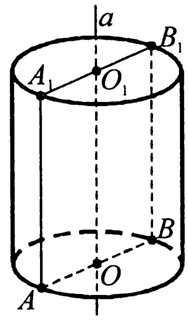
Тема 38. Циліндр

Циліндром називають тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо осі, що містить його сторону. На рисунку зображено циліндр, який отримали внаслідок обертання прямокутника AA_1O_1O навколо сторони OO_1.

Пряма a — вісь симетрії циліндра, проходить через центри основ.

$H = OO_1$ — висота циліндра.



Циліндр складається із двох кругів, які лежать у паралельних площинах, і бічної поверхні (див. рис. 1). Круги називають *основами* циліндра, їх радіуси — *радіусом* циліндра. Основи циліндра паралельні й рівні. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл основ, називають *твірними* циліндра. Твірні утворюють бічну поверхню циліндра. Твірні й вісь циліндра перпендикулярні до площин основ. Відстань між площинами основ є висотою циліндра.

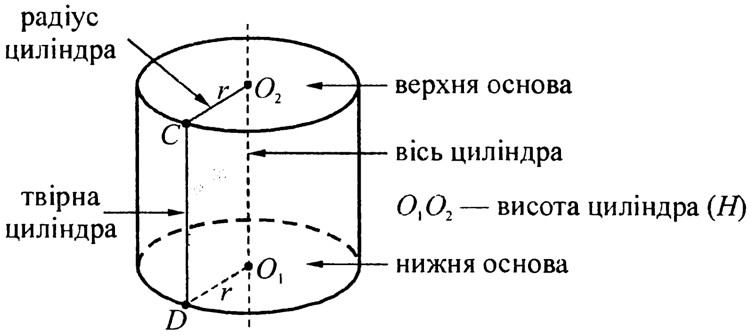


Рис. 1

Розгорткою циліндра є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює висоті циліндра, а інша — довжині кола основи, та два рівні круги (рис. 2).

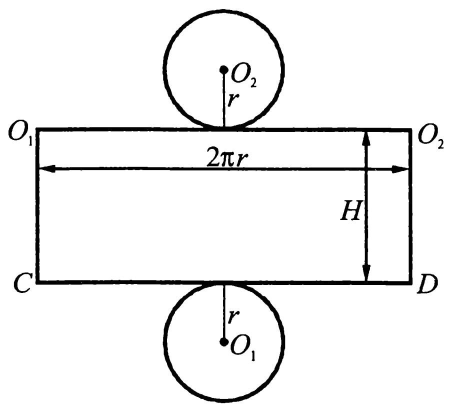


Рис. 2

Площа бічної поверхні циліндра: $S = 2\pi RH$.

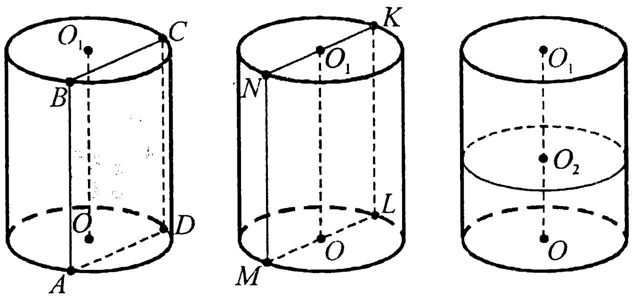
Площа повної поверхні циліндра: $S_{повн.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.}$. $S_{повн.} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H)$.

Об'єм циліндра: $V = S_{осн.} \cdot H = \pi R^2 H$.

Переріз циліндра площиною, паралельною до його осі, — прямокутник. Дві сторони прямокутника — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ.

Осьовий переріз циліндра — переріз, який проходить через його вісь.

Переріз циліндра площиною, паралельною до його основ, є кругом, який дорівнює основам циліндра.



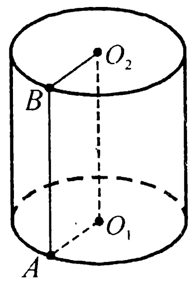
Дотична площина до циліндра — площина, яка проходить через твірну прямого циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через цю твірну.

Приклад 1. Знайти площу повної поверхні циліндра радіуса 3 см, висота якого дорівнює 5 см.

■ $S_{п.} = 2\pi R(R + H)$, де $R = O_1A = 3$ см, $H = AB = 5$ см.

$S_{п.} = 2\pi \cdot 3(3 + 5) = 48\pi$ (см^2).

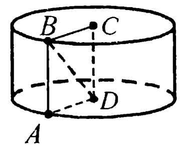
Відповідь. 48π см^2. ■



Приклад 2. Знайти площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю $5\sqrt{2}$ см навколо сторони.

■ $BC = AD = R$. Оскільки $ABCD$ — квадрат, то $AB = AD = R$.

Із прямокутного трикутника ABD ($\angle A = 90°$) маємо: $R^2 + R^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$, $2R^2 = 50$, $R^2 = 25$, $R = 5$ (см).



$S_{б.} = 2\pi RH$, $H = AB = R = 5$ (см).

Отже, $S_{б.} = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 = 50\pi$ (см^2).

Відповідь. 50π см^2. ■

Приклад 3. Знайти об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 4 см, а відрізок, який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см.

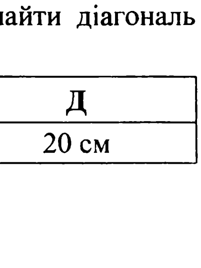
■ $V_{ц.} = \pi R^2 H$, де $R = O_1K$, $H = O_1O_2$.

Із прямокутного трикутника O_1O_2K ($\angle O_1 = 90°$) маємо:

$O_1K = \sqrt{O_2K^2 - O_1O_2^{\,2}} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (см).

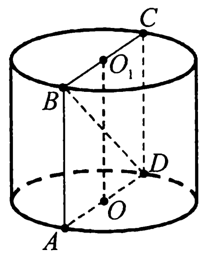
$V_{ц.} = \pi \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^2 \cdot 4 = 80\pi$ (см^3)

Відповідь. 80π см^3. ■



Приклад 4. Об'єм циліндра дорівнює $8\pi\sqrt{5}$ см^3, а його висота — $2\sqrt{5}$ см. Знайти діагональ осьового перерізу.

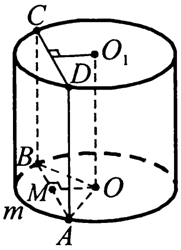
А	Б	В	Г	Д
6 см	4 см	36 см	8 см	20 см



■ Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, одна сторона якого дорівнює діаметру основи, а інша — висоті циліндра. $V_{цил.} = \pi R^2 H$. Нехай перерізом є прямокутник $ABCD$, у якому $AB = H = 2\sqrt{5}$ см, $O_1B = R$. Тоді одержимо: $8\pi\sqrt{5} = \pi R^2 \cdot 2\sqrt{5}$, звідки $R^2 = 4$; $R = 2$ (см). $AD = 2R = 4$ (см). Проведемо діагональ BD. Із трикутника ABD ($\angle A = 90°$) маємо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{20+16} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Відповідь. **А.** ■

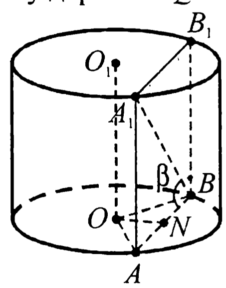
Приклад 5. Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі, є квадрат, що відтинає від кола основи дугу 90°. Висота циліндра дорівнює 6 см. Знайти відстань від осі циліндра до цього перерізу.



■ Нехай OO_1 — циліндр, OO_1 — його висота, $OO_1 = 6$ см, $ABCD$ — заданий переріз (квадрат), $AB = AD$, $OO_1 \| AD$. $\cup AmB = 90°$, тому $\angle AOB = 90°$. Оскільки $AD = OO_1$, то $AD = AB = 6$ см. З рівнобедреного прямокутного трикутника AOB $OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см). $OM \perp AB$ і $OA = OB = R$, тоді $AM = BM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 =$ $= 3$ (см). З ΔAMO ($\angle M = 90°$): $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2} = 3$ (см). Так як $OM \perp OO_1$ і $OO_1 \| AD$, то $OM \perp AB$. Отже, пряма OM перпендикулярна до двох непаралельних прямих AB й AD площини перерізу, а тому $OM \perp (ABD)$ і є відстанню від прямої OO_1 до паралельної їй площини ABD.

Відповідь. 3 см. ■

Приклад 6. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 2α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом β. Визначити об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює Q.



■ Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі OO_1 і перетинає основу, є прямокутник. Нехай це прямокутник AA_1B_1B із площею Q. AB — хорда нижньої основи; $\angle AOB = 2\alpha$. Оскільки $AA_1 \perp (AOB)$, то ортогональною проекцією діагоналі A_1B на площину основи є хорда AB. Тому $\angle A_1BA = \beta$.

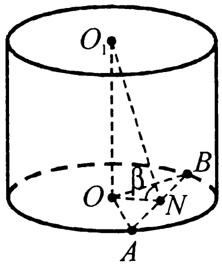
Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$, де $R = OA$, $H = AA_1$.

