# Тема 12. Ірраціональні рівняння

*Ірраціональними* називають рівняння, які містять змінну під знаком кореня (радикала) або в основі степеня з раціональним показником. Наприклад, $x+3=\sqrt{2x-1}$; $x^{\frac{1}{4}}-10=6$.

Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є: а) метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня; б) метод уведення нових змінних; в) штучні прийоми.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин до парного степеня можуть з'явитися побічні (зайві) корені.

Так, наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x+5}=x-1$, то, піднісши до квадрата обидві його частини, одержимо: $\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x-1)^2$; $x+5=x^2-2x+1$; $x^2-3x-4=0$; $x_1=4$ і $x_2=-1$. Коренем вихідного рівняння $\left(\sqrt{4+5}=4-1\right)$ є $x_1=4$, а $x_2=-1$ є побічним коренем $\left(\sqrt{-1+5}\neq -1-1; \sqrt{4}\neq -2\right)$.

При розв'язуванні ірраціонального рівняння, яке містить парні степені радикалів, буває корисним знаходження ОДЗ, що може полегшити його розв'язування.

***Відокремлення квадратного кореня***

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$. Відокремимо один квадратний корінь $\sqrt{x+2}=3-\sqrt{3-x}$, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $x+2=9-6\sqrt{3-x}+3-x$; $5-x=3\sqrt{3-x}$. Ще раз піднесемо до квадрата: $25-10x+x^2=9(3-x)$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$. Обидва значення є коренями даного рівняння: якщо $x_1=-1$, то одержимо: $\sqrt{-1+2}+\sqrt{3-(-1)}=3$; $\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$; $3=3$; якщо $x_2=2$, то одержимо: $\sqrt{2+2}+\sqrt{3-2}=3$; $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$; $3=3$.

Іноді корисно почати розв'язання рівняння з визначення його області визначення. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$. ОДЗ: $\begin{cases}11x+3\geq 0;\\2-x\geq 0;\\9x-7\geq 0;\\x-2\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq -\frac{3}{11};\\x\leq 2;\\x\geq \frac{7}{9};\\x\geq 2;\end{cases}$ $x=2$. Отже, область визначення складається тільки з однієї точки $x=2$. Перевіримо, чи буде це значення коренем вихідного рівняння: $\sqrt{11\cdot 2+3}-\sqrt{2-2}-\sqrt{9\cdot 2+7}+\sqrt{2-2}=0$; $\sqrt{25}-\sqrt{25}=0$; $0=0$.

Відповідь. 2.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь слід пам'ятати:

1) у рівнянні корені парного степеня є арифметичними, а це значить, що значення кореня завжди невід'ємне, крім цього, підкореневий вираз теж невід'ємний;

2) корені непарного степеня визначені для будь-якого значення підкореневого виразу;

3) формальне використання властивостей кореня $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}$ або $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$ може призвести до звуження області визначення рівняння, що не допустимо.

Одним зі способів, який застосовують для розв'язування ірраціональних рівнянь, є введення нової змінної. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-6x+18}=9$. Позначимо вираз $x^2-6x+9$ через $t$: $x^2-6x+9=t\geq 0$. Тоді $x^2-6x+18=t+9$ і вихідне рівняння набуде вигляду: $\sqrt{t}+\sqrt{t+9}=9$. Розв'яжемо його: $\sqrt{t}=9-\sqrt{t+9}$; $\left(\sqrt{t}\right)^2=\left(9-\sqrt{t+9}\right)^2$; $t=81-18\sqrt{t+9}+t+9$; $18\sqrt{t+9}=90$; $\sqrt{t+9}=5$; $t+9=25$; $t=16$. Повернувшись до заміни, одержимо: $x^2-6x+9=16$; $x^2-6x-7=0$;

$x_1=-1$, $x_2=7$. Виконавши перевірку, встановлюємо, що обидва значення задовольняють початкове рівняння.

Відповідь. –1; 7.

***Рівняння виду*** $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=h(x)$

При розв'язуванні рівнянь такого виду доцільно піднести обидві частини до куба за формулою $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)^3=a\pm b\pm 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)$. Раціональне рівняння, яке виникне, може мати сторонні розв'язки, тому для знайдених розв'язків обов'язково потрібно виконати перевірку.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$. Після піднесення обох частин рівняння до куба отримаємо: $8-x+x+1+3\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}\left(\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}\right)=27$. Використаємо умову, що $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$. Одержимо: $\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}=2$; $(8-x)(x+1)=8$; $x^2-7x=0$; $x_1=0$, $x_2=7$. Перевіркою встановлюємо, що обидва значення перетворюють задане рівняння в тотожність.

Відповідь. 0; 7.

***Зведення ірраціонального рівняння до системи рівнянь***

Нехай потрібно розв'язати рівняння $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$. Позначимо $\sqrt[4]{8-x}=a$, звідки $8-x=a^4$; $\sqrt[4]{89+x}=b$, звідки $89+x=b^4$ і $a^4+b^4=8-x+89+x=97$. Одержимо систему рівнянь: $\begin{cases}a+b=5;\\a^4+b^4=97.\end{cases}$ Перетворимо вираз $a^4+b^4$: $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2$. Одержимо рівняння: $(25-2ab)^2-2a^2b^2=97$. Нехай $ab=t$, тоді маємо: $(25-2t)^2-2t^2=97$; $625-100t+4t^2-2t^2-97=0$; $2t^2-100t+528=0$; $t^2-50t+264=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=44;\\t_2=6,\end{array}\right.$ тобто $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=5;\\ab=6;\end{cases}\\\begin{cases}a+b=5;\\ab=44.\end{cases}\end{array}\right.$ Розв'язками першої системи є $a=2$, $b=3$ або $a=3$, $b=2$, друга система розв'язків не має. Повертаємося до заміни й одержуємо: $x_1=-8$, $x_2=-73$. Відповідь. –8; –73.

***Спряженість в ірраціональних рівняннях***

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4$ (1). Складемо нове рівняння: $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=A$ (2). Перемножимо почастинно рівняння (1) і (2): $(1+x+x^2)-(1-x+x^2)=4A$ й виразимо $A$ через $x$: $2x=4A$; $A=\frac{x}{2}$. Таким чином, $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=\frac{x}{2}$. Додамо вихідне рівняння до останнього: $2\sqrt{1+x+x^2}=4+\frac{x}{2}$; $4\left(1+x+x^2\right)=16+4x+\frac{x^2}{4}$; $16+16x+16x^2=64+16x+x^2$; $15x^2=48$; $\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{4\sqrt{5}}{5};\\x_2=-\frac{4\sqrt{5}}{5}.\end{array}\right.$ Перевіркою встановлюємо, що обидва корені задовольняють вихідне рівняння.

Відповідь. $\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

***Розв'язування ірраціональних рівнянь з використанням властивостей відомих функцій та оцінки значень лівої й правої частин рівняння***

Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-7x+6}=12x-x^2-36$. Перепишемо задане рівняння так: $\sqrt{x^2-7x+6}=-(x-6)^2$; $f(x)=\sqrt{x^2-7x+6}\geq 0$; $g(x)=-(x-6)^2\leq 0$. Отже, дане рівняння рівносильне системі: $\begin{cases}\sqrt{x^2-7x+6}=0;\\ -(x-6)^2=0;\end{cases}$ $x=6$.

Відповідь. 6.

Якщо розв'язування рівнянь призводить до громіздких обчислень, то іноді варто скористатися властивостями зростання чи спадання відповідних функцій. Це можна зробити так:

1) дібрати один чи кілька коренів рівняння;

2) довести, що дане рівняння не має інших коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$. ОДЗ: $x\geq 7$. Неважко побачити, що $x=8$ є коренем заданого рівняння. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}$. Вона зростає на проміжку $[7;+\infty)$, тоді рівняння $f(x)=3$ має єдиний корінь, і цей корінь $x=8$. Відповідь. 8.

***Ірраціональні рівняння з параметрами***

Нехай потрібно з'ясувати, за яких значень параметра $a$ рівняння $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$ має тільки один корінь. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то рівняння може мати корінь, лише якщо $x\geq 0$.

Виконаємо заміну $\sqrt{a+x}=y$, $y\geq 0$. Тоді $\begin{cases}\sqrt{a+x}=y;\\ \sqrt{a+y}=x;\\ x\geq 0, y\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y^2-x-a=0;\\ x^2-y-a=0;\\ x\geq 0, y\geq 0.\end{cases}$ Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо рівняння: $(y^2-x^2)+(y-x)=0$; $(y-x)(y+x+1)=0$. Оскільки $y+x+1>0$ за усіх значень $x$ та $y$, то залишається одна можливість: $y-x=0$; $y=x$. Отже, система набуде вигляду: $\begin{cases}x^2-x-a=0;\\ x\geq 0.\end{cases}$ Вона матиме один додатний розв'язок у таких випадках: 1) $\begin{cases}D=1+4a=0;\\ x_0=\frac{1}{2}>0,\end{cases}$ звідки $a=-\frac{1}{4}$; 2) $a>0$ (корені квадратного тричлена $ax^2+bx+c$ мають різні знаки, коли $ac<0$).

Відповідь. $a=-\frac{1}{4}$ або $a>0$.

***Приклад 1.*** Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+7}=x-7$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 3,14 | –7 | 6 |

■ $\sqrt{3x+7}=x-7$. Якщо $x-7<0$, то рівняння коренів не має. Якщо $x-7\geq 0$, $x\geq 7$, то: $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=(x-7)^2$; $3x+7=x^2-14x+49$; $x^2-17x+42=0$; $x_1=3$ — не задовольняє умову $x\geq 7$, $x_2=14$.

Відповідь. 14. ■

***Приклад 2.*** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7,5 | 4,14 | 8 | 5 |

■ $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$; $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}=\sqrt{x+10}$; $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}\right)^2=\left(\sqrt{x+10}\right)^2$;

$5x-20+2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=x+10$; $2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=30-4x$; $\sqrt{4x^2-11x-69}=15-2x$;

$4x^2-11x-69=225-60x+4x^2$; $49x=294$; $x=6$.

Перевірка: $\sqrt{6+3}+\sqrt{4\cdot 6-23}-\sqrt{6+10}=\sqrt{9}+\sqrt{1}-\sqrt{16}=0$; $0=0$ — правильна рівність; 6 — корінь рівняння.

Відповідь. **А.** ■

***Приклад 3.*** Розв'язати рівняння $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{16}$ | $-\frac{1}{16}$ | 81 | 12 | 3 |

■ $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$. Зробимо заміну: $x^{\frac{1}{4}}=t$, $t\ge 0$. Тоді $x^{\frac{1}{2}}=t^2$, і задане рівняння матиме вигляд: $2t^2-5t=3$; $2t^2-5t-3=0$; $t_1=3$; $t_2=-\frac{1}{2}$ — не задовольняє умову $t\ge 0$. Тому: $x^{\frac{1}{4}}=3$; $x=3^4$; $x=81$.

Відповідь. **В.** ■

***Приклад 4.*** Розв'язати рівняння $3\sqrt[8]{2x-9}-\sqrt{4-x}=1$.

■ Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}2x-9\ge 0;\\ 4-x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x\ge 9;\\ -x\ge -4;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 4{,}5;\\ x\le 4;\end{cases}$ $x\in\varnothing$. Оскільки ОДЗ — порожня множина, то рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$. ■

***Приклад 5.*** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{-2-x}$.

■ ОДЗ: $-2-x\ge 0$ або $x\le -2$. Якщо $x\le -2$, то тоді $x-3<0$. Отже, $\sqrt[3]{x-3}<0$. Звідси випливає, що на ОДЗ рівняння його ліва частина від'ємна, а права — невід'ємна, тому вихідне рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$. ■

***Приклад 6.*** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

■ $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$. ОДЗ: $x\ge -3$. $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^6=\left(\sqrt{x+3}\right)^6$; $(x+7)^2=(x+3)^3$; $x^2+14x+49=$ $=x^3+9x^2+27x+27$; $x^3+8x^2+13x-22=0$. Підбором знаходимо, що $x=1$ — корінь рівняння. Тоді маємо: $x^3+8x^2+13x-22=(x-1)(x^2+9x+22)$; $x^2+9x+22=0$; $D<0$, це рівняння не має коренів. Перевіркою встановлюємо, що $x=1$ задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь. 1. ■

***Приклад 7.*** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2$. ОДЗ: $x\le 5$. Нехай $\sqrt[3]{x+3}=a$, $\sqrt{5-x}=b$, $b\ge 0$. Тоді $x+3=a^3$, $5-x=b^2$ і $a^3+b^3=x+3+5-x=8$. Маємо: $\begin{cases}a+b=2;\\ a^3+b^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+(2-a)^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+4-4a+a^2=8;\end{cases}$

$$\begin{cases} b=2-a; \\ a^3+a^2-4a-4=0; \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ a^2(a+1)-4(a+1)=0; \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ (a+1)(a^2-4)=0; \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ \left[\begin{array}{l} a=-1; \\ a=2; \\ a=-2; \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+3}=-1; \\ \sqrt[3]{x+3}=2; \\ \sqrt[3]{x+3}=-2; \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x=5; \\ x=-11. \end{array}\right.$$

Сума коренів рівняння: $-4 + 5 - 11 = -10$.

