Тема 16. Логарифмічні рівняння

Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають *логарифмічним*.

Найпростіші логарифмічні рівняння

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Наприклад, $\log_2 x = 4$; $x = 2^4$; $x = 16$.

Відповідь. 16.

2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Наприклад, $\log_{0,2}(x+4) = -2$; $x + 4 = (0,2)^{-2}$; $x + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $x + 4 = 5^2$; $x = 25 - 4$; $x = 21$.

Відповідь. 21.

3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Наприклад, $\log_2(4^x - 2) = x$; $4^x - 2 = 2^x$; $(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$. Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2; \\ t = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x \in \varnothing; \end{array}\right.$ $x = 1$.

Відповідь. 1.

4. Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0, \end{cases}$ де $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(x + 1)$; $\begin{cases} x + 1 > 0; \\ x^2 - x - 2 = x + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 1 > 0; \\ x^2 - 2x - 3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1; \\ \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 3$.

Відповідь. 3.

5. Рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$

Наприклад, $\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(6x - 8)$; $\begin{cases} x^2 - 3x = 6x - 8; \\ 6x - 8 > 0; \\ 2x > 0; \\ 2x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 = 0; \\ x > \frac{4}{3}; \\ x > 0; \\ x \neq \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1,\ x = 8; \\ x > \frac{4}{3}; \end{cases}$ $x = 8$.

Відповідь. 8.

Розв'язування логарифмічних рівнянь потенціюванням

Перехід від рівняння, яке містить логарифми, до рівняння, яке їх не містить, називають *потенціюванням*.

Наприклад, розв'язати рівняння $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$. Подамо число 2 у вигляді десяткового логарифма: $2 = \lg 100$. Тоді $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = \lg 100$. Суму логарифмів замінимо логарифмом добутку виразів: $\lg((x - 9)(2x - 1)) = \lg 100$. Врахувавши ОДЗ $\begin{cases} x - 9 > 0; \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$, замінимо рівняння рівносильною системою й одержимо: $\begin{cases}(x-9)(2x-1)=100;\\ x-9>0;\\ 2x-1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-19x+9=100;\\ x>9;\\ x>\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=13;\\ x=-3{,}5;\end{array}\right.\\ x>9;\end{cases}$ $x=13$.

Відповідь. 13.

Розв'язування рівнянь із застосуванням основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b}=b$

Наприклад, розв'язати рівняння $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$. Перетворимо ліву частину початкового рівняння, застосувавши основну логарифмічну тотожність: $9^{\log_3(1-2x)}=\left(3^2\right)^{\log_3(1-x)}=3^{2\log_3(1-x)}=3^{\log_3(1-x)^2}=(1-2x)^2$

за умови, що $1-2x>0$. Звідки одержимо: $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$; $\begin{cases}(1-2x)^2=5x^2-5;\\ 1-2x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}1-4x+4x^2=5x^2-5;\\ x<\frac{1}{2};\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+4x-6=0;\\ x<\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{10};\\ x=-2-\sqrt{10};\end{array}\right.\\ x<\frac{1}{2};\end{cases}$ $x=-2-\sqrt{10}$.

Відповідь. $-2-\sqrt{10}$.

Використання формул $f^{\log_a g}=g^{\log_a f}$***, де*** $a>0$, $a\neq 1$, $f>0$, $g>0$

Наприклад, розв'язати рівняння $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$. ОДЗ: $x>0$. На цій множині $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$, тому вихідне рівняння рівносильне рівнянню $3\cdot 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64$; $4\cdot 2^{\log_5 x}=64$; $2^{\log_5 x}=16$; $2^{\log_5 x}=2^4$; $\log_5 x=4$; $x=625$.

Відповідь. 625.

Зведення до однієї основи

Наприклад, розв'язати рівняння $\log_4 x+\log_{\frac{1}{16}} x+\log_8 x^3=5$. Зведемо всі логарифми до основи 2: $\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{16}}+\frac{\log_2 x^3}{\log_2 8}=5$; $\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{3}{3}\log_2 x=5$. Зведемо подібні доданки: $\frac{5}{4}\log_2 x=5$; $\log_2 x=4$; $x=2^4$; $x=16$.

Відповідь. 16.

Розв'язування рівнянь логарифмуванням обох частин рівняння

Розв'язати рівняння $x^{\lg x}=100x$. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10: $\lg x^{\lg x}=\lg 100x$; $\lg x\cdot\lg x=\lg 100+\lg x$; $\lg^2 x=2+\lg x$; $\lg^2 x-\lg x-2=0$. Нехай $\lg x=t$. Тоді одержимо: $t^2-t-2=0$; $\left[\begin{array}{l}t=2;\\ t=-1.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l}\lg x=2;\\ \lg x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1=100;\\ x_2=0{,}1.\end{array}\right.$

Відповідь. 0,1; 100.

Розв'язування логарифмічних рівнянь методом заміни змінної

При розв'язуванні рівнянь цим методом необхідно звернути увагу на таке:

$\log_a^2\left(x^2\right)=\left(\log_a x^2\right)^2=\left(2\log_a|x|\right)^2=2^2\left(\log_a|x|\right)^2=4\log_a^2|x|$;

$\log_a^2 x^3=\left(\log_a x^3\right)^2=\left(3\log_a x\right)^2=3^2\log_a^2 x=9\log_a^2 x$.