З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AB = AA_1 \cdot \mathrm{ctg}\beta = H \cdot \mathrm{ctg}\beta$. Оскільки $AB \cdot AA_1 = Q$, то: $H\mathrm{ctg}\beta \cdot H = Q$; $H^2 = Q\mathrm{tg}\beta$; $H = \sqrt{Q\mathrm{tg}\beta}$. Виразимо радіус R основи через висоту H. Для цього проведемо висоту ON трикутника AOB. Оскільки ΔAOB рівнобедрений, то висота ON є одночасно його бісектрисою і медіаною. Тому $\angle AON = \alpha$, $AN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}H\mathrm{ctg}\beta$. З ΔAON ($\angle N = 90°$): $R =$ $= OA = \frac{AN}{\sin\angle AON} = \frac{H\,\mathrm{ctg}\beta}{2\sin\alpha}$.

Отже, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\frac{H\,\mathrm{ctg}\beta}{2\sin\alpha}\right)^2 \cdot H = \frac{\pi H^3 \mathrm{ctg}^2\beta}{4\sin^2\alpha} = \frac{\pi Q\,\mathrm{tg}\beta\sqrt{Q\,\mathrm{tg}\beta}\,\mathrm{ctg}^2\beta}{4\sin^2\alpha} = \frac{\pi Q\sqrt{Q\,\mathrm{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$.

Відповідь. $\frac{\pi Q\sqrt{Q\,\mathrm{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$. ■

Приклад 7. В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу α. Відрізок, який сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l й утворює з площиною основи кут β. Визначити об'єм циліндра.



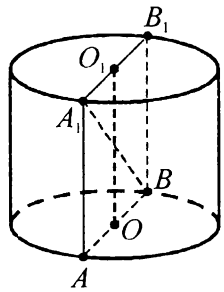
■ Нехай у циліндрі з віссю OO_1: AB — задана хорда, $\cup AMB = \alpha$; точка N — середина хорди AB, $O_1N = l$. Оскільки відрізок ON — ортогональна проекція похилої O_1N на площину основи, то $\angle O_1NO = \beta$.

З ΔO_1ON ($\angle O = 90°$): $H = OO_1 = l\sin\beta$; $ON = l\cos\beta$. Оскільки трикутник AOB рівнобедрений, то медіана ON є його висотою і бісектрисою. Тому $\angle ONA = 90°$, $\angle AON = \frac{\alpha}{2}$. З ΔONA: $R = OA = \dfrac{ON}{\cos\angle AON} = \dfrac{l\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Отже, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\dfrac{l\cos\beta}{\cos(\alpha/2)}\right)^2 \cdot l \cdot \sin\beta = \dfrac{\pi l^3 \cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi l^3 \cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. ■

Приклад 8. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні. Діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см. Знайти повну поверхню циліндра.

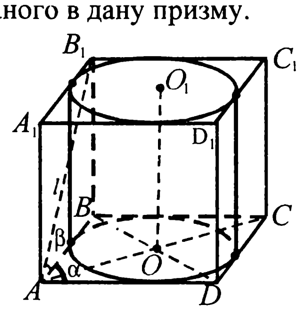


■ Нехай осьовим перерізом циліндра з віссю OO_1 є прямокутник AA_1B_1B, $A_1B = 5$ см. Позначимо: $OA = R$, $AA_1 = H$. Виходячи з рівності $S_{б.} = \frac{1}{2}S_{п.}$, матимемо: $2S_{б.} = S_{п.}$; $2S_{б.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$; $S_{б.} = 2S_{осн.}$; $2\pi RH = 2\pi R^2$; $H = R$. Тоді $AB = 2R = 2H$.

З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AA_1^2 + AB^2 = A_1B^2$; $H^2 + (2H)^2 = 5^2$; $H^2 = 5$. Враховуючи, що $R = H$, знаходимо повну поверхню: $S_{п.} = 2\pi R(R + H) = 4\pi H^2 = 20\pi$ (см^2).

Відповідь. 20π см^2.■

Приклад 9. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α. Діагональ бічної грані дорівнює l й утворює з площиною основи кут β. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.



■ Нехай в основі прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб $ABCD$, у якому $\angle A = \alpha < 90°$; $AB_1 = l$. Проекцією діагоналі AB_1 грані AA_1B_1B на площину основи є сторона AB ромба, а тому, за умовою задачі, $\angle B_1AB = \beta$.

Висота H циліндра, вписаного в дану призму, дорівнює висоті призми, а радіус r основи — радіусу кола, вписаного в ромб $ABCD$. Бічна поверхня вписаного циліндра дорівнює $S_{б.} = 2\pi rH$.

З ΔABB_1 ($\angle B = 90°$): $H = BB_1 = l\sin\beta$; $AB = l\cos\beta$. З формули для площі ромба $S = pr$, де $p = 2AB$ — його півпериметр, знаходимо:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{AB^2 \cdot \sin\alpha}{2AB} = \frac{1}{2}AB\sin\alpha = \frac{1}{2}l\cos\beta\cdot\sin\alpha.$$

Отже, $S_{б.} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot l \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\pi l^2\sin2\beta\sin\alpha$.

Відповідь. $\frac{1}{2}\pi l^2\sin2\beta\sin\alpha$. ■

Завдання 38.1–38.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

38.1. Знайти повну поверхню циліндра з радіусом 5 см і висотою 15 см.

А	Б	В	Г	Д
375π см^2	100π см^2	400π см^2	200π см^2	150π см^2

38.2. Прямокутник зі сторонами a і b ($a > b$) обертається навколо більшої сторони. Визначити об'єм тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi a^2 b$	$\pi a^2 b$	$\pi a b^2$	$2\pi a b^2$	$4\pi a^2 b$

38.3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Визначити радіус циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2l\cos\alpha$	$l\sin\alpha$	$\frac{l\sin\alpha}{2}$	$l\cos\alpha$	$\frac{l\cos\alpha}{2}$

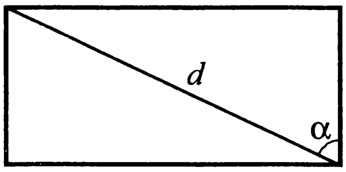
38.4. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину на відстані 3 см від неї. Ця площина перетинає основу циліндра по хорді, яка дорівнює 8 см. Знайти радіус циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{73}$ см	5 см	$\sqrt{55}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{5}$ см

38.5. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 10 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
100 см^2	50π см^2	150π см^2	100π см^2	200π см^2

38.6. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d й утворює з висотою розгортки кут α. Знайти радіус циліндра.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{d\sin\alpha}{2}$	$\frac{d\sin\alpha}{2\pi}$	$\frac{d\cos\alpha}{\pi}$	$\frac{d\sin\alpha}{\pi}$	$\frac{d\cos\alpha}{2}$

38.7. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює S. Визначити площу осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{S}{4\pi}$	$\frac{S}{2}$	πS	$\frac{S}{2\pi}$	$\frac{S}{\pi}$

38.8. Відро циліндричної форми вміщує 10 л води. Іграшкове відро має розміри в 10 разів менші. Скільки літрів води вміщує іграшкове відро?

А	Б	В	Г	Д
1 л	0,1 л	0,01 л	0,001 л	0,0001 л

38.9. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α. Даний відрізок розміщений на відстані d від центра нижньої основи. Визначити висоту циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{d}{\sin\alpha}$	$\frac{d}{\cos\alpha}$	$d\sin\alpha$	$d\cos\alpha$	$d\,\mathrm{tg}\,\alpha$

38.10. Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Визначити площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R.

А	Б	В	Г	Д
$R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\,\beta$	$4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\,\beta$	$4R^2\sin^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\,\beta$	$R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\,\beta$	$4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\,\beta$

38.11. Діагоналі осьового перерізу циліндра утворюють при перетині кут φ. Визначити площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$4S\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$	$4S\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$	$4S\sin\frac{\varphi}{2}$	$4S\cos\frac{\varphi}{2}$	$\frac{4S}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

38.12. Радіус основи циліндра R. Площина перетинає бічну поверхню циліндра, але не перетинає основи й утворює кут α з площиною основи. Знайти площу перерізу циліндра цією площиною.

А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pi R^2\cos\alpha$	$\pi R^2\sin\alpha$	$\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$	$\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$

38.13. Осьовий переріз циліндра — квадрат $ABCD$ зі стороною $2a$. Визначити найкоротшу відстань між точками A і C по поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2a^2\sqrt{2}$	$4a^2\sqrt{2}$	$a\sqrt{\pi^2+4}$	πa	$a\sqrt{\pi+4}$

38.14. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи циліндра, площі яких дорівнюють 60 см^2 і 80 см^2. Знайти площу осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
70 см^2	80 см^2	90 см^2	100 см^2	200 см^2

38.15. У куб, ребро якого дорівнює a, вписано циліндр. Визначити повну поверхню циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{3}{2}\pi a^2$	$\frac{5}{2}\pi a^2$	$3\pi a^2$	$12\pi a^2$

38.16. У циліндр вписано куб, об'єм якого дорівнює 8 см^3. Знайти об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
2π см^3	4π см^3	$4\sqrt{2}\pi$ см^3	8π см^3	$2\sqrt{2}\pi$ см^3

38.17. Знайти радіус циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи 9 см та 12 см і висотою 8 см.