Відповідь. $-10$. ■

***Приклад 8.*** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$. ОДЗ: $x \neq 0$. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}$. Вона є зростаючою на кожному із проміжків області визначення. Функція $g(x)=\frac{2}{x}$ спадає на кожному із проміжків $x\in(-\infty; 0)$ і $x\in(0; +\infty)$. На проміжку $x\in(0; +\infty)$ вихідне рівняння має корінь $x = 1$, і він єдиний, оскільки якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на певному проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому ж проміжку, то це рівняння може мати не більше одного кореня на даному проміжку. Розглянемо тепер проміжок $(-\infty; 0)$. На ньому корінь даного рівняння $x = -1$, і він з аналогічних міркувань єдиний. Отже, вихідне рівняння має два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Тоді сума коренів дорівнює $1 + (-1) = 0$.

Відповідь. 0. ■

***Приклад 9.*** За якого найбільшого значення параметра $a$ рівняння $\left(\sqrt{x-2}-3\right)(x-a)=0$ має єдиний корінь?

■ ОДЗ: $x - 2 \geq 0$; $x \geq 2$. Маємо: $\left(\sqrt{x-2}-3\right)(x-a)=0$; $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}-3=0; \\ x-a=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=3; \\ x=a; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-2=9; \\ x=a; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=11; \\ x=a. \end{array}\right.$ Рівняння має лише один корінь $x = 11$, якщо $a < 2$ або якщо $a = 11$. Отже, найбільшим значенням параметра $a$, за якого рівняння має єдиний корінь, є $a = 11$.

Відповідь. 11. ■

***Приклад 10.*** Розв'язати рівняння $x+3-\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=\frac{6}{x-5}$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

■ ОДЗ: $\frac{x+3}{x-5}>0$; $(x + 3)(x - 5) > 0$. $x\in(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$.

Оскільки $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{|x-5|}$, то дана нерівність рівносильна сукупності таких систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5; \\ x+3-\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{x-5}=\frac{6}{x-5}; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x<5; \\ x+3+\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{x-5}=\frac{6}{x-5}. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Розв'яжемо друге рівняння системи (1): $(x+3)(x-5)-\sqrt{(x+3)(x-5)}=6$.

Нехай $\sqrt{(x+3)(x-5)}=t,\ t>0$, тоді маємо: $t^2-t-6=0;\ \left[\begin{array}{l}t_1=3;\\ t_2=-2;\end{array}\right.$ $t_2=-2$ не задовольняє умову $t>0$.

Отже, $\begin{cases}x>5;\\ \sqrt{(x+3)(x-5)}=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x>5;\\ x^2-2x-15=9;\end{cases}$ $\begin{cases}x>5;\\ x^2-2x-24=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>5;\\ \left[\begin{array}{l}x_1=6;\\ x_2=-4;\end{array}\right.\end{cases}$ $x=6$.

Розв'яжемо друге рівняння системи (2): $(x+3)(x-5)+\sqrt{(x+3)(x-5)}=6$. Нехай $\sqrt{(x+3)(x-5)}=t,\ t>0$, тоді маємо: $t^2+t-6=0;\ \left[\begin{array}{l}t_1=-3;\\ t_2=2;\end{array}\right.$ $t_1=-3$ не задовольняє умову $t>0$. Отже,

$\begin{cases}x<5;\\ \sqrt{(x+3)(x-5)}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x<5;\\ x^2-2x-15=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x<5;\\ x^2-2x-19=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<5;\\ \left[\begin{array}{l}x_1=1+2\sqrt{5};\\ x_2=1-2\sqrt{5};\end{array}\right.\end{cases}$ $x=1-2\sqrt{5}$.

Корені $x=6$ і $x=1-2\sqrt{5}$ задовольняють ОДЗ. Більшим коренем є $x=6$.

Відповідь. 6. ■

**Завдання 12.1–12.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**12.1.** Знайти область визначення (область допустимих значень) рівняння $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+1}=2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | $(-\infty;-1]$ | $[5;+\infty)$ | $(-1;5)$ | $[-1;5]$ |

**12.2.** Вказати рівняння, областю визначення якого є одне число.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=3$ | $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-7}=2$ | $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=-x$ | $\sqrt{2x-6}+\sqrt{9-3x}=x$ | $\sqrt{x}+\sqrt{-x-1}=2$ |

**12.3.** Вказати рівняння, область визначення якого є порожня множина.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=2$ | $\sqrt{4-x}+\sqrt{-x}=2$ | $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$ | $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}=1$ | $\sqrt{x-5}+\sqrt{4-x}=2$ |

**12.4.** Вказати рівняння, коренем якого є число 2.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(x-2)\sqrt{x-3}=0$ | $(x-2)\sqrt{3-2x}=0$ | $(x-2)\sqrt{-x}=0$ | $(x-2)\sqrt{x-1}=0$ | $(x-2)\sqrt{1-x}=0$ |

**12.5.** Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt[3]{x}=2$, $\sqrt[3]{x}=-3$ і $\sqrt[3]{-x}=1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| –20 | –18 | 0 | 12 | 9 |

**12.6.** Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt{x-1}=2$ і $\sqrt{-x}=5$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 30 | –20 | 8 | –7 | –24 |

**12.7.** Яке з наведених рівнянь має корені?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x+7}=-1$ | $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=2$ | $\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}=0$ | $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}=0$ | $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=-2$ |

**12.8.** Знайти значення виразу $\sqrt{2x-9}$, якщо значення $x$ задовольняє умову $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | 5 або –1 | 1 або –1 | 5 | 1 |

**12.9.** Знайти значення виразу $\sqrt{x+11}$, якщо значення $x$ задовольняє умову $\sqrt{x+11}=1-x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 або 4 | 3 або –3 | 3 | 4 або –4 | 4 |

**12.10.** Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 9 | –9 | 3 | –3 | 2 |

**12.11.** Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $-4\frac{3}{8}$; 7 | 7 | –7 | 63 |

**12.12.** Скільки коренів має рівняння $3\sqrt{x-1}+7\sqrt{1-x}=3x^3+7x^5$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | більше, ніж три |

**12.13.** Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt[4]{3x-6}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | чотири |

**12.14.** Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt{2008-x}+\sqrt{x-2007}=1$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | чотири |

**12.15.** Скільки ірраціональних коренів має рівняння $\sqrt{2x-3}=3-2x$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | чотири |

**12.16.** Скільки коренів має рівняння $(x^2-5)(x+\sqrt{-x})=0$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | чотири |

**12.17.** Розв'язати рівняння $(3x+12)\sqrt{x-2}=0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| –4 | –4; 2 | 2 | –2; 4 | –2 |

**12.18.** Знайти суму коренів рівняння $\left(x^2+5x-6\right)\sqrt{x+1,5}=0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| –6,5 | 3,5 | –5 | –2,5 | –0,5 |

**12.19.** Скільки коренів має рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | чотири |

**12.20.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x-a}=a$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| За будь-якого $a$ $x=2a$ | за будь-якого $a$ $x=a^2+a$ | якщо $a\le 0, x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a^2+a$ | якщо $a<0, x\notin\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a^2+a$ | якщо $a<0, x\notin\varnothing$, якщо $a\ge 0, x=2a$ |

**12.21.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4}=a-2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| За будь-якого $a$ $x=a^2-2a$ | якщо $a<2, x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a-2$ | якщо $a\le 2, x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a-2$ | якщо $a\le 2, x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a^2-2a$ | якщо $a<2, x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a^2-4a$ |

**12.22.** Знайти всі значення $a$, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)}=0$ та $(x-a)\sqrt{x+1}=0$ рівносильні.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $a\le -1$ | $a=-1$ | $a>-1$ | $a\ge -1$ | $a<-1$ |

**12.23.** Знайти всі значення $a$, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)}=0$ та $(x+1)\sqrt{x-a}=0$ рівносильні.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $a\le -1$ | $a=-1$ | $a>-1$ | $a\ge -1$ | $a<-1$ |

**Завдання 12.24–12.30 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**12.24.** Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x-2}=-2$

2 $(x+2)\sqrt{x-6}=0$

3 $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-6}}=0$

4 $\sqrt{x+6}=2$

**А** $\{2\}$

**Б** $\{6\}$

**В** $\varnothing$

**Г** $\{-2; 6\}$

**Д** $\{-2\}$

**12.25.** Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1 $\sqrt{x-2}=\sqrt{-5-x+x^2}$

2 $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3}$

3 $(x+1)\cdot\sqrt{x-3}=0$

4 $\sqrt{x^2-6x+9}=1$

А $x^2-6x+9=0$

Б $\sqrt{x+1}\cdot(x-3)=1$

В $x^2-2x-3=0$

Г $|x-3|=1$

Д $\begin{cases} x^2-2x-3=0; \\ x-2\geq 0 \end{cases}$

**12.26.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та областями їх визначення (А–Д).

1 $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=0$

2 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=4$

3 $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+4}=4$

4 $\sqrt{x-4}+\sqrt{-x}=4$

А $\varnothing$

Б $(-\infty; -4]$

В $[-4; 4]$

Г $[4; +\infty)$

Д $\{4\}$

**12.27.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt{-x}=4$

2 $\sqrt{x}=-4$

3 $\sqrt{x^2}=16$

4 $\sqrt{x}-4=0$

А $\varnothing$

Б $\{-4; 4\}$

В $\{16\}$

Г $\{-16\}$

Д $\{-16; 16\}$

**12.28.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt[3]{-2x}=4$

2 $\sqrt[4]{-4x}=4$

3 $\sqrt[4]{-4x}=-4$

4 $\sqrt[5]{-2x}=-2$

А $\varnothing$

Б $\{-64\}$

В $\{-32\}$

Г $\{32\}$

Д $\{16\}$

**12.29.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $x^2-10x\sqrt{x}+9x=0$

2 $x+10\sqrt{x}+9=0$

3 $x-5\sqrt{x}+4=0$

4 $x-3\sqrt{x}-4=0$

А Один

Б Два

В Три

Г Чотири

Д Жодного

**12.30.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $(x-2)\sqrt{x+1}=0$

2 $(x+1)\sqrt{x-2}=0$

3 $(x-1)\sqrt{x-2}=0$

4 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$

А $-1; 2$

Б $2$

В $2$

Г $-1; 1$

Д $1$

**Розв'яжіть завдання 12.31–12.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**12.31.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$.

**12.32.** Розв'язати рівняння $\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$.

**12.33.** Розв'язати рівняння $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

**12.34.** Розв'язати рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-42}=0$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

**12.35.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

**12.36.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{x+1}$.

**12.37.** Розв'язати рівняння $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

**12.38.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x+5}=-x^2+3x+7$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

**12.39.** Знайти суму коренів рівняння $(x+1)(x-4)=\sqrt{x^2-3x+7}+9$.

**12.40.** Розв'язати рівняння $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

**12.41.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{y-9}=2;\\ \sqrt{y+7}-\sqrt{x-9}=2.\end{cases}$ У відповідь записати найбільше зі значень $x_0$ або $y_0$, де пара $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

**12.42.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x-88}+\sqrt{176+6x-2x^2}\arccos(x-10)=0$.

**12.43.** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$. У відповідь записати суму коренів.

**12.44.** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

**12.45.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2+5x-6}=51-2x$.

**12.46.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}=4$. У відповідь записати найменший корінь.

**12.47.** Розв'язати рівняння $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$. У відповідь записати найбільше значення $a$, за якого рівняння має корені.

# Тема 13. Ірраціональні нерівності

Нерівність, яка містить змінну під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником, називають *ірраціональною*. Наприклад, $\sqrt{x-2}>3-7x$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt{2x+1}\le 1$, $x^{\frac{1}{3}}-x>3$ — ірраціональні нерівності.

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є піднесення обох її частин до степеня. Необхідно звернути увагу на таке:

1. Піднесення обох частин нерівності до непарного степеня зі збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням. Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-2}<-2$. Можна виконати такі рівносильні перетворення: $\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3<(-2)^3$; $x-2<-8$; $x<-6$; $x\in(-\infty;-6)$.