Узагалі, для непарних m маємо: $\log_a^n x^m = m^n \log_a^n x$.

Для парних m маємо: $\log_a^n x^m = m^n \log_a^n |x|$.

Наприклад:

1) розв'язати рівняння $3\log_3^2 x - 4\log_3 x - 4 = 0$. Нехай $\log_3 x = t$, тоді маємо рівняння: $3t^2 - 4t - 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2; \\ t_2 = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: а) $\log_3 x = 2$; $x = 9$; б) $\log_3 x = -\frac{2}{3}$; $x = 3^{-\frac{2}{3}}$; $x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Відповідь. 9; $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$;

2) розв'язати рівняння $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$. Перетворимо дане рівняння: $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$; $4^2\lg^2|x| - 14\lg|x| - 2 = 0$; $8\lg^2|x| - 7\lg|x| - 1 = 0$. Нехай $\lg|x| = t$, тоді маємо: $8t^2 - 7t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = -\frac{1}{8}. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \lg|x| = 1; \\ \lg|x| = -\frac{1}{8}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |x| = 10^1; \\ |x| = 10^{-\frac{1}{8}}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 10; \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}. \end{array}\right.$

Отже, дане рівняння має чотири корені: ± 10; $\pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Відповідь. ± 10; $\pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Застосування монотонності при розв'язуванні логарифмічних рівнянь

Розв'язати рівняння $\log_5(x + 3) = 3 - x$. Встановимо монотонність функцій у лівій і правій частинах: $y = \log_5(x + 3)$ — зростаюча функція ($a = 5 > 1$); $y = 3 - x$ — спадна. Підбором знайдемо корінь: $x = 2$. Із властивостей монотонності $x = 2$ — єдиний корінь.

Відповідь. 2.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\lg(5x - 3) = 1$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
0,6	1,2	2,6	1	0

■ $\lg(5x-3) = 1$; $\lg(5x-3) = \lg 10$; $5x - 3 = 10$; $x = 2{,}6$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_2(2x+1) = \log_2(9x+17) - \log_2(x+5)$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
–3	2	2; –3	$-1\frac{5}{6}$	–2

■ $\log_2(2x+1) = \log_2(9x+17) - \log_2(x+5)$; $\log_2(2x+1) + \log_2(x+5) = \log_2(9x+17)$.

$$\begin{cases}\log_2((2x+1)(x+5))=\log_2(9x+17);\\ 2x+1>0;\\ 9x+17>0;\\ x+5>0;\end{cases} \quad \begin{cases}2x^2+11x+5=9x+17;\\ x>-\dfrac{1}{2};\\ x>-\dfrac{17}{9};\\ x>-5;\end{cases} \quad \begin{cases}2x^2+2x-12=0;\\ x>-\dfrac{1}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+x-6=0;\\ x>-\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-3;\\ x_2=2;\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$ Отже, $x = 2$ — корінь рівняння.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_5\log_4\log_3 x=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	12	0	1	81

■ $\log_5\log_4\log_3 x=0$. $\log_5\log_4\log_3 x=\log_5 1$; $\log_4\log_3 x=1$. $\log_4\log_3 x=\log_4 4$; $\log_3 x=4$; $x=3^4$; $x=81$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x-\log_2 x^5=4\log_2 64$.

А	Б	В	Г	Д
–3; 8	8	–3	$\frac{1}{8}$; 256	256

■ $\log_2^2 x-\log_2 x^5=4\log_2 64$; $\log_2^2 x-5\log_2 x=24$. Заміна: $\log_2 x=a$. Матимемо: $a^2-5a-24=0$; $a_1=8$, $a_2=-3$. $\log_2 x=8$; $x=2^8$; $x=256$ або $\log_2 x=-3; x=2^{-3}; x=\frac{1}{8}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\log_8(x-7)+\log_3(7-x)=11$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	7	±7	$\pm2\sqrt{15}$	0

■ $\log_8(x-7)+\log_3(7-x)=11$. Визначимо ОДЗ рівняння: $\begin{cases}x-7>0,\\ 7-x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>7,\\ x<7;\end{cases}$ $x\in\varnothing$. Рівняння коренів не має.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\log_x 7 + 2\log_x 7 = 3$.

А	Б	В	Г	Д
Немає коренів	1; 7	$\sqrt[3]{56}$	інша відповідь	7

■ $\log_x 7 + 2\log_x 7 = 3$; $3\log_x 7 = 3$; $\log_x 7 = 1$; $x = 7$.

Відповідь. Д. ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x-1+\log_4 3=\log_4\left(5^x-4^{x-1}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	0	$\varnothing$	3

■ За означенням логарифма одержимо: $4^{(x-1+\log_4 3)}=5^x-4^{x-1}$. Ліву частину перетворимо так: $4^{(x-1+\log_4 3)}=4^{x-1}\cdot 4^{\log_4 3}=4^{x-1}\cdot 3$. Одержимо рівняння: $3\cdot 4^{x-1}=5^x-4^{x-1}$; $4\cdot 4^{x-1}=5^x$; $4^x=5^x$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$; $x=0$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_x\left(2x^2-3x-4\right)=2$.

