Тема 35. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі

Розділ геометрії, в якому вивчають властивості фігур у просторі, називають *стереометрією*. Основними фігурами у просторі є точка, пряма та площина.

Властивості всіх фігур, які вивчали в планіметрії, справджуються і в кожній площині простору.

Аксіоми стереометрії та наслідки з них.

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.
2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.
3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж лише одну.

Прямі в просторі

Прямі в просторі можуть:

— перетинатися (рис. 1);

— лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 2). Такі прямі називають *паралельними*;

— не лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 3). Такі прямі називають *мимобіжними*.

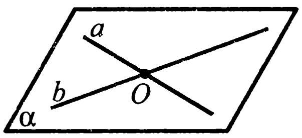


Рис. 1

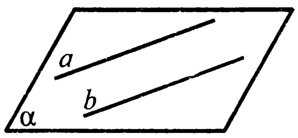


Рис. 2

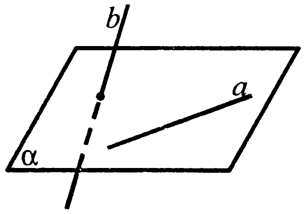


Рис. 3

Через одну точку простору можна провести безліч прямих (рис. 4).

Через будь-які дві точки простору можна провести одну пряму (рис. 5).

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

Оскільки пряму визначають дві точки, то через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

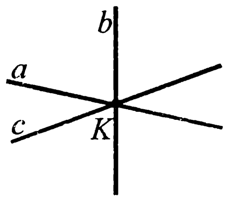


Рис. 4

Рис. 5

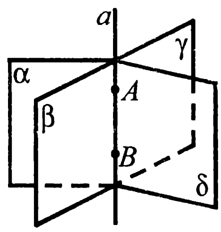


Рис. 6

Властивості площини

Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж лише одну (рис. 7).

Єдину площину можна провести:

— через дві прямі, що перетинаються (рис. 8);

— через пряму і точку, що не належить цій прямій (рис. 9);

— через дві паралельні прямі (рис. 10).

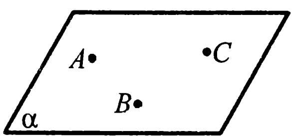


Рис. 7

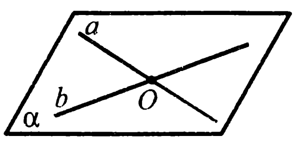


Рис. 8

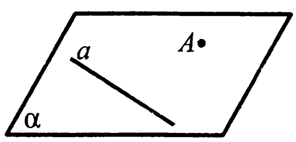


Рис. 9

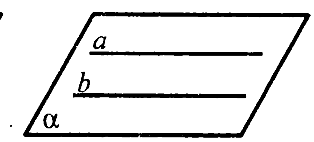


Рис. 10

Взаємне розміщення прямої і площини

Пряма може:

— перетинати площину (рис. 11), A — єдина спільна точка;

— лежати в площині (рис. 12);

— не мати з площиною спільних точок (рис. 13). Такі пряму і площину називають *паралельними.* На рис. 13 пряма a паралельна до площини α.

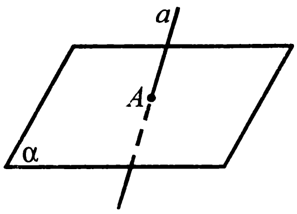


Рис. 11

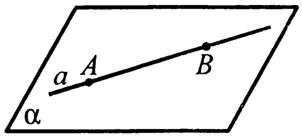


Рис. 12

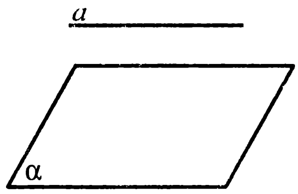


Рис. 13

Паралельність прямих і площин

Ознака паралельності прямої та площини.

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна до якої-небудь прямої у цій площині, то вона паралельна і до самої площини (рис. 14). Коротко: якщо $a\|b$, $b\subset\alpha$, то $a\|\alpha$.

Ознака паралельності площин.

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини, то такі площини паралельні (рис. 15). Коротко: якщо a, $b\subset\alpha$, $a\cap b$, $a\|a_1$, $b\|b_1$, a_1, $b_1\subset\beta$, то $\alpha\|\beta$.

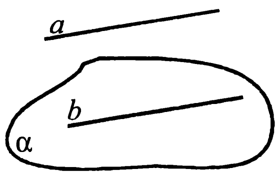


Рис. 14

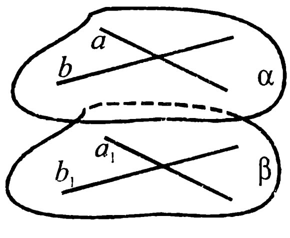


Рис. 15

Перпендикулярність прямих і площин

Ознака перпендикулярності прямої та площини.