Відповідь. $(-\infty;-6)$.

2. Якщо обидві частини нерівності на деякій множині $X$ визначені та набувають лише невід'ємних значень, то при піднесенні обох частин нерівності до квадрата або іншого парного степеня зі збереженням знака вихідної нерівності одержимо нерівність, рівносильну вихідній на множині $X$. Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt[6]{2x-6}<1$. ОДЗ: $2x-6\ge 0$; $x\ge 3$. Обидві частини вихідної нерівності невід'ємні, отже, дана нерівність рівносильна на $D(f)$ нерівностям: $\left(\sqrt[6]{2x-6}\right)^6<1^6$; $2x-6<1$; $x<3{,}5$. Врахувавши ОДЗ, одержимо: $3\le x<3{,}5$.

Відповідь. $[3; 3{,}5)$.

3. Ірраціональні нерівності виду $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)$, де $g(x)<0$, розв'язків не мають.

4. Щоб уникнути помилок, при розв'язуванні ірраціональних нерівностей доцільно розглядати ті значення змінної, за яких усі функції, які входять до нерівності, є визначеними, тобто знайти $D(f)$ цієї нерівності, а потім обґрунтовано виконати рівносильний перехід на всій області визначення або на її частинах.

Для розв'язування ірраціональних нерівностей можна застосовувати ще такі рівносильні перетворення:

1. $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0;\\ g(x)>0;\\ f(x)<\left(g(x)\right)^{2n}.\end{cases}$

Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt{4-x}<x+2$. Замінимо вихідну нерівність системою нерівностей $\begin{cases}4-x\ge 0;\\ x+2>0;\\ 4-x<(x+2)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 4;\\ x>-2;\\ x^2+5x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2<x\le 4;\\ x(x+5)>0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2<x\le 4;\\ \left[\begin{array}{l}x<-5;\\ x>0;\end{array}\right.\end{cases}$ $0<x\le 4$; $x\in(0; 4]$.

Відповідь. $(0; 4]$.

2. $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0;\\ g(x)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\ge 0;\\ f(x)>\left(g(x)\right)^{2n},\end{cases}\end{array}\right.$ зокрема, нерівність $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)>g(x).\end{cases}$

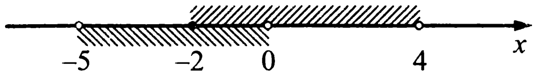
Наприклад: а) розв’язати нерівність $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x}} > -1$. ОДЗ: $\dfrac{x-3}{1-3x} \ge 0$; $\dfrac{x-3}{3x-1} \le 0$; $\begin{cases} 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-3) \le 0; \\ x \ne \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

$\dfrac{1}{3} < x \le 3$. Оскільки $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x}} \ge 0$, то за всіх $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 3\right]$ виконується нерівність $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x}} > -1$.

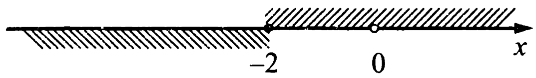
Відповідь. $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right]$;

б) розв’язати нерівність $\sqrt{4-x} > x+2$. 1) $\begin{cases} 4-x \ge 0; \\ x+2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 4; \\ x < -2; \end{cases}$ $x \in (-\infty; -2)$;

2) $\begin{cases} x+2 \ge 0; \\ 4-x > (x+2)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -2; \\ x^2+5x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -2; \\ -5 < x < 0; \end{cases}$ $x \in [-2; 0)$.



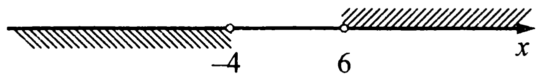

3) запишемо відповідь, об’єднавши результати, отримані в 1) і 2), й одержимо: $x \in (-\infty; -2) \cup [-2; 0) =$ $= (-\infty; 0)$.




Відповідь. $(-\infty; 0)$.

***Розв’язування ірраціональних нерівностей виду*** $\sqrt{f(x)} + b <> bf(x) + c$

Розв’яжемо нерівність $\sqrt{2x^2-8x+12} < x^2-4x-6$. Виконаємо перетворення: $\sqrt{2x^2-8x+12} <$ $< \dfrac{1}{2}\left(2x^2-8x+12\right)-12$. Уведемо нову змінну: $\sqrt{2x^2-8x+12} = t$, $t \ge 0$. Отримаємо: $t < \dfrac{1}{2}t^2 - 12$; $t^2 - 2t - 24 > 0$; $t_1 = 6$, $t_2 = -4$. Урахувавши, що $t \ge 0$, маємо: $t > 6$.




Повертаємося до заміни: $\sqrt{2x^2-8x+12} > 6$; $2x^2 - 8x + 12 > 36$; $x^2 - 4x - 12 > 0$.

$\left[\begin{array}{l} x < -2; \\ x > 6; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

***Розв’язування ірраціональних нерівностей виду*** $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} <> \sqrt{kx+m}$

Розв’яжемо нерівність $\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \ge -3; \\ x \ge 0,5; \\ x \ge 1; \end{cases}$ $x \ge 1$. Оскільки обидві частини нерівності невід’ємні, то піднесемо їх до квадрата й одержимо: $x + 3 > 2x - 1 + x - 1 +$ $+ 2\sqrt{(2x-1)(x-1)}$; $2\sqrt{(2x-1)(x-1)} < 5 - 2x$;

$\begin{cases} 5-2x > 0; \\ x \ge 1; \\ 4\left(2x^2-3x+1\right) < 25-20x+4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 2,5; \\ 8x^2-12x+4 < 25-20x+4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 2,5; \\ 4x^2+8x-21 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 2,5; \\ -3,5 < x < 1,5; \end{cases}$

$x \in [1; 1,5)$.

Відповідь. $[1; 1,5)$.

***Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів***

Алгоритм розв'язання складається із таких кроків:

1. Звести нерівність до виду $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$.
2. Знайти $D(f)$.
3. Знайти нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.
4. Позначити нулі функції та знайти знаки функції на кожному із проміжків, на які розбито $D(f)$.
5. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

Наприклад, розв'язати нерівність $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}>\sqrt{x+21}$.

1. Зведемо нерівність до виду $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}>0$. Нехай $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}$.

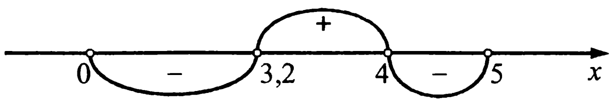
2. $D(f)$: $\begin{cases} x\ge 0; \\ 5-x\ge 0; \\ x+21\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0; \\ x\le 5; \\ x\ge -21; \end{cases}$ $0\le x\le 5$.

3. Нулі функції $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}=0$.

$2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+21}$; $4x+5-x+4\sqrt{x}\sqrt{5-x}=x+21$; $4\sqrt{5x-x^2}=16-2x$; $2\sqrt{5x-x^2}=8-x$;

$\begin{cases} 4\left(5x-x^2\right)=64-16x+x^2; \\ 0\le x\le 5; \\ 8-x\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2-36x+64=0; \\ 0\le x\le 5; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=4; \\ x_2=\dfrac{16}{5}; \end{array}\right. \\ 0\le x\le 5; \end{cases}$ $x_1=4$; $x_2=3{,}2$.

4. Розбиваємо $D(f)$ точками 4 і 3,2 на проміжки і знаходимо знак $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}$ на кожному із проміжків:




5. Відповідь. (3,2; 4).

***Ірраціональні нерівності з параметрами***

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}<a$. Оскільки ліва частина нерівності за умов $x\ge 0$ та $x+a\ge 0$ невід'ємна, то якщо $a\le 0$ нерівність розв'язків не має. Якщо $a>0$, то отримаємо $\sqrt{x+a}<a-\sqrt{x}$;

$\begin{cases} a-\sqrt{x}>0; \\ x+a<\left(a-\sqrt{x}\right)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}<a; \\ x+a<a^2-2a\sqrt{x}+x; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}<a; \\ 2a\sqrt{x}<a^2-a; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}<a; \\ \sqrt{x}<\dfrac{a-1}{2}. \end{cases}$ За умови $a\le 1$ нерівність $\sqrt{x}<\dfrac{a-1}{2}$ розв'язків не має. Якщо $a>1$, то $0<\dfrac{a-1}{2}<a$, тому система рівносильна нерівності $\sqrt{x}<\dfrac{a-1}{2}$, звідки $x\in\left[0;\dfrac{(a-1)^2}{4}\right)$.

Відповідь. Якщо $a\le 1$, то $x\in\varnothing$; якщо $a>1$, то $x\in\left[0;\dfrac{(a-1)^2}{4}\right)$.

***Приклад 1.*** Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+3} \geq -4$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-3{,}5;\ +\infty)$ | $(6{,}5;\ +\infty)$ | $(1{,}5;\ +\infty)$ | $[6{,}5;\ +\infty)$ | $[-1{,}5;\ +\infty)$ |

■ $\sqrt{2x+3} \geq -4$. Розв'язки нерівності — усі допустимі значення $x$. Отже, $2x+3 \geq 0$; $2x \geq -3$; $x \geq -1{,}5$.

Відповідь. Д. ■

***Приклад 2.*** Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x^3-2x} > x+2$.

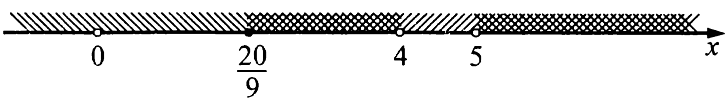
■ Піднесемо обидві частини нерівності $\sqrt[3]{x^3-2x} > x+2$ до куба: $x^3-2x > x^3+6x^2+12x+8$; $6x^2+14x+8<0$; $3x^2+7x+4<0$; $x_1=-1, x_2=-\frac{4}{3}$; $x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right)$.

Відповідь. $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$. ■

***Приклад 3.*** Розв'язати нерівність $\sqrt{9x-20} < x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{20}{9}; 4\right)$ | $\left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5;\ +\infty)$ | $[5;\ +\infty)$ | $\left(\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5;\ +\infty)$ | $(5;\ +\infty)$ |

■ $\begin{cases} 9x-20 \geq 0; \\ x>0; \\ \left(\sqrt{9x-20}\right)^2 < x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{20}{9}; \\ x>0; \\ 9x-20<x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{20}{9}; \\ x^2-9x+20>0; \end{cases}$ $x_1=4, x_2=5$; $\begin{cases} x \geq \frac{20}{9}; \\ x \in (-\infty; 4) \cup (5; +\infty). \end{cases}$




$x \in \left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5;\ +\infty)$

Відповідь. **Б.** ■

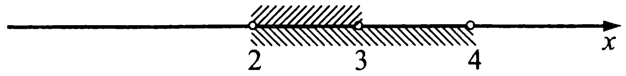
***Приклад 4.*** Розв'язати нерівність $\sqrt{\left(x^2-5x+6\right)^2} > 2-x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty;\ +\infty)$ | $(2;\ +\infty)$ | $[3;\ +\infty)$ | $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$ | $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup$ $\cup (3;\ +\infty)$ |

■ Замінимо вихідну нерівність на нерівність $|x^2-5x+6| > 2-x$; далі розкриємо модуль за означенням: $\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0; \\ x^2-5x+6>2-x; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2-5x+6<0; \\ -(x^2-5x+6)>2-x. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$ Розв'яжемо систему (1): $\begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0; \\ x^2-5x+6>2-x; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0; \\ x^2-4x+4>0; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 2; \\ x \geq 3; \end{array}\right. \\ x \neq 2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x<2; \\ x \geq 3; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty;\ 2) \cup [3;\ +\infty)$.

Розв'яжемо систему (2): $\begin{cases} x^2-5x+6<0; \\ x^2-5x+6<x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x-3)<0; \\ x^2-6x+8<0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2<x<3; \\ 2<x<4; \end{cases}$ $x\in(2;\,3)$.



Об'єднавши результати, одержимо:

$x\in(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$.

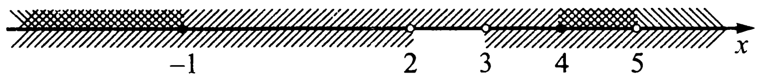
Відповідь. **Г.** ■

***Приклад 5.*** Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-4}<\sqrt{x^2-5x+6}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty;\,-1]$ | $(-\infty;\,-1]\cup[4;\,5)$ | $[4;\,5)$ | $(-\infty;\,-1)\cup(4;\,5)$ | $(-\infty;\,5)$ |

■ Дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x^2-3x-4\ge 0; \\ x^2-5x+6>0; \\ x^2-3x-4<x^2-5x+6; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-4)\ge 0; \\ (x-2)(x-3)>0; \\ 2x<10; \end{cases}$

$\begin{cases} x\in(-\infty;\,-1)\cup(4;\,+\infty); \\ x\in(-\infty;\,2)\cup(3;\,+\infty); \\ x<5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x\le 1; \\ 4\le x<5; \end{array}\right.$ $x\in(-\infty;\,-1]\cup[4;\,5)$.