А	Б	В	Г	Д
–1	4	–1; 4	–4; 1	1

■ Замінимо задане рівняння рівносильною системою: $\begin{cases} x^2=2x^2-3x-4; \\ x>0; \\ x\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x-4=0; \\ x>0; \\ x\neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4; \\ x=-1; \end{array}\right. \\ x>0; \\ x\neq 1; \end{cases}$ $x=4$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\log_{x^2-1}\left(x^3+6\right)=\log_{x^2-1}\left(4x^2-x\right)$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^3+6>0; \\ x^2-1>0; \\ x^2-1\neq 1; \\ x^3+6=4x^2-x. \end{cases}$ Рівняння системи $x^3-4x^2+x+6=0$ за наслідком з теореми Безу має три корені: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Число $x_1=-1$ не задовольняє умову $x^2-1>0$. Числа $x_2=2$, $x_3=3$ є розв'язками цієї системи, а отже, й вихідного рівняння. Сума коренів дорівнює $2+3=5$.

Відповідь. 5. ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x\log_3^2 x-(2x+3)\log_3 x+6=0$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

■ Нехай $\log_3 x=t$. Перетворимо одержане квадратне рівняння відносно t: $xt^2-(2x+3)t+6=0$; $xt^2-2xt-3t+6=0$; $xt(t-2)-3(t-2)=0$; $(t-2)(xt-3)=0$. Тоді коренями рівняння є:

1. $t_1=2$; $\log_3 x=2$; $x=9$;

2. $t_2=\frac{3}{x}$; $\log_3 x=\frac{3}{x}$. Якщо $x>0$, то функція $y=\log_3 x$ зростаюча, функція $y=\frac{3}{x}$ — спадна. Тому, якщо існує корінь рівняння $\log_3 x=\frac{3}{x}$, то він єдиний. Підбором знаходимо корінь $x=3$.

Отже, вихідне рівняння має два корені: $x = 3$ і $x = 9$. Тоді їх добуток дорівнює $3 \cdot 9 = 27$.
Відповідь. 27. ■

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\lg 2x + \lg(2 - x) = \lg\lg a$. За яких значень параметра a рівняння має корені?

■ $\lg 2x + \lg(2 - x) = \lg\lg a$; $\begin{cases} \lg(2x(2-x)) = \lg\lg a; \\ 2x > 0; \\ 2 - x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x(2-x) = \lg a; \\ 0 < x < 2. \end{cases}$ Оскільки $2x(2 - x) > 0$, то рівняння матиме корені, лише якщо $\lg a > 0$; $a > 1$. Тоді одержимо: $\begin{cases} 2x^2 - 4x + \lg a = 0; \\ 0 < x < 2. \end{cases}$ Розв'яжемо рівняння системи. Для цього знайдемо дискримінант: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \lg a = 16 - 8\lg a$. Щоб вихідне рівняння мало розв'язки, необхідно виконання умови $D \geq 0$, тобто $16 - 8\lg a \geq 0$; $\lg a \leq 2$; $a \leq 100$.

Якщо $1 < a \leq 100$, то $\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16(1 - 0{,}5\lg a)}}{4}; \\ 0 < x < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}5\lg a}; \\ 0 < x < 2. \end{cases}$

Так як $1 < a \leq 100$, то $0 < \lg a \leq 2$; $-1 \leq -\frac{1}{2}\lg a < 0$; $0 \leq 1 - \frac{1}{2}\lg a < 1$; $0 \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2}\lg a} < 1$; $1 \leq 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\lg a} < 2$ і $0 < 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}\lg a} \leq 1$. Отже, що x_1 і x_2 задовольняють умову $0 < x < 2$.

Відповідь. Якщо $1 < a \leq 100$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}5\lg a}$; якщо $a > 100$, то рівняння коренів не має; якщо $a \leq 1$, то рівняння не має змісту. ■

Завдання 16.1–16.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

16.1. Розв'язати рівняння $\log_a x = c$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$a \cdot c$	c^a	a^c	$\frac{c}{a}$

16.2. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	–16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$; 16	16

16.3. Розв'язати рівняння $\log_2(-x) = 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	32	–32	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$

16.4. Розв'язати рівняння $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	–3; 2	–2; 1	–2; 3	–1; 2

16.5. Скільки коренів має рівняння $\lg\left(x^4 - 10x^2\right) = \lg 3x^3$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

16.6. Розв'язати рівняння $\log_6(x-2) + \log_6(x-1) = 1$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(–2,1; –1,9)	(3,9; 4,1)	(2,9; 3,1)	(1,9; 3,1)	(5,9; 6,1)

16.7. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(0,9; 1,1)	(1,9; 2,1)	(2,9; 3,1)	(3,9; 4,1)	(5,9; 6,1)

16.8. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 3 - \log_2 4$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(–1,1; –0,9)	(–0,1; 0,1)	(0,9; 1,1)	(1,9; 2,1)	(3,9; 4,1)

16.9. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$ і вказати суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
–8,5	7,5	–2	2	8,5

16.10. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $\log_3 x + \log_9 x + \log_{81} x = 7$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_3 x = \frac{49}{4}$	$\log_3 x = 1$	$\log_3 x = 4$	$\log_3 x = -\frac{7}{5}$	$\log_3 x = 35$

16.11. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $x^{\lg x} = 10$.