А	Б	В	Г	Д
7,5 см	15 см	34 см	8,5 см	17 см

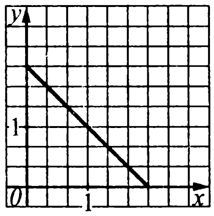
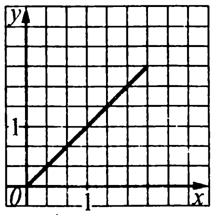
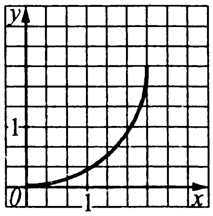
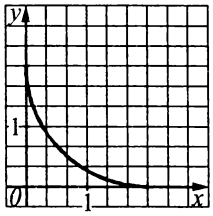
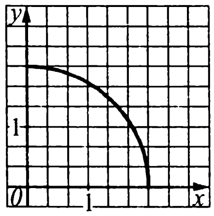
38.18. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Визначити об'єм циліндра, вписаного в призму.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi V}{3\sqrt{3}}$	$\frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\pi V}{12\sqrt{3}}$	$\frac{\pi V}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}\pi V$

38.19. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а у призму — циліндр. Знайти відношення об'ємів циліндрів.

А	Б	В	Г	Д
1 : 8	1 : 4	1 : 2	3 : 4	3 : 8

38.20. Дано циліндр з радіусом 2 і висотою 0,5. $S(x)$ — площа перерізу циліндра площиною, паралельною до його осі, де x — відстань від осі циліндра до площини перерізу. Який з наведених графіків є графіком функції $S(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 38.21–38.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

38.21. Осьовий переріз циліндра дорівнює S, а висота циліндра — H. Установити відповідність між величинами S і H (1–4) та об'ємом циліндра (А–Д).

1 8 см², 4 см
2 6 см², 3 см
3 12 см², 6 см
4 10 см², 5 см

А 3π см³
Б 5π см³
В 4π см³
Г 8π см³
Д 6π см³

38.22. Площа основи циліндра дорівнює S, а діагоналі осьового перерізу утворюють при перетині кут φ. Установити відповідність між величинами S і φ (1–4) та площею бічної поверхні циліндра (А–Д).

1 4 см², 60°
2 3 см², 90°
3 6 см², 120°
4 5 см², 60°

А $8\sqrt{3}$ см²
Б $16\sqrt{3}$ см²
В $20\sqrt{3}$ см²
Г 12 см²
Д 14 см²

38.23. Установити відповідність між об'ємами правильних трикутних призм (1–4) та об'ємами вписаних у них циліндрів (А–Д).

1 18 см^3
2 9 см^3
3 36 см^3
4 27 см^3

А $4\sqrt{3}\pi$ см^3
Б $\sqrt{3}\pi$ см^3
В $5\sqrt{3}\pi$ см^3
Г $2\sqrt{3}\pi$ см^3
Д $3\sqrt{3}\pi$ см^3

Розв'яжіть завдання 38.24–38.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

38.24. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як $\sqrt{3}\pi : 4$. Знайти у градусах кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра і площиною основи.

38.25. Висота циліндра дорівнює 12, а радіус основи дорівнює 10. Циліндр перетнуто площиною, паралельною до його осі так, що в перерізі утворився квадрат. Знайти відстань від осі циліндра до січної площини.

38.26. Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 120°. Знайти площу перерізу, якщо висота дорівнює 10, а відстань від осі циліндра до січної площини дорівнює $\sqrt{3}$.

38.27. Кут між твірною циліндра і діагоналлю осьового перерізу дорівнює 60°, площа основи циліндра дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити площу бічної поверхні циліндра.

38.28. Із квадрата, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{\pi}$, згорнута бічна поверхня циліндра. Визначити площу основи циліндра.

38.29. Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 60°. Твірна циліндра дорівнює $10\sqrt{3}$, а відстань від осі до січної площини — 2. Знайти площу перерізу.

38.30. Знайти об'єм циліндра, якщо розгорткою його бічної поверхні є квадрат, сторона якого дорівнює $\sqrt[3]{\pi}$.

38.31. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник з катетом 1 і прилеглим до нього кутом 60°. Визначити об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює $\frac{1}{\pi}$.

38.32. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 8 і 2. Висота призми дорівнює $\frac{10}{\pi}$. Знайти об'єм циліндра, вписаного в цю призму.

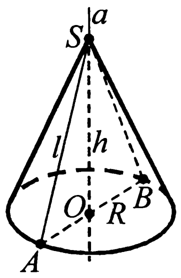
38.33. У циліндрі проведено два перерізи *ABCD* і *ABEF*, де *AB* — твірна циліндра. Площа кожного з цих перерізів дорівнює $\frac{1}{2}$ площі осьового перерізу. Знайти у градусах кут між площинами *ABC* й *ABE*.

38.34. На присадибній ділянці воду для поливу рослин зберігають у циліндричному резервуарі, діаметр основи якого дорівнює 2,5 м. Обчислити висоту резервуару з точністю до 0,01 м, якщо його місткість дорівнює 3 м^3.

38.35. Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина — 3 м. Він наповнений водою на $\frac{2}{3}$ глибини. Обчислити з точністю до 0,01 м^3 об'єм води у криниці.

Тема 39. Конус

Тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один з його катетів, називають *конусом*.



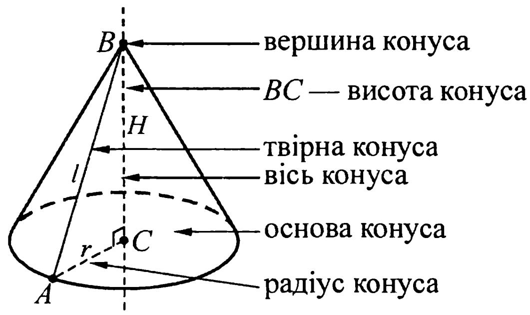
Конус складається із круга основи й бічної поверхні (див. рис.).

Круг називають *основою* конуса, його радіус — *радіусом* конуса.

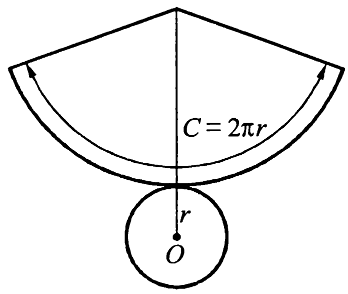
Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називають *твірними* конуса. Усі твірні конуса рівні.

Пряму, яка проходить через вершину конуса і центр основи, називають *віссю* конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини основи.

Відрізок осі, що сполучає вершину конуса з центром основи, називають *висотою* конуса.



Розгорткою конуса є круговий сектор круга, радіус якого дорівнює твірній конуса l, а довжина дуги — довжині кола основи і круг, радіус якого дорівнює радіусу основи конуса.



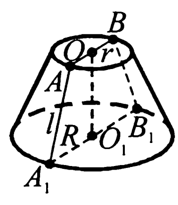
Площа бічної поверхні конуса: $S = \pi Rl$, де R — радіус основи, l — твірна.

Площа повної поверхні конуса: $S_{\text{повн.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{\text{осн.}}$. $S_{\text{повн.}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$.

Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Зрізаний конус

$AA_1 = l$ — твірна. $O_1A_1 = R$, $OA = r$, $OO_1 = h$ — висота.



Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція A_1ABB_1.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса: $S = \pi(R + r)l$.

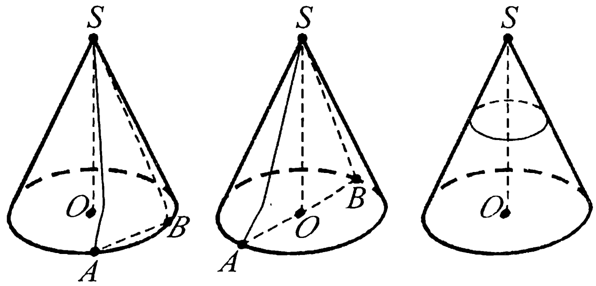
Площа повної поверхні зрізаного конуса: $S_{\text{повн.}} = S_{\text{бічн.}} + S_1 + S_2$, де S_1 і S_2 — площі основ. $S_{\text{повн.}} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$, де R і r — радіуси основ.

Об'єм: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

Перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину, є рівнобедрений трикутник, у якого бокові сторони — твірні циліндра.

Осьовий переріз конуса — переріз, який проходить через його вісь.

Переріз конуса площиною, паралельною до його основи, є кругом.



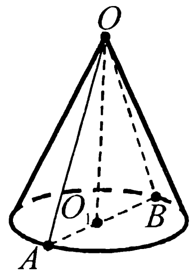
Дотична площина до конуса — площина, яка проходить через твірну конуса та перпендикулярна до площини осьового перерізу, проведеного через цю твірну.

Приклад 1. Обчислити площу бічної поверхні конуса, висота якого дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а радіус основи удвічі менший від твірної.

А	Б	В	Г	Д
18π см^2	36π см^2	54π см^2	$9\sqrt{3}\pi$ см^2	48π см^2

■ Нехай OO_1 — конус, висота якого OO_1 дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Радіус основи O_1A удвічі менший від твірної AO. Нехай $AO_1 = x$. Тоді з прямокутного трикутника AO_1O отримаємо: $x^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = (2x)^2$; $4x^2 - x^2 = 27$; $3x^2 = 27$; $x^2 = 9$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ — не задовольняє умову задачі. Отже, $AO_1 = 3$ (см). $AO = 2x = 6$ (см). Маємо: $S_б = \pi \cdot AO_1 \cdot AO = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$ (см^2).

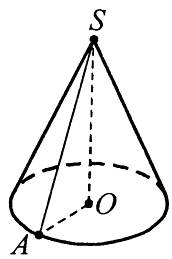
Відповідь. **А.** ■



Приклад 2. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює 45°, а висота конуса — $3\sqrt{2}$ см. Знайти площу бічної поверхні конуса.

■ Трикутник SOA — прямокутний ($\angle O = 90°$). $\angle OSA + \angle SAO = 90°$, $\angle SAO = 90° - 45° = 45°$. Отже, трикутник SOA — рівнобедрений, $OA = SO = 3\sqrt{2}$ (см) і $R = OA = 3\sqrt{2}$ см. $SA = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ (см). $S_{б.} = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\,\pi$ (см^2).

Відповідь. $18\sqrt{2}\,\pi$ см^2. ■



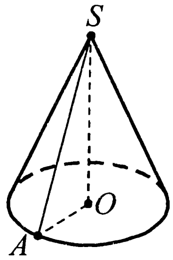
Приклад 3. Висота конуса дорівнює 8 см, довжина кола основи — 12π см. Знайти площу повної поверхні конуса.

■ $C = 2\pi R$. Маємо: $2\pi R = 12\pi$, звідси $R = 6$ см.

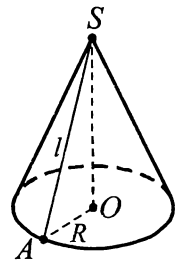
Із прямокутного трикутника SOA ($\angle O = 90°$) маємо: $SA = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

$S_{п.} = \pi \cdot 6(6 + 10) = 96\pi$ (см^2).

Відповідь. 96π см^2. ■



Приклад 4. Площа бічної поверхні конуса втричі більша від площі основи. Знайти об'єм конуса, якщо радіус основи 2 см.

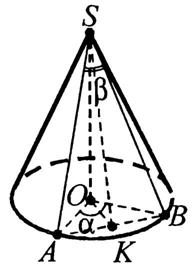


■ $R = 2$ см. $S_{б.} = 3S_{осн.}$; $\pi Rl = 3\pi R^2$; $l = 3R = 6$ (см). $H = \sqrt{l^2 - R^2} = 4\sqrt{2}$ (см).

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3. ■

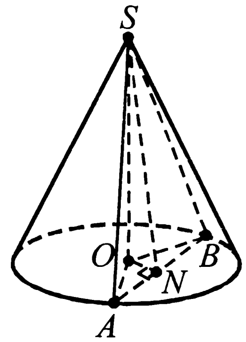
Приклад 5. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу радіуса R по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α, а з вершини — під кутом β. Визначити площу S перерізу. У відповідь записати значення виразу $\dfrac{S}{\sqrt{3}}$, якщо $R = 2$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$.



■ Нехай S — вершина конуса, O — центр його основи, SO — висота, OA — радіус. Через вершину конуса проведемо площину, що перетинає його основу по хорді AB, яку видно з центра основи під кутом AOB, а з вершини — під кутом ASB. За умовою, $\angle AOB = \alpha$, $\angle ASB = \beta$, $OA = R$. Оскільки $SA = SB$, то трикутник ASB — рівнобедрений. У трикутнику ASB проведемо медіану SK. Вона буде висотою і бісектрисою. Отже, $SK \perp AB$, $\angle ASK = \angle BSK = \dfrac{1}{2}\angle ASB = \dfrac{\beta}{2}$. Із трикутника AOB, у якому $AO = BO = R$, $\angle AOB = \alpha$ за теоремою косинусів одержимо: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB$; $AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha) = 2R^2 \cdot 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 4R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. $AB = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Із трикутника ASK, у якому $\angle AKS = 90°$, $\angle ASK = \dfrac{\beta}{2}$, $AK = \dfrac{1}{2}AB = R\sin\dfrac{\alpha}{2}$, отримаємо: $SK = AK\operatorname{ctg}\angle ASK = R\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. $S_{пер.} = \dfrac{1}{2}AB \cdot SK = \dfrac{1}{2} \cdot 2R\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot R\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} = R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. Якщо $R = 2$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, то $S_{пер.} = 2^2\sin^2 45°\operatorname{ctg}30° = 4 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Тоді $\dfrac{S}{\sqrt{3}} = 2$.

Відповідь. 2. ■

Приклад 6. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом φ. Визначте бічну поверхню конуса, якщо його радіус дорівнює R.



■ Нехай SO — висота конуса, AB — задана хорда, $\angle AOB = \alpha$, $\angle ASB = \varphi$, $OA = R$. Проведемо $SN \perp AB$, тоді $ON \perp AB$. Оскільки трикутники AOB і ASB рівнобедрені, то $\angle AON = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle ASN = \dfrac{\varphi}{2}$. З ΔONA: $AN = R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$. З ΔSNA:

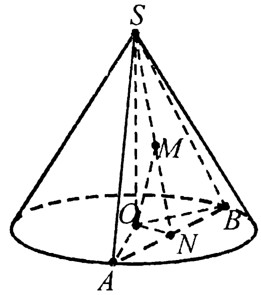
$l = SA = \dfrac{AN}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$. $S_{б.} = \pi Rl = \dfrac{\pi R^2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi R^2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$. ■

Приклад 7. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу конуса по хорді. Цю хорду видно із центра основи під кутом 60°. Відстань від центра основи до середини висоти перерізу дорівнює 4 см. Знайти, під яким кутом площина перерізу нахилена до площини основи, якщо радіус основи конуса дорівнює 8 см.

■ Нехай задана площина перетинає основу конуса по хорді AB, SO — висота конуса, $\angle AOB = 60°$, $OA = 8$ см. Проведемо $SN \perp AB$, M — середина SN, $OM = 4$ см. Оскільки $SN \perp AB$, то $ON \perp AB$. Потрібно знайти $\angle SNO$. $\angle AON = 30°$. З ΔONA: $ON = OA \cdot \cos 30° = 4\sqrt{3}$ (см). OM — медіана прямокутного ΔSON, тому

$SN = 2OM = 8$ (см). $\cos\angle SNO = \dfrac{ON}{SN} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle SNO = 30°$.



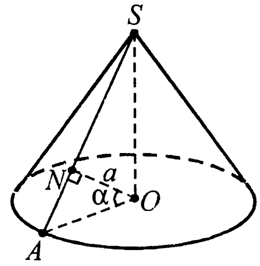
Відповідь. 30°. ■

Приклад 8. У конусі з центра основи до твірної проведено перпендикуляр, який нахилений до площини основи під кутом α. Знайти об'єм конуса, якщо довжина перпендикуляра дорівнює a.

■ Нехай SO — висота конуса, SA — твірна, ON — перпендикуляр до твірної SA; $ON = a$. Оскільки площина SOA перпендикулярна до площини основи конуса, то проекцією прямої ON на площину основи є пряма OA. Тому $\angle NOA = \alpha$.

З ΔANO ($\angle N = 90°$): $R = OA = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. $\angle NSO = 90° - \angle NAO = \angle NOA = \alpha$.

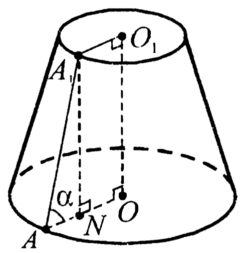
З ΔSNO ($\angle N = 90°$): $H = SO = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Отже, $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{\pi a^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.



Відповідь. $\dfrac{\pi a^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. ■

Приклад 9. Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом α. Радіуси основ R і r ($R > r$). Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.

■ Нехай A_1A — твірна заданого зрізаного конуса, O_1O — його вісь, $OA = R$ і $O_1A_1 = r$ ($R > r$). Прямі AA_1 і OO_1 перетинаються (у вершині повного конуса), а тому точки A, A_1, O_1 і O лежать в одній площині. Оскільки ця площина перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по прямих AO та A_1O_1 і містить його висоту O_1O, то $AO \| A_1O_1$ і $O_1O \perp AO$. Отже, AA_1O_1O — прямокутна трапеція і O_1O — її висота. Проведемо висоту A_1N трапеції. Тоді $A_1N \| O_1O$, звідки A_1N перпендикулярна до площини нижньої основи. Ортогональною проекцією твірної A_1A на площину нижньої основи є відрізок NA, а тому $\angle A_1AN = \alpha$.

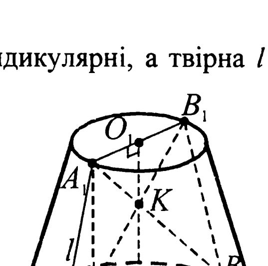


$AN = AO - NO = R - r$. З ΔA_1NA ($\angle N = 90°$): $l = A_1A = \dfrac{AN}{\cos\alpha} = \dfrac{R - r}{\cos\alpha}$. Тоді

$S_{б.} = \pi(R + r) \cdot l = \pi(R + r) \cdot \dfrac{R - r}{\cos\alpha} = \dfrac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{\cos\alpha}$. Відповідь. $\dfrac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{\cos\alpha}$. ■

Приклад 10. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна l утворює з площиною більшої основи кут α. Знайти площу бічної поверхні конуса.

■ Нехай AA_1B_1B — осьовий переріз зрізаного конуса, AB і A_1B_1 — діаметри відповідно більшої та меншої основ, O_1 і O — центри основ. Тоді O_1O — висота зрізаного конуса, $A_1A = B_1B$ — його твірні. Оскільки площина AA_1B_1 перетинає паралельні площини основ конуса по паралельних прямих AB та A_1B_1, то AA_1B_1B — рівнобічна трапеція, O_1O — її висота. $A_1A = l$, $A_1B \perp B_1A$. Проведемо висоту A_1N трапеції. Тоді $A_1N \| O_1O$, а тому A_1N перпендикулярна до площини



нижньої основи. Ортогональною проекцією твірної A_1A на площину нижньої основи є відрізок NA. За умовою задачі, $\angle A_1AN = \alpha$.

