Тема 18. Тригонометричні рівняння

Тригонометричними називають рівняння, які містять змінну під знаком тригонометричних функцій.

Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$, де x — невідома величина, a — довільне дійсне число, називають *найпростішими тригонометричними рівняннями.*

1. Рівняння $\sin x = a$.

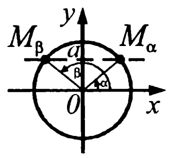
Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$ для будь-якого x, то якщо $a > 1$ або $a < -1$, рівняння $\sin x = a$ не має коренів. Для того, щоб розв'язати рівняння $\sin x = a$, досить знайти на одиничному колі або графіку відповідної функції такі точки, ординати яких дорівнюють a. Якщо пряма $y = a$ перетинає одиничне коло (графік) у точках M_α і M_β, то кути α і β є коренями рівняння $\sin x = a$.

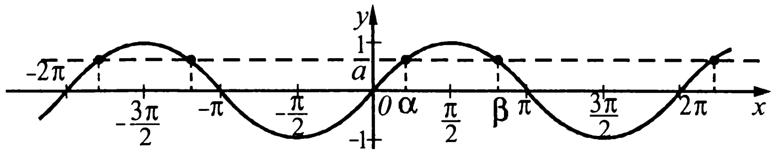
<table>
<tr><td colspan="3">$\sin x = a$</td></tr>
<tr><td colspan="3">

$|a| \le 1$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.





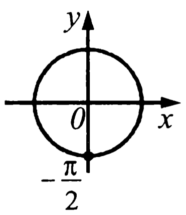
$\alpha = \arcsin a$; $\beta = \pi - \arcsin a$

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Окремі випадки</td></tr>
<tr>
<td>

$a = -1$

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

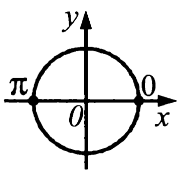


</td>
<td>

$a = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

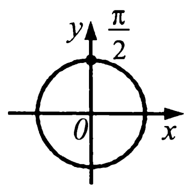


</td>
<td>

$a = 1$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$



</td>
</tr>
</table>

Наприклад:

1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$. Використаємо формулу коренів рівняння: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$. Маємо: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Знайти найменший розв'язок рівняння $\sqrt{2}-2\sin\frac{\pi x}{9}=0$, який задовольняє умову $0<x<10$. Запишемо рівняння у вигляді: $\sin\frac{\pi x}{9}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, тоді $\frac{\pi x}{9}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $x=(-1)^k\frac{9}{4}+9k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Якщо $k<0$, то $x<0$; якщо $k=0$, то $x=(-1)^0\frac{9}{4}+9\cdot 0=2{,}25$, якщо $k=1$, то $x=(-1)^1\frac{9}{4}+9\cdot 1=-2{,}25+9=$ $=6{,}75$. Оскільки $0<x<10$, то найменший розв'язок з цього проміжку дорівнює 2,25.

Відповідь. 2,25.

4. Розв'язати рівняння $\sin(\pi\cdot 4^x)=0$. Використаємо формулу для випадку $\sin t=0$, $t=\pi n$. Отже, $\pi\cdot 4^x=\pi n$; $4^x=n$, $n\in \boldsymbol{N}$, бо показникова функція набуває лише додатних значень, звідки $x=\log_4 n$.

Відповідь. $\log_4 n$.

2. Рівняння $\cos x = a$.

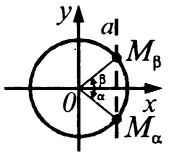
Оскільки $-1\le\cos x\le 1$ для будь-якого x, то якщо $a>1$ або $a<-1$, рівняння $\cos x=a$ не має коренів. Для того, щоб розв'язати рівняння $\cos x=a$, досить знайти на одиничному колі або графіку відповідної функції такі точки, абсциси (ординати) яких дорівнюють a. Якщо пряма $x=a$ перетинає одиничне коло (графік) у точках M_α і M_β, то кути α і β є коренями рівняння $\cos x=a$.

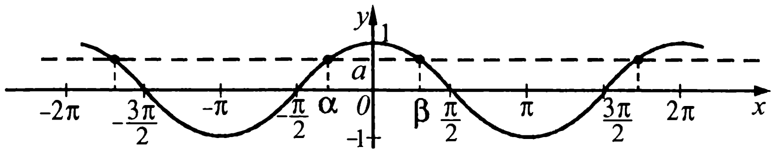
<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$\cos x = a$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">

$|a|\le 1$

$$\cos x=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arccos a+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}; \\ x=-\arccos a+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.





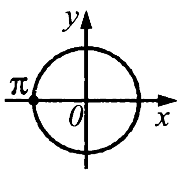
$\alpha=-\arccos a$; $\beta=\arccos a$

</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Окремі випадки</td></tr>
<tr>
<td align="center">

$a=-1$

$\cos x=-1$

$x=\pi+2\pi nk\ \ k\in \boldsymbol{Z}$

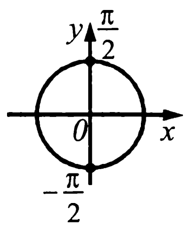


</td>
<td align="center">

$a=0$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$

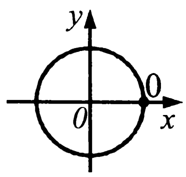


</td>
<td align="center">

$a=1$

$\cos x=1$

$x=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$



</td>
</tr>
</table>

Наприклад:

1. Розв'язати рівняння $2\cos x=1$. Запишемо рівняння у вигляді: $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

2. Розв'язати рівняння $\cos 4x = -\frac{1}{2}$. Нехай $4x = t$, тоді $\cos t = -\frac{1}{2}$; $t = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Повернемося до заміни: $4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

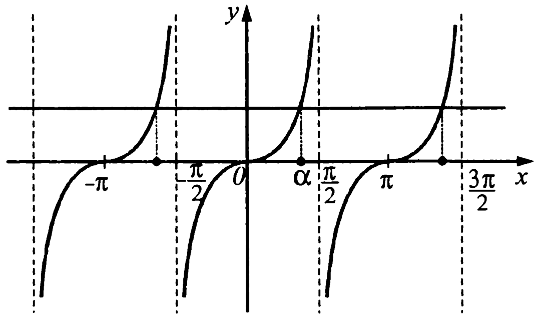
3. Рівняння $\mathrm{tg}x = a$ і $\mathrm{ctg}x = a$.

Для будь-якого дійсного числа a на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ існує тільки один кут α такий, що $\mathrm{tg}\alpha = a$. Це кут $\alpha = \mathrm{arctg}a$. Враховуючи періодичність функції $y = \mathrm{tg}x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\mathrm{tg}x = a$: $x = \mathrm{arctg}a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Для будь-якого дійсного числа a на проміжку $(0; \pi)$ існує тільки один кут α такий, що $\mathrm{ctg}\alpha = a$. Це кут $\alpha = \mathrm{arcctg}a$. Враховуючи періодичність функції $y = \mathrm{ctg}x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\mathrm{ctg}x = a$: $x = \mathrm{arcctg}a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

$\mathrm{tg}x = a$

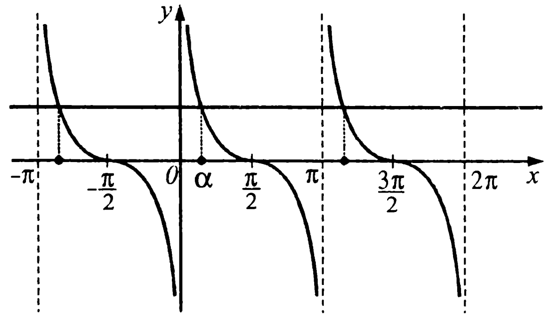
$x = \mathrm{arctg}a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$



$\alpha = \mathrm{arctg}a$

$\mathrm{ctg}x = a$

$x = \mathrm{arcctg}a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$



$\alpha = \mathrm{arcctg}a$

Наприклад, розв'язати рівняння $3\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) + \sqrt{3} = 0$. Запишемо дане рівняння у вигляді $\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Скористаємося формулами зведення й одержимо: $\mathrm{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\mathrm{tg}\left(\pi - \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Уведемо заміну $t = 2x + \frac{\pi}{6}$. Маємо: $\mathrm{tg}t = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $t = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $t = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Повернемося до заміни: $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $2x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Рівняння, що зводяться до квадратних

Нехай потрібно розв'язати рівняння $4\cos^2\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2} + 3 = 0$. Уведемо нову змінну: $\cos\frac{x}{2} = t$, звідки одержимо рівняння: $4t^2 - 8t + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2}; \\ t_2 = 1{,}5. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни та розв'яжемо одержані рівняння: 1) $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\cos\frac{x}{2}=1{,}5$; $x\in\varnothing$.

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Рівняння виду asinx + bcosx = c, де a, b, c∈R

Рівняння цього виду розв'язують за допомогою введення допоміжного кута. Вважаючи, що $a^2+b^2\neq 0$, поділимо обидві частини вихідного рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$ й одержимо: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Одержані коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$ мають такі властивості: $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, тому можна стверджувати, що існує такий кут φ, що, наприклад, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$. Тоді останнє рівняння зводиться до найпростішого: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin x+4\cos x=2$. Перетворимо рівняння: $3\sin x+4\cos x=2$; $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{3^2+4^2}}$; $\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\frac{2}{5}$. Уведемо допоміжний кут: $\frac{3}{5}=\cos\varphi$, $\frac{4}{5}=\sin\varphi$. Оскільки $\sin\varphi>0$ і $\cos\varphi>0$, то за допоміжний кут φ можна взяти $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Тоді маємо: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{2}{5}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{2}{5}$; $x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, де $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Відповідь. $(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, де $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Однорідні тригонометричні рівняння

Однорідні тригонометричні рівняння — це рівняння виду $a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2x+\ldots+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0$, де a_0, a_1, a_2, ..., a_n — дійсні числа, $n\ge 1$. Таке рівняння легко звести до рівняння відносно $\operatorname{tg}x$, якщо всі його члени поділити на $\cos^n x$. При цьому, якщо $a_0\neq 0$, то ділення не спричиняє втрати коренів. Справді, якщо $\cos x=0$, то початкове рівняння набуває вигляду $a_0\sin^n x=0$, звідки $\sin x=0$, що неможливо, оскільки cosx і sinx одночасно не можуть дорівнювати нулю.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin^2x-2\sin x\cos x-\cos^2x=0$. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2x\neq 0$: $\frac{3\sin^2x}{\cos^2x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{0}{\cos^2x}$. Одержимо: $3\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x-1=0$. Уведемо заміну $\operatorname{tg}x=t$ й матимемо: $3t^2-2t-1=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=-\frac{1}{3};\\ t_2=1.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

1) $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}$; $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\operatorname{tg}x=1$; $x=\operatorname{arctg}1+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Дробово-раціональні тригонометричні рівняння

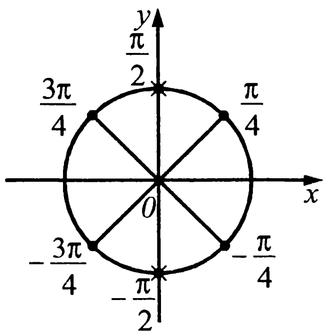
Складність розв'язування рівнянь цього типу полягає у формуванні відповіді. Основною складністю при розв'язуванні дробово-раціональних тригонометричних рівнянь є відбір його коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{\cos x+\cos 3x}{\sin 2x}=0$. ОДЗ: $\sin 2x\neq 0$; $2x\neq \pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $x\neq \frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Розв'яжемо рівняння $\cos x+\cos 3x=0$; $2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=0$; $2\cos 2x\cos x=0$. Тоді $\left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \cos 2x=0;\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z};\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Зобразимо на одиничному колі точки, які відповідають кореням рівняння $\cos x=0$ і $\cos 2x=0$ і закреслимо точки, які не входять в ОДЗ.



Отже, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$ — корені рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Розв'язування рівнянь на застосування обмеженості функцій y = sinx і y = cosx

Наприклад, розв'язати рівняння $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2$. Маємо: $|\cos 3x|\leq 1$, $\left|\cos\frac{5x}{2}\right|\leq 1$, тоді $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}\leq 2$, до того ж рівність виконується лише тоді, коли: $\left\{\begin{array}{l}\cos 3x=1;\\ \cos\frac{5x}{2}=1;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2\pi n}{3}, n\in \boldsymbol{Z};\\ x=\frac{4\pi k}{5}, k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$ Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержуємо: $\frac{2\pi n}{3}=\frac{4\pi k}{5}$, звідки $10\pi n=12\pi k$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $n=\frac{6k}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Оскільки n і k — цілі числа, то в праву частину замість k можна підставити лише цілі числа кратні 5. Тому останнє рівняння має розв'язки лише у цілих числах виду $k=5l$, $l\in \boldsymbol{Z}$. Підставляючи значення $k=5l$ в розв'язок системи $x=\frac{4\pi k}{5}$, одержуємо, що $x=4\pi l$, $l\in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $4\pi l$, $l\in \boldsymbol{Z}$.

Тригонометричні рівняння з параметрами

Розв'язати рівняння $a\sin^2 x+2(a+2)\sin x+8=0$.

Задане рівняння є або лінійним відносно $\sin x$, якщо $a=0$, або квадратним відносно $\sin x$, якщо $a\neq 0$.

1. $a = 0$: $4\sin x + 8 = 0$; $\sin x = -2$; $x \in \varnothing$;

2. $a \neq 0$. Уведемо заміну $\sin x = t$ й одержимо: $at^2 + 2(a+2)t + 8 = 0$; $\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 8a = (a-2)^2$;

$t_{1,2} = \frac{-(a+2) \pm (a-2)}{a}$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = -2; \\ t_2 = -\frac{4}{a}. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

1) $\sin x = -2$; $x \in \varnothing$;

2) $\sin x = -\frac{4}{a}$. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \varnothing$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi k$, $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$	$x = -\frac{\pi}{60} + \pi k$, $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + 3\pi k$, $k \in Z$

■ $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; $5x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $5x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

■ $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos 3x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$	$-\frac{\pi}{2}$

■ $\cos 3x = 1$; $3x = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $\frac{2k\pi}{3} < 0$; $k\pi < 0$; $k < 0$. Найбільший від'ємний корінь одержимо, якщо $k = -1$. Отже, $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$	$\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$	$\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$	πk; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$

■ $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:
$-2\sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x = 0$; $\sin 2x \cdot (1 - 2\sin x) = 0$;

$\sin 2x = 0$; або $1 - 2\sin x = 0$;

$2x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$	$2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$	$2\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$	$2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$

■ $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$; $2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$; $-2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$; $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

$\cos x = 1$; або $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

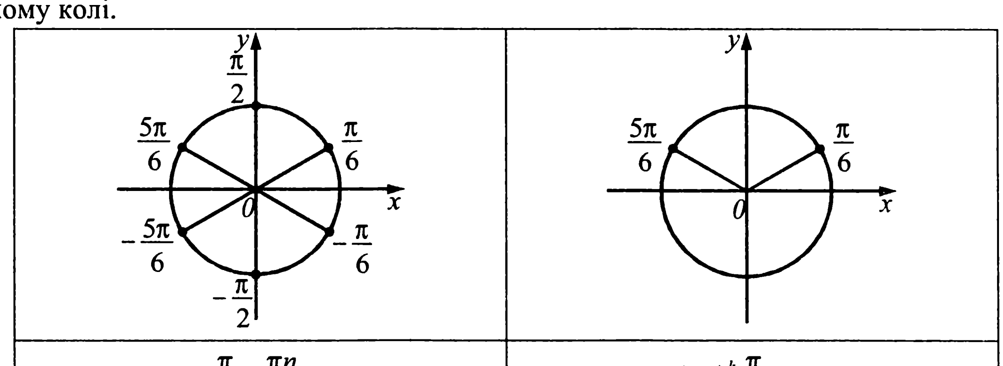
Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$. У відповідь записати найменший додатний корінь (у градусах).

■ $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0; \\ 1 - 2\sin x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$ Зобразимо множину розв'язків $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$ і $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$

на одиничному колі.



а) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$ б) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$

Множина розв'язків $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in \boldsymbol{Z}$ є підмножиною множини $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in \boldsymbol{Z}$. Тому відповіддю є $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in \boldsymbol{Z}$.

Отже, $x = (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in \boldsymbol{Z}$.

Найменший додатний корінь дорівнює $\frac{\pi}{6}$ = 30°.

Відповідь. 30°. ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. У відповідь записати кількість коренів, які належать проміжку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

■ Перетворимо вихідне рівняння: $\cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2 \Leftrightarrow (\cos 8x + \cos 2x) + (\cos 6x + \cos 4x) = 0$; $2\cos 5x\cdot\cos 3x + 2\cos 5x\cdot\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z};\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in \boldsymbol{Z};\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}, m\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Проміжку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ належать три корені: $\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. 3. ■

Приклад 8. За яких значень параметра a рівняння $\sin^4x + \cos^4x = a$ має корені? У відповідь записати найменший з них.

■ Маємо: $\sin^4x + \cos^4x = \sin^4x + 2\sin^2x\cos^2x + \cos^4x - 2\sin^2x\cos^2x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x = 1-2\sin^2x\cos^2x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = 1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x = \frac{1}{4}(\cos 4x+3)$. Тоді дане рівняння рівносильне такому: $\frac{1}{4}(\cos 4x+3)=a$, або $\cos 4x = 4a-3$. Воно має корені, якщо виконується умова $-1 \le 4a-3 \le 1$, звідки $a\in[0,5; 1]$. Найменшим значення є 0,5.