Відповідь. **Б.** ■

***Приклад 6.*** Розв'язати нерівність $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-5x}}\le 0$.

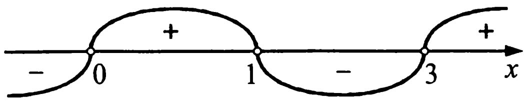
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0,2; 3 | (0,2; 3] | 3 | $[3;\,+\infty)$ | $\varnothing$ |

■ Ураховуючи, що $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-5x}}\ge 0$ для всіх допустимих значеннях $x$, можемо зробити висновок, що розв'язком заданої нерівності є лише розв'язок рівняння $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-5x}}=0$; $\dfrac{x-3}{1-5x}=0$; $x=3$.

Відповідь. **В.** ■

***Приклад 7.*** Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ ОДЗ: $x-1\ge 0$; $x\ge 1$. Перепишемо нерівність у вигляді: $\sqrt[3]{2-x}>1-\sqrt{x-1}$ й піднесемо обидві частини нерівності до куба: $\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$; $2-x>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$; $1-(x-1)>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$. Нехай $\sqrt{x-1}=t$. Тоді останню нерівність перепишемо у вигляді: $1-t^2>(1-t)^3$; $(1-t)(1+t)>(1-t)^3$; $(1-t)(1+t-1+2t-t^2)>0$; $(1-t)(3t-t^2)>0$; $t(t-1)(t-3)>0$.




$\left[\begin{array}{l} t>3; \\ 0<t<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}>3; \\ 0<\sqrt{x-1}<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-1>9; \\ 0<x-1<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>10; \\ 1<x<2. \end{array}\right.$

Отже, $x\in(1;\,2)\cup(10;\,+\infty)$. Найменший цілий розв'язок дорівнює 11.

Відповідь. 11. ■

***Приклад 8.*** Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x-2)\sqrt{16-x^2}\le 0$.

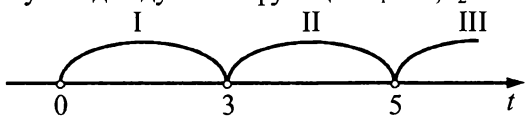
■ ОДЗ: $16-x^2\ge 0$; $(x-4)(x+4)\le 0$; $-4\le x\le 4$; $x\in[-4;\,4]$. Тоді: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in[-4;\,4]; \\ \left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x=4; \\ x=2; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0; \\ x\in[-4;\,4], \end{cases} \end{array}\right.$ звідки $\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x=4; \\ x=2; \end{array}\right. \\ -4<x<2. \end{array}\right.$

Отже, $x\in[-4;\,2]\cup\{4\}$. Цілими розв'язками є: –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 4, усього їх є 8.

Відповідь. 8. ■

***Приклад 9.*** Розв'язати нерівність $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}}\le 2$. (*) У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}}\le 2$. Нехай $\sqrt{5x-1}=t$, $t\ge 0$. Тоді $5x-1=t^2$; $5x+8=t^2+9$; $5x+24=t^2+25$. Тоді маємо: $\sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}\le 2$; $\sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}\le 2$; $|t-3|+|t-5|\le 2$. (**)

1. ОДЗ нерівності (**): $t\in R$, але за умовою $t\ge 0$.
2. Нулі підмодульних функцій: $t_1=3$; $t_2=5$.
3. 


I. $\begin{cases} 0\le t\le 3; \\ -t+3-t+5\le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 0\le t\le 3; \\ -2t\le -6; \end{cases}$ $\begin{cases} 0\le t\le 3; \\ t\ge 3; \end{cases}$ $t=3$;

II. $\begin{cases} 3<t\le 5; \\ t-3-t+5\le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 3<t\le 5; \\ 0t\le 0; \end{cases}$ $t\in(3;\,5]$;

III. $\begin{cases} t>5; \\ t-3+t-5\le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} t>5; \\ 2t\le 10; \end{cases}$ $\begin{cases} t>5; \\ t\le 5; \end{cases}$ розв'язків немає.

Отже, $3\le t\le 5$.

Повернемося до заміни: $3\le\sqrt{5x-1}\le 5$; $9\le 5x-1\le 25$; $10\le 5x\le 26$; $2\le x\le 5{,}2$. Цілі розв'язки: 2, 3, 4, 5, а їхня сума $2+3+4+5=14$.

Відповідь. 14. ■

***Приклад 10.*** За якого найбільшого цілого значення параметра $a$ будь-яке $x$ із проміжку $[1;\,5]$ задовольняє нерівність $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$?

■ Задана нерівність на проміжку $x\in[1;\,5]$ рівносильна нерівності: $(3x+1)a<6x-2\sqrt{3x+1}+5$;

$a<\frac{6x+5}{3x+1}-\frac{2}{\sqrt{3x+1}}$; $a<2+\frac{3}{3x+1}-\frac{2}{\sqrt{3x+1}}$; $a<\frac{3}{3x+1}-2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2$; $a<\frac{5}{3}+\left(\sqrt{\frac{3}{3x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Рівняння $\sqrt{\frac{3}{3x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$ має єдиний корінь $x=\frac{8}{3}$ $\left(\frac{3}{3x+1}=\frac{3}{9}\Leftrightarrow 3x+1=9; x=\frac{8}{3}\right)$ і цей корінь належить проміжку [1; 5]. Доходимо висновку: лише якщо $a<\frac{5}{3}$, то будь-яке $x\in[1; 5]$ задовольняє початкову нерівність.

Отже, $a<\frac{5}{3}$, $a\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$, найбільше ціле значення $a = 1$.

Відповідь. 1. ■

**Завдання 13.1–13.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**13.1.** Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}>-3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | $\varnothing$ | (9; +∞) | [0; +∞) | (0; +∞) |

**13.2.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\ge 5$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| [0; +∞) | [5; +∞) | [25; +∞) | (5; +∞) | (25; +∞) |

**13.3.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\le 4$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–∞; 16] | (0; 2] | [0; 2] | (0; 16] | [0; 16] |

**13.4.** Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}<-2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | $\varnothing$ | (–∞; –2) | (–∞; –4) | [0; 4) |

**13.5.** Розв'язати нерівність $\sqrt[4]{x}<2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| [0; 2) | [0; 8) | (–∞; 16) | [0; 16) | (0; 16) |

**13.6.** Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x}>-2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–8; +∞) | (0; +∞) | (8; +∞) | (–8; 0) | (–8; 0] |

**13.7.** Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | [3; +∞) | [1; +∞) | (1; +∞) | [3; +∞) |

**13.8.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\le x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| [1; +∞) | [0; +∞) | [0; 1] | {0}∪(1; +∞) | {0}∪[1; +∞) |

**13.9.** Скільки цілих розв'язків має нерівність $\sqrt{2x} \ge x$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | більше, ніж три |

**13.10.** Розв'язати нерівність $(x+4)\sqrt{-x} > 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $(-4; 0)$ | $(-4; 0]$ | $(-4; +\infty)$ | $\{0\}\cup(4; +\infty)$ |

**13.11.** Скільки цілих розв'язків має нерівність $(5-x)\sqrt{x} > 0$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Три | чотири | п'ять | шість | більше, ніж шість |

**13.12.** Розв'язати нерівність $(x-6)\sqrt{x} \ge 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(0; +\infty)$ | $[0; +\infty)$ | $(6; +\infty)$ | $[6; +\infty)$ | $\{0\}\cup[6; +\infty)$ |

**13.13.** Розв'язати нерівність $(x+1)\sqrt{x+3} \le 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $[-3; +\infty)$ | $[-1; +\infty;)$ | $[-3; -1]$ | $[1; 3]$ |

**13.14.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-9} < x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$ | $(3; +\infty)$ | $[3; +\infty)$ | $(-\infty; -3]$ | $\varnothing$ |

**13.15.** Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x^2-1} > x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $[-1; 1]$ | $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$ | $(-\infty; -1)$ | $(-\infty; -1]$ |

**13.16.** Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{3x+7} < x+1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\left[-\frac{7}{3}; +\infty\right)$ | $(-1; 0)$ | $(3; +\infty)$ | $[3; +\infty)$ | $(-1; 3)$ |

**13.17.** Серед наведених нерівностей вказати ту, множина розв'язків якої містить множину натуральних чисел.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x} > 1$ | $\sqrt{x} > -1$ | $\sqrt{x} < -1$ | $\sqrt{x} < 1$ | $\sqrt{-x} > -1$ |

**13.18.** Серед наведених нерівностей вказати ту, множиною розв'язків якої є відрізок $[-2; 0]$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{-x} \ge \sqrt{2}$ | $\sqrt{x} \ge \sqrt{2}$ | $\sqrt{x} \le \sqrt{2}$ | $\sqrt{-x} \le \sqrt{2}$ | $\sqrt{-x} \le -\sqrt{2}$ |

**13.19.** Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{5-x} \le 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $[3; +\infty)$ | $[5; +\infty)$ | $(-\infty; 3]$ | $[2; 3]$ | $[2; 3]\cup\{5\}$ |

**13.20.** Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-3}\sqrt[4]{5-x} \ge 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 12 | 9 | 7 | 6 |

**Завдання 13.21–13.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**13.21.** Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x^2+1} > -2$

2 $\sqrt{x+1} < -2$

3 $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > 0$

4 $\sqrt{x} > \sqrt{2x-3}$

**А** $(-\infty; +\infty)$

**Б** $(-\infty; -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}; +\infty)$

**В** $(-\infty; 3)$

**Г** $\varnothing$

**Д** $(1{,}5; 3)$

**13.22.** Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1 $\sqrt{x^2+7} > x$

2 $\sqrt{x-2} < \sqrt{1-x}$

3 $\sqrt{x^2+2x} > -3$

4 $\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1}$

**А** $x^2+2x>9$

**Б** $\cos x < -\sqrt{3}$

**В** $\begin{cases} 2x<3; \\ x-1\ge 0 \end{cases}$

**Г** $\sin x > -\dfrac{\pi}{2}$

**Д** $x^2+2x \ge 0$

**13.23.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \ge -4$

2 $\sqrt{x+4} \ge 0$

3 $\sqrt{x} \ge 2$

4 $\sqrt{x-2} \ge 0$

**А** $[-4; +\infty)$

**Б** $[-2; +\infty)$

**В** $[0; +\infty)$

**Г** $[2; +\infty)$

**Д** $[4; +\infty)$

**13.24.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \le 2$

2 $\sqrt{x} \le -2$

3 $\sqrt{x-2} \le 2$

4 $\sqrt{x+2} \le 2$

**А** $[-2; 0]$

**Б** $[-2; 2]$

**В** $[0; 4]$

**Г** $[2; 6]$

**Д** $\varnothing$

**13.25.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{-x} \geq -\sqrt{3}$
2 $\sqrt{-x} \leq -\sqrt{3}$
3 $\sqrt{-x} \geq \sqrt{3}$
4 $\sqrt{-x} \leq \sqrt{3}$

**А** $(-\infty; -3]$
**Б** $(-\infty; 0]$
**В** $[-3; 0]$
**Г** $[0; +\infty)$
**Д** $\varnothing$

**13.26.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x+2} > \sqrt{x}$
2 $\sqrt{x} > \sqrt{x-2}$
3 $\sqrt{x+2} > \sqrt{-x}$
4 $\sqrt{-x} > \sqrt{x-2}$

**А** $\varnothing$
**Б** $[-2; +\infty)$
**В** $[-1; 0]$
**Г** $[0; +\infty)$
**Д** $[2; +\infty)$

**13.27.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \geq x$
2 $\sqrt{x} \leq x$
3 $\sqrt{-x} \geq x$
4 $\sqrt{-x} \leq x$

**А** $\varnothing$
**Б** $(-\infty; 0]$
**В** $[0; 1]$
**Г** $[1; +\infty)$
**Д** $\{0\}$

**Розв'яжіть завдання 13.28–13.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**13.28.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq \sqrt{3x - 4}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

**13.29.** Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.30.** Розв'язати нерівність $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3 + 2x$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.31.** Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.32.** Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$. У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

**13.33.** Розв'язати нерівність $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$. У відповідь записати найбільше ціле від'ємне число, яке не є розв'язком нерівності.

**13.34.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leq 1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

**13.35.** Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5$. У відповідь записати суму найбільшого та найменшого розв'язків нерівності.

**13.36.** Розв'язати нерівність $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$. У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

**13.37.** Розв'язати нерівність $\sqrt{(3x-2)^2}>x+6$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

**13.38.** Розв'язати нерівність $\left|\sqrt{x-2}-3\right|\geq\left|\sqrt{7-x}-2\right|+1$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.39.** Розв'язати нерівність $\sqrt{25-x^2}\leq\frac{12}{x}$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.40.** Розв'язати нерівність $\frac{11-\sqrt{25-x^2}}{x}\leq 2$. У відповідь записати модуль добутку усіх цілих розв'язків нерівності.

## Тема 14. Показникові рівняння

Рівняння, яке містить змінну в показнику степеня, називають *показниковим* рівнянням.

Рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають найпростішим показниковим рівнянням. Наприклад, $5^x = 125$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1{,}5$ тощо. Якщо $b > 0$, то розв'язком рівняння $a^x = b$ є $x = \log_a b$; якщо $b \leq 0$, то рівняння $a^x = b$ коренів не має.

Показникові рівняння найчастіше розв'язують шляхом логарифмування обох його частин:

- рівняння виду $a^{f(x)} = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ розв'язують, логарифмуючи обидві його частини за основою $a$. Отримують рівносильне рівняння $f(x) = \log_a b$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)\log_a b$.

***Зведення до однієї основи***

Розв'язати рівняння $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$. Маємо: $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; $2^{7-3x} = 2^{4-x}$; $7 - 3x = 4 - x$; $2x = 3$; $x = 1{,}5$.

Відповідь. 1,5.

Розв'язати рівняння $7^{2\sin+\sqrt{3}} = 1$. Одержимо: $7^{2\sin+\sqrt{3}} = 1$; $7^{2\sin+\sqrt{3}} = 7^0$; $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

***Рівняння $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, які не зводяться до однієї основи***

Розв'язати рівняння $3^{x+2} = 5^{x+2}$ (основи різні, показники однакові). Розділимо обидві частини рівняння на $5^{x+2} \neq 0$. Одержимо: $\frac{3^{x+2}}{5^{x+2}} = 1$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{5}\right)^0$; $x + 2 = 0$; $x = -2$.

Відповідь. –2.

Розв'язати рівняння $3^{2x-1} = 5^{3-x}$. Прологарифмуємо рівняння за основою 10 (логарифмувати можна й за основою 5 або за основою 3): $\lg 3^{2x-1} = \lg 5^{3-x}$; $(2x-1)\lg 3 = (3-x)\lg 5$; $2x\lg 3 + x\lg 5 = 3\lg 5 + \lg 3$; $x(2\lg 3 + \lg 5) = 3\lg 5 + \lg 3$, звідки $x = \frac{3\lg 5 + \lg 3}{2\lg 3 + \lg 5} = \frac{\lg(5^3 \cdot 3)}{\lg(3^2 \cdot 5)} = \frac{\lg 375}{\lg 45} = \lg_{45} 375.$

Відповідь. $\lg_{45}375$.

***Винесення спільного множника за дужки***

Розв'язати рівняння $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$. Винесемо за дужки $7^{x-1}$ — множник з найменшим показником. Матимемо: $7^{x-1}(2 \cdot 7^2 - 6 - 7) = 85$; $7^{x-1} \cdot 85 = 85$; $7^{x-1} = 1$; $7^{x-1} = 7^0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$.

Відповідь. 1.

***Рівняння, які зводять до квадратних***

1. Рівняння виду $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$

Уведемо нову змінну $a^x = t$, $t > 0$ й одержимо квадратне рівняння.

Наприклад, розв'язати рівняння $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$. Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - 10t + 16 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2; \\ t_2 = 8. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = 8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 3. \end{array}\right.$

Відповідь. 1; 3.

2. Рівняння виду $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} = C$

За допомогою заміни $a^x = t$, $t > 0$ рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $5^x + 3 \cdot 5^{-x} = 4$. Нехай $5^x = t$, тоді маємо: $t + \frac{3}{t} = 4$; $t^2 - 4t + 3 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} 5^x = 1; \\ 5^x = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \log_5 3. \end{array}\right.$

Відповідь. 0; $\log_5 3$.

***Однорідні показникові рівняння $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot b^x + C \cdot b^{2x} = 0$***

Поділимо обидві частини рівняння на $a^{2x} \neq 0$, тоді одержимо рівняння $A + B\left(\frac{b}{a}\right)^x = C\left(\frac{b}{a}\right)^{2x}$. Виконаємо заміну $\left(\frac{b}{a}\right)^x = t$, $t > 0$, і зведемо це рівняння до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$. Маємо: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; $3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x$. Поділимо обидві частини на $9^{2x} \neq 0$: $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$. Нехай $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, $t > 0$, тоді маємо: $3t^2 - 5t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1; \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ 2x = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 0{,}5. \end{array}\right.$

Відповідь. 0; 0,5.

***Рівняння виду $A^x + B^x = C$, де $A \cdot B = 1$***

Уведемо заміну $A^x = t$, $t > 0$. Тоді $B^x = \frac{1}{t}$ і рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 6$. Нехай $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = t$, $t > 0$. Тоді $\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}\right)^x = \frac{1}{t}$. Одержимо: $t + \frac{1}{t} = 6$; $t^2 - 6t + 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 + 2\sqrt{2}; \\ t_2 = 3 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{-1}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = -2. \end{array}\right.$

Відповідь. $\pm 2$.

***Використання монотонності функцій***

Розв'язати рівняння $2^x = 3 - x$. Методом підбору знаходимо, що $x = 1$ — корінь рівняння. Функція $y = 2^x$ — зростаюча, а функція $y = 3 - x$ — спадна, тому цей корінь — єдиний.

Відповідь. 1.

Розв'язати рівняння $12^x + 5^x = 13^x$. Поділимо обидві частини рівняння на $12^x \neq 0$: $1+\left(\frac{5}{12}\right)^x = \left(\frac{13}{12}\right)^x$.

Методом підбору знаходимо, що $x = 2$ — корінь рівняння. Функція $y=1+\left(\frac{5}{12}\right)^x$ — спадна, а функція $y=\left(\frac{13}{12}\right)^x$ — зростаюча ($a > 1$), тому графіки цих функцій перетинаються не більше як в одній точці.

Відповідь. 2.

***Показниково-степеневі рівняння — рівняння, які мають змінну в показнику степеня і в основі***

Розв'язування рівнянь виду $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^m$ зводиться до випадків:

1. $f(x) = 1$.
2. $f(x) = -1$.
3. $f(x) = 0$.
4. $g(x) = m$.

Наприклад, розв'язати рівняння $(x+1)^{x^2+x-4} = (x+1)^2$. Для відшукання коренів рівняння потрібно розглянути чотири випадки:

1. $x + 1 = 1$, звідки $x = 0$. Одержимо: $1^{-4} = 1^2$; $1 = 1$. $x = 0$ — корінь рівняння;
2. $x + 1 = -1$, звідки $x = -2$. Одержимо: $(-1)^{-2} = (-1)^2$; $1 = 1$. $x = -2$ — корінь рівняння;
3. $x + 1 = 0$, звідки $x = -1$. Одержимо: вираз $0^{-4}$ не має змісту, тому $x = -1$ не є коренем рівняння;
4. $x^2 + x - 4 = 2$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Відповідь. –3; –2; 0; 2.

***Показникові рівняння з параметром***

Розв'язати рівняння $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$.

Перетворимо задане рівняння: $3 \cdot 4^{x-2} - a \cdot 4^{x-2} = a - 27$; $4^{x-2}(3 - a) = a - 27$. Якщо $a = 3$, то маємо: $4^{x-2} \cdot 0 = -24$ — рівняння коренів не має. У випадку, коли $a \neq 3$, одержимо рівняння: $4^{x-2} = \frac{a-27}{3-a}$. Це рівняння матиме корені, якщо $\frac{a-27}{3-a} > 0$, тобто коли $a \in (3; 27)$. Тоді за означенням логарифма маємо: $x-2=\log_4\frac{a-27}{3-a}$; $x=2+\log_4\frac{a-27}{3-a}$.

Відповідь. Якщо $a \leq 3$ або $a \geq 27$, то рівняння коренів не має; якщо $a \in (3; 27)$, то $x=2+\log_4\frac{a-27}{3-a}$.

***Приклад 1.*** Розв'язати рівняння $0{,}2^{3x-1} = \sqrt{125}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 1 | $-\frac{1}{6}$ | 0,4 |

■ $0{,}2^{3x-1} = \sqrt{125}$; $\left(5^{-1}\right)^{3x-1} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}$; $5^{-3x+1} = 5^{\frac{3}{2}}$; $-3x+1=\frac{3}{2}$; $x=-\frac{1}{6}$.

Відповідь. **Г.** ■

***Приклад 2.*** Розв'язати рівняння $4^{x-1} - 1{,}5 \cdot 2^{x+2} + 20 = 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\log_2 20$ | 2 | 2; $\log_2 20$ | 10 | 4 |

■ $4^{x-1}-1{,}5\cdot 2^{x+2}+20=0$; $\frac{4^x}{4^1}-1{,}5\cdot 2^x\cdot 2^2+20=0$; $4^x-24\cdot 2^x+80=0$. Зробимо заміну: $2^x=t$, тоді $4^x=t^2$. Одержимо: $t^2-24t+80=0$; $t_1=20,\quad t_2=4$. Повертаємось до змінної $x$: $2^x=20$; $x=\log_2 20$ або $2^x=4$; $x=2$.

Відповідь. **В.** ■

***Приклад 3.*** Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$.

| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 1; $\frac{2}{3}$ | 0; 1 |

■ $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$; $3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0$. Поділимо обидві частини рівняння на вираз $3^{2x}\neq 0$ й одержимо: $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$. Зробимо заміну: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a$. Тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=a^2$. Отримаємо: $3a^2-5a+2=0$; $a_1=1, a_2=\frac{2}{3}$. Повертаємося до попередньої змінної: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1; x=0$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}$; $x=1$.

Відповідь. **Д.** ■

***Приклад 4.*** Розв'язати рівняння $7^{x+1}=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$

| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 0 | 14 | 0,5 |

■ $7^{x+1}=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$. Очевидно, що $x=0$ — корінь рівняння $\left(7^1=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1;\quad 7=7\right)$. Функція $y=7^{x+1}$ зростаюча, а функція $y=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$ спадна. Тому дане рівняння має не більше одного кореня. Отже, інших коренів, крім $x=0$, немає.

Відповідь. **В.** ■

***Приклад 5.*** Розв'язати рівняння $5^{\frac{x+4}{x}}-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$.

| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 0 | 0,5 |

■ Зведемо степені лівої частини до одного показника: $5^{\frac{x+4}{x}}-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$; $5^{1+\frac{4}{x}}-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$; $5\cdot\left(5^{\frac{2}{x}}\right)^2-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$. Зробимо заміну $5^{\frac{2}{x}}=a$. Одержимо: $5a^2-124a-25=0$; $a_1=-\frac{1}{5}$; $a_2=25$. Повертаємося до попередньої заміни: $5^{\frac{2}{x}}=-\frac{1}{5}$ — коренів немає. $5^{\frac{2}{x}}=25$; $5^{\frac{2}{x}}=5^2$; $\frac{2}{x}=2$; $x=1$.

Відповідь. **А.** ■

***Приклад 6.*** Знайти суму коренів рівняння $\left(3^{2x^2-29}-27\right)\sqrt[4]{5x+18}=0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0,4 | –3,6 | 4 | інша відповідь | –7,6 |

■ ОДЗ рівняння: $5x+18\ge 0$; $x\ge -3{,}6$. Маємо: **1.** $3^{2x^2-29}-27=0$; $3^{2x^2-29}=3^3$; $2x^2-29=3$; $x^2=16$; $x_1=-4$, $x_2=4$. Урахувавши ОДЗ, маємо: $x=4$. **2.** $\sqrt[4]{5x+18}=0$; $5x+18=0$; $x=-3{,}6$. Отже, коренями рівняння є числа –3,6 і 4, а їх сума дорівнює $-3{,}6+4=0{,}4$.