Площа бічної поверхні $S_{б.} = \pi(R + r)l$, де $R = OA$, $r = O_1A_1$.

Із прямокутного трикутника A_1NA знаходимо висоту A_1N трапеції: $A_1N = l\sin\alpha$. Покажемо, що $R + r = A_1N$. З рівності трикутників A_1AB і B_1BA (AB — спільна, $A_1A = B_1B$ і $\angle A_1AB = \angle B_1BA$) випливає, що $\angle A_1BA = \angle B_1AB$. Нехай K — точка перетину діагоналей A_1B і B_1A. Тоді ΔAKB прямокутний ($\angle K = 90°$) і рівнобедрений ($\angle A = \angle B$), а тому $\angle A_1BA = 45°$. Оскільки $A_1N \| O_1O$, $A_1O_1 \| NO$ і $\angle O_1ON = 90°$, то чотирикутник A_1O_1ON є прямокутником. Тому $ON = A_1O_1 = r$, $BN = BO + ON = R + r$. З ΔA_1NB ($\angle N = 90°$, $\angle B = 45°$): $A_1N = BN = R + r$. Отже, $R + r = A_1N = l\sin\alpha$.

Знаходимо: $S_{б.} = \pi l \sin\alpha \cdot l = \pi l^2 \sin\alpha$.

Відповідь. $\pi l^2 \sin\alpha$. ■

Приклад 11. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 м^2 і 16 м^2. Через середину висоти проведено площину паралельно до основи. Знайти площу перерізу.

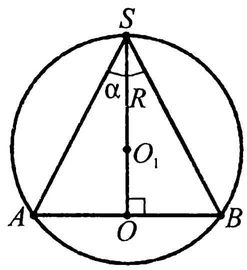
■ $S_1 = 4$ м^2, $S_2 = 6$ м^2. $R_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ (м), $R_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$ (м) — радіуси основ.

$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ (м) — радіус перерізу. Площа перерізу: $S = \pi R^2 = 9$ (м^2).

Відповідь. 9 м^2. ■

Приклад 12. Конус вписано в кулю, радіус якої дорівнює R. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу дорівнює α.

■ На рисунку зображено осьовий переріз конуса та кулі, SO — висота конуса, $SA = SB$ — його твірні, O_1 — центр описаної кулі, $O_1S = R$, $\angle ASB = \alpha$.

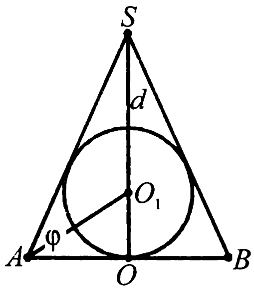


За наслідком з теореми синусів для трикутника ASB маємо: $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$; $AB = 2R \cdot \sin\alpha$. У рівнобедреному трикутнику ASB висота SO є його медіаною і бісектрисою. Тому $\angle OSB = \frac{\alpha}{2}$, $OB = \frac{AB}{2} = R \cdot \sin\alpha$. З ΔSOB: $SB = \frac{OB}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$. Отже, $S_{б.} = \pi \cdot OB \cdot SB = 2\pi R^2 \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $2\pi R^2 \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. ■

Приклад 13. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Визначити площу бічної поверхні конуса.

■ На рисунку зображено осьовий переріз конуса та кулі, SO — висота конуса, $SA = SB$ — його твірні, $\angle SAB = \varphi$, O_1 — центр вписаної кулі, $SO_1 = d$.

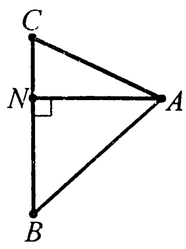


У рівнобедреному трикутнику ASB центр O_1 вписаного кола лежить на висоті SO. Врахувавши, що промінь AO_1 є бісектрисою кута SAB, знаходимо кути трикутника ASO_1: $\angle A = \frac{\varphi}{2}$; $\angle S = 90° - \varphi$, $\angle O_1 = 180° - \angle A - \angle S = 90° + \frac{\varphi}{2}$. З ΔASO_1 за теоремою синусів: $\frac{SA}{\sin\left(90° + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{SO_1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$; $SA = \frac{SO_1 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = d\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

З ΔSOA: $OA = SA \cdot \cos\varphi$. Отже, $S_{б.} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot SA^2 \cdot \cos\varphi = \pi d^2 \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\varphi}{2} \cos\varphi$.

Відповідь. $\pi d^2 \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\varphi}{2} \cos\varphi$. ■

Приклад 14. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо сторони 14 см. Знайти площу поверхні та об'єм тіла обертання.



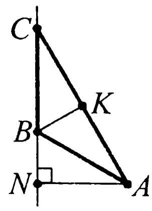
■ Нехай у трикутнику ABC $AB = 15$ см, $BC = 14$ см, $CA = 13$ см, T — тіло, утворене обертанням цього трикутника навколо сторони BC. Проведемо висоту AN трикутника ABC. Покажемо, що N — внутрішня точка сторони BC. Для цього достатньо довести, що кути B і C — гострі. За теоремою косинусів $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cdot \cos\angle C$, звідки: $15^2 = 14^2 + 13^2 - 2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cos\angle C$; $2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cos\angle C = 140$; $\cos\angle C = \dfrac{5}{13}$. Оскільки $\cos\angle C > 0$, то $\angle C$ — гострий. У трикутнику ABC кут B лежить проти найменшої сторони, а тому $\angle B < \angle C < 90°$. Отже, N — внутрішня точка сторони BC. У такому випадку тіло T є об'єднанням двох конусів зі спільною основою радіуса $R = NA$ та висотами CN і BN. Знайдемо радіус NA з трикутника CNA: $NA = CA \cdot \sin\angle C = CA \cdot \sqrt{1-\cos^2\angle C} = 13 \cdot \sqrt{1-\dfrac{25}{169}} = 13 \cdot \dfrac{12}{13} = 12$ (см).

Площа S поверхні тіла T дорівнює сумі площ бічних поверхонь зазначених конусів: $S = \pi \cdot NA \cdot CA + \pi \cdot NA \cdot BA = \pi \cdot NA \cdot (CA + BA) = \pi \cdot 12 \cdot (13 + 15) = 336\pi$ (см^2).

Об'єм V тіла T дорівнює сумі об'ємів конусів: $V = \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CN + \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot BN = \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot (CN + NB) = \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CB = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 14 = 672\pi$ (см^3).

Відповідь: 336π см^2; 672π см^3. ■

Приклад 15. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см і бічна сторона — 10 см, обертається навколо бічної сторони. Знайти площу поверхні та об'єм тіла обертання.



■ Нехай у трикутнику ABC $AC = 16$ см, $BC = BA = 10$ см. Проведемо висоти BK і AN трикутника. Тоді BK — його медіана і бісектриса. $CK = \dfrac{1}{2}AC = 8$ (см). З ΔCKB: $BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = 6$ (см). Оскільки $\operatorname{tg}\angle CBK = \dfrac{CK}{BK} = \dfrac{8}{6} > 1$, то $\angle CBK > 45°$, а тому $\angle CBA > 90°$. Отже, об'єм V тіла T, утвореного обертанням трикутника ABC навколо бічної сторони BC, дорівнює різниці об'ємів конусів зі спільною основою (радіус $R = NA$) та висотами CN і BN. Площа S поверхні тіла T дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів. Знайдемо радіус основи конусів: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BK = \dfrac{1}{2}CB \cdot NA$; $NA = \dfrac{AC \cdot BK}{CB} = \dfrac{16 \cdot 6}{10} = 9{,}6$ (см). Тоді: $S = \pi \cdot NA \cdot CA + \pi \cdot NA \cdot BA = 249{,}6\pi$ (см^2). $V = \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CN - \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot BN = \dfrac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CB = 307{,}2\pi$ (см^3).

Відповідь. $249{,}6\pi$ см^2, $307{,}2\pi$ см^3. ■

Завдання 39.1–39.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

39.1. Діаметр основи конуса 8 см, а його висота 3 см. Знайти твірну конуса.

А	Б	В	Г	Д
10 см	$\sqrt{73}$ см	2 см	10 см	5 см

39.2. Твірна конуса дорівнює l, а кут між твірною і висотою — β. Визначити площу бічної поверхні конуса.

А	Б	В	Г	Д
$\pi l^2 \cos\beta$	$\pi l^2 \sin\beta$	$2\pi l^2 \cos\beta$	$\frac{\pi l^2}{\sin\beta}$	$\frac{\pi l^2}{\cos\beta}$

39.3. Знайти площу повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а радіус основи дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
160π см^2	96π см^2	320π см^2	192 см^2	48π см^2

39.4. Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо меншого катета. Обчислити об'єм утвореного тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
16π см^3	12π см^3	36π см^3	48π см^3	4π см^3

39.5. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Радіус основи конуса дорівнює 6. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
72	9	12	18	36

39.6. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
48 см^2	24 см^2	96 см^2	60 см^2	72 см^2

39.7. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 9 см, а дуга — 120°. Знайти радіус конуса.