Пряму a називають *перпендикулярною* до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Пряма a буде перпендикулярною до площини α, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині α і перетинаються (рис. 16). Коротко: $a\perp b\in\alpha$, $a\perp c\in\alpha$, $b\nparallel c$, то $a\perp\alpha$.

Перпендикуляр і похила

Перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної площини, називають відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.

Кінець перпендикуляра, який лежить у площині, називають *основою перпендикуляра.* На рис. 17 AC — перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, точка C — основа перпендикуляра.

Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки на площину. На рис. 17 AC — відстань від точки A до площини α.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називають будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. На рис. 17 AB — похила.

Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї й тієї ж точки, називають *проекцією похилої.* На рис. 17 CB — проекція похилої AB.

Теорема про три перпендикуляри

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна до похилої (рис. 18). Навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину. Коротко: якщо $a \perp BC$, то $a \perp AC$ або якщо $a \perp AC$, то $a \perp BC$ (рис. 18).

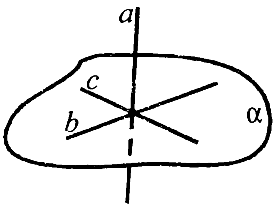


Рис. 16

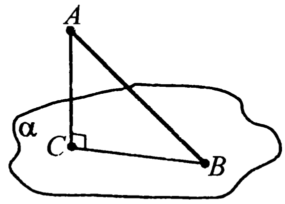


Рис. 17

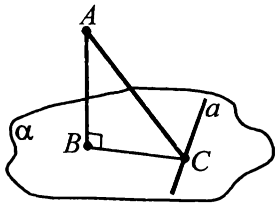


Рис. 18

Відстань між мимобіжними прямими

Відстанню між мимобіжними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра (рис. 19).

Кут між мимобіжними прямими

Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються й паралельні до мимобіжних прямих: $\angle(ab) = \angle(a'b)$ (рис. 20).

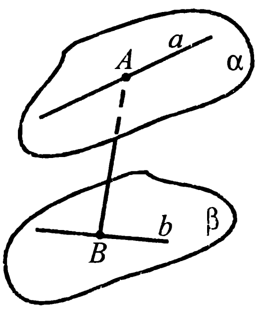


Рис. 19

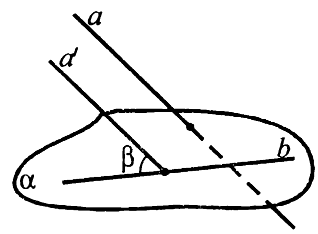


Рис. 20

Кут між прямою та площиною

Кутом між прямою та площиною називають кут між прямою і її проекцією на цю площину (рис. 21).

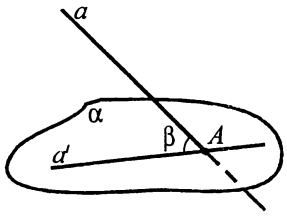
Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею й площиною вважається таким, що дорівнює 90°, а між паралельними прямою та площиною таким, що дорівнює 0°.

Кут між площинами

Двогранний кут — це фігура, утворена двома півплощинами, які мають спільну пряму, що їх обмежує. Півплощини називаються *гранями кута*, а спільну пряму — *ребром кута*. Мірою двогранного кута є міра відповідного йому лінійного кута.

Лінійний кут двогранного кута — це кут, утворений двома півпрямими, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає даний двогранний кут. Міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Нехай дані площини перетинаються (див. рис. 22). Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Ця площина перетинає дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називають *кутом між даними площинами*. Означений таким чином кут між площинами не залежить від вибору січної площини. Коротко: якщо $\alpha \cap \beta = c$, $\gamma \perp c$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b \Rightarrow \angle(a;\, b)$ — кут між площинами α і β.



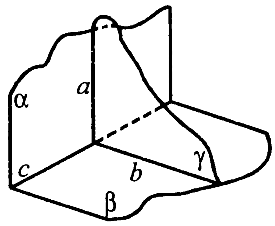


Рис. 21 **Рис. 22**

Якщо кут між площинами α і β дорівнює 90°, то $\alpha \perp \beta$.

Ознака перпендикулярності площин

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні. Коротко: якщо $a \perp \alpha$, $a \subset \beta$, то $\beta \perp \alpha$ (рис. 23).

Якщо пряма, яка лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна і до другої площини.

Справедливими є такі твердження:

1. Через точку поза площиною можна провести безліч площин, перпендикулярних до цієї площини і всі вони пройдуть через перпендикулярну до цієї площини пряму, яка проходить через дану точку.
2. Якщо площина й пряма, що не належить цій площині, перпендикулярні до однієї й тієї ж площини, то ці площина й пряма паралельні.
3. Через довільну пряму, яка не перпендикулярна до даної площини, можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної.
4. Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, яка є перпендикулярною до однієї з цих площин і проходить через їх спільну точку, лежатиме в іншій площині.