Відповідь. **А.** ■

***Приклад 7.*** Знайти суму коренів рівняння $2^x+2^{-x}=2\cos 2x$.

■ Оцінимо ліву й праву частини рівняння: $2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}\ge 2$; $2\cos 2x\le 2$. Замінимо рівняння рівносильною системою: $\begin{cases}2^x+\dfrac{1}{2^x}=2; & (1)\\ 2\cos 2x=2. & (2)\end{cases}$

Розв'яжемо перше рівняння системи. Нехай $2^x=t$, $t>0$. $t+\frac{1}{t}=2$; $t^2-2t+1=0$; $t=1$; $2^x=1$; $x=0$.

Перевіримо, чи задовольняє корінь $x=0$ друге рівняння системи: $2\cos(2\cdot 0)=2$; $2\cdot 1=2$; $2=2$. Отже, $x=0$ — розв'язок системи, а, отже, й даного рівняння.

Відповідь. 0. ■

***Приклад 8.*** Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$. У відповідь записати більший корінь.

■ Нехай $2^x=t$, $t>0$. Тоді $3t^2+(3x-10)t+3-x=0$; $3t^2+3tx-10t+3-x=0$; $3t^2-9t+3tx-t+3-x=0$; $3t(t-3+x)-(t-3+x)=0$; $(t-3+x)(3t-1)=0$; $t_1=3-x$; $t_2=\frac{1}{3}$. Повертаємося до заміни: 1) $2^x=3-x$ (1). Ліва частина рівняння (1) — зростаюча функція, права — спадна; $x=1$ — єдиний корінь; 2) $2^x=\frac{1}{3}$ (2); $x=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3$. Отже, корені рівняння $x=1$ та $x=-\log_2 3$. Більший корінь дорівнює 1.

Відповідь. 1. ■

***Приклад 9.*** За яких значень $a$ рівняння $3^{x^2+a}+4^{x^2+a}+5^{x^2+a}=6^{x^2+a}$ має тільки один корінь?

■ Нехай $x^2+a=t$. Тоді маємо: $3^t+4^t+5^t=6^t$. Підбором знаходимо, що $t=3$ — корінь цього рівняння. Покажемо, що цей корінь єдиний. Для цього поділимо обидві частини рівняння на $6^t$ й одержимо: $\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{5}{6}\right)^t=1$. Оскільки функція $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{5}{6}\right)^t$ за довільних значень $t$ спадна, як сума спадних функцій і $E(f)=(0;+\infty)$, то її графік перетинає пряму $y=1$ лише один раз (якщо $t=3$). Отже, $x^2+a=3$; $x^2=3-a$. Одержане рівняння має лише один корінь $x=0$, якщо $a=3$.

Відповідь. 3. ■

**Завдання 14.1–14.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**14.1.** Розв'язати рівняння $5^x = 8$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[5]{8}$ | $\sqrt[8]{5}$ | $\log_5 8$ | $\log_8 5$ | $\pm\sqrt[8]{5}$ |

**14.2.** Розв'язати рівняння $5^{x-9} = 5$ і $3^x - 3 = 0$ та вказати суму їх коренів.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 8 | 9 | 11 |

**14.3.** Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4^{2x}$ і $4^{3x+1} = 8^{-2x-1}$ та вказати інтервал, який містить їх корені.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–3; –2) | (–2; –1) | (–1; 0) | (0; 1) | (1; 2) |

**14.4.** Розв'язати рівняння $3^{x-5} = 9^{-2x}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $1\frac{2}{3}$ | 1 | 1,25 | 0 | –1 |

**14.5.** Розв'язати рівняння $5^{\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}} = 1$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x^2-4)(x-1)} = 1$ та вказати їх спільні корені.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| –2; 2 і 1 | 2 і 1 | –2 і 1 | –2 і 2 | 2 |

**14.6.** Якому з проміжків належить корінь рівняння $0{,}008^x = 5^{1-2x}$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| [0; 2] | (–1; 5] | (2; +∞) | (0; 1) | (–3; 0] |

**14.7.** Серед наведених рівнянь вказати рівняння, рівносильне рівнянню $8^x = 16^{-1}\sqrt{32^x}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $3x = x - 1$ | $3x = \frac{x}{2} - 1$ | $3x = \frac{5x}{2} \cdot 4$ | $3x = \frac{5x}{2} - 4$ | $3x = \frac{6x}{2} - 4$ |

**14.8.** Яке з наведених рівнянь має корені?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $7^{x^2} = \frac{1}{2}$ | $7^x = \frac{1}{2}$ | $7^{\lvert x\rvert} = \frac{1}{2}$ | $7^x = 0$ | $7^x = -\frac{1}{2}$ |

**14.9.** Розв'язати рівняння $6^{x+1} = 3^{x+1}$ і $2^{x-5} = 8^{x-5}$ і знайти суму їх коренів.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 4 | –4 | 5 | –5 | 53 |

**14.10.** Розв'язати рівняння $4^{x+2} - 4^{x+1} + 4^x = 39$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[4]{3}$ | $\sqrt[3]{4}$ | $\log_3 4$ | $\log_4 3$ | $\varnothing$ |

**14.11.** Знайти суму коренів рівняння $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | –6 | 6 | –5 |

**14.12.** Встановити кількість коренів рівняння $3^{2x^2} - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| Жодного | один | два | три | чотири |

**14.13.** Розв'язати рівняння $7^{x^2} = 2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\pm\sqrt{\log_2 7}$ | $\sqrt{\log_2 7}$ | $\pm\sqrt{\log_7 2}$ | $\sqrt{\log_7 2}$ | $\pm\sqrt{7}$ |

**14.14.** Розв'язати рівняння $2^x \cdot 3^{x-1} = 72$ і $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} = 196$ і вказати суму їх коренів.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |

**14.15.** Розв'язати рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ і $5^{2x} \cdot 6^{2x} = 900$ і вказати суму їх коренів.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |

**14.16.** Знайти значення виразу $7^x$, якщо $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 7 | 14 |

**14.17.** Знайти значення виразу $\left(\frac{2}{3}\right)^x$, якщо $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 6^x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 або 4 | $\frac{2}{3}$ або 1 | 0 або 1 | $\frac{4}{9}$ або 1 |

**14.18.** Знайти значення виразу $2^x$, якщо $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 або –4 | 1 | 4 | 2 або 4 |

**14.19.** Знайти значення виразу $9^{\frac{1}{x}}$, якщо $81^{\frac{1}{x}} - 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}} = 45$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 4 або 9 | –4 або 9 | 9 | 81 | 16 або 25 |

**14.20.** Указати проміжок, якому належить корінь рівняння $9^{\frac{3}{x}} + 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| [–4; –2] | [–2; 0] | [0; 2] | [2; 4] | [4; 6] |

**14.21.** Розв'язати рівняння $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | 0 | $2\pi k,\ k\in Z$ | $\pi k,\ k\in Z$ | $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$ |

**14.22.** За якого значення параметра $a$ рівняння $16^x-(a+1)\cdot 4^x+a=0$ має один корінь?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |

**14.23.** Знайти суму коренів рівняння $(x^2+x+1)^{x-3}=1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0; –1 | –1; 0; 3 | 2 | –2 |

**Завдання 14.24–14.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**14.24.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

**1** $5^x=7$
**2** $x^5=7$
**3** $7^x=5$
**4** $x^7=5$

**А** $5^7$
**Б** $\sqrt[7]{5}$
**В** $\sqrt[5]{7}$
**Г** $\log_7 5$
**Д** $\log_5 7$

**14.25.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

**1** $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}=2^{1-x}$
**2** $2^{|x-1|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
**3** $2^{-x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}$
**4** $2^{|x-1|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

**А** Жодного
**Б** Один
**В** Два
**Г** Три
**Д** Безліч

**14.26.** Установити відповідність між парами рівнянь (1–4) та сумою їх коренів (А–Д).

**1** $6^{-2x}=36$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}=\frac{1}{8}$
**2** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}=4$ і $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}=49$
**3** $3^x=243$ і $\left(\frac{8}{125}\right)^{x+4}=\left(\frac{5}{2}\right)^{9}$
**4** $5^{2x}\cdot 6^{2x}=900$ і $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{7^x}=196$

**А** –2
**Б** 2
**В** –1
**Г** 5
**Д** 0

**14.27.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та значеннями (А–Д) виразу $2^{x_0-1}$, де $x_0$ — корінь рівняння.

| | |
|---|---|
| **1** $2^x - 2^{x-2} = 24$ | **А** 2 |
| **2** $2^{x+1} - 7\cdot 2^{x-2} = 16$ | **Б** 4 |
| **3** $2^{x+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 120$ | **В** 8 |
| **4** $2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 56$ | **Г** 16 |
| | **Д** 32 |

**14.28.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та сумами їх коренів (А–Д).

| | |
|---|---|
| **1** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 16 = 0$ | **А** 3 |
| **2** $4^x - 36\cdot 2^x + 128 = 0$ | **Б** 4 |
| **3** $16^x - 20\cdot 4^x + 64 = 0$ | **В** 5 |
| **4** $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} - 30\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 81 = 0$ | **Г** 2 |
| | **Д** 7 |

**Розв'яжіть завдання 14.29–14.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**14.29.** Розв'язати рівняння $0{,}125\cdot 8^{2x-5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4}$

**14.30.** Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = \sqrt[9]{4}$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

**14.31.** Розв'язати рівняння $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

**14.32.** Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$.

**14.33.** Розв'язати рівняння $7\cdot 3^x - 5^{x+1} = 3^{x+3} - 5^{x+2}$.

**14.34.** Розв'язати рівняння $3^{2\sqrt{x+5}} - 10\cdot 3^{\sqrt{x+5}} + 9 = 0$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

**14.35.** Указати найбільше ціле значення параметра $a$, за якого рівняння $2^{2x} + (a+1)\cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ має два різних корені.

**14.36.** Розв'язати рівняння $\frac{4}{2^x+2} - \frac{1}{2^x-3} = 2$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

**14.37.** Розв'язати рівняння $8\cdot 81^x + 9\cdot 64^x = 17\cdot 72^x$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

**14.38.** Розв'язати рівняння $2^{\cos 2x} = 3\cdot 2^{\cos^2 x} - 4$. У відповідь записати $\frac{x_0}{\pi}$, де $x_0$ — найменший додатний корінь рівняння.

**14.39.** Розв'язати рівняння $50\cdot 7^{\sqrt{-5x}} - 7^{\sqrt{-20x}+1} - 7 = 0$.

**14.40.** Розв'язати рівняння $3^{2x}+\frac{36}{3^{2x}}-\left(3^x+\frac{6}{3^x}\right)=8$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

**14.41.** Розв'язати рівняння $81\cdot\left(\sqrt{10}+3\right)^{5x-61}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}-3}\right)^{5x-61}$

**14.42.** Розв'язати рівняння $|x-5|^{\frac{x}{x-6}}=1$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

**14.43.** Розв'язати рівняння $25^x-(2a+1)\cdot5^x+a^2+a=0$. У відповідь записати найменше ціле значення $a$, за якого рівняння має два корені.

# Тема 15. Показникові нерівності

Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають *показниковою*. Наприклад, $2^{x+3} < 7$; $5^{x^2} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ тощо. Розв'язування показникових нерівностей, як правило, ґрунтується на властивостях показникової функції, а саме:

1) функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;

2) функція $y = a^x$ спадає, якщо $0 < a < 1$;

3) функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень.

Показникові нерівності можна класифікувати за способами їх розв'язання:

1. Найпростіші та ті, які зводяться до найпростіших:
   а) зведення до однієї основи;
   б) винесення спільного множника за дужки;
   в) ділення обох частин на степінь.
2. Нерівності, які зводяться до алгебраїчних:
   а) зведення до квадратної нерівності шляхом заміни;
   б) однорідні.
3. Нестандартні показникові нерівності.

***Показникові нерівності виду $a^{nx} <> b^{nx}$ $(a \ne b)$ зводяться до найпростіших шляхом ділення обох частин на $b^{nx}$ або $a^{nx}$ $(b^{nx} \ne 0,\ a^{nx} \ne 0)$***

Наприклад, розв'язати нерівність $5^{3x-2} < 7^{3x-2}$. Поділимо обидві частини нерівності на $7^{3x-2} > 0$. Одержимо: $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-1} < 1$. Приведемо нерівність до однієї основи: $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-2} < \left(\frac{5}{7}\right)^{0}$. Оскільки $\frac{5}{7} < 1$, то одержимо: $3x - 2 > 0$; $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Відповідь. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

***Нерівності виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$***

Наприклад: а) розв'язати нерівність $(0{,}5)^x \ge \frac{1}{32}$. Маємо: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Оскільки основа $0 < \frac{1}{2} < 1$, то отримаємо: $x \le 5$; $x \in (-\infty; 5]$.

Відповідь. $(-\infty; 5]$.

б) розв'язати нерівність $16^x > 0{,}125$. Маємо: $2^{4x} > 2^{-3}$. Оскільки основа $2 > 1$, то отримаємо: $4x > -3$; $x > -0{,}75$; $x \in (-0{,}75; +\infty)$.

Відповідь. $(-0{,}75; +\infty)$.

***Нерівності виду $a^{f(x)} > b$***

Необхідно розглянути випадки:

1) $b \le 0$, тоді $a^{f(x)} > b$; $x \in D(f)$;

2) $b > 0$, тоді $a^{f(x)} > b$; $f(x) > \log_a b$, якщо $a > 1$, і $f(x) < \log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад: а) розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -2$. Оскільки $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, якщо $x \in R$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -2$; $x \in R$.

Відповідь. $x \in R$;

б) розв'язати нерівність $2^x > 7$. Одержимо нерівність $2^x > 2^{\log_2 7}$. Оскільки основа $2 > 1$, то отримаємо: $x > \log_2 7$; $x \in (\log_2 7; +\infty)$.

Відповідь. $(\log_2 7; +\infty)$.

***Нерівності виду $a^{f(x)} > b^{g(x)}$***

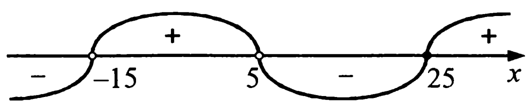
При розв'язуванні нерівностей такого виду застосовують логарифмування обох частин за основами $a$ чи $b$. Врахувавши властивості функцій, одержимо: $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b$, якщо $a > 1$, $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад, розв'язати нерівність $11^{3-x} > 3^{2x-1}$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 3 й одержимо: $\log_3 11^{3-x} > \log_3 3^{2x-1}$; $(3 - x)\log_3 11 > 2x - 1$; $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Оскільки $2 + \log_3 11 > 0$, то $x < \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$. Відповідь. $\left(-\infty; \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$.

***Розв'язування показникових нерівностей методом заміни змінної***

Нехай потрібно розв'язати нерівність $\dfrac{1}{5^x-5} \le \dfrac{2}{5^x+15}$. Уведемо заміну $5^x = t$. Тоді одержимо:

$$\frac{1}{t-5} \le \frac{2}{t+15};\ \frac{1}{t-5} - \frac{2}{t+15} \le 0;\ \frac{t+15-2(t-5)}{(t-5)(t+15)} \le 0;\ \frac{-t+25}{(t-5)(t+15)} \le 0;\ \frac{t-25}{(t-5)(t+15)} \ge 0.$$




$t \in (-15; 5) \cup [25; +\infty)$.

Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} -15 < 5^x < 5; \\ 5^x \ge 25; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 5^x < 5^1; \\ 5^x \ge 5^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < 1; \\ x \ge 2; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

***Зведення показникових нерівностей до найпростіших шляхом винесення спільного множника за дужки***

Показникові нерівності виду $A_0 \cdot a^{kx+b_0} + A_1 \cdot a^{kx+b_1} + \ldots + A_n \cdot a^{kx+b_n} <> B$ зводяться до найпростіших шляхом винесення за дужки спільного множника $a^{kx+b_i}$, де $b_i$ — найменше з чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

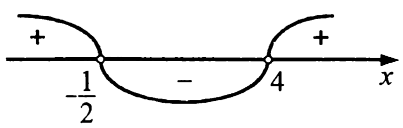
Наприклад, розв'язати нерівність $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{x+2} \le 236$. Перетворимо нерівність і винесемо спільний множник $4^x$ за дужки: $3 \cdot 4^x + 8 \cdot 4^x + 48 \cdot 4^x \le 236$; $4^x(3 + 8 + 48) \le 236$; $4^x \cdot 59 \le 236$; $4^x \le 4$; $x \le 1$.

Відповідь. $(-\infty; 1]$.

***Зведення показникових нерівностей до квадратних шляхом уведення нової змінної***

Показникові нерівності виду $Aa^{2x} + Ba^x + C <> 0$ зводяться до квадратних шляхом уведення заміни $a^x = t$, $t > 0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$. Нехай $2^{-x} = t$, $t > 0$. Тоді $4^{-x} = 2^{-2x} = \left(2^{-x}\right)^2 = t^2$. Одержимо: $2t^2 - 7t - 4 < 0$; $2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)(t-4) < 0$;




$-\dfrac{1}{2} < t < 4$. Врахувавши, що $t > 0$, маємо: $0 < t < 4$.

Тоді початкова нерівність рівносильна нерівності: $2^{-x} < 4$; $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Отже, $x\in(-2;+\infty)$.

Відповідь. $(-2;+\infty)$.

***Розв'язування нерівностей, які містять однорідні функції відносно показникових функцій***

Нерівності виду $A_0a^{nx}+A_1a^{(n-1)x}b^x+A_2a^{(n-2)x}b^{2x}+\ldots+A_{n-1}a^xb^{(n-1)x}+A_nb^{nx}<>0$ є однорідними відносно функцій $a^x$ і $b^x$. Поділимо обидві частини нерівності на $b^{nx}\neq 0$ й одержимо таку нерівність: $A_0\left(\frac{a}{b}\right)^{nx}+A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{(n-1)x}+\ldots+A_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^x+A_n<>0$, яку після заміни $\left(\frac{a}{b}\right)^x=t,\ t>0$, можна звести до раціональної нерівності $A_0t^n+A_1t^{n-1}+\ldots+A_{n-1}t+A_n<>0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $2\cdot 9^x-5\cdot 6^x+3\cdot 4^x\ge 0$. Запишемо задану нерівність у вигляді $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+3\cdot 2^{2x}\ge 0$. Поділимо обидві частини на $3^{2x}>0$ й отримаємо: $2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\ge 0$. Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, тоді одержимо: $3t^2-5t+2\ge 0$; $\left[\begin{array}{l}t\ge 1;\\ t\le\frac{2}{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x\ge 1;\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x\le\frac{2}{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\le 0;\\ x\ge 1;\end{array}\right.$

$x\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

***Степенево-показникові нерівності***

1. Нерівності виду $\left(f(x)\right)^{g(x)}>1$.

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}>1\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{g(x)}>\left(f(x)\right)^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1;\\ g(x)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1;\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$.

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1\Leftrightarrow\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>\left(4x^2+2x+1\right)^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<4x^2+2x+1<1;\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x+1>1;\\ x^2-x>0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+2x+1>0;\\ 4x^2+2x+1<1;\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x>0;\\ x^2-x>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\infty<x<+\infty;\\ x(x+0,5)<0;\\ x(x-1)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x(x+0,5)>0;\\ x(x-1)>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-0,5<x<0;\\ 0<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0;\\ x<-0,5;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<0;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing;\\ \left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<-0,5;\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<-0,5.\end{array}\right.$$

Отже, $x\in(-\infty;-0,5)\cup(1;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;-0,5)\cup(1;+\infty)$.

2. Нерівності виду $\left(f(x)\right)^{g(x)}<1$.

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}<1\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{g(x)}<\left(f(x)\right)^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1;\\ g(x)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1;\\ g(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1$.

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1 \Leftrightarrow (3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<(3-x)^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<3-x<1;\\ \dfrac{3x-5}{3-x}>0;\end{cases}\\ \begin{cases}3-x>1;\\ \dfrac{3x-5}{3-x}<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3<-x<-2;\\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<2;\\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<3;\\ \dfrac{5}{3}<x<3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<2;\\ \left[\begin{array}{l}x>3;\\ x<\dfrac{5}{3};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<3;\\ x<\dfrac{5}{3}.\end{array}\right.$$

Отже, $x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)$.

Відповідь. $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)$.

3. Нерівність виду $(f(x))^{\varphi(x)}>(g(x))^{\varphi(x)}$

Нерівності такого виду найпростіше розв'язують логарифмуванням обох частин зі збереженням знака початкової нерівності, якщо основа логарифма $a>1$, і зі зміною знака на протилежний, якщо основа логарифма $0<a<1$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{1}{4}x^{\log_2 x}<2^{\log_2 x}$. Знайдемо ОДЗ: $x>0$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою $a=2>1$ на її ОДЗ: $\log_2\left(\frac{1}{4}x^{\log_2 x}\right)<\log_2\left(2^{\log_2 x}\right)$; $\log_2\frac{1}{4}+\log_2 x^{\log_2 x}<$ $<\log_2 x\cdot\log_2 2$; $-2+\log_2 x\cdot\log_2 x<\log_2 x$; $\log_2^2 x-\log_2 x-2<0$. Уведемо позначення: $t=\log_2 x$, тоді одержимо нерівність: $t^2-t-2<0$; $t_1=-1$, $t_2=2$; $-1<t<2$. Повертаємося до заміни: $\begin{cases}\log_2 x>-1;\\ \log_2 x<2;\end{cases}$

$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2};\\ x<4;\end{cases}$ $\frac{1}{2}<x<4$; $x\in\left(\frac{1}{2};4\right)$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{2};4\right)$.

***Приклад 1.*** Розв'язати нерівність $0{,}5^{2x+7}\le 4$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty;-4{,}5]$ | $[-2{,}5;+\infty)$ | $[-4{,}5;+\infty)$ | $(-\infty;-2{,}5]$ | $[2{,}5;+\infty)$ |

■ $0{,}5^{2x+7}\le 4$. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+7}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $2x+7\ge-2$; $2x\ge-9$; $x\ge-4{,}5$. $x\in[-4{,}5;+\infty)$.

Відповідь. **В.** ■

***Приклад 2.*** Розв'язати нерівність $5^{8x+1}+5^{8x-1}<130$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; -0{,}25)$ | $(-\infty; 0{,}25)$ | $(-0{,}25; +\infty)$ | $(0{,}25; +\infty)$ | $(-\infty; 4)$ |

■ $5^{8x+1}+5^{8x-1}<130$. $5\cdot 5^{8x}+\dfrac{5^{8x}}{5}<130 \quad \Big| \times 5$; $25\cdot 5^{8x}+5^{8x}<650$; $26\cdot 5^{8x}<650$; $5^{8x}<25$; $5^{8x}<5^2$;

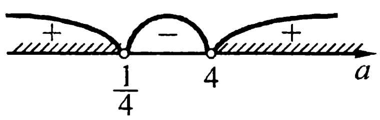
$8x<2$; $x<0{,}25$. $x\in(-\infty;0{,}25)$.

Відповідь: **Б.** ■

***Приклад 3.*** Розв'язати нерівність $4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4>0$.

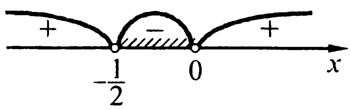
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ | $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$ | $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ |

■ $4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4>0$; $4^{1+\frac{1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4>0$; $4\cdot 4^{\frac{1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4>0$. Зробимо заміну: $2^{\frac{1}{x}}=a$. Тоді $4^{\frac{1}{x}}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{x}}=\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2=a^2$. $4a^2-17a+4>0$; $a_1=4$, $a_2=\dfrac{1}{4}$.



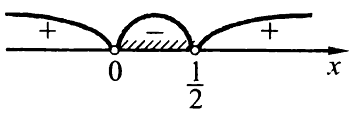

$a<\dfrac{1}{4}$ або $a>4$. Повернемось до заміни:

1. $2^{\frac{1}{x}}<\dfrac{1}{4}$; $2^{\frac{1}{x}}<2^{-2}$; $\dfrac{1}{x}<-2$; $\dfrac{1+2x}{x}<0$.




$x\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

2. $2^{\frac{1}{x}}>4$; $2^{\frac{1}{x}}>2^2$; $\dfrac{1}{x}>2$; $\dfrac{1-2x}{x}>0$; $\dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x}<0$.



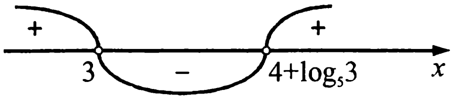

$x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Отже, $x\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Відповідь. **Г.** ■

***Приклад 4.*** Розв'язати нерівність $3^{x-3} > 5^{x^2-7x+12}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 5. Оскільки $5 > 1$, то знак нерівності зберігається. Тоді: $(x-3)\log_5 3 > x^2 - 7x + 12$; $(x-3)\log_5 3 > (x-3)(x-4)$; $(x-3)(x-4-\log_5 3) < 0$.

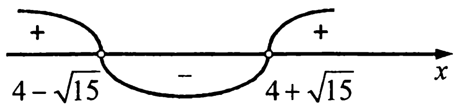



Отже, $x \in (3;\ 4 + \log_5 3)$. Найменший цілий розв'язок — 4.

Відповідь. 4. ■

***Приклад 5.*** Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x < 8$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

■ Очевидно, що $\sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{15}} = 1$, звідки $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$. Виконавши заміну: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = t,\ t > 0$, одержимо: $t + \dfrac{1}{t} < 8$; $t^2 - 8t + 1 < 0$. $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$.




$4 - \sqrt{15} < t < 4 + \sqrt{15}$.

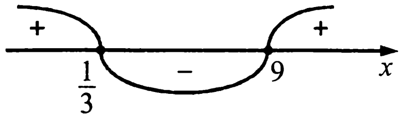
Задана нерівність рівносильна нерівності $4 - \sqrt{15} < \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x < 4 + \sqrt{15}$;

$\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1} < \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} < \left(4+\sqrt{15}\right)^1$; $-1 < \dfrac{x}{2} < 1$; $-2 < x < 2$. Найбільший цілий розв'язок — $x = 1$.

Відповідь. 1. ■

***Приклад 6.*** Розв'язати нерівність $3^{1+\sqrt{x+1}} + 3^{2-\sqrt{x+1}} \geq 28$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ $3^{1+\sqrt{x+1}} + 3^{2-\sqrt{x+1}} \geq 28$; $3 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} + \dfrac{3^2}{3^{\sqrt{x+1}}} \geq 28$. Нехай $3^{\sqrt{x+1}} = t,\ t > 0$. Тоді задану нерівність можна записати так: $3t + \dfrac{9}{t} - 28 \geq 0$; $3t^2 - 28t + 9 \geq 0$; $3\left(t - \dfrac{1}{3}\right)(t-9) \geq 0$;




$$\left[\begin{array}{l} t \leq \dfrac{1}{3}; \\ t \geq 9. \end{array}\right.$$

Повернемося до заміни: 1) $3^{\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{3}$; $3^{\sqrt{x+1}} \leq 3^{-1}$; $\sqrt{x+1} \leq -1$ — нерівність розв'язків не має;

2) $3^{\sqrt{x+1}} \geq 9$; $\sqrt{x+1} \geq 2$; $x \geq 3$. Найменший цілий розв'язок — $x = 3$.

Відповідь. 3. ■

***Приклад 7.*** Розв'язати нерівність $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq \left(x^2+x+1\right)^3$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ Оскільки $x^2 + x + 1 > 0$ для всіх значень $x$, то вихідна нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+1\geq 1;\\ \dfrac{x+5}{x+2}\geq 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x+1\leq 1;\\ \dfrac{x+5}{x+2}\leq 3;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x^2+x\geq 0;\\ \dfrac{x+5-3x-6}{x+2}\geq 0;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x^2+x\leq 0;\\ \dfrac{x+5-3x-6}{x+2}\leq 0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Розв'яжемо систему (1): $\begin{cases}x(x+1)\geq 0;\\ 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)\leq 0;\\ x\neq -2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -1;\\ x\geq 0;\end{array}\right.\\ -2<x\leq -\frac{1}{2};\end{cases}$ $x\in(-2;-1]$.

Розв'яжемо систему (2): $\begin{cases}x(x+1)\leq 0;\\ 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)\geq 0;\\ x\neq -2;\end{cases}$ $\begin{cases}-1\leq x\leq 0;\\ \left[\begin{array}{l}x<-2;\\ x\geq -\frac{1}{2};\end{array}\right.\end{cases}$ $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

Об'єднавши розв'язки систем (1) і (2), одержимо: $x\in(-2;-1]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

Цілими розв'язками є $-1$ і $0$, а їх сума дорівнює $-1 + 0 = -1$.

Відповідь. $-1$. ■

***Приклад 8.*** За яких значень $a$ нерівність $4^x-(a-4)2^x+4>0$ виконується для будь-яких дійсних значень $x$? У відповідь записати найбільше ціле значення $a$.

■ Нехай $2^x = t$, $t > 0$. Одержимо квадратну нерівність $t^2 - (a-4)t + 4 > 0$. Сформулюємо завдання так: за яких значень параметра $a$ графік квадратичної функції $f(t) = t^2 - (a-4)t + 4$ на проміжку $(0; +\infty)$ розміщений над віссю $t$? Це можливо у двох випадках:

1) графік функції $y = f(t)$ міститься над віссю $t$ для будь-якого $t$, а, отже, і на інтервалі $(0; t)$, якщо дискримінант квадратного тричлена $f(t)$ від'ємний: $(a-4)^2 - 16 < 0$; $a^2 - 8a + 16 - 16 < 0$; $a(a-8) < 0$; $a\in(0; 8)$;

2) якщо $D \geq 0$, то тричлен $f(t)$ не повинен мати додатних коренів. А це можливо за умови $\begin{cases}f(0)\geq 0;\\ t_в=\dfrac{a-4}{2}<0;\\ D\geq 0,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}4>0;\\ a<4;\\ a\in(-\infty;0]\cup[8;+\infty);\end{cases}$ $a\in(-\infty; 0]$. Об'єднавши розв'язки 1) і 2), одержимо $a\in(-\infty; 8)$. Найбільше ціле значення дорівнює $a = 7$.

Відповідь. 7. ■

**Завдання 15.1–15.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**15.1.** Розв'язати нерівність $5^x > 5$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; 1)$ | $(-\infty; 0)$ | $(0; +\infty)$ | $(1; +\infty)$ | $(5; +\infty)$ |

**15.2.** Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(1; +\infty)$ | $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ | $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ | $(-\infty; 0)$ | $(-\infty; 1)$ |

**15.3.** Знайти множину розв'язків нерівності $0{,}7^x < 1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $(-\infty; +\infty)$ | $(-\infty; 0)$ | $(0; +\infty)$ | $(1; +\infty)$ |

**15.4.** Розв'язати нерівність $2^x < \frac{1}{8}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; -3)$ | $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ | $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ | $(-3; +\infty)$ | $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ |

**15.5.** Розв'язати нерівність $9^{x+5} > 27^x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; 5)$ | $(10; +\infty)$ | $(-\infty; 10)$ | $(0; 10)$ | Будь-яке дійсне число |

**15.6.** Яка з наведених нерівностей має розв'язки?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $7^x < -1$ | $7^{\lvert x\rvert} < 0{,}7$ | $7^{x^2} < 1$ | $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} < 2$ | $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} > 2$ |

**15.7.** Розв'язати нерівність $7^x - 7^{\frac{1}{x}} > 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; -1)\cup(0; 1)$ | $(-1; 1)$ | $(1; +\infty)$ | $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$ | $(-1; 0)\cup(1; +\infty)$ |

**15.8.** Знайти множину розв'язків нерівності $4^x > 3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | $(-\infty; \log_4 3)$ | $(-\infty; \log_3 4)$ | $(\log_4 3; +\infty)$ | $(\log_3 4; +\infty)$ |

**15.9.** Розв'язати нерівність $1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^x \le 27$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ | $[0; 3]$ | $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ | $[-3; 0]$ | $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ |

**15.10.** Розв'язати нерівність $3^x > 5^x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-\infty; 0)$ | $(0; +\infty)$ | $(-\infty; -1)$ | $(1; +\infty)$ | $\varnothing$ |

**15.11.** Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-20}>1$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$ | (–5; 4) | (4; 5) | $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right)$ | (–4; 5) |

**15.12.** Розв'язати нерівність $2^{x+1}+2^x<24$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–3; +∞) | (–∞; –3) | (3; +∞) | (0; 3) | (–∞; 3) |

**15.13.** Знайти множину розв'язків нерівності $4^x-6\cdot 2^x+8<0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–6; 8) | (2; 4) | (1; 2) | (–∞; 2)∪(4; +∞) | (–∞; 1)∪(2; +∞) |

**15.14.** Розв'язати нерівність $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\le 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–∞; –1)∪(–1; 1) | (–1; 1) | $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ | (–3; 3) | $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ |

**15.15.** Розв'язати нерівність $3^x+3^{2-x}>10$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–∞; 0)∪(2; +∞) | (–∞; 1)∪(9; +∞) | (0; 2) | (–∞; 3)∪(10; +∞) | (1; 9) |

**15.16.** Указати найменший розв'язок нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2}\le\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0 | –4 | 4 | –2 | Не існує |

**15.17.** Розв'язати нерівність $3^{|x|+2}>27$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–∞; –5)∪(5; +∞) | (–5; 5) | (–1; 1) | (–∞; –1)∪(1; +∞) | ∅ |

**15.18.** Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1}<\frac{1}{8}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | (–∞; –4)∪(4; +∞) | (–4; 4) | (4; +∞) | (–∞; –2)∪(2; +∞) |

**15.19.** Розв'язати нерівність $\left(2^x-2\right)\sqrt{x^2-5x+6}\ge 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| [1; 2)∪(3; +∞) | [0; 2]∪[3; +∞) | [3; +∞) | [1; +∞) | [1; 2]∪[3; +∞) |

**15.20.** Розв'язати нерівність $2^{x^2}>\sin x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | ∅ | (–∞; 0)∪(0; +∞) | 0 | (–∞; 1)∪(1; +∞) |

**15.21.** За якого значення параметра $a$ нерівність $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ не має розв'язків?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $a > 1$ | $a \neq 0$ | $a < 0$ | $a > 0$ | $a = 0$ |

**Завдання 15.22–15.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**15.22.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

**1** $7^x > 1$

**2** $7^x > -1$

**3** $\left(\frac{1}{7}\right)^x < -1$

**4** $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 1$

**А** $(1; +\infty)$

**Б** $(-\infty; 0)$

**В** $(0; +\infty)$

**Г** $(-\infty; +\infty)$

**Д** $\varnothing$

**15.23.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

**1** $(\lg 5)^{x+2} > (\lg 5)^{-1}$

**2** $(\lg 12)^{x+2} > (\lg 12)^{-1}$

**3** $(\sin 3)^{x-3} > (\sin 3)^4$

**4** $(\ln 3)^{x-3} > (\ln 3)^3$

**А** $(6; +\infty)$

**Б** $(-\infty; 7)$

**В** $(-\infty; -3)$

**Г** $(-\infty; 3)$

**Д** $(-3; +\infty)$

**15.24.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

**1** $1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le 16$

**2** $1 \le 2^x \le 16$

**3** $1 \le 16^x \le 2$

**4** $1 \le \left(\frac{1}{16}\right)^x \le 2$

**А** $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$

**Б** $[-4; 0]$

**В** $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

**Г** $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$

**Д** $[0; 4]$

**15.25.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

**1** $2^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

**2** $2^{|x|+2} > 8$

**3** $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > 8$

**4** $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

**А** $(1; +\infty)$

**Б** $(-1; 1)$

**В** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

**Г** $(-\infty; +\infty)$

**Д** $\varnothing$

**Розв'яжіть завдання 15.26–15.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**15.26.** Розв'язати нерівність $\sqrt{27}\cdot 3^{7x-x^2}\geq\frac{\sqrt{243}}{3^{2x+1}}$. У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

**15.27.** Розв'язати нерівність $2^{x^2+3x}-8\cdot 2^x>0$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

**15.28.** Розв'язати нерівність $5\cdot 2^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}-1}\geq 56$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

**15.29.** Розв'язати нерівність $2^x+2^{-x+1}-3<0$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

**15.30.** Розв'язати нерівність $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leq 1$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

**15.31.** Розв'язати нерівність $\left(2^x-8\right)\left(x^2-4x+3\right)>0$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

**15.32.** Розв'язати нерівність $\frac{1}{2^{x+1}-1}>\frac{1}{2^x+3}$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

**15.33.** Розв'язати нерівність $2\cdot 4^x-5\cdot 6^x+3\cdot 9^x<0$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

**15.34.** Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $7^{x-5}>3^{x^2+x-30}$.

**15.35.** Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}$. У відповідь записати найбільший розв'язок нерівності.

**15.36.** Розв'язати нерівність $3^{x^2+2}-5^{x^2-1}>5^{x^2+1}+3^{x^2-1}$. У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

**15.37.** Розв'язати нерівність $\sqrt{9^x+24}-2>3^{x+1}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

**15.38.** Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-0,5x^2}\geq 2^{|2x-10|+x}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

**15.39.** Розв'язати нерівність $7^{x-5}>3^{x^2+x-30}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

**15.40.** Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{5}-2\right)^x+\left(\sqrt{5}+2\right)^x<2\sqrt{5}$. У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

**15.41.** Розв'язати нерівність $(x+3)^{-2x^2-7x-5}<1$. У відповідь записати суму всіх цілих недодатних розв'язків нерівності.