Відповідь. 0,5. ■

Приклад 9. За яких значень параметра a рівняння $\sin 2x + (a+2)(\sin x - \cos x) = 2a + 1$ має принаймні один корінь? У відповідь записати кількість цілих значень a.

■ Перетворимо рівняння: $\sin 2x + (a+2)(\sin x - \cos x) = 2a + 1$; $-(1-\sin 2x) + (a+2)(\sin x - \cos x) = 2a$; $-(\sin^2x - 2\sin x\cos x + \cos^2x) + (a+2)(\sin x - \cos x) = 2a$; $(\sin x - \cos x)^2 - (a+2)(\sin x - \cos x) + 2a = 0$. Уведемо заміну: $\sin x - \cos x = t$. Тоді одержимо рівняння: $t^2 - (a+2)t + 2a = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = a$. Повернемося до заміни: $\sin x - \cos x = 2$ або $\sin x - \cos x = a$. Оскільки $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, то $-\sqrt{2}\le\sin x-\cos x\le\sqrt{2}$, звідки слідує, що рівняння $\sin x - \cos x = 2$ коренів не має, а рівняння $\sin x - \cos x = a$ має корені тільки у випадку виконання умови $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$. Проміжок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ містить такі цілі числа: –1, 0, 1, а їх кількість дорівнює 3.

Відповідь. 3. ■

Завдання 18.1–18.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

18.1. Розв'язати рівняння $2\sin x = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$

18.2. Розв'язати рівняння $\sin\pi x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi^2}{2}+2\pi^2 n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{1}{2}+n$, $n\in Z$	$x=\frac{1}{2}+2n$, $n\in Z$

18.3. Розв'язати рівняння $2\cos 2x=-\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x=\pm\frac{3\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$

18.4. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$

18.5. Розв'язати рівняння $(\mathrm{ctg}\,x)^{100}=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	0	$x=\mathrm{arcctg}\,100+\pi n$, $n\in Z$

18.6. Указати рівняння, яке має хоча б один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x=\frac{\pi}{3}$	$\arccos x=-\frac{\pi}{3}$	$\arcsin x=\pi$	$\mathrm{arctg}\,x=2$	$\mathrm{arcctg}\,x=3$

18.7. Указати рівняння, яке має тільки один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\sin x=-1$	$\cos x=-2$	$\mathrm{arctg}\,x=1$	$\mathrm{tg}\,x=1$	$\frac{\cos x-1}{\sin x}=0$

18.8. Розв'язати рівняння $\sin^2 x-\sin x=0$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in Z$	$x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\pi n,\ x=-\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

18.9. Знайти корінь рівняння $\sin 2x - 4\cos x = 0$, який належить проміжку $[2\pi; 3\pi]$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$

18.10. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	Рівняння коренів немає

18.11. Розв'язати рівняння $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$

18.12. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

18.13. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + 5\cos x - 6 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\arccos 1 + \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z,$ $x = \pm(\pi - \arccos 6) +$ $+2\pi k, k \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$

18.14. Розв'язати рівняння $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{5\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right) + \pi n,$ $n \in Z$

18.15. Розв'язати рівняння $\sin x^2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\pi n}, n \in N$	0	$\{0\} \cup \{\sqrt{2\pi n}, n \in N\}$	$-\sqrt{2\pi n}, n \in N$	$\{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in N\}$

18.16. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{x} = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2,$ $n \in N$	$x = -\frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2,$ $n \in N$	$x = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2,$ $n \in N$	$x = \frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2,$ $n \in N$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in N$

18.17. У якому вигляді можна подати розв'язок рівняння $\cos(\pi x) = x^2 - 4x + 5$?

А	Б	В	Г	Д
$\log_\pi \pi^2$	$\log_\pi \pi$	$\log_\pi \frac{\pi}{2}$	$\log_{\frac{1}{\pi}} \pi$	$\log_\pi \pi^3$

18.18. Розв'язати рівняння $\cos(\cos x) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$x = \pm\arccos(2\pi n) +$ $+2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n$, $n \in Z$	$x = \pm\pi + 2\pi n$, $n \in Z$

18.19. Розв'язати рівняння $\sin x + \sin|x| = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\pi n, n \in Z$	0	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in N\}$	$(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$

18.20. Розв'язати рівняння $|\cos x| = \cos x + 2\sin x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 2\pi n$, $n \in Z$	$x = \pi n$, $n \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} +$ $+2\pi k,\ n, k \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} +$ $+\pi k,\ n, k \in Z$	$x = 2\pi n, x = \frac{3\pi}{4} +$ $+2\pi k,\ n, k \in Z$

18.21. За якого найменшого значення параметра a рівняння $2\cos 4x = a - 5$ має корені?

А	Б	В	Г	Д
–3	0	3	1	–1

18.22. Знайти всі значення a, за яких рівняння $(a + 2)\sin x = a^2 - 4$ має корені.

А	Б	В	Г	Д
$a \in (1; 3)$	$a \in R$	$a \neq 2$	$a \in \{-2\} \cup [1; 3]$	$\varnothing$

Завдання 18.23–18.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

18.23. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків на проміжку $[0; 2\pi]$ (А -Д).

1 $\sin 2x = 0$

2 $2\cos x = 2$

3 $\cos 2x = 0$

4 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = 1$

А $\{0; 2\pi\}$

Б $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$

В $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$

Г $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Д $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

18.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=a, |a|\le 1$

2 $\sin x\cos x=\frac{a}{2}$

3 $\sin x = a\cos x$

4 $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=a$

А $\pm\arccos a+2n\pi,\ n\in Z$

Б $\operatorname{arctg} a+n\pi,\ n\in Z$

В $\operatorname{arcctg} a+n\pi,\ n\in Z$

Г $(-1)^n \arcsin a+n\pi,\ n\in Z$

Д $(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\arcsin a+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$

18.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $2\sin x=1$

2 $\sin 2x=1$

3 $\sin\frac{x}{2}=1$

4 $2\sin\frac{x}{2}=1$

А $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

Б $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

В $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

Г $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

Д $x=(4n+1)\pi,\ n\in \boldsymbol{Z}$

18.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів на відрізку $[0; 2\pi]$ (А–Д).

1 $\sin 2x=0$

2 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

3 $\sin\frac{x}{8}=1$

4 $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$

А жодного

Б один

В два

Г чотири

Д п'ять

18.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів на проміжку $(0; \pi)$ (А–Д).

1 $\operatorname{ctg} 3x=4$

2 $\operatorname{ctg} 2x=2$

3 $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=0$

4 $|\operatorname{ctg} 2x|=1$

А чотири

Б три

В два

Г один

Д жодного

18.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin^2 x-4\sin x+3=0$

2 $\sin^2 x-3\sin x-4=0$

3 $\cos^2 x-5\cos x+4=0$

4 $\cos^2 x-4\cos x-5=0$

А $x=2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

Б $x=\pi(2n+1),\ n\in \boldsymbol{Z}$

В $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

Г $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

Д $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

18.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1 $\cos 3x - \cos x = 0$
2 $\cos 3x + \cos x = 0$
3 $\sin 3x - \sin x = 0$
4 $\sin 5x + \sin x = 0$

А $\sin 2x \cos 3x = 0$
Б $\sin 3x \cos 2x = 0$
В $\sin x \cos x = 0$
Г $\sin x \cos 2x = 0$
Д $\cos x \cos 2x = 0$

18.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$
2 $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$
3 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
4 $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$

А $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
Б $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
В $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
Г $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
Д $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

18.31. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1 $\frac{\cos x}{\sin x - 2} = 0$
2 $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$
3 $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$
4 $\frac{\sin x - 1}{\cos x} = 0$

А $\sin x = -1$
Б $\sin x = 1$
В $\cos x = 2$
Г $\cos x = 0$
Д $\cos x = -1$

18.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin x^2 = 1$
2 $\sin\sqrt{x} = 1$
3 $\sin^2 x = 1$
4 $\sin|x| = 1$

А $x = \sqrt{\frac{5\pi}{2} + 2\pi(n-1)}, n \in \boldsymbol{N}$
Б $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, де n — ціле невід'ємне число
В $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
Г $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, де n — ціле невід'ємне число
Д $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2$, де n — ціле невід'ємне число

18.33. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $|\sin x| = -\sin x$

2 $|\sin x| = \sin x$

3 $|\cos x| = -\cos x$

4 $|\cos x| = \cos x$

А $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \boldsymbol{Z}$

Б $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \boldsymbol{Z}$

В $x \in [\pi(2k+1); 2\pi(k+2)], k \in \boldsymbol{Z}$

Г $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 4\pi k; \frac{3\pi}{2} + 4\pi k\right], k \in \boldsymbol{Z}$

Д $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)], k \in \boldsymbol{Z}$

18.34. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin(x - |x|) = 0$

2 $\sin(x + |x|) = 0$

3 $\cos(x + |x|) = 1$

4 $\cos(x - |x|) = 1$

А $\{-\pi n, n \in N\} \cup [0; +\infty)$

Б $\{-2\pi n, n \in N\} \cup [0; +\infty)$

В $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi n}{2}, n \in N\right\}$

Г $(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in N\}$

Д $\left\{-\frac{\pi n}{2}, n \in N\right\} \cup [0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 18.35–18.52. Відповідь запишіть десятковим дробом.

18.35. Розв'язати рівняння $\sin(\pi \sin x) = -1$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.36. Розв'язати рівняння $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1$. У відповідь записати найменший додатний корінь, округлений з точністю до 0,1.

18.37. Знайти кількість коренів рівняння $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$ на проміжку $(0; \pi)$.

18.38. Розв'язати рівняння $3\sin x - 2\cos^2 x = -3$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.39. Розв'язати рівняння $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.40. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 - \sin x} = \cos x$. У відповідь записати значення $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.41. Розв'язати рівняння $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.42. Розв'язати рівняння $\cos x = \sin 3x$. У відповідь записати значення $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.43. Розв'язати рівняння $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$. У відповідь записати значення $\frac{3x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.44. Розв'язати рівняння $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.45. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.46. Розв'язати рівняння $(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.47. Нехай x_0 — найменший додатний корінь рівняння $\cos^2 x - 5\sin x\cos x + 2 = 0$. Знайти $\mathrm{tg}\,x_0$.

18.48. За яких значень параметра a рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ має розв'язки? У відповідь записати суму найбільшого та найменшого значень a.

18.49. Розв'язати рівняння $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^2 4x + \frac{1}{4}$. У відповідь записати значення $\frac{4x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.50. Розв'язати рівняння $9(\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x) = 15(\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x)^2 + 2$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.51. Розв'язати рівняння $\arccos(\sin x) = \frac{x}{2}$. У відповідь записати значення $\frac{S}{\pi}$, де S — сума всіх коренів рівняння.

18.52. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$. У відповідь записати найбільше значення a, за якого рівняння має корені.

Тема 19. Тригонометричні нерівності

Нерівності, які містять змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричними*. Наприклад, $\cos x \le \frac{1}{3}$; $5\sin^2 x + 3\cos x > 6$ тощо. Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування *найпростіших тригонометричних нерівностей.*

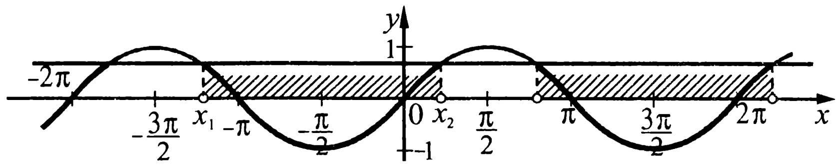
Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності — це нерівності виду $\sin x <> a$, $\cos x <> a$, $\mathrm{tg} x <> a$, $\mathrm{ctg} x <> a$. Розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності можна графічно або за допомогою одиничного кола.

За означенням, синусом кута α є ордината точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола, а косинусом — абсциса точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола. Цей факт використовується при розв'язуванні тригонометричних нерівностей виду $\sin x <> a$, $\cos x <> a$ за допомогою одиничного кола.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \le 1$, то розв'язок існує. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \sin x$ розташований нижче від графіка прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

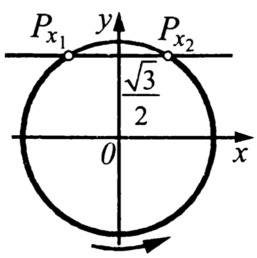


Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ — перетину графіків зазначених функцій. $x_1 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$; $x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Запишемо відповідь, врахувавши період функції $y = \sin x$.

Відповідь. $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2. Розв'язати нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо одиничне коло, пряму $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і позначимо точки P_{x_1} і P_{x_2} перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, ординати яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



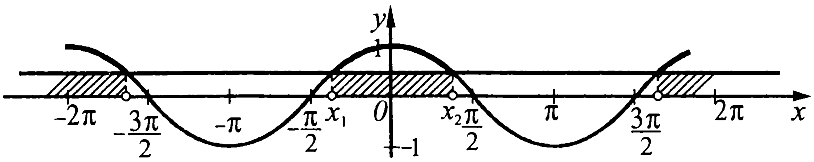
Знайдемо значення x_1 і x_2, здійснюючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, $x_1 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi$.

Відповідь. $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \cos x$.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\cos x > \frac{1}{2}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \cos x$ розташований вище від графіка прямої $y = \frac{1}{2}$.

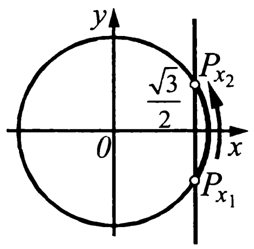


Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) — перетину графіків зазначених функцій, які є кінцями одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність. $x_1 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$; $x_2 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Запишемо відповідь, врахувавши період функції $y = \cos x$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2. Розв'язати нерівність $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо одиничне коло і пряму $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, позначимо точки P_{x_1} і P_{x_2} перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, абсциси яких більші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



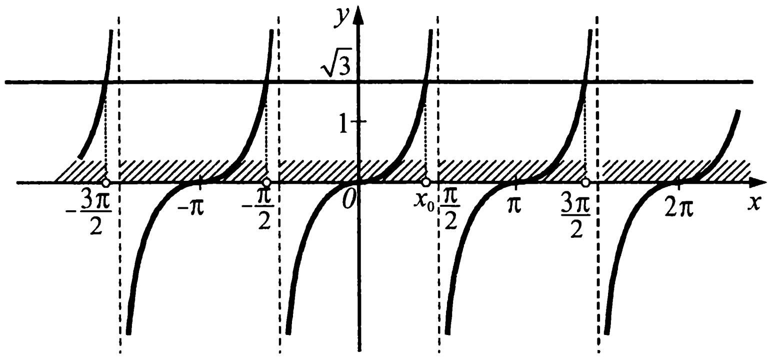
Знайдемо значення x_1 і x_2, здійснюючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, $x_1 = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \text{tg}x$.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\text{tg}\,x < \sqrt{3}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \text{tg}x$ і $y = \sqrt{3}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \text{tg}x$ розташований нижче від графіка прямої $y = \sqrt{3}$.



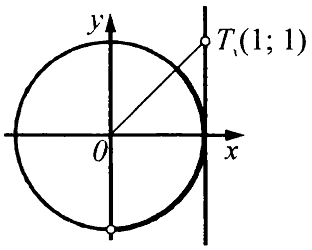
Знайдемо абсцису точки x_0 — перетину графіків зазначених функцій, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Іншим кінцем цього проміжка є точка $-\frac{\pi}{2}$, у якій функція $y = \text{tg}x$ невизначена.

Одним із проміжків, який є розв'язком нерівності, є $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \text{tg}x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2. Розв'язати нерівність $\text{tg}x < 1$.

Побудуємо одиничне коло, лінію тангенсів, на якій позначимо точку $T_x(1; 1)$ і виділимо ту частину лінії тангенсів, яка розміщена нижче від точки T_x, та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії тангенсів. Запишемо значення кутів, які відповідають виділеній дузі.



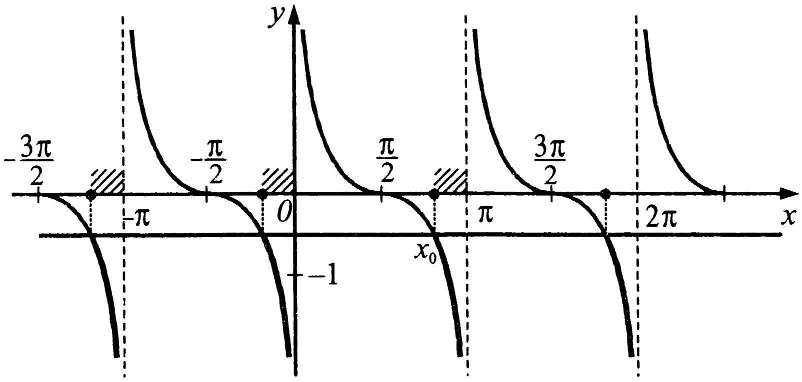
$-\frac{\pi}{2} < x < \text{arctg}\,1$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \text{tg}x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \mathrm{ctg}x$.

1. Розв'язати нерівність $\mathrm{ctg}\,x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \mathrm{ctg}x$ і $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \mathrm{ctg}x$ розташований не вище від графіка прямої $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



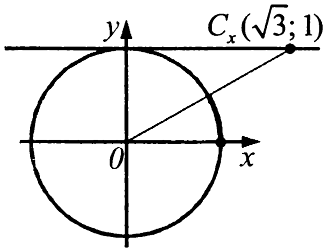
Знайдемо абсцису точки x_0, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0 = \frac{2\pi}{3}$. Іншим кінцем цього проміжка є точка π, у якій функція $y = \mathrm{ctg}x$ невизначена.

Одним із проміжків, який є розв'язком нерівності, є $\frac{2\pi}{3} \le x < \pi$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \mathrm{ctg}x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left[\frac{2\pi}{3} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Розв'язати нерівність $\mathrm{ctg}\,x \ge \sqrt{3}$.

Побудуємо одиничне коло, лінію котангенсів, на якій позначимо точку $C_x\left(\sqrt{3}; 1\right)$ і виділимо ту частину лінії котангенсів, яка розміщена праворуч від точки C_x, та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії котангенсів.



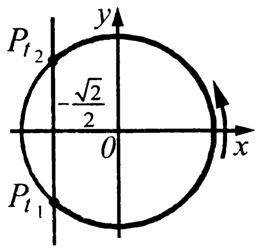
$0 < x < \frac{\pi}{6}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \mathrm{ctg}x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left[\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Тригонометричні нерівності зі складним аргументом

Наприклад, розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

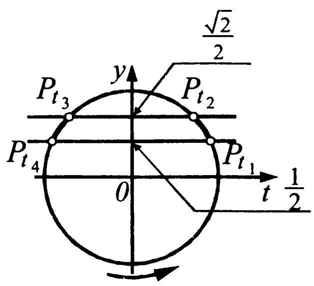
Запишемо умову, за якої точка t належить дузі $P_{t_1}P_{t_2}$: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Розв'яжемо одержану подвійну нерівність відносно x: $-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Подвійні тригонометричні нерівності

Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < \sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги $P_{t_1}P_{t_2}$ і $P_{t_3}P_{t_4}$).



Знайдемо значення t_1, t_2, t_3 і t_4, здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$, $t_3 < t_4$.

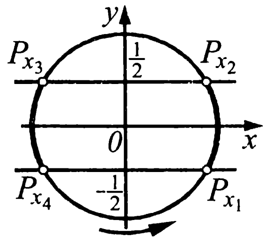
$t_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $t_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $t_3 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $t_4 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ і $\frac{3\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. Повернувшись до заміни,одержимо: $\frac{\pi}{6}+2\pi k<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ і $\frac{3\pi}{4}+2\pi k<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно x: $\frac{\pi}{3}+4\pi k<x<\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$ і $\frac{3\pi}{2}+4\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+4\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3}+4\pi k;\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi k;\frac{5\pi}{3}+4\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Нерівності, у яких тригонометрична функція міститься під знаком модуля

Нехай необхідно розв'язати нерівність $|\sin x|<\frac{1}{2}$. Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги $P_{x_1}P_{x_2}$ і $P_{x_3}P_{x_4}$).



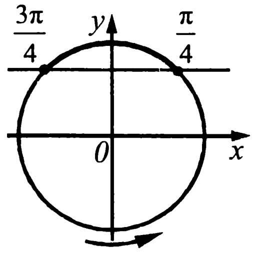
Знайдемо значення x_1, x_2, x_3 і x_4, виконуючи обхід кола проти годинникової стрілки: $x_1<x_2$, $x_3<x_4$.
$x_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$; $x_2=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; $x_3=\pi-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{6}$; $x_4=\pi+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги $P_{x_1}P_{x_2}$ і $P_{x_3}P_{x_4}$ симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin 3x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$.

■ $3x\in\left[\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $3x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$;

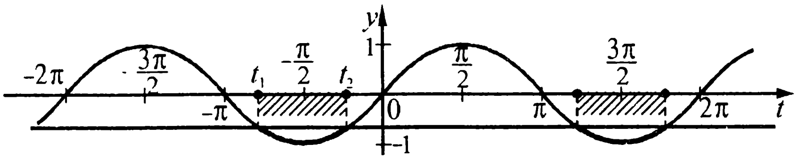


$x \in \left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{x}{4}-1\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності з проміжку [–6; 2].

■ Уведемо нову змінну $t=\frac{x}{4}-1$ і розв'яжемо нерівність $\sin t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рис.).



Знайдемо абсциси точок t_1 і t_2 ($t_1 < t_2$): $t_1 = -\pi + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$; $t_2 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

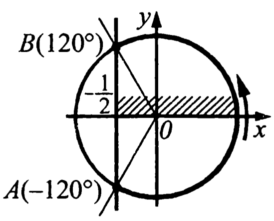
$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le t \le -\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Повернемося до заміни: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le \frac{x}{4}-1 \le -\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $1-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le \frac{x}{4} \le 1-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $4-3\pi+8\pi k \le x \le 4-\pi+8\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Якщо $k=0$, то цілими розв'язками є числа –5, –4, –3–2, –1, 0, усього їх є 6. Якщо $k=\pm1, \pm2, \ldots$, то розв'язків на проміжку [–6; 2] немає.

Відповідь. 6. ■

Приклад 3. Визначити найменше додатне значення x, для якого виконується нерівність $2\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right) \ge -1$.

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

■ Запишемо нерівність у вигляді $\cos(x-150°) \ge -\frac{1}{2}$.



Далі маємо: $-120° + 360°n \le x - 150° \le 120° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $30° + 360°n \le x \le 270° + 360° \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\cos^2 x < \frac{3}{4}$.

■ $\cos^2 x < \frac{3}{4}$; $\frac{1+\cos 2x}{2} < \frac{3}{4}$; $1+\cos 2x < \frac{3}{2}$; $\cos 2x < \frac{1}{2}$; $\arccos\frac{1}{2}+2\pi k < 2x < 2\pi - \arccos\frac{1}{2}+2\pi k$,

$k\in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k<2x<2\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k<2x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k\right),\ k\in \mathbf{Z}$. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\ge 1$.

■ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\ge 1$; $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\ge \frac{1}{2}$; $\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\ge\frac{1}{2}$; $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\ge\frac{1}{2}$;

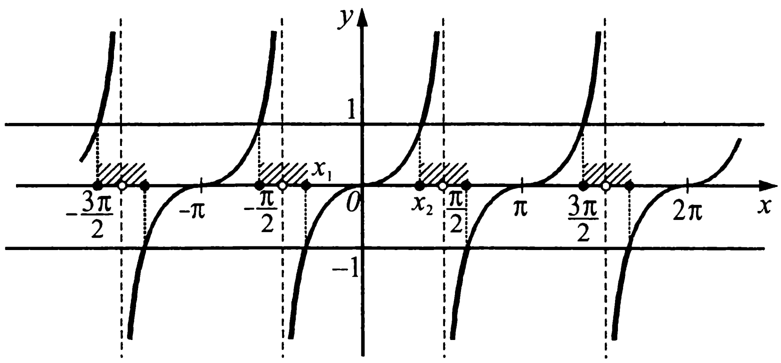
$\arcsin\frac{1}{2}+2\pi k\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi-\arcsin\frac{1}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$;

$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 2x\le\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; $2\pi k\le 2x\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$; $\pi k\le x\le\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$.

Відповідь. $\left[\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]\ k\in \mathbf{Z}$. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $|\mathrm{tg}x|\ge 1$.

■ Запишемо дану нерівність у вигляді сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x\le -1;\\ \mathrm{tg}x\ge 1.\end{array}\right.$ Побудуємо графіки функцій $y=\mathrm{tg}x$, $y=-1$ і $y=1$ та виділимо проміжки, на яких графік функції $y=\mathrm{tg}x$ розташований вище від прямої $y=1$ і нижче від прямої $y=-1$.



Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1<x_2$): $x_1=\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; $x_2=\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in \mathbf{Z}$. ■

Приклад 7. Знайти всі значення параметра a із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, для кожного з яких нерівність $\sin^2 x+\cos^2(x-a)\ge\frac{3}{4}+2\sin x\sin a\cos(x-a)$ виконується для всіх x. У відповідь записати найбільше значення параметра з цього проміжка (у градусах).

■ Виконаємо перетворення: $\sin^2 x+\cos^2(x-a)\ge\frac{3}{4}+2\sin x\sin a\cos(x-a)$;

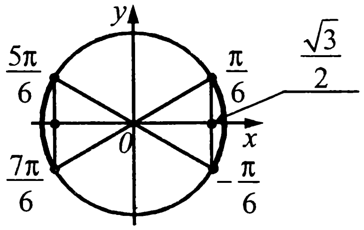
$\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge 2\sin x\sin a\cos(x-a)-\cos^2(x-a)$; $\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge\cos(x-a)\left(2\sin x\sin a-\cos(x-a)\right)$;

$\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge(\cos x\cos a+\sin x\sin a)(2\sin x\sin a-\cos x\cos a-\sin x\sin a)$;

$\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge(\sin x\sin a+\cos x\cos a)(\sin x\sin a-\cos x\cos a)$; $\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge\sin^2 x\sin^2 a-\cos^2 x\cos^2 a$;

$\sin^2 x(1-\sin^2 a)+\cos^2 x\cos^2 a\ge\frac{3}{4}$; $\sin^2 x\cos^2 a+\cos^2 x\cos^2 a\ge\frac{3}{4}$; $\cos^2 a(\sin^2 x+\cos^2 x)\ge\frac{3}{4}$; $\cos^2 a\ge\frac{3}{4}$;

$|\cos a|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Отже, $a\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Найбільше значення a з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ — $\frac{7\pi}{6}=210°$.

Відповідь. 210°. ■

Завдання 19.1–19.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

19.1. Розв'язати нерівність $2\sin 2x>-\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k;\frac{3\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8}+2\pi k;\frac{5\pi}{8}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k;\frac{5\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.2. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності $2\sin x\le 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.3. Розв'язати нерівність $\cos\pi x>\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{1}{8}+2k;\frac{1}{6}+2k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{1}{3}+2k;\frac{7}{3}+2k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{1}{3}+k;\frac{1}{3}+k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{1}{3}+2k;\frac{1}{3}+2k\right)$, $k\in Z$

19.4. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$

19.6. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x<-\frac{3}{4}$	$\sin x\geq 0,2$	$\mathrm{arctg}\,x\geq 2$	$\mathrm{tg}\,x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\mathrm{arctg}\,x\leq 1,2$

19.7. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x\geq\frac{3}{2}$	$\cos x<-1$	$\sin x>1$	$\mathrm{tg}\,x\leq\sqrt{3}$	$\arcsin x\leq-\pi$

19.8. Розв'язати нерівність $\cos 5x\cos x-\sin 5x\sin x<-\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\frac{4}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{4}{3}\pi+2\pi n;\frac{2}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{2}{9}\pi+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$

19.9. Розв'язати нерівність $\sin^2 x>\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5}{6}\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$

19.10. Розв'язати нерівність $\cos^2 x\leq\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2}{3}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.11. Розв'язати нерівність $(2\sin x-3)\,\mathrm{tg}\,x\geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right]$, $n\in Z$	$\left[\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right]$, $n\in Z$	$\varnothing$	$\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right)$, $n\in Z$

19.12. Розв'язати нерівність $\sin x<\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{3}{4}\pi+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{3}{4}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5}{4}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$

19.13. Розв'язати нерівність $\sin x - \cos x > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{3}{4}\pi+\pi k;\frac{9}{4}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\pi+2\pi k;\frac{5}{2}\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$

19.14. Розв'язати нерівність $\sqrt{\sin x} \geq \sqrt{\cos x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5}{4}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\varnothing$	$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$

19.15. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5}{6}\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{7}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.16. Розв'язати нерівність $|\cos x| > \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2}{3}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{5}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.17. Розв'язати нерівність $\arccos x \leq \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\cos\frac{1}{2};1\right]$	$\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[-1;\cos\frac{1}{2}\right]$	$\left(\cos\frac{1}{2};1\right)$	$\left(-1;\cos\frac{1}{2}\right)$

19.18. Розв'язати нерівність $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right]$	$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$	$\left[0;\frac{1}{2}\right)$

19.19. Розв'язати нерівність $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty;\sqrt{3}\right]$	$\left[\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$	$[1;+\infty)$	$\left[\sqrt{3};+\infty\right)$	$\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

19.20. Розв'язати нерівність $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\sqrt{3}; 1]$	$\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	$(-1; \sqrt{3}]$	$[-\sqrt{3}; 1)$	$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$

Завдання 19.21–19.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

19.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх найбільшими розв'язками на проміжку $[0; 2\pi]$ (А–Д).

1 $\cos x \le -\frac{1}{2}$

2 $\sin x \ge \frac{1}{2}$

3 $\operatorname{tg} x \le 1$

4 $\operatorname{ctg} x \ge -1$

А $\frac{5\pi}{6}$

Б $\frac{3\pi}{4}$

В 2π

Г $\frac{7\pi}{4}$

Д $\frac{4\pi}{3}$

19.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх найменшими розв'язками на проміжку $[0; \pi]$ (А–Д).

1 $\cos^2 x - \sin^2 x < 2$

2 $\sin 2x \ge 1$

3 $\operatorname{ctg} 2x \le 1$

4 $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x \ge 1$

А $\frac{\pi}{8}$

Б $\frac{\pi}{2}$

В $\frac{\pi}{4}$

Г 0

Д π

19.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\sin \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$

2 $\sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 $\sin \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $\sin \frac{x}{2} < -2$

А $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Б $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

В $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n < x < \frac{9\pi}{2} + 4\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Д $\varnothing$

19.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\cos 2x > \frac{1}{2}$

2 $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos 2x > -\frac{1}{2}$

4 $\cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

А $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{5\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В $\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{11\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Г $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Д $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

19.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\operatorname{tg} 4x > 1$

2 $\operatorname{tg} 4x < -\sqrt{3}$

3 $\operatorname{tg} 4x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 $\operatorname{tg} 4x < \sqrt{3}$

А $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$

В $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$

Д $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$

19.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > \sqrt{3}$

2 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > -1$

4 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} < -\sqrt{3}$

А $\frac{\pi}{2} + 3\pi n < x < 3\pi(n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $3\pi n < x < \frac{9\pi}{4} + 3\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В $3\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 3\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\pi(3n+1) < x < 3\pi(n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}$

Д $\frac{5\pi}{2} + 3\pi n < x < 3\pi(n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}$

19.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\cos^2 x - \sin^2 x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x < -\frac{1}{2}$

4 $\sin^2 x > \frac{1}{4}$

А $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$

Д $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Розв'яжіть завдання 19.28–19.33. Відповідь запишіть десятковим дробом.

19.28. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{9}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$. У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок нерівності.

19.29. Розв'язати нерівність $2\sin^2 x-5\sin x+2<0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.30. Розв'язати нерівність $\cos 2x+\cos x\geq 0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.31. Розв'язати нерівність $2\sin^4 2x\geq\sin^2 2x$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.32. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin x+\cos x<1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.33. Розв'язати нерівність $\arcsin\frac{1}{x}+\arccos\frac{1}{x}<2$. У відповідь записати найменший додатний розв'язок нерівності.

Тема 20. Системи рівнянь

Якщо завдання полягає у відшуканні спільних розв'язків кількох рівнянь, то кажуть, що треба розв'язати *систему рівнянь*. Наприклад, $\begin{cases} 5x-2y=3; \\ x+y=15 \end{cases}$ — система двох лінійних рівнянь із двома невідомими. *Розв'язком* системи рівнянь називають такий набір значень невідомих, який задовольняє кожне з рівнянь системи. Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що система не має розв'язків.

Дві системи рівнянь називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків збігаються. Справедливі такі твердження:

1. Якщо рівняння системи замінити рівносильним йому рівнянням, то отримаємо систему, рівносильну даній.

2. Якщо одне рівняння системи замінити його почастинною сумою з іншим, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Основними способами розв'язування систем рівнянь є графічний, спосіб підстановки і додавання.

Графічний спосіб

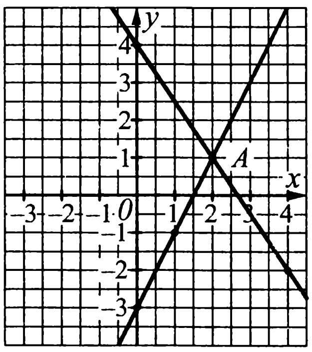
Щоб розв'язати систему рівнянь графічно, слід в одній системі координат побудувати графіки кожного з рівнянь і знайти спільні точки цих графіків. Координати точок перетину будуть наближеними розв'язками системи, які можна уточнити перевіркою.

Наприклад, знайти графічним способом розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 3x+2y=8; \\ 2x-y=3. \end{cases}$ Кожне з рівнянь системи є лінійним, тому їхніми графіками є прямі.

$3x+2y=8$		
x	0	4
y	4	–2

$2x-y=3$		
x	0	1
y	–3	–1

Будуємо графіки рівнянь в одній системі координат.



Графіки перетинаються в одній точці — точці $A(2; 1)$. Перевіркою встановлюємо, що (2; 1) — розв'язок системи.

Відповідь. (2; 1).

Спосіб підстановки

Спосіб підстановки полягає в тому, що одне з рівнянь подають у вигляді $y = f(x)$ або $x = g(y)$ (виражають одну змінну через іншу) і підставляють в інше рівняння замість змінної отриманий вираз. У результаті такої підстановки отримують рівняння з однією змінною. Розв'язавши його, підставляють отриманий корінь в інше рівняння системи і визначають значення іншої змінної.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=1; \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$ Виразимо з першого рівняння системи змінну x через змінну y: $x = 1 + y$ та підставимо одержане значення у друге рівняння системи. Маємо: $(1 + y)^3 -$

$-y^3=7$; $1+3y+3y^2+y^3-y^3=7$; $3y^2+3y-6=0$; $y^2+y-2=0$; $y_1=-2$, $y_2=1$. Підставимо знайдені значення й одержимо: $x_1=1+(-2)=-1$; $x_2=1+1=2$. Отже, розв'язками системи є $(-1; -2)$ і $(2; 1)$.

Відповідь. $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

Спосіб додавання

Суть способу додавання полягає в тому, що рівняння системи домножують на такі числа, щоб у них коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами. Тоді, почастинно додавши ці рівняння, отримують алгебраїчне рівняння з однією змінною і т. д.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}3x-2y=11;\\x+y=7.\end{cases}$ Домножимо друге рівняння на 2 й одержимо: $\begin{cases}3x-2y=11;\\x+y=7;\end{cases}\left|\begin{matrix}\\ \cdot 2\end{matrix}\right.$ $\begin{cases}3x-2y=11;\\2x+2y=14.\end{cases}$ Додамо рівняння системи й результат запишемо другим рівнянням, а перше рівняння перепишемо без змін: $\begin{cases}3x-2y=11;\\5x=25.\end{cases}$ Виконаємо перетворення й підставимо знайдене значення x у перше рівняння: $\begin{cases}2y=3x-11;\\x=5;\end{cases}$ $\begin{cases}2y=3\cdot5-11;\\x=5;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2;\\x=5.\end{cases}$ Отже, $(5; 2)$ — розв'язок системи.

Відповідь. $(5; 2)$.

Систему алгебраїчних рівнянь часто можна спростити, якщо ввести нові значення для невідомих.

Наприклад, розв'язуючи систему $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-y}+y=2;\\\dfrac{y}{2x-y}=1,\end{cases}$ зручно ввести заміну $z=\dfrac{1}{2x-y}$ й одержати систему $\begin{cases}z+y=2;\\yz=1,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}y=1;\\z=1.\end{cases}$ Повертаючись до заміни, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases}y=1;\\\dfrac{1}{2x-y}=1,\end{cases}$ з якої знайдемо розв'язок вихідної системи — $(1; 1)$.

Відповідь. $(1; 1)$.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2x-y=7;\\-3x+4y=-8.\end{cases}$

■ З першого рівняння отримуємо: $y=2x-7$. Підставивши замість y в друге рівняння вираз $2x-7$, отримаємо: $-3x+4(2x-7)=-8$; $5x=20$; $x=4$.

Тоді $y=2\cdot4-7=1$. Розв'язок системи рівнянь: $(4; 1)$.

Відповідь. $(4; 1)$. ■

Приклад 2. Нехай $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases}\sqrt{25-10x+x^2}+y=4;\\y-3x+11=0.\end{cases}$ Знайти добуток $x_0\cdot y_0$.

■ Спочатку розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases}\sqrt{25-10x+x^2}+y=4;\\y-3x+11=0;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{(x-5)^2}+y=4;\\y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}|x-5|+3x-11=4;\\y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}|x-5|+3x=15;\\y=3x-11.\end{cases}$ **1.** Нехай $x-5\geq0$, тобто $x\geq5$. $\begin{cases}x-5+3x=15;\\y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=20;\\y=3x-11;\end{cases}$

$\begin{cases} x = 5; \\ y = 4. \end{cases}$ **2.** Нехай $x - 5 < 0$, тобто $x < 5$. $\begin{cases} -x + 5 + 3x = 15; \\ y = 3x - 11; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 10; \\ y = 3x - 11; \end{cases}$ $x = 5$ — не підходить. Отже, $x_0 = 5, y_0 = 4$. Тоді $x_0 \cdot y_0 = 5 \cdot 4 = 20$.

Відповідь. 20. ■

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	(3; 5)	(2; 1)	інша відповідь	(2; 3)

■ $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3^x \cdot 5^y}{3^y \cdot 5^x} = \dfrac{75}{45}; \\ 3^x \cdot 5^y \cdot 3^y \cdot 5^x = 75 \cdot 45; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = \dfrac{75}{45}; \\ 3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 5 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 15; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{x-y} \cdot \dfrac{1}{5^{x-y}} = \dfrac{5}{3}; \\ 15^{x+y} = 15^3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}; \\ x + y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -1; \\ x + y = 3; \end{cases}$ $2x = 2; x = 1, y = 2.$

Відповідь. А. ■

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2; \\ xy = 2(x + y). \end{cases}$

■ Уведемо заміну $x + y = t$, $xy = z$. Перетворимо ліву частину першого рівняння: $x^4 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2z^2 = (x^2 + 2xy + y^2 - 2xy)^2 - 2z^2 = ((x + y)^2 - 2z)^2 - 2z^2 = (t^2 - 2z)^2 - 2z^2 = t^4 - 4t^2z + 2z^2$. Тоді одержимо: $\begin{cases} t^4 - 4t^2z + 2z^2 = 17t^2; \\ z = 2t; \end{cases}$ звідки перше рівняння можна переписати так: $t^4 - 2t^2 \cdot 2t + 2 \cdot (2t)^2 = 17t^2$; $t^4 - 8t^3 - 9t^2 = 0$; $t^2(t^2 - 8t - 9) = 0$, яке має розв'язки $t_1 = 0$, $t_2 = -1$, $t_3 = 9$. Із рівності $z = 2t$ маємо, що $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = 18$. Тоді одержуємо три системи: 1) $\begin{cases} x + y = 0; \\ xy = 0, \end{cases}$ звідки розв'язком є (0; 0); 2) $\begin{cases} x + y = -1; \\ xy = -2, \end{cases}$ звідки розв'язками є (1; –2) і (–2; 1); 3) $\begin{cases} x + y = 9; \\ xy = 18, \end{cases}$ звідки розв'язками є (3; 6) і (6; 3).

Відповідь. (0; 0), (1; –2), (–2; 1), (3; 6), (6; 3). ■

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^{x-2y} = 36; \\ 4(x - 2y) + \log_6 x = 9. \end{cases}$

■ Прологарифмуємо перше рівняння системи за основою 6, врахувавши, що $x > 0$, а значить, $x^{x-2y} > 0$ й одержимо: $\begin{cases} (x - 2y)\log_6 x = 2; \\ x - 2y = \dfrac{1}{4}(9 - \log_6 x). \end{cases}$ Увівши заміну $t = \log_6 x$, одержимо: $\begin{cases} (x - 2y) \cdot t = 2; \\ x - 2y = \dfrac{1}{4}(9 - t). \end{cases}$

Далі маємо: $\dfrac{1}{4}(9 - t)t = 2$; $t^2 - 9t + 8 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = 8$.

Отже, $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_6 x = 1;\\ x-2y=\frac{1}{4}(9-\log_6 x);\end{cases}\\ \begin{cases}\log_6 x = 8;\\ x-2y=\frac{1}{4}(9-\log_6 x);\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6;\\ 6-2y=\frac{1}{4}(9-1);\end{cases}\\ \begin{cases}x=6^8;\\ 6^8-2y=\frac{1}{4}(9-8);\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6;\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=6^8;\\ y=\frac{4\cdot 6^8-1}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь. (6; 2), $\left(6^8;\frac{4\cdot 6^8-1}{2}\right)$. ■

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50;\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

■ Прологарифмуємо перше рівняння системи й одержимо: $\begin{cases}(1+\lg(x+y))\lg 10=\lg 50+\lg 10;\\ \lg((x-y)(x+y))=2-\lg 5;\end{cases}$

$\begin{cases}1+\lg(x+y)=\lg 5+1;\\ \lg((x-y)(x+y))=2-\lg 5;\end{cases}$ $\begin{cases}\lg(x+y)=\lg 5;\\ \lg((x-y)(x+y))=\lg\frac{10^2}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5;\\ (x-y)(x+y)=20;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5;\\ 5(x-y)=20;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=5;\\ x-y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5;\\ 2x=9;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,5;\\ y=0,5.\end{cases}$

Відповідь. (4,5; 0,5).

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2};\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$

■ Уведемо заміну $z=\frac{y}{x}$ й одержимо: $\begin{cases}\frac{1}{z}+z=\frac{5}{2};\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}2z^2-5z+2=0;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}z_1=0,5;\\ z_2=2;\end{array}\right.\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{y}{x}=0,5;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{y}{x}=2;\\ x^2-y^2=3.\end{cases}\end{array}\right.$

Розглянемо першу систему: $\begin{cases}\frac{y}{x}=0,5;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,5x;\\ x^2-(0,5x)^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,5x;\\ 0,75x^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,5x;\\ x^2=4;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=2;\\ y_1=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=-2;\\ y_2=-1.\end{cases}\end{array}\right.$ Для другої системи матимемо: $\begin{cases}\frac{y}{x}=2;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x;\\ x^2-4x^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x;\\ -3x^2=3;\end{cases}$ $\varnothing$.

Отже, розв'язками системи є (–2; –1), (2; 1).

Відповідь. (–2; –1), (2; 1).

Приклад 8. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1; \\ y=3-|x-1|. \end{cases}$

■ Розкриємо модулі $|x-1|$ і $|y-2|$.

1. Нехай $x-1\geq 0$; $y-2\geq 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases} x-1\geq 0; \\ y-2\geq 0; \\ x-1+y-2=1; \\ y=3-(x-1); \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1; \\ y\geq 2; \\ x+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1; \\ y\geq 2; \\ y=4-x; \end{cases}$

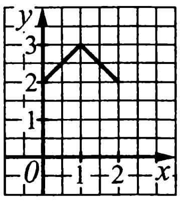
$\begin{cases} 1\leq x\leq 2; \\ y=4-x. \end{cases}$

2. Нехай $x-1\leq 0$; $y-2\geq 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases} x-1\leq 0; \\ y-2\geq 0; \\ -(x-1)+y-2=1; \\ y=3+x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 1; \\ y\geq 2; \\ y=x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} 0\leq x\leq 1; \\ y=x+2. \end{cases}$

3. Нехай $x-1\geq 0$; $y-2\leq 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases} x-1\geq 0; \\ y-2\leq 0; \\ x-1-y+2=1; \\ y=3-(x-1); \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1; \\ y\leq 2; \\ x-y=0; \\ x+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1; \\ y\leq 2; \\ x=2; \\ y=2; \end{cases}$ (2; 2).

4. Нехай $x-1\leq 0$; $y-2\leq 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases} x-1\leq 0; \\ y-2\leq 0; \\ -x+1-y+2=1; \\ y=3+x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 1; \\ y\leq 2; \\ x+y=2; \\ -x+y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 1; \\ y\leq 2; \\ x=0; \\ y=2; \end{cases}$ (0; 2).

Загальний розв'язок системи зручно зобразити графічно.



■

Завдання 20.1–20.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

20.1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=14; \\ 2y-x=6 \end{cases}$ і знайти добуток компонентів розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
16	20	8	$1\frac{1}{5}$	$13\frac{1}{3}$

20.2. Дано систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3; \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$ Яке утвориться рівняння, якщо з першого рівняння виразити змінну y через x, і отриманий вираз підставити у друге рівняння замість y?

А	Б	В	Г	Д
$5x+3=-4$	$3x-9=-4$	$5x-3=-4$	$5x+9=-4$	$5x-9=-4$

20.3. Знайти суму компонентів $x_0 + y_0 + z_0$ розв'язку системи рівнянь $\begin{cases} x + y = -2; \\ y + z = -11; \\ x + z = 1. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
–6	–12	–18	–24	–3

20.4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 4y = -20, \\ 5x + 2y = -10. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(3; 4)	(0; –5)	(7; 9)	(2; –4)	(1; –7,5)

20.5. Знайти середнє арифметичне для значень чисел x та y, які є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ -x + 3y = 16. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
3	2	1	4	3,5

20.6. Знайти компонент x_0 розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4; \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{1}{3}$	147	91	$1\frac{6}{7}$

20.7. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ x^2 - 2y^2 = -7? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.8. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} |x - 3| - y = 0; \\ xy - 4 = 0? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.9. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 16; \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$ і вказати добуток компонентів її розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
34	128	64	15	225

20.10. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x+y} = 27; \\ 4^{x-y} = 0,25 \end{cases}$ і вказати компонент x_0 її розв'язку $(x_0; y_0)$.

А	Б	В	Г	Д
0	–1	1	2	–2

20.11. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\lg(x+y)=2;\\ \lg(x-y)=1\end{cases}$ і вказати компонент y_0 її розв'язку $(x_0; y_0)$.

А	Б	В	Г	Д
35	110	90	55	45

20.12. Знайти суму компонентів розв'язку системи рівнянь $\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 2;\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
–3	3	$\sqrt{7}$	9	7

20.13. Яка з наведених систем за будь-яких значень p має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases}2y=x;\\ y=\dfrac{x}{2}+p\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+y=3;\\ x+2y=p\end{cases}$	$\begin{cases}x-2y=5;\\ 2x-4y=p\end{cases}$	$\begin{cases}x+2y=3;\\ x-y=p\end{cases}$	$\begin{cases}x-3y=5;\\ 6y-2x=p\end{cases}$

20.14. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}2x-y=5;\\ x+ay=2\end{cases}$ не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,5	–1	2,5	10

20.15. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}3x+y=-15;\\ -x-ay=5\end{cases}$ має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{3}$	3	–3	–1

20.16. За яких значень a і b система рівнянь $\begin{cases}6x+by=5a;\\ 5ax-6y=b\end{cases}$ має розв'язок (–1; 2)?

А	Б	В	Г	Д
$a=2$, $b=2$	$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$	$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$	$a=-2$, $b=-2$	$a=-1$, $b=2$

20.17. Скільки розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=4;\\ x^2+xy=4\end{cases}$ містять нульовий компонент?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.18. Знайти $|x-y|$, якщо $\begin{cases}x^2-xy=79,\\ y^2-xy=2.\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
8	9	$\sqrt{77}$	7	81

20.19. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases}|x|-|y|=0;\\ x^2-4x=0?\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	більше, ніж три	жодного

20.20. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}x^2+y^2=4;\\ x-y=a\end{cases}$ має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$a=3$	$a=2\sqrt{3}$	$a=-2\sqrt{2}$ або $a=2\sqrt{2}$	$a=-2\sqrt{3}$ або $a=2\sqrt{3}$	$a=-\sqrt{2}$ або $a=\sqrt{2}$

20.21. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases}xy=6;\\ yz=8;\\ zx=12?\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.22. За якого значення k пряма $y=kx+2$ проходить через точку перетину прямих $x+y=5$ і $x-y=1$?

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	0	1	2

20.23. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{1}{2};\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{2};\\ ax+y=13\end{cases}$ має розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
–2	–3	4	5	6

Завдання 20.24–20.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

20.24. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases}x+2y=4;\\ 1{,}5x+3y=6\end{cases}$

2 $\begin{cases}2x+3y=10;\\ 4x+6y=7\end{cases}$

3 $\begin{cases}2x+3y=7;\\ 4x+5y=19\end{cases}$

4 $\begin{cases}|x|-y=3;\\ |x|+y=3\end{cases}$

А жодного
Б один
В два
Г три
Д безліч

20.25. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та першими компонентами x_0 розв'язків $(x_0; y_0)$ цих систем (А–Д).

1 $\begin{cases} x+y=20; \\ x-y=14 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y=19; \\ 2x-y=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+y=16; \\ x-2y=4 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x-3y=1; \\ x+y=13 \end{cases}$

А 8
Б 10
В 12
Г 14
Д 17

20.26. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та рівняннями (А–Д), які утворюються з цих систем при їх розв'язуванні способом підстановки.

1 $\begin{cases} x-y=1; \\ xy=20 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y=1; \\ xy=-20 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x-y=1; \\ xy=-20 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x+y=1; \\ xy=20 \end{cases}$

А $y^2+20y=0$
Б $y^2+y+20=0$
В $y^2+y-20=0$
Г $y^2-y+20=0$
Д $y^2-y-20=0$

20.27. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та першими компонентами x_0 розв'язків $(x_0; y_0)$ цих систем (А–Д).

1 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{1}{6}; \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{y}=-\dfrac{1}{12} \end{cases}$

2 $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=13; \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3^{x-y}=81; \\ 2^{x+\frac{y}{2}}=128 \end{cases}$

4 $\begin{cases} \log_2(x+y)=4; \\ \log_2(x-y)=3 \end{cases}$

А 6
Б 12
В 16
Г 20
Д 24

20.28. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases} xy = 1; \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

2 $\begin{cases} xy = 1; \\ x - y = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} xy = 1; \\ x + y = 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} xy = 0; \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

А жодного
Б один
В два
Г три
Д чотири

Розв'яжіть завдання 20.29–20.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

20.29. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 12; \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.30. Вказати значення параметра a, за якого система $\begin{cases} ax + 3y = 9, \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

20.31. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.32. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.33. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy = 6; \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.34. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1; \\ 2x^2 + 5xy - y^2 = 17. \end{cases}$ У відповідь записати найбільше значення x із розв'язків системи.

20.35. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{3}{2x + y} + \dfrac{1}{2x - y} = \dfrac{2}{5}; \\ \dfrac{7}{2x + y} + \dfrac{2}{2x - y} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.36. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1; \\ y(x + 2) = 40. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.37. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2\cdot 3^x - 4^y = 14; \\ 3^x + 4^y = 13. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.38. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 40; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 3\lg 2. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.39. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 10; \\ \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{y+1} = 16. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.40. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy = 1; \\ yz = 2; \\ zx = 8. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0 + z_0$, де $(x_0; y_0; z_0)$ — розв'язок системи.

20.41. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4xy - \dfrac{x}{y} = 30; \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.42. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0; \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.43. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_8(xy) = 3\log_8 x \cdot \log_8 y; \\ 4\log_8 \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_8 x}{\log_8 y}. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + \sqrt{2}\,y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.44. За якого значення a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8; \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$