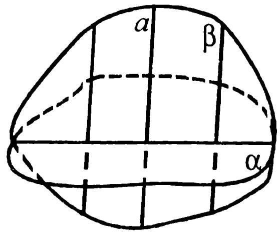
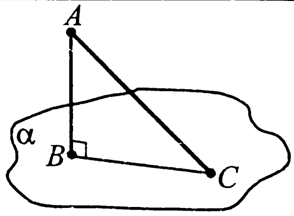


Рис. 23

Приклад 1. З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої. Знайти кут між перпендикуляром і похилою.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
45°	60°	30°	40°	20°

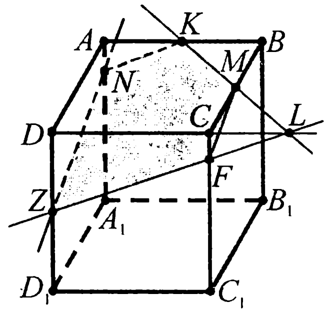


■ Нехай з точки A до площини α проведено перпендикуляр AB ($AB \perp \alpha$) і похилу AC. Тоді BC — проекція похилої AC на площину α. $AB = BC$. $\angle CAB$ — кут між перпендикуляром і похилою. Трикутник ABC прямокутний ($\angle B = 90°$) і рівнобедрений. Отже, $\angle CAB = 45°$.

Відповідь. А. ■

Приклад 2. Визначити вид перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, BC і DD_1.

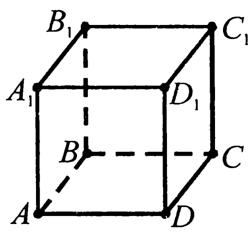
А	Б	В	Г	Д
Трикутник	Трапеція	Паралелограм	П'ятикутник	Прямокутник



■ Будуємо точку $L = KM \cap DC$, точку $F = ZL \cap CC_1$, точку N таку, що $N \in AA_1$, $N = ZN \cap AA_1$, $ZN \| FM$. Отже, перерізом є п'ятикутник $NKMFZ$.

Відповідь. **Г.** ■

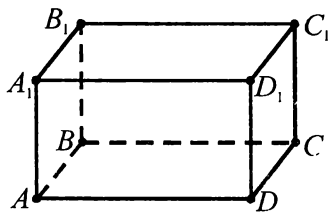
Приклад 3. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. **а)** Чи перетинаються прямі BB_1 і CC_1, AB і CD? Як називають ці прямі? **б)** Чи перетинаються прямі BC і AA_1, CD і BB_1? Як називають ці прямі?



■ **а)** Прямі BB_1 і CC_1 лежать в одній площині (BCC_1) і не перетинаються. Вони паралельні. Прямі AB і CD лежать у площині (ABC) і не перетинаються. Вони паралельні;

б) прямі BC і AA_1 лежать в різних площинах і не перетинаються. Вони мимобіжні. Прямі CD і BB_1 лежать в різних площинах і не перетинаються. Вони мимобіжні. ■

Приклад 4. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначити взаємне розміщення площини ABC і прямих: **а)** A_1B_1; **б)** BB_1; **в)** DB_1; **г)** CD.



■ Позначимо площину ABC через α.

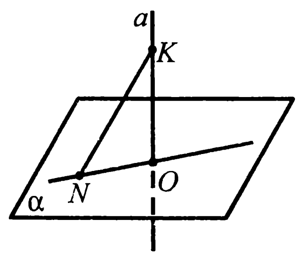
а) Оскільки $A_1B_1 \| AB$, $AB \in \alpha$, то $A_1B_1 \| \alpha$;

б) оскільки $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$ і $AB \in \alpha$, $BC \in \alpha$, то $BB_1 \perp \alpha$;

в) оскільки пряма DB_1 і площина α мають спільну точку D, то пряма DB_1 перетинає площину α;

г) пряма CD належить площині α. ■

Приклад 5. Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці O (див. рис.). Точка K лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 32 см, а від точки N цієї площини — на 40 см. Знайти NO.

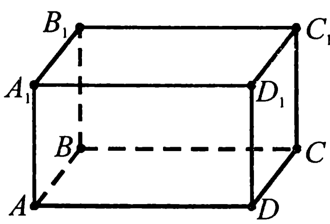


■ Оскільки $a \perp \alpha$, $NO \in \alpha$, то $a \perp NO$ і ΔNKO — прямокутний ($\angle O = 90°$).

Маємо: $NO = \sqrt{NK^2 - KO^2}$, $NO = \sqrt{40^2 - 32^2} = \sqrt{8 \cdot 72} = 24$ (см).

Відповідь. 24 см. ■

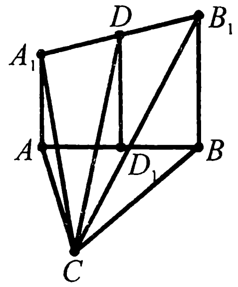
Приклад 6. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис.). Користуючись рисунком, визначити: **а)** площини, які перетинають площину ABC; **б)** площини, які паралельні до площини ABC.



■ **а)** Площина ABB_1 перетинає площину ABC по прямій AB;
площина BB_1C_1 перетинає площину ABC по прямій BC;
площина DD_1C_1 перетинає площину ABC по прямій DC;
площина AA_1D_1 перетинає площину ABC по прямій AD;

б) площина $A_1B_1C_1$ паралельна площині ABC. ■

Приклад 7. Дано рівносторонній трикутник ABC, $AB = 2$ см, $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, $CA_1 = 3$ см, $CB_1 = 7$ см, $A_1D = DB_1$. Знайти довжину CD.



■ $AA_1 \perp (ABC)$, тому $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp AC$. З ΔA_1CA знайдемо довжину AA_1: $AA_1 = \sqrt{CA_1^2 - AC^2}$, $AA_1 = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ (см).

$BB_1 \perp (ABC)$, тому $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$. З ΔCB_1B знайдемо довжину BB_1: $BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2}$, $BB_1 = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ (см).

$AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, тоді $AA_1 \| BB_1$. Чотирикутник AA_1B_1B — трапеція, точка D — середина відрізка A_1B_1, $D_1D \perp (ABC)$, тобто $DD_1 \| AA_1$ і $DD_1 \| BB_1$, тоді DD_1 — середня лінія трапеції.

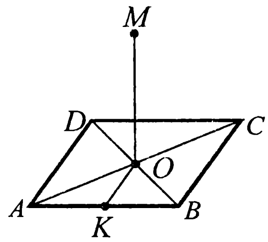
$$DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}.\ DD_1 = \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ (см).}$$

У рівносторонньому трикутнику ABC медіана CD_1 є висотою. $CD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$, $CD_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

З ΔCD_1D знайдемо CD: $CD = \sqrt{CD_1^2 + DD_1^2}$, $CD = \sqrt{3+20} = \sqrt{23}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{23}$ см. ■

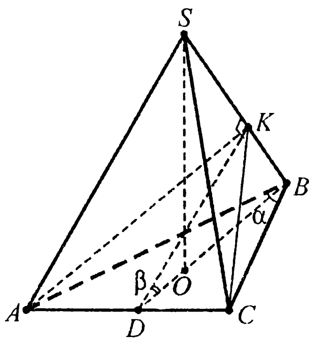
Приклад 8. Через точку O перетину діагоналей квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MO до його площини, сторона квадрата дорівнює $2a$. Знайти відстань між прямими AB і MO.



■ Прямі AB й MO мимобіжні. Відстанню від точки O до AB є $OK \perp AB$. $MO \perp (ABC)$, тому $MO \perp KO$. Отже, KO — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих MO і AB, KO — шукана відстань. $KO = \frac{1}{2}AO$, $KO = a$.

Відповідь. $KO = a$. ■

Приклад 9. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Через основу трикутника проведено переріз перпендикулярно до протилежного бічного ребра, який утворює з площиною основи кут β. Висота піраміди дорівнює H і усі її бічні ребра рівні. Знайти площу перерізу. У відповідь записати значення площі перерізу, якщо $H = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.



■ Нехай $SABC$ — задана піраміда, $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. SO — висота піраміди, $SO = H$. Оскільки похилі SA, SB і SC рівні, то рівними будуть і їх проекції OA, OB і OC. Тому O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Нехай площина, проведена через сторону AC перпендикулярно до ребра SB, перетинає це ребро в точці K. $\Delta SBA = \Delta SBC$ за трьома сторонами. Отже, $\Delta KBA = \Delta KBC$ за двома сторонами і кутом між ними. Тому $AK = CK$ і трикутник AKC — рівнобедрений. Проводимо $KD \perp AC$. Оскільки $AK = KC$, то $AD = DC$. Точки D, O і B рівновіддалені від кінців відрізка AC, тому вони лежать на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Отже, $O \in BD$, $BD \perp AC$. Кут KDB — лінійний кут двогранного кута між площинами AKC і ABC. За умовою, $\angle KDB = \beta$. Оскільки $SB \perp (AKC)$, то $DK \perp SB$. З ΔDKB ($\angle K = 90°$): $\angle KBD = 90° - \beta$. З ΔSOB ($\angle O = 90°$): $OB = SO\text{ctg}(90° - \beta) = H\text{tg}\beta$. Із трикутника ABC за наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$, крім того, $R = OB = H\text{tg}\beta$. Отже, $AC = 2H\text{tg}\beta\sin\alpha$. Оскільки BD — висота, а отже, медіана та бісектