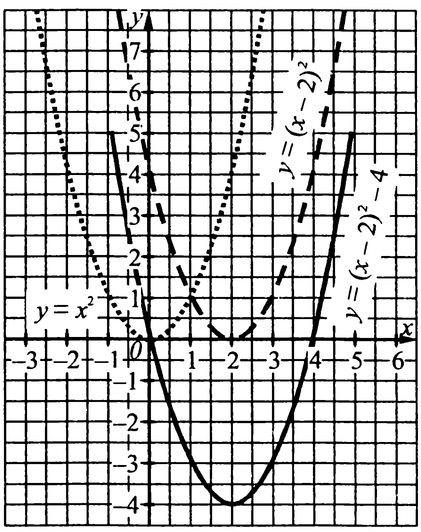


Відповідь. **В.** ■

Приклад 5. Користуючись методом геометричних перетворень, побудувати графік функції $y = (x-2)^2 - 4$ та знайти проміжки її зростання.

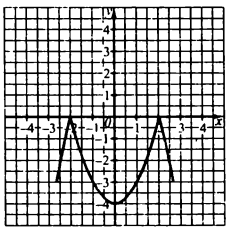
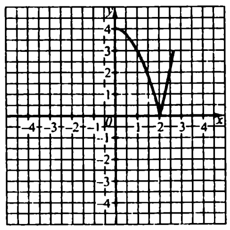
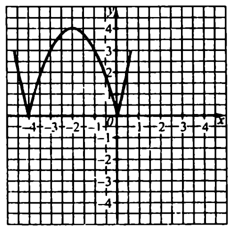
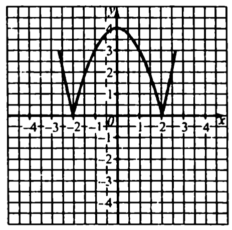
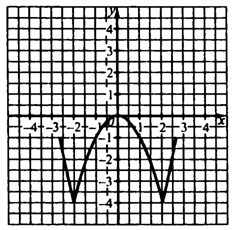
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	$[0; 4]$	$[2; +\infty)$	$[4; +\infty)$

■ Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x-2)^2$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 4 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x-2)^2 - 4$.

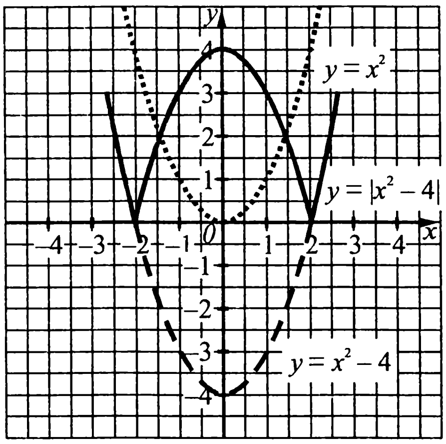


Функція зростає на проміжку [2; +∞).
Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Серед наведених графіків указати графік функції $y = |x^2 - 4|$.

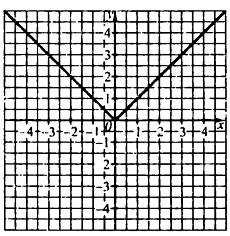
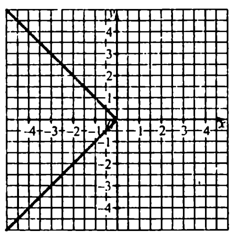
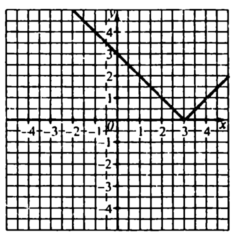
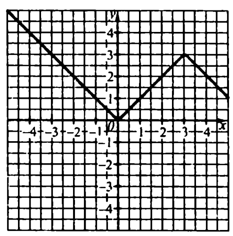
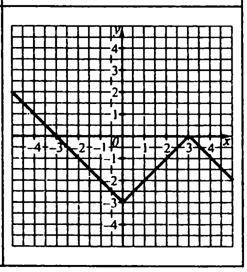
А	Б	В	Г	Д
				

■ Будую графік функції $y = x^2$; паралельно переношу графік униз на 4 одиниці вздовж осі y й одержую графік функції $y = x^2 - 4$; симетрично відображаю відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержую графік функції $y = |x^2 - 4|$.

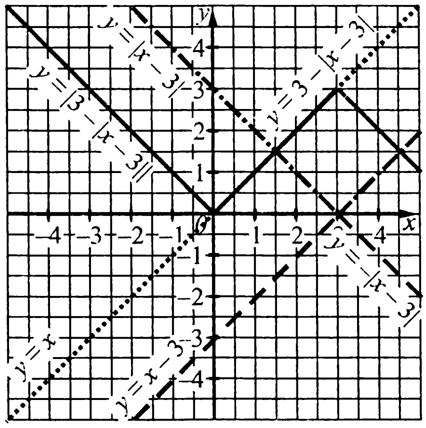


Відповідь. **Г.** ■

Приклад 7. Серед наведених графіків указати графік функції $y = |3 - |x - 3||$.

А	Б	В	Г	Д
				

■ Будуємо графік функції $y = x$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = x - 3$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |x - 3|$; симетрично відображаємо відносно осі x отриманий графік й одержуємо графік функції $y = -|x - 3|$; паралельно переносимо графік угору на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = 3 - |x - 3|$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |3 - |x - 3||$.

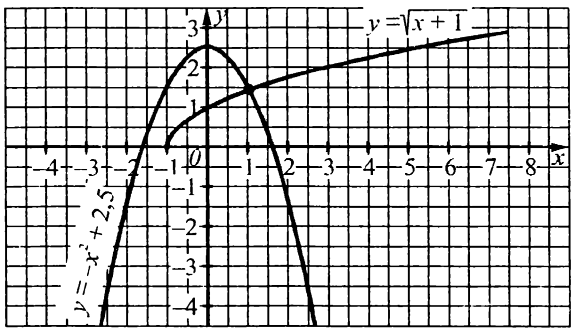


Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Користуючись графічним методом, встановити кількість коренів рівняння $\sqrt{x+1}$ = $= -x^2 + 2{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	рівняння коренів не має

■ Будуємо графіки функцій $y = \sqrt{x+1}$ та $y = -x^2 + 2{,}5$.

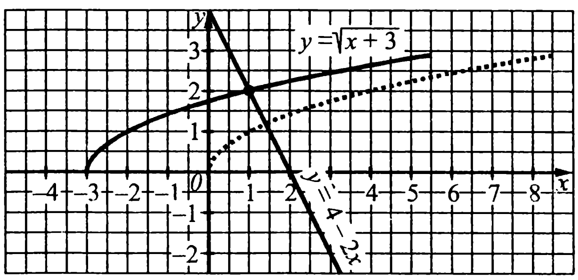


Дане рівняння має один корінь, бо графіки перетинаються лише в одній точці.
Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Користуючись графічним методом, розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$.

А	Б	В	Г	Д
5	2	1	3,5	–1

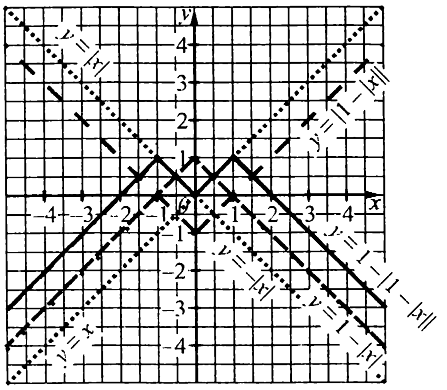
■ $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$. Будуємо графіки функцій $y = \sqrt{x+3}$ і $y = 4 - 2x$ та знаходимо абсцису точки їх перетину.



$x = 1$. Перевіркою встановлюємо, що $x = 1$ — корінь рівняння
Відповідь. **В.** ■

Приклад 10. Скільки коренів має рівняння $1 - |1 - |x|| = a$? У відповідь записати кількість коренів, якщо $0 < a < 1$.