А	Б	В	Г	Д
$2\lg x = 10$	$2\lg x = 1$	$\lg^2 x = 10$	$\lg^2 x = 1$	$\lg^2 x = 2$

16.12. Указати рівняння, яке утворюється з рівняння $x^{\lg x} = 1000x^2$ у результаті логарифмування обох його частин.

А	Б	В	Г	Д
$\lg^2 x + 2\lg x +$ $+1000 = 0$	$\lg^2 x - 2\lg x -$ $-1000 = 0$	$\lg^2 x = 6\lg x$	$\lg^2 x + 2\lg x + 3 = 0$	$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$

16.13. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$5\lg(-x) = 4$	$3\lg(-x) = 4$	$\lg^2 x - 4\lg x + 4 = 0$	$\lg^2(-x) -$ $-4\lg(-x) + 4 = 0$	$\lg^2(-x) -$ $-4\lg(-x) - 4 = 0$

16.14. Розв'язати рівняння $\log_a \log_b \log_c x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
c^b	a^{bc}	b^c	a^c	abc

16.15. Указати кількість коренів рівняння $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x^4 + 24 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
Чотири	три	два	один	жодного

16.16. Розв'язати рівняння $\lg x \log_2 x = \lg 2$ і знайти суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
2,5	3,5	4,5	10,5	1

16.17. Розв'язати рівняння $5^{\log_3 x} + x^{\log_3 5} = 50$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(3,9; 4,1)	(4,9; 5,1)	(5,9; 6,1)	(6,9; 7,1)	(8,9; 9,1)

16.18. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $\lg x(x+9) + \lg\dfrac{x+9}{x} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\lg x = 0$	$\lg(x+9) = 0$	$\lg\lvert x\rvert = 0$	$\lg\lvert x+9\rvert = 0$	$\lg\lvert -x-9\rvert = 0$

16.19. Розв'язати рівняння $5^{2^x} = 7$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_5\log_2 7$	$\log_2\log_5 7$	$\log_7\log_5 2$	$\log_7\log_2 5$	$\log_2\log_7 5$

16.20. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $(x-a)\log_2(3x-8) = 0$ має один корінь?

А	Б	В	Г	Д
–3	–1	0	1	3

Завдання 16.21–16.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

16.21. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_2^2 x = 1$

2 $2\log_2 x - \log_2(2-x) = 0$

3 $2\cdot 3^x = -6$

4 $3\cdot 2^{2x} = 2\cdot 3^{2x}$

А $\{1\}$

Б $\left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$

В $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Г $\varnothing$

Д $\{-2;\ 1\}$

16.22. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\log_3(-x) = 4$

2 $\log_4 x = -3$

3 $\log_3 x = -4$

4 $\log_4(-x) = 3$

А $-\frac{1}{64}$

Б $\frac{1}{64}$

В -64

Г $\frac{1}{81}$

Д -81

16.23. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\log_2\log_3\log_4 x = 0$	**А** 8
2 $\log_4\log_3\log_2 x = 0$	**Б** 9
3 $\log_3\log_2\log_4 x = 0$	**В** 16
4 $\log_2\log_4\log_3 x = 0$	**Г** 64
	Д 81

16.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та добутками їх коренів (А–Д).

1 $\log_2^2 x + 4\log_2 x + 3 = 0$	**А** 4
2 $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$	**Б** 16
3 $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$	**В** $\frac{1}{4}$
4 $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$	**Г** $\frac{1}{2}$
	Д $\frac{1}{16}$

16.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\lg^5 x - 3\lg^3 x - 4\lg x = 0$	**А** жодного
2 $\lg^4 x - 5\lg^2 x + 4 = 0$	**Б** два
3 $\lg^4 x + 5\lg^2 x + 4 = 0$	**В** три
4 $\lg^4 x + 3\lg^2 x - 4 = 0$	**Г** чотири
	Д п'ять

16.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $5^{2^x} = 9$	**А** $\log_5\log_9 2$
2 $2^{5^x} = 9$	**Б** $\log_9\log_2 5$
3 $2^{9^x} = 5$	**В** $\log_2\log_9 5$
4 $9^{2^x} = 5$	**Г** $\log_5\log_2 9$
	Д $\log_2\log_5 9$

Розв'яжіть завдання 16.27–16.39. Відповідь запишіть десятковим дробом.

16.27. Розв'язати рівняння $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$.

16.28. Розв'язати рівняння $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2 - 25) = 0$.

16.29. Розв'язати рівняння $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$. У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.30. Розв'язати рівняння $4\lg x^2 - \lg^2(-x) = 16$. У відповідь записати x_0 : 1000, де x_0 — корінь рівняння.

16.31. Розв'язати рівняння $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$. У відповідь записати модуль різниці коренів рівняння.

16.32. Розв'язати рівняння $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

16.33. Розв'язати рівняння $\log_5 x + \log_x 25 = 3$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.34. Розв'язати рівняння $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 36$.