А	Б	В	Г	Д
4,5 см	1,5 см	6 см	3 см	9 см

39.8. Висоту конуса поділено на чотири рівні відрізки і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Визначити площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{3}{16}S$	$\frac{1}{16}S$	$\frac{9}{16}S$

39.9. Хорду основи конуса, довжина якої a, видно з центра основи під кутом α. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β. Визначити висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

39.10. Радіус основи конуса дорівнює r. Визначити площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, яка стягує дугу 60°, якщо площина перерізу утворює з площиною основи конуса кут 30°.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}r^2$	$2r^2$	r^2	$\frac{r^2}{2}$

39.11. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 7 см і 15 см, а його твірна — 10 см. Знайти висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
3 см	$4\sqrt{21}$ см	$2\sqrt{21}$ см	6 см	12 см

39.12. Два конуси мають однакову площу бічної поверхні. Знайти відношення площ їх основ, якщо твірна першого конуса утричі більша від твірної другого.

А	Б	В	Г	Д
1 : 9	1 : 3	1 : 81	2 : 3	4 : 9

39.13. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник зі стороною $2r$. Визначити площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює 30°.

А	Б	В	Г	Д
r^2	$2r^2$	$3r^2$	$4r^2$	$\frac{r^2}{2}$

39.14. Найбільший кут між твірними конуса дорівнює 60°. Знайти відношення бічної поверхні до площі основи конуса.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

39.15. Відношення площі основи конуса до площі осьового перерізу дорівнює π. Знайти кут нахилу твірної до основи.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

39.16. Півкруг згорнули в конус. Знайти кут при вершині осьового перерізу цього конуса.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	90°	120°

39.17. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор з дугою α. Знайти α, якщо висота конуса дорівнює 4 см, а радіус основи — 3 см.

А	Б	В	Г	Д
54°	72°	58°	216°	108°

39.18. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм конуса, вписаного в піраміду.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \sin\alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\alpha}{24}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha}{24}$

39.19. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм конуса, описаного навколо піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\pi b^3 \operatorname{tg}^3\alpha$	$\pi b^3 \sin^2\alpha\cos\alpha$	$\pi b^3 \cos^2\alpha\sin\alpha$	$\frac{\pi b^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$	$\frac{\pi b^3}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha$

39.20. Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см обертається навколо найбільшої сторони. Знайти площу поверхні обертання.

А	Б	В	Г	Д
10π см^2	$12{,}6\pi$ см^2	$14{,}4\pi$ см^2	$16{,}8\pi$ см^2	$20{,}2\pi$ см^2

39.21. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, а твірна — l. Знайти твірну повного конуса, від якого відокремлений зрізаний конус.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{Rl}{r}$	$\frac{Rl}{R-r}$	$\frac{Rl}{R+r}$	$\frac{R+r}{Rl}$	$\frac{R-r}{Rl}$

Завдання 39.22–39.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

39.22. Установити відповідність між кутом при вершині осьового перерізу конуса (1–4) та відношенням площ його бічної поверхні та основи (А–Д).

1 30°
2 90°
3 60°
4 120°

А $\sqrt{2}$
Б 2
В $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$
Г $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
Д $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

39.23. Установити відповідність між довжинами висоти та радіуса основи (1–4) конуса і кутом (А–Д) сектора, який є розгорткою бічної поверхні конуса.

1 4 см, 3 см
2 3 см, 4 см
3 12 см, 5 см
4 24 см, 7 см

А $\frac{8\pi}{5}$
Б $\frac{10\pi}{13}$
В $\frac{24\pi}{13}$
Г $\frac{6\pi}{5}$
Д $\frac{14\pi}{25}$

39.24. Установити відповідність між кутом нахилу твірної конуса (1–4) та відношенням площ його основи та осьового перерізу (А–Д).

1 30°
2 45°
3 60°
4 15°

А $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$
Б $\pi\sqrt{3}$
В $\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$
Г π
Д $2\pi\sqrt{3}$

Розв'яжіть завдання 39.25–39.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

39.25. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Знайти площу S бічної поверхні конуса, якщо радіус основи конуса дорівнює 5. У відповідь записати $\frac{S\sqrt{2}}{\pi}$.

39.26. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 0,6. Висота конуса дорівнює 1,2. Обчислити площу S повної поверхні конуса. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

39.27. Твірна конуса утворює з його основою кут 30°, а площа перерізу, що проходить через твірні, кут між якими 120°, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм V конуса. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

39.28. Бічна поверхня конуса дорівнює 10 см^2 і розгортається в сектор з кутом 36°. Знайти у квадратних сантиметрах повну поверхню конуса.

39.29. Висота конуса дорівнює 6. Розгорткою бічної поверхні цього конуса є сектор з центральним кутом 120°. Визначити об'єм V конуса. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

39.30. Знайти об'єм V тіла, яке утворюється при обертанні ромба зі стороною 1 і гострим кутом 60° навколо меншої діагоналі. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

39.31. Ромб, площа якого дорівнює Q, обертається навколо сторони. Визначити площу S поверхні одержаного тіла. У відповідь записати значення виразу $\frac{S}{\pi Q}$.

39.32. Рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 8 і 18, обертають навколо більшої основи. Знайти площу S поверхні тіла обертання, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

39.33. У конус із радіусом $\sqrt{3}$ і висотою 3 вписано правильну трикутну призму, всі ребра якої рівні. Визначити ребро призми.

39.34. У конус із твірною $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$, яка нахилена до площини його основи під кутом 60°, вписано кулю. Знайти об'єм кулі.

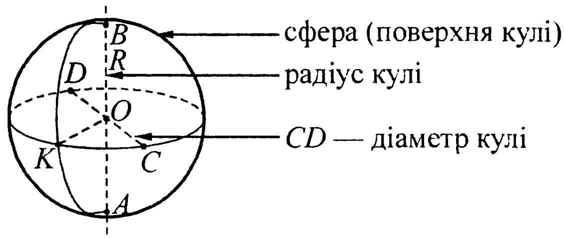
39.35. Визначити бічну поверхню конуса, вписаного в правильний тетраедр з ребром $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

39.36. Бічною поверхнею конус розгортається у чверть круга. Визначити повну поверхню цього конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює $\frac{\sqrt{15}}{\pi}$.

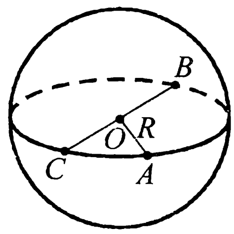
39.37. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює 60°. Визначити площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}$.

Тема 40. Куля

Кулею називають тіло, утворене внаслідок обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр (див. рис.). На рисунку зображено кулю, яка утворена внаслідок обертання півкола навколо його діаметра AB. AB — діаметр кулі, O — центр кулі. Пряму, яка містить діаметр кулі, вважають *віссю кулі*. Поверхню кулі називають *сферою*.



Діаметральна площина — площина, яка проходить через центр кулі. Переріз кулі діаметральною площиною — великий круг, а переріз сфери — велике коло. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.



Площа сфери

Площу сфери обчислюють за формулою $S = 4\pi R^2$. Площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів або діаметрів.

Об'єм кулі

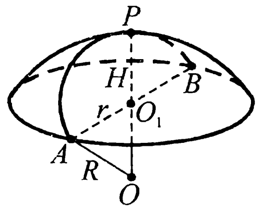
Об'єм кулі обчислюють за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Об'єми двох куль відносяться як куби їх радіусів або діаметрів.

Кульовий сегмент

Кульовий сегмент (*сферичний сегмент*) — частина кулі, яка відтинається від неї площиною. $OA = R$ — радіус кулі, $O_1A = r$ — радіус основи сегмента, $O_1P = H$ — висота сегмента.

$S_{\text{бічн.}} = 2\pi RH.$

$$V = \pi H\left(R - \frac{1}{3}H\right);\ V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H).$$



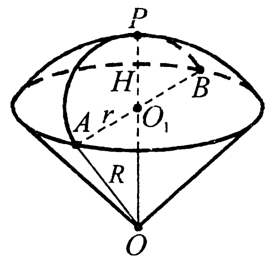
Кульовий сектор

Кульовий сектор складається із кульового сегмента та відповідного конуса.

$R = OA$ — радіус кулі, $H = O_1P$ — висота сегмента.

$$S = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right).$$

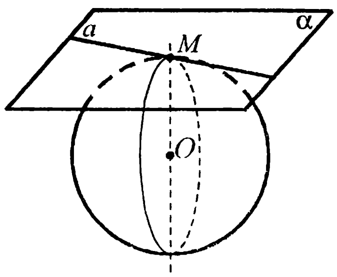
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$



Дотичні площина і пряма до кулі (сфери)

Дотична площина (пряма) має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку.

Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику, і навпаки: якщо площина (пряма) проходить через точку кулі (сфери) і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до кулі (сфери).



Приклад 1. Обчислити площу поверхні кулі, якщо її радіус дорівнює 2 см.

■ $S_{сф.} = 4\pi R^2$. $S_{сф.} = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (см^2).

Відповідь. 16π см^2. ■

Приклад 2. Знайти об'єм кулі, якщо її обмежує сфера, площа якої дорівнює 100π см^2.

■ $S_{сф.} = 4\pi R^2$. $4\pi R^2 = 100\pi$, $R^2 = 25$, $R = 5$ (см). $V_{к.} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ (см^3).

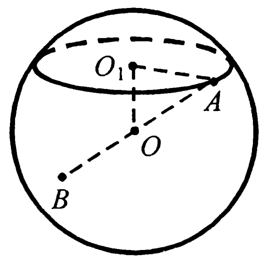
Відповідь. $\frac{500}{3}\pi$ см^3. ■

Приклад 3. У скільки разів потрібно збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?

■ Нехай радіус даної кулі дорівнює R_1, а радіус кулі після збільшення — R_2. Тоді: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$. Маємо: $V_2 = 8V_1$, $\frac{4}{3}\pi R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $R_2^3 = 8R_1^3$, $R_2^3 = (2R_1)^3$. Отже, $R_2 = 2R_1$, тобто радіус кулі потрібно збільшити удвічі.

Відповідь. Збільшити удвічі. ■

Приклад 4. Площина перетинає кулю. Діаметр кулі, проведений з однієї з точок лінії перетину, утворює з площиною кут 45°. Знайдіть площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

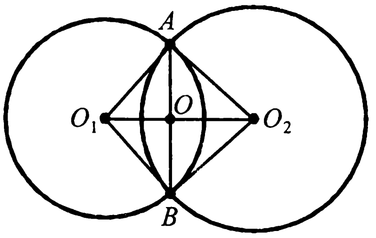


■ Нехай площина перетинає кулю по кругу з центром у точці O_1, O_1A — радіус круга, AB — діаметр кулі, а точка O — її центр. За умовою, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Оскільки центр O_1 круга є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину, то проекцією прямої OA на цю площину є пряма O_1A, а тому $\angle OAO_1 = 45°$.

Знайдемо радіус O_1A круга. $OA = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ (см). З ΔOO_1A ($\angle O_1 = 90°$): $O_1A = OA\cos 45° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$ (см). Тоді площа круга: $S = \pi \cdot O_1A^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$ (см^2).

Відповідь: 6π см^2. ■

Приклад 5. Радіуси двох куль дорівнюють 25 дм і 29 дм, а відстань між їх центрами — 36 дм. Визначити довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

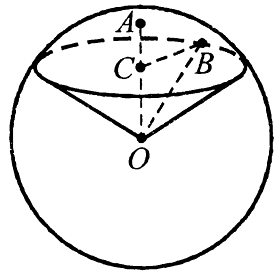


■ На рисунку зображено переріз куль площиною, що проходить через їх центри O_1 і O_2. Нехай $R_1 = 25$ дм і $R_2 = 29$ дм — радіуси куль відповідно з центрами O_1 і O_2, $O_1O_2 = 36$ дм. Оскільки $R_1 + R_2 > O_1O_2$, а $R_2 - R_1 < O_1O_2$, то поверхні куль перетинаються по колу. На рисунку AB — діаметр цього кола, висота AO трикутника O_1AO_2 — його радіус.

Знайдемо радіус кола, використавши формулу Герона для обчислення площі трикутника O_1AO_2. $p = \frac{25+29+36}{2} = 45$ (дм). $S = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = 360$ (дм^2). З іншого боку, $S = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot OA$, звідки $OA = \frac{2S}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20$ (дм). Тоді довжина кола дорівнює: $l = 2\pi OA = 40\pi$ (дм).

Відповідь. 40π дм. ■

Приклад 6. Визначити об'єм меншого кульового сектора кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі — 75 см.

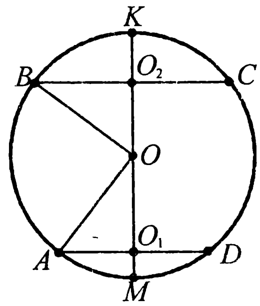


■ Нехай O — центр кулі, OA — вісь меншого кульового сектора, C — центр кола основи сектора, CB — радіус цього кола; $CB = 60$ см, $OA = OB = 75$ см.

Об'єм кульового сектора дорівнює: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, де $R = OA$, $H = CA$. З ΔOCB $(\angle C = 90°)$: $OC = \sqrt{OB^2 - CB^2} = 45$ (см). $CA = OA - OC = 75 - 45 = 30$ (см). Отже, $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112500\pi$ (см^3).

Відповідь. 112500π см^3. ■

Приклад 7. Радіуси основ кульового пояса дорівнюють 10 см і 12 см, а його висота — 11 см. Знайдіть поверхню сферичного пояса, якщо паралельні площини, які перетинають кулю, розміщені з різних боків від центра кулі.

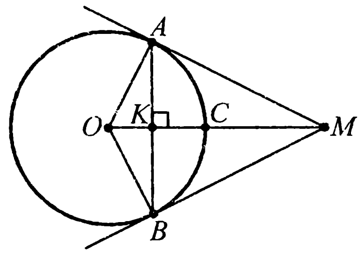


■ На рисунку зображено переріз сфери, $O_1A = 10$ см, $O_2B = 12$ см, $H = O_1O_2 = 11$ см. Площа поверхні пояса: $S = 4\pi R^2 - (S_1 + S_2)$, де R — радіус кулі, S_1, S_2 — площі поверхонь сферичних сегментів з висотами $H_1 = O_1M$ і $H_2 = O_2K$. $S = 4\pi R^2 - (2\pi RH_1 + 2\pi RH_2) = 2\pi R(2R - H_1 - H_2) = 2\pi RH$.

Знайдемо R: $O_1O + OO_2 = O_1O_2$; $\sqrt{R^2 - 10^2} + \sqrt{R^2 - 12^2} = 11$; $R^2 - 10^2 = \left(11 - \sqrt{R^2 - 12^2}\right)^2$; $R = 12{,}5$ (см). Отже, $S = 2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 11 = 275\pi$ (см^2).

Відповідь. 275π см^2. ■

Приклад 8. На якій відстані від центра кулі радіуса 12 см повинна міститися точка, яка світиться, щоб вона освітлювала $\frac{1}{3}$ її поверхні?



■ Нехай M — точка, яка освітлює $\frac{1}{3}$ поверхні кулі радіуса $R = 12$ см. На рисунку зображено осьовий переріз кулі площиною, що проходить через точку M; O — центр кулі. Потрібно знайти довжину відрізка OM.

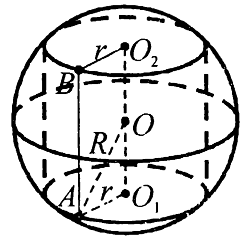
Проведемо через точку M дотичні MA й MB до кола, що обмежує осьовий переріз, і нехай C — точка перетину цього кола з відрізком OM. Точка M освітлюватиме дугу ACB цього кола і сферичний сегмент, утворений обертанням дуги AC навколо осі OM. Проведемо висоту AK трикутника OAM. Тоді $KC = H$ — висота сферичного сегмента; його площа $S = 2\pi RH$. Оскільки ця площа становить третину площі поверхні кулі, то: $2\pi RH = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2$; $H = \frac{2}{3}R = 8$ (см). Тоді $OK = OC - KC = 12 - 8 = 4$ (см). Трикутники OAM і OKA прямокутні $(\angle OAM = \angle OKA = 90°)$, мають спільний гострий кут O, а тому є подібними. Звідки: $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OK}$; $OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{12^2}{4} = 36$ (см).

Відповідь. 36 см. ■

Приклад 9. Навколо циліндра описана куля. Площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, а його висота — 30 см. Знайти радіус кулі.

А	Б	В	Г	Д
15 см	3 см	9 см	17 см	20 см

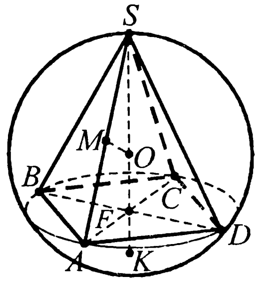
■ Нехай циліндр, у якого круги (O_1; r) і (O_2; r) — основи, $S_{осн.} = 64\pi$ см^2, вписано в кулю (O; R), $R = OA$. Оскільки площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, то $\pi r^2 = 64\pi$; $r = 8$ (см). Із трикутника AO_1O ($\angle O_1 = 90°$), у якому $AO_1 = r = 8$ см, $OO_1 =$ $= 30 : 2 = 15$ (см), за теоремою Піфагора маємо: $OA^2 = OO_1^2 + AO_1^2$, звідки $OA =$ $= \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ (см).



Відповідь. **Г.** ■

Приклад 10. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Визначити площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом α. У відповідь записати значення виразу $\frac{S}{\pi}$, якщо $a = 4$ см, $\alpha = 45°$

■ Нехай $SABCD$ — задана правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює a. Проведемо діагоналі основи AC і BD. Вони перетинаються в точці F. Оскільки піраміда правильна, то її вершина — точка S — проектується у центр кола, описаного навколо основи піраміди — точку F. Тоді висота піраміди проходить через цю точку. Отже, SF — перпендикуляр до площини основи, SA — похила, FA — її проекція. Кут SAF — кут нахилу бічного ребра до площини основи. За умовою, $\angle SAF = \alpha$. У трикутнику SFA побудуємо серединний перпендикуляр MO до гіпотенузи SA. Тоді $SO = AO$. Аналогічно можна довести, що точка O рівновіддалена від інших вершин піраміди, тобто є центром кулі, описаної навколо даної піраміди. Тому $SO = AO = R$. Площина, проведена через діагональ основи AC і вершину S піраміди, перетинає кулю по великому кругу, описаному навколо діагонального перерізу піраміди — трикутнику ASC, у якому $\angle SAC = \angle SCA = \alpha$, $\angle ASC = 180° - 2\alpha$. За наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)} = 2R$; $R = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$. Із трикутника ACD ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора одержимо: $AC^2 = AD^2 + CD^2$; $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $AC = a\sqrt{2}$. Тоді $R = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}$. Площу поверхні кулі можна обчислити за формулою $S = 4\pi R^2$. $S = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}\right)^2 = \frac{2\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}$. Якщо $a = 4$ см, $\alpha = 45°$, то $S = \frac{2\pi \cdot 4^2}{\sin^2(2 \cdot 45°)} = 32\pi$.



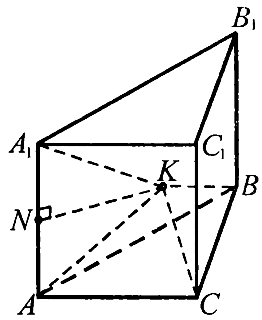
Тоді $\frac{S}{\pi} = \frac{32\pi}{\pi} = 32$.

Відповідь. 32. ■

Приклад 11. Навколо правильної трикутної призми описано кулю. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут γ. Визначити об'єм кулі, якщо бічне ребро призми дорівнює b.

■ Нехай K — центр кулі, описаної навколо правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, $AA_1 = b$, $\angle KAA_1 = \gamma$.

Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R — її радіус. Проведемо радіуси KA і KA_1 описаної кулі та висоту KN утвореного трикутника KAA_1. Оскільки $KA = KA_1 = R$, то ΔKAA_1 — рівнобедрений, а тому його висота KN є одночасно медіаною, звідки $AN = \frac{b}{2}$. З ΔANK ($\angle N = 90°$): $R = KA = \frac{AN}{\cos\gamma} = \frac{b}{2\cos\gamma}$. Отже, $V =$ $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{b}{2\cos\gamma}\right)^3 = \frac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$.



Відповідь. $\frac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$. ■

Завдання 40.1–40.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

40.1. Кулю, радіус якої 5 см, перетнуто площиною, що розміщена на відстані 3 см від центра. Знайти площу перерізу.

А	Б	В	Г	Д
4π см^2	8π см^2	12π см^2	16π см^2	32π см^2

40.2. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Точка А лежить на дотичній площині на відстані 4 см від точки дотику. Знайти відстань від точки А до поверхні кулі.

А	Б	В	Г	Д
0,5 см	1 см	2 см	3 см	4 см

40.3. Площа великого круга кулі дорівнює 4π см^2. Знайти об'єм кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{64}{3}\pi$ см^3	16π см^3	32π см^3	$\frac{32}{3}\pi$ см^3	64π см^3

40.4. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайти площу поверхні кулі.

А	Б	В	Г	Д
18π см^2	36π см^2	54π см^2	72π см^2	108π см^2

40.5. Площина перетинає сферу. Довжина лінії перетину дорівнює 10π см, а діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною перетину кут 60°. Знайти площу поверхні сфери.

А	Б	В	Г	Д
40π см^2	100π см^2	25π см^2	1600π см^2	400π см^2

40.6. Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої становить 10 см, дорівнює 12 см. Знайти площу кожного з цих перерізів.

А	Б	В	Г	Д
22π см^2	16π см^2	64π см^2	128π см^2	100π см^2

40.7. Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їх поверхонь?

А	Б	В	Г	Д
9 : 25	3 : 5	$\sqrt{27} : \sqrt{125}$	27 : 125	$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{125}$

40.8. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра іншого. У скільки разів перший кавун важчий від другого?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	8	16

40.9. М'яч, площа повної поверхні якого дорівнює 400π см^2, зробив один повний оберт по прямій. Знайти довжину шляху, яку він при цьому подолав.

А	Б	В	Г	Д
10π см	20π см	30π см	40π см	60π см

40.10. На поверхні кулі радіуса r дано дві точки, відстань між якими дорівнює радіусу кулі. Визначити найкоротшу відстань на поверхні кулі між цими точками.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3r}$	$\frac{\pi r}{12}$	$\frac{\pi r}{6}$	$\frac{\pi r}{3}$	$\frac{\pi r}{4}$

40.11. Металеву кулю переплавлено на 8 рівних куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?

А	Б	В	Г	Д
Збільшилася у 4 рази	збільшилася удвічі	зменшилася удвічі	зменшилася у 8 разів	не змінилася

40.12. Дві рівні кулі радіуса R розміщені так, що центр однієї з них лежить на поверхні іншої. Знайти радіус кола, по якому перетинаються їхні поверхні.

А	Б	В	Г	Д
R	$\frac{R}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}R$

40.13. Вершини трикутника лежать на сфері радіуса 13 см. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{11}$ см	$\sqrt{165}$ см	6 см	24 см	12 см

40.14. Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 10 см. Знайти відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{41}$ см	6 см	3 см	7 см	5 см

40.15. Через точку, що лежить на поверхні сфери, проведено дві взаємоперпендикулярні площини, які перетинають сферу по колах з радіусами r_1 і r_2. Визначити площу поверхні сфери.

А	Б	В	Г	Д
$\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$	$4\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$	$\frac{\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)}{4}$	$2\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$	$\frac{\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)}{2}$

40.16. Через точку, що не лежить на сфері, проведено дві площини, які дотикаються до сфери. Знайти відстань від центра сфери до лінії перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює 60°, а площа поверхні сфери — 32π см^2.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{2}$ см	$8\sqrt{2}$ см	4 см	$2\sqrt{2}$ см	$16\sqrt{2}$ см

40.17. Знайти відношення площ поверхні куба і вписаної в нього кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{6}{\pi}$	$\frac{12}{\pi}$

40.18. У циліндр вписано кулю. Визначити об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює V.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}V$	$\frac{1}{3}V$	$\frac{1}{6}V$	$\frac{5}{6}V$	$\frac{3}{4}V$

40.19. Знайти відношення об'ємів кулі та вписаного в неї куба.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

40.20. Знайти відношення площі поверхні кулі описаної навколо рівностороннього конуса, до площі поверхні кулі, вписаної в цей конус.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	6	8

40.21. Навколо кулі описана правильна трикутна призма. Знайти відношення об'ємів призми і кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

Завдання 40.22–40.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

40.22. Установити відповідність між геометричними тілами (1–4) та формулами для відшукання їх об'ємів (А–Д).

1 Циліндр
2 Куля
3 Конус
4 Піраміда

А $\pi r^2 H$
Б πrl
В $\frac{1}{3}\pi r^2 H$
Г $\frac{4}{3}\pi r^3$
Д $\frac{1}{3}S_{\text{ос.}} \cdot H$

40.23. Установити відповідність між геометричними тілами (1–4) та формулами для відшукання їх поверхонь (А–Д).

1 Циліндр
2 Куля
3 Конус
4 Правильна чотирикутна піраміда

А $\pi r(r+l)$
Б $4\pi r^2$
В $a(a+2l)$
Г $2\pi r(r+l)$
Д $2\pi rl$

40.24. Установити відповідність між відношеннями об'ємів двох куль (1–4) та відношеннями площ їх поверхонь (А–Д).

1 27 : 125
2 8 : 27
3 27 : 64
4 125 : 64

А 4 : 9
Б 9 : 16
В 9 : 25
Г 49 : 64
Д 25 : 16

40.25. Дві площини, які перетинаються під кутом 60°, дотикаються до сфери. Установити відповідність між площею поверхні сфери (1–4) та відстанню від її центра до лінії перетин цих площин (А–Д).

1 36π см^2
2 12π см^2
3 48π см^2
4 192π см^2

А $16\sqrt{3}$ см
Б 6 см
В $2\sqrt{3}$ см
Г $5\sqrt{3}$ см
Д $4\sqrt{3}$ см

40.26. Кулю радіуса r вписали в конус висотою H і радіусом основи R. Установити відповідність між висотою H і радіусом основи R конуса (1–4) та радіусом r кулі (А–Д).

1 4 см, 3 см
2 16 см, 12 см
3 24 см, 7 см
4 8 см, 6 см

А 6 см
Б 3 см
В 1,5 см
Г $\frac{21}{4}$ см
Д 3 см

Розв'яжіть завдання 40.27–40.36. Відповідь запишіть десятковим дробом.

40.27. Перерізи кулі двома паралельними площинами, між якими лежить центр кулі, мають площі 144π см^2 і 25π см^2. Відстань між площинами дорівнює 17 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу S поверхні кулі. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

40.28. Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини 10π см і 24π см. Знайти у квадратних сантиметрах площу S поверхні сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 7 см і центри перерізів лежать на одному радіусі сфери. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

40.29. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6, 8 і 10. Висота призми дорівнює 24. Знайти радіус кулі, описаної навколо призми.

40.30. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 4. Знайти радіус описаної навколо піраміди кулі.

40.31. Навколо конуса з радіусом основи 9 і висотою 3 описано кулю. Визначити радіус цієї кулі.

40.32. У пряму чотирикутну призму, основою якої є ромб з діагоналями 3 і 4, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

40.33. У циліндр, об'єм якого дорівнює 16π, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

40.34. Висота конуса дорівнює 8 см, а його твірна дорівнює 10 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, вписаної в конус.

40.35. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Одне з бічних ребер піраміди є перпендикулярним до площини основи і дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, описаної навколо піраміди.

40.36. Ребро правильного тетраедра дорівнює $3\sqrt{6}$. Визначити радіус сфери, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї сфери лежить на основі тетраедра.