■ Будуємо графік функції $y = |x|$; симетрично відображаємо його відносно осі x графік й одержуємо графік функції $y = -|x|$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = 1 - |x|$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |1 - |x||$; симетрично відображаємо відносно осі x графік й одержуємо графік функції $y = -|1 - |x||$; паралельно переносимо графік угору на 1 одиницю й одержуємо графік функції $y = 1 - |1 - |x||$. Будуємо графік рівняння $y = a$.



Якщо $a < 0$, то рівняння має два корені; якщо $a = 0$, то рівняння має три корені; якщо $0 < a < 1$, то рівняння має чотири корені; якщо $a = 1$, то рівняння має 2 корені; якщо $a > 1$ — коренів немає.

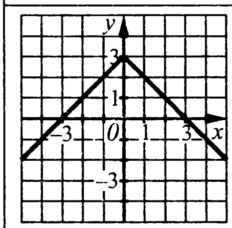
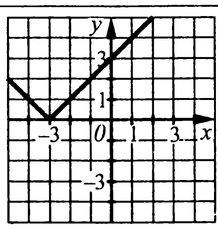
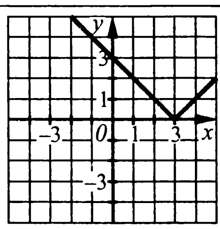
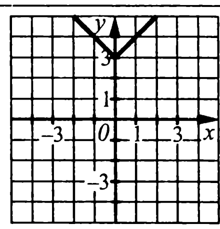
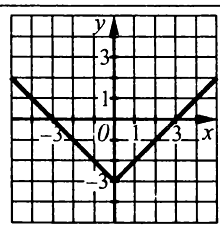
Відповідь. 4. ■

Завдання 23.1–23.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

23.1. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y = \frac{1}{x}$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі y на 5 одиниць.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x+5}$	$y = \frac{1}{x-5}$	$y = \frac{1}{x} - 5$	$y = \frac{1}{x} + 5$	$y = \frac{5}{x}$

23.2. На якому з рисунків зображено графік функції $y = |x| - 3$?

А	Б	В	Г	Д
				

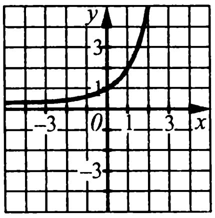
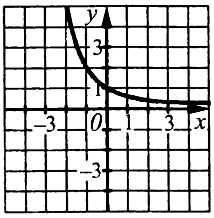
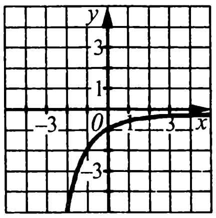
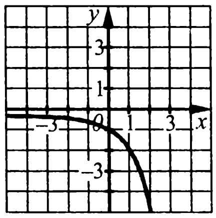
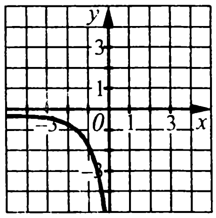
23.3. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y = \cos x$ у результаті його стискування до осі x утричі.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3\cos x$	$y = \frac{1}{3}\cos x$	$y = \cos 3x$	$y = \cos\frac{x}{3}$	$y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$

23.4. Областю значень функції $y=f(x)$ є проміжок $[-4; 16]$. Знайти область значень функції $y=\frac{1}{4}f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-16; 64]$	$[4; 4]$	$[-1; 4]$	$[-4; 16]$	не можна визначити

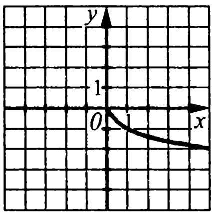
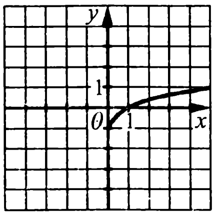
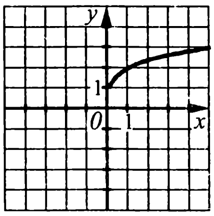
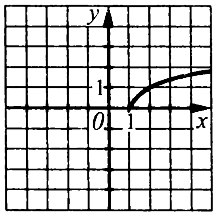
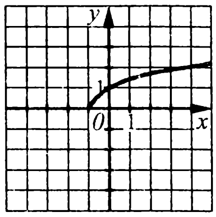
23.5. На якому з рисунків зображено графік функції $y=-2^x$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.6. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y=x^3$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі x на 4 одиниці.

А	Б	В	Г	Д
$y=(x-4)^3$	$y=(x+4)^3$	$y=x^3-4$	$y=x^3+4$	$y=4x^3$

23.7. На якому з рисунків зображено графік функції $y=\sqrt{x+1}$?

А	Б	В	Г	Д
				

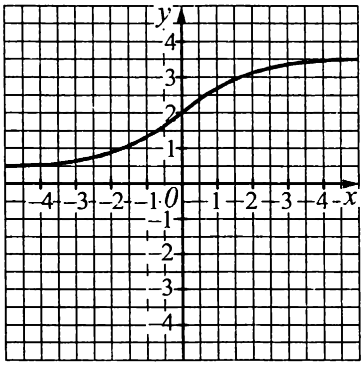
23.8. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y=\sin x$ у результаті його розтягування від осі y у 8 разів?

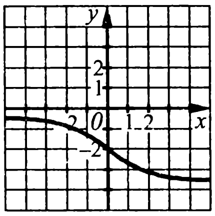
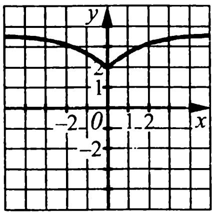
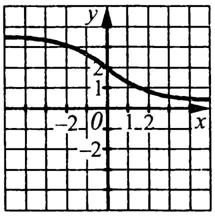
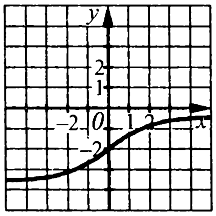
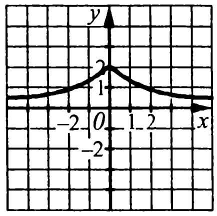
А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{8}\sin x$	$y=8\sin x$	$y=\sin\frac{x}{8}$	$y=\sin 8x$	$y=\sin x+8$

23.9. Областю визначення функції $y=f(x)$ є проміжок $[-4; 6]$. Знайти область визначення функції $y=f(2x)$.

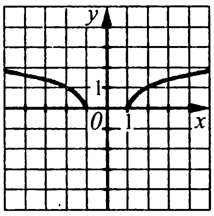
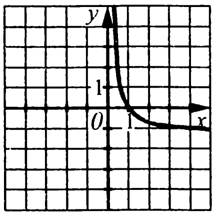
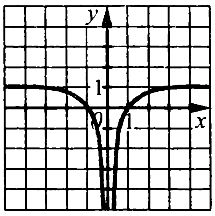
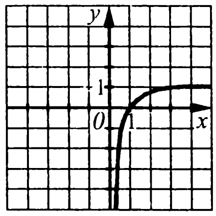
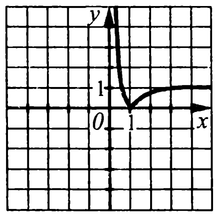
А	Б	В	Г	Д
$[-8; 12]$	$[-2; 3]$	$[-4; 3]$	$[-2; 8]$	не можна визначити

23.10. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = f(x)$. На якому з рисунків зображено ескіз графіка функції $y = f(-x)$?

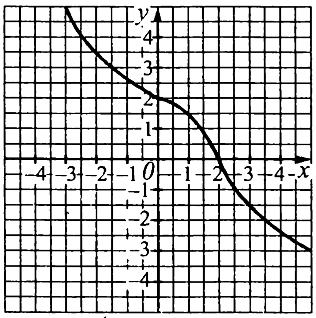


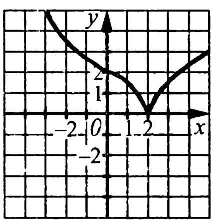
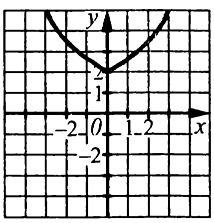
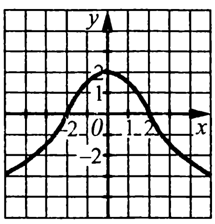
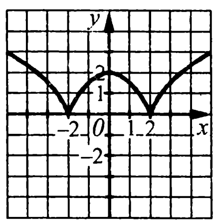
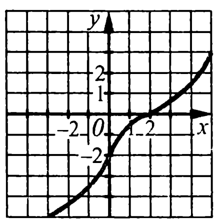
А	Б	В	Г	Д
				

23.11. На якому з рисунків зображено графік функції $y = |\log_2 x|$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. На якому з рисунків зображено графік функції $y = f(|x|)$?



А	Б	В	Г	Д
				

23.13. Графік функції $y = x^3$ зсунули ліворуч на 4 одиниці й відобразили симетрично відносно осі x. Графік якої функції отримали в результаті таких перетворень?

А	Б	В	Г	Д
$y = -(x-4)^3$	$y = -(x+4)^3$	$y = (-x)^3 - 4$	$y = (-x)^3 + 4$	$y = (x+4)^3$

23.14. Областю значень функції $y = f(x)$ є проміжок [–2; 2]. Знайти область значень функції $y = 4f(x) - 3$.

А	Б	В	Г	Д
[–20; –4]	[–2; 2]	[–3,5; –2,5]	[–11; 5]	[0; 5]

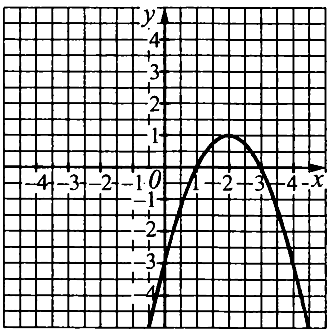
23.15. У результаті яких послідовних перетворень із графіка функції $y = f(x)$ можна отримати графік функції $y = f(2x + 6)$?

А	Б	В	Г	Д
стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням праворуч на 3 одиниці	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці

23.16. Областю визначення функції $y = f(x)$ є проміжок [0; 2]. Знайти область визначення функції $y = f\left(\frac{x}{2} - 4\right)$.

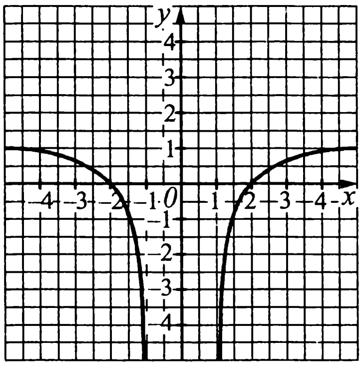
А	Б	В	Г	Д
[–4; –2]	[4; 5]	[–8; –4]	[4; 8]	[8; 12]

23.17. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



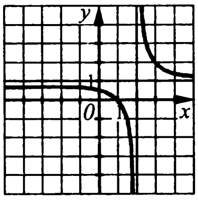
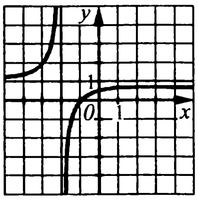
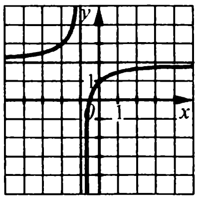
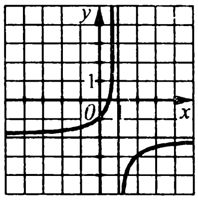
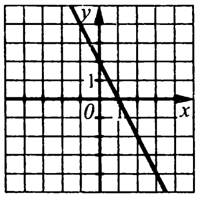
А	Б	В	Г	Д
$y = (x+2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 - 1$	$y = (-x-2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 - 1$

23.18. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

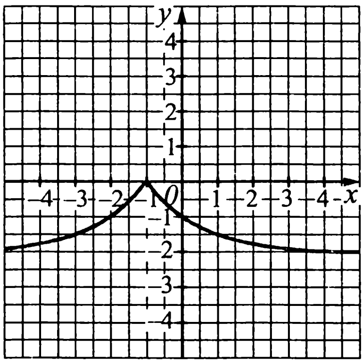


А	Б	В	Г	Д
$y = \|\ln(x-1)\|$	$y = \|\ln(x+1)\|$	$y = \ln(\|x\|+1)$	$y = \ln(\|x\|-1)$	$y = \ln(\|x\|-2)$

23.19. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \dfrac{x-1}{x-2}$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.20. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

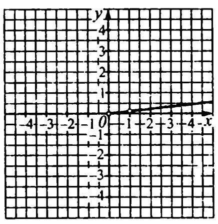
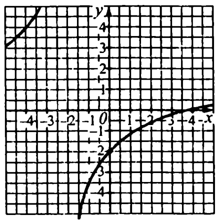
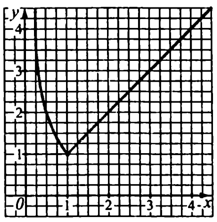
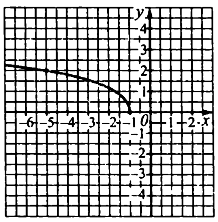
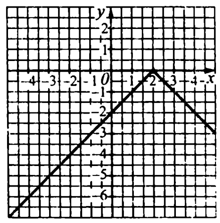


А	Б	В	Г	Д
$y=\sqrt{\|x\|+1}$	$y=\sqrt{\|x\|-1}$	$y=-\sqrt{\|x+1\|}$	$y=-\sqrt{\|x\|+1}$	$y=-\sqrt{x+1}$

Завдання 23.21–23.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

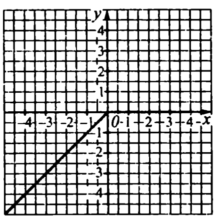
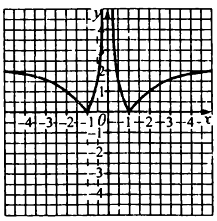
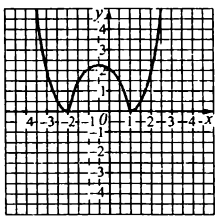
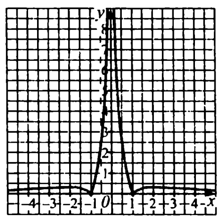
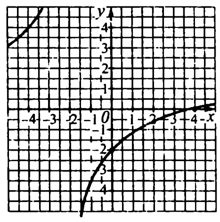
23.21. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1	2	3	4
$y=\dfrac{x-4}{x+2}$	$y=3^{\frac{1}{\log_x 3}-2}$	$y=\sqrt{-1-x}$	$y=-\|x-2\|$

А	Б	В	Г	Д
				

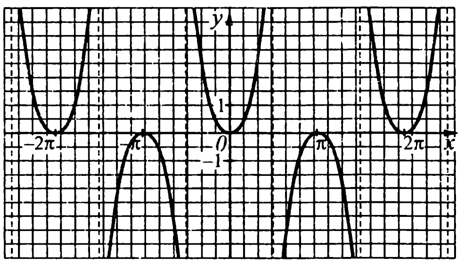
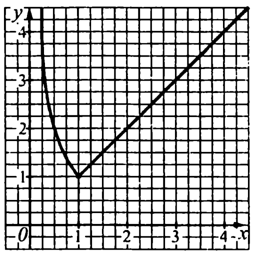
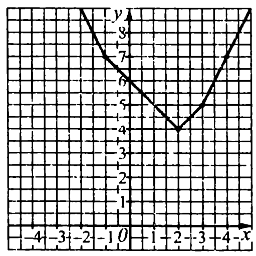
23.22. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

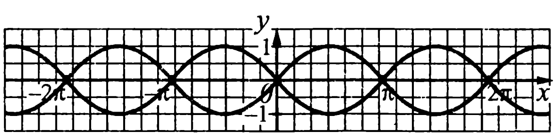
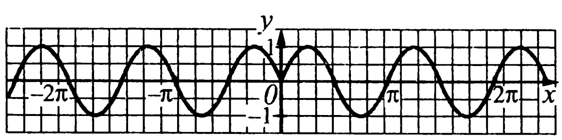
1	2	3	4
$y=\dfrac{x-\lvert x\rvert}{2}$	$y=x^2-2\lvert x\rvert-8$	$y=\lvert -x^2-x+2\rvert$	$y=\lvert\log_2\lvert x\rvert\rvert$

А	Б	В	Г	Д
				

23.23. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

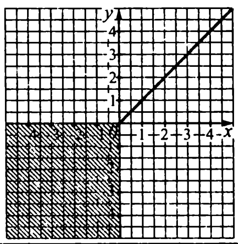
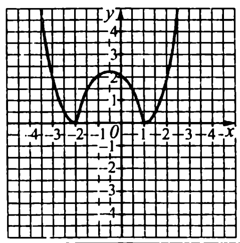
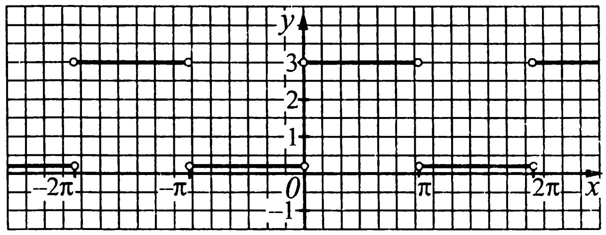
1	2	3	4
$y=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}\sin 2x$	$y=\lvert x+1\rvert+\lvert x-2\rvert+\lvert x-3\rvert$	$y=3^{\lvert\log_3 x\rvert}$	$y=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

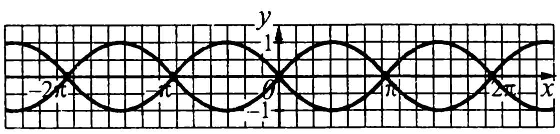
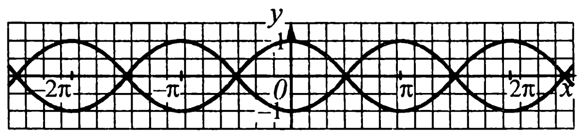
А	Б	В
		

Г	Д
	

23.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1	2	3	4
$y=3^{\frac{\sin x}{\lvert\sin x\rvert}}$	$x+\lvert x\rvert=y+\lvert y\rvert$	$\lvert y\rvert=\lvert\sin x\rvert$	$\lvert y\rvert=\lvert\cos x\rvert$

А	Б	В
		

Г	Д
	

23.25. Задано функцію $y = f(x)$ з множиною значень $[-2; 5]$. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y = f(x) + 2$
2 $y = -f(x)$
3 $y = 2f(x)$
4 $y = |f(x)|$

А $[0; 5]$
Б $[-4; 10]$
В $[2; 5]$
Г $[0; 7]$
Д $[-5; 2]$

23.26. Задано функцію $y = \varphi(x)$ з областю визначення $[-4; 10]$. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y = \varphi(x + 4)$
2 $y = \varphi(x - 4)$
3 $y = \varphi(x) + 5$
4 $y = \varphi(x - 5) - 3$

А $[-4; 10]$
Б $[0; 14]$
В $[4; 18]$
Г $[1; 15]$
Д $[-8; 6]$

23.27. Задано функцію $y = h(x)$ з областю визначення $[-2; 6]$. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y = h\left(\frac{x}{2}\right)$
2 $y = h(2x)$
3 $y = h(-x)$
4 $y = h(|x|)$

А $[0; 6]$
Б $[-6; 2]$
В $[-4; 12]$
Г $[-6; 6]$
Д $[-1; 3]$

23.28. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції $y = \sin x$ (1–4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

1 Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі x на 3 одиниці ліворуч
2 Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз
3 Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі x утричі
4 Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі y утричі

А $y = \sin 3x$
Б $y = \frac{1}{3}\sin x$
В $y = \sin(x - 3)$
Г $y = \sin(x + 3)$
Д $y = \sin x - 3$

23.29. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції $y = \cos x$ (1–4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

1 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі x

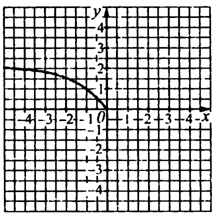
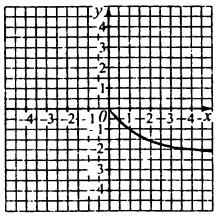
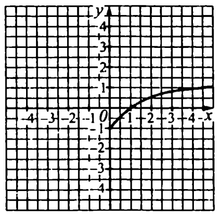
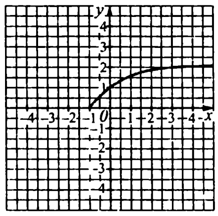
2 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі y

3 Частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить вище від осі x і на самій осі, залишили без змін, а частину, яка лежить нижче від осі x, відобразили симетрично відносно цієї осі

4 Першу частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить праворуч від осі y і на самій осі, залишили без змін, а другу частину замінили симетричною до першої відносно осі y

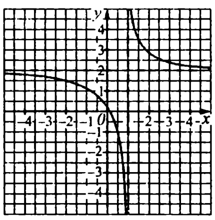
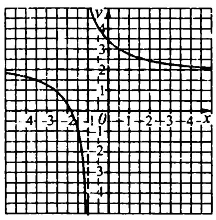
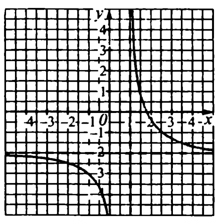
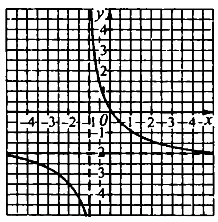
А $y = |\cos x|$
Б $y = |\cos|x||$
В $y = \cos|x|$
Г $y = \cos(-x)$
Д $y = -\cos x$

23.30. Установити відповідність між графіками функцій (1–4) та їх формулами (А–Д).

1	2	3	4
			

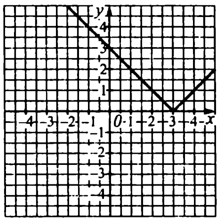
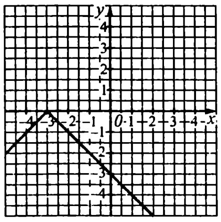
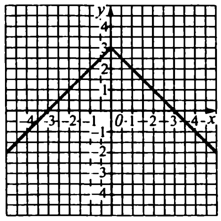
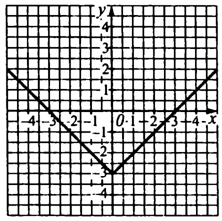
А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x} - 1$	$y = \sqrt{x-1}$	$y = \sqrt{x+1}$	$y = \sqrt{-x}$	$y = -\sqrt{x}$

23.31. Установити відповідність між графіками функцій (1–4), утворених із графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$, та їх формулами (А–Д).

1	2	3	4
			

А	Б	В	Г	Д
$y = \dfrac{1}{x+1} + 2$	$y = \dfrac{1}{x-1} - 2$	$y = \dfrac{1}{x-1} + 2$	$y = \dfrac{1}{x-2} + 1$	$y = \dfrac{1}{x+1} - 2$

23.32. Установити відповідність між графіками функцій (1–4), утворених із графіка функції $y = |x|$, та відповідними формулами (А–Д).

1	2	3	4
			

А	Б	В	Г	Д
$y = \|x + 3\|$	$y = -\|x\| + 3$	$y = \|x - 3\|$	$y = -\|x + 3\|$	$y = \|x\| - 3$