16.35. Розв'язати рівняння $x^{\lg x} = 1000x^2$. У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.36. Розв'язати рівняння $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.37. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.38. Розв'язати рівняння $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

16.39. Розв'язати рівняння $\left|\log_{\sqrt{5}} x - 4\right| - \left|\log_5 x - 4\right| = 1$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

Тема 17. Логарифмічні нерівності

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма або в його основі, називають *логарифмічною*. Наприклад, $\log_5 x < 3$, $\lg x + \lg(x + 8) \geq \lg(4 - 5x)$ тощо. Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на властивості монотонності логарифмічної функції: функція $y = \log_a x$ монотонно зростає, якщо $a > 1$, і монотонно спадає, якщо $0 < a < 1$. При цьому слід урахувати, що підлогарифмічний вираз може набувати лише додатних значень.

Нерівності, що розв'язуються з використанням властивостей логарифмів

Розглянемо нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Одержимо:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) > 0; \\ f(x) < g(x); \end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1; \\ 0 < g(x) < f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1; \\ 0 < f(x) > g(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

Аналогічно розв'язується нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x + 18\right) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$. Перепишемо задану нерівність у вигляді $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x + 18\right) < \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)^2$ за умови, що $x - 4 > 0$. Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x^2 - 6x + 18 > (x - 4)^2; \\ x - 4 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 6x + 18 > x^2 - 8x + 16; \\ x > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 2 > 0; \\ x > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1; \\ x > 4; \end{cases}$

$x > 4$;

$x \in (4; +\infty)$.

Відповідь. $(4; +\infty)$.

Нерівності виду $\log_a f(x) > b$ розв'язують так: $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > b\log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 0 < f(x) < a^b; \\ 0 < a < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > a^b; \\ a > 1. \end{cases}\end{array}\right.$$

Аналогічно: $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \log_a f(x) < b\log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > a^b; \\ 0 < a < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < a^b; \\ a > 1. \end{cases}\end{array}\right.$

Наприклад: 1) розв'язати нерівність $\log_2(8 - x) < 1$. Одержимо: $\log_2(8 - x) < 1$; $\log_2(8 - x) < \log_2 2$; $0 < 8 - x < 2$. Тоді $\begin{cases} 8 - x > 0; \\ 8 - x < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 8; \\ x > 6; \end{cases}$ $x \in (6; 8)$.

Відповідь. $(6; 8)$;

2) розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\log_5\left(x^2-4\right)>0$. Запишемо дану нерівність у вигляді:

$\log_{\frac{1}{2}}\log_5\left(x^2-4\right)>\log_{\frac{1}{2}}1$; $\quad 0<\log_5\left(x^2-4\right)<1$; $\quad \begin{cases}\log_5\left(x^2-4\right)<\log_5 5;\\ \log_5\left(x^2-4\right)>\log_5 1;\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x^2-4<5;\\ x^2-4>1;\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x^2<9;\\ x^2>5;\end{cases}$

$\begin{cases}x\in(-3;3);\\ x\in\left(-\infty;\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right).\end{cases}$

Тоді спільний розв'язок:

$x\in\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$.

Відповідь. $\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$.

Логарифмічні нерівності, які розв'язуються заміною змінної

Розв'язати нерівність $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}x-2\le 0$. Нехай $\log_{0,5}x=t$. Перепишемо нерівність у вигляді: $t^2+t-2\le 0$; $t_1=-2$, $t_2=1$; $t\in[-2;1]$.

Повернемося до заміни: $\begin{cases}t_1\ge -2;\\ t_2\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{0,5}x\ge -2;\\ \log_{0,5}x\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{0,5}x\ge\log_{0,5}0,5^{-2};\\ \log_{0,5}x\le\log_{0,5}0,5;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 4;\\ x\ge 0,5;\end{cases}$ $x\in[0,5;4]$.

Відповідь. [0,5; 4].

Показниково-логарифмічні нерівності

Показниково-логарифмічними нерівностями називають нерівності виду $\left(g(x)\right)^{f(x)}<>a$, де $f(x)$ містить логарифмічну функцію, а знак $<>$ — один зі знаків $<$, $>$, $\le$, $\ge$.

Розв'язуючи такі нерівності, спочатку переконуємося, що обидві частини нерівності набувають тільки додатні значення, тобто що логарифми цих частин існують, і тоді логарифмуємо їх за деякою основою.

Наприклад, розв'язати нерівність $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}\le 100$. ОДЗ: $x>0$. Обидві частини нерівності при $x>0$ набувають тільки додатні значення, тобто логарифми обох частин існують. Прологарифмуємо дану нерівність за основою 10. Оскільки $10>1$, то одержимо: $\lg\left(\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}\right)\le\lg 100$; $(\lg x-2)\lg\frac{x}{10}\le 2$; $(\lg x-2)(\lg x-\lg 10)\le 2$; $(\lg x-2)(\lg x-1)\le 2$. Нехай $\lg x=t$, тоді маємо: $(t-2)(t-1)\le 2$; $t^2-3t\le 0$; $0\le t\le 3$; $0\le\lg x\le 3$; $\lg 1\le\lg x\le\lg 10^3$; $1\le x\le 1000$; $x\in[1;1000]$.

Відповідь. [1; 1000].

Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма

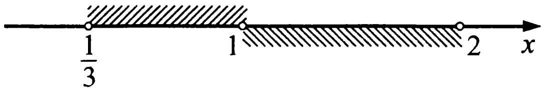
$$\log_{\varphi(x)}f(x)>M\Leftrightarrow\log_{\varphi(x)}f(x)>\log_{\varphi(x)}\left(\varphi(x)\right)^M\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(x)>1;\\ f(x)>\left(\varphi(x)\right)^M;\end{cases}\\ \begin{cases}0<\varphi(x)<1;\\ 0<f(x)<\left(\varphi(x)\right)^M.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ 0 < g(x) < f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1; \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$. Перепишемо нерівність так: $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$.

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1; \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1; \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1; \\ 3x-1 < x^2+1; \\ 3x-1 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ 3x-1 > x^2+1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2-3x+2 > 0; \\ x > \frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ x^2-3x+2 < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1; \\ \left[\begin{array}{l} x > 2; \\ x < 1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ 1 < x < 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < x < 1; \\ 1 < x < 2. \end{array}\right.$$



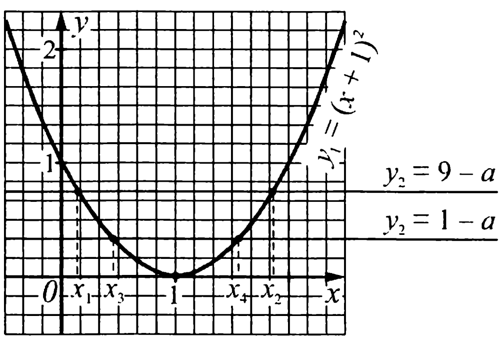
$x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

Логарифмічні нерівності з параметрами

Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > -3$.

Перепишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Звідси випливає: $0 < x^2 - 2x + a < 8$; $0 < (x-1)^2 + a - 1 < 8$; $1 - a < (x-1)^2 < 9 - a$. (1) Зобразимо на координатній площині графіки функцій $y_1 = (x-1)^2$; $y_2 = 9 - a$ та $y_3 = 1 - a$.



З нерівності (1) та рисунка слідує, що якщо $9 - a \le 0$, тобто $a \ge 9$, то нерівність розв'язків не має.

Якщо $\begin{cases} 9-a>0; \\ 1-a<0; \end{cases}$ $1 < a < 9$, то нерівність матиме розв'язки і ними будуть усі такі x, що $x_1 < x < x_2$, де x_1 і x_2 — абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x-1)^2$ з прямою $y_2 = 9 - a$, які обчислюють за формулою $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9-a}$.

Якщо ж припустити, що $\begin{cases} 9-a>0; \\ 1-a\ge 0; \end{cases}$ $a \le 1$, то розв'язками вихідної нерівності є всі такі x, що $x_1 < x < x_3$, $x_4 < x < x_2$, де x_3 і x_4 — абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x-1)^2$ з прямою $y_2 = 1 - a$, які обчислюють за формулою $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Відповідь. Якщо $a \le 1$, то $x \in (x_1; x_3) \cup (x_4; x_2)$; якщо $1 < a < 9$, то $x \in (x_1; x_2)$; якщо $a \ge 9$, то $x \in \varnothing$, де $x_1 = 1 - \sqrt{9-a}$, $x_2 = 1 + \sqrt{9-a}$; $x_3 = 1 - \sqrt{1-a}$; $x_4 = 1 + \sqrt{1-a}$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_3\left(x^2 - 5x - 5\right) > 2$.

■ $\log_3\left(x^2 - 5x - 5\right) > 2$; $\log_3\left(x^2 - 5x - 5\right) > \log_3 3^2$. Оскільки основа логарифмів $3 > 1$, то дана нерівність рівносильна такій: $x^2 - 5x - 5 > 9$; $x^2 - 5x - 14 > 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 7$; $x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.

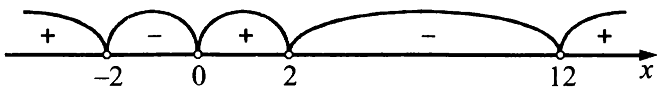
Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x} < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (2; 12)$	$(2; 12)$	$(-2; 0) \cup (2; 12)$	$(-\infty; -2) \cup (0; 2) \cup$ $\cup (12; +\infty)$	$\varnothing$

■ $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x} < 3$; $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x} < \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8}$. Оскільки функція $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ спадна, то $\dfrac{2x-3}{x^2+2x} > \dfrac{1}{8}$;

$\dfrac{16x - 24 - x^2 - 2x}{8(x^2+2x)} > 0$; $\dfrac{x^2 - 14x + 24}{x^2 + 2x} < 0$; $\dfrac{(x-2)(x-12)}{x(x+2)} < 0$.



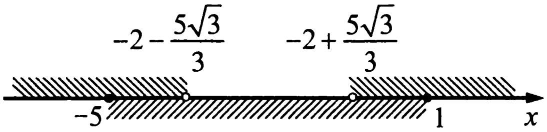
$x \in (-2; 0) \cup (2; 12)$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. Знайти цілі розв'язки нерівності $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 4x - 4\right)} < 1$. У відповідь записати їхню суму.

■ Дана нерівність рівносильна подвійній нерівності: $0 < \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 4x - 4\right) < 1$. Перетворимо останню нерівність: $\log_{\frac{1}{3}} 1 < \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 4x - 4\right) < \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$. Врахувавши, що $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — спадна функція, одержимо: $\dfrac{1}{3} < x^2 + 4x - 4 \le 1$, звідки: $\begin{cases} 3x^2 + 12x - 13 > 0; \\ x^2 + 4x - 5 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(x + 2 + \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + 2 - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right) > 0; \\ (x-1)(x+5) \le 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-2+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}; +\infty\right); \\ x \in [-5; 1]. \end{cases}$$



Отже, $x \in \left[-5; -2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-2+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}; 1\right]$.

Цілими розв'язками є –5 і 1. Їхня сума дорівнює –5 + 1 = –4.

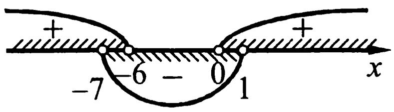
Відповідь. –4. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{\cos 1} \log_8 \left(x^2+6x+1\right) > 0$.

■ $\log_{\cos 1} \log_8 \left(x^2+6x+1\right) > 0$; $\log_{\cos 1} \log_8 \left(x^2+6x+1\right) > \log_{\cos 1} 1$. Оскільки основа логарифмів $0 < \cos 1 < 1$, то дана нерівність рівносильна подвійній нерівності:

$0 < \log_8 \left(x^2+6x+1\right) < 1$; $\log_8 1 < \log_8 \left(x^2+6x+1\right) < \log_8 8$; $1 < x^2+6x+1 < 8$;

$$\begin{cases} x^2+6x+1>1; \\ x^2+6x+1<8; \end{cases} \begin{cases} x^2+6x>0; \\ x^2+6x-7<0; \end{cases} \begin{cases} x(x+6)>0; \\ (x+7)(x-1)<0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty); \\ x \in (-7; 1). \end{cases}$$



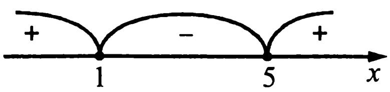
$x \in (-7; -6) \cup (0; 1)$.

Відповідь. $(-7; -6) \cup (0; 1)$. ■

Приклад 5. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\log_5^2 x + (2x-7)\log_5 x + x^2 - 7x + 6 \le 0$.

■ Ліву частину нерівності розглянемо як квадратний тричлен відносно $\log_5 x$. Нехай $\log_5 x = t$. Знайдемо корені рівняння: $t^2 + (2x-7)t + x^2 - 7x + 6 = 0$; $D = (2x-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 7x + 6) =$ $= 4x^2 - 28x + 49 - 4x^2 + 28x - 24 = 25$; $t_{1,2} = \dfrac{(7-2x) \pm 5}{2}$; $t_1 = -x + 1$, $t_2 = -x + 6$. Повернемося до заміни: $(\log_5 x + x - 1)(\log_5 x + x - 6) \le 0$. Функції $t_1 = \log_5 x + x - 1$ та $t_2 = \log_5 x + x - 6$ при $x > 0$ є монотонно зростаючими і перетворюються у нуль, якщо $x_1 = 1$ або $x_2 = 5$ відповідно.

Отже, знаки лівої частини нерівності такі:



Тоді $x \in [1; 5]$.

Цілими розв'язками є числа 1, 2, 3, 4, 5, а їхня сума дорівнює 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Відповідь. 15. ■

Завдання 17.1–17.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

17.1. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_3(x-4) \le \log_3 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 12)$	$(-\infty; 12]$	$[4; 12]$	$(4; 12]$	$(0; 12]$

17.2. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(2x-5) > \log_{0,1} x$.

А	Б	В	Г	Д
$(2,5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$	$(2,5; 5)$

17.3. Розв'язати нерівність $\log_\pi x > \log_\pi 3 + \log_\pi 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(15; +\infty)$	$(-\infty; 15)$	$(0; 15)$	$(8; +\infty)$	$(0; 8)$

17.4. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(2x-1) \ge \log_{0,1} 10 - \log_{0,1} 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 3]$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$(0,5; 3]$	$(0,5; 4,5]$

17.5. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_{\sin 1} x > 2\log_{\sin 1} 7$.

А	Б	В	Г	Д
$(49; +\infty)$	$(0; 49)$	$(14; +\infty)$	$(0; 14)$	$(-\infty; 49)$

17.6. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_5 x < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 25)$	$(25; +\infty)$	$(0; 25)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 2)$

17.7. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \ge -1$?

А	Б	В	Г	Д
Одне	два	три	жодне	більше, ніж три

17.8. Розв'язати нерівність $\log_8(3x-10) < \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(0; 3\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 4)$	$\left(3\frac{1}{3}; 4\right)$

17.9. Вказати найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{7}}(x+3) > -1$.

А	Б	В	Г	Д
6	7	4	3	–3

17.10. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(2-x)} < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$

17.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	жодного	більше, ніж три

17.12. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$	$[1; 2]$	$[3; 9]$	$(-\infty; 3]\cup[9; +\infty)$	$(3; 9)$

17.13. Розв'язати нерівність $\lg^2 x - 4\lg x + 3 \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$	$(0; 1]\cup[3; +\infty)$	$[10; 1000]$	$(-\infty; 10]\cup[1000; +\infty)$	$(0; 10]\cup[1000; +\infty)$

17.14. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{3}; 5\right]$	$(1; 5]$	$(0; 1]$	$(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]\cup[5; +\infty)$

17.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\frac{\sqrt{x+3}}{\log_2(2x-3)} \le 0$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

17.16. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_x 5 < 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)\cup(1; +\infty)$	$(0; 1)\cup(5; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 5)\cup(5; +\infty)$	$(0; 1)\cup(1; 5)$

17.17. Вказати цілі розв'язки нерівності $\log_{\frac{2x-1}{3}} 2 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
1; 2	1	0; 1	0; 1; 2	2; 3

17.18. Розв'язати нерівність $\log_9 (x+3)^2 \le 1$.

А	Б	В	Г	Д
$[-6; 0]$	$[-6; -3)\cup(-3; +\infty)$	$(-\infty; -6]\cup[0; +\infty)$	$(-\infty; -6)\cup(0; +\infty)$	$[-6; -3)\cup(-3; 0]$

17.19. Розв'язати нерівність $(x-2)\log_{0,5} x \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$	$[1; 2]$	$(0; 1]\cup[2; +\infty)$	$(0; 2]$	$(0; 1)\cup(2; +\infty)$

17.20. Розв'язати нерівність $x^x < 1$, якщо $x > 0$, застосувавши логарифмування.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 0)\cup(0; 1)$	1

17.21. Розв'язати нерівність $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| \leq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$	$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right]$	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$[2; +\infty)$

17.22. Розв'язати нерівність $|\log_3 x| \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{3}; 3\right]$	$[3; +\infty)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$	$\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup [3; +\infty)$

Завдання 17.23–17.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

17.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -2$
2 $\log_2(x+1) > 2$
3 $2^{x+1} < 16$
4 $0{,}5^{x+1} < 4$

А $x+1 > 4$
Б $x+1 < 4$
В $\begin{cases} x+1 < 4; \\ x+1 > 0 \end{cases}$
Г $x+1 > -2$
Д $x+1 < -2$

17.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_4 x < 0$
2 $\log_4 x > 0$
3 $\log_4(-x) < 0$
4 $\log_4(-x) > 0$

А $(-\infty; -1)$
Б $(-\infty; 1)$
В $(1; +\infty)$
Г $(-1; 0)$
Д $(0; 1)$

17.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_{0,5} x < 0$
2 $\log_{0,5} x > 0$
3 $\log_{0,5}(-x) < 0$
4 $\log_{0,5}(-x) > 0$

А $(-\infty; -1)$
Б $(-\infty; 1)$
В $(1; +\infty)$
Г $(-1; 0)$
Д $(0; 1)$

17.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_9 x < \frac{1}{2}$
2 $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$
3 $\log_{\frac{1}{9}} x < -\frac{1}{2}$
4 $\log_{\frac{1}{9}} x < \frac{1}{2}$

А $(0; 9)$
Б $(9; +\infty)$
В $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
Г $(0; 3)$
Д $(3; +\infty)$

17.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_5(x-2) < \log_5(-x)$	**А** $(-1; +\infty)$
2 $\log_{\frac{1}{5}}(2-x) < \log_{\frac{1}{5}}(-x)$	**Б** $(-1; 0)$
3 $\log_5(x+2) > \log_5(-x)$	**В** $(-2; -1)$
4 $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) > \log_{\frac{1}{5}}(-x)$	**Г** $(-\infty; 0)$
	Д $\varnothing$

17.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_2(\log_5 x) < 0$	**А** $(0; 0{,}5)$
2 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 x) < 0$	**Б** $(1; 2)$
3 $\log_5(\log_2 x) < 0$	**В** $(1; 5)$
4 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 0$	**Г** $(-\infty; 5)$
	Д $(5; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 17.29–17.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

17.29. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+6\right) > -1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.30. Розв'язати нерівність $\lg(x-2)+\lg(27-x) < 2$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

17.31. Розв'язати нерівність $\lg x + 6\log_x 10 \le 5$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

17.32. Розв'язати нерівність $\lg^2(-x)+\lg x^2 - 3 < 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

17.33. Розв'язати нерівність $\lg^2 100x - 5\lg x > 6$. У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.34. Розв'язати нерівність $9^{\log_3^2 x} < 4x^{\log_3 x} - 3$. У відповідь записати суму всіх натуральних розв'язків нерівності.

17.35. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}\dfrac{2x}{x-3} \le \dfrac{1}{2}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.36. Розв'язати нерівність $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.37. Розв'язати нерівність $x^{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.38. Розв'язати нерівність $\log_2(5-x)\log_{x+1}\dfrac{1}{8} \ge -6$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

17.39. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}|x| \geq |x| - 1$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

17.40. Розв'язати нерівність $\log_x 3x \leq \sqrt{\log_x\left(3x^7\right)}$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.41. Розв'язати нерівність $\log_{x+1}|x-2| \leq 1$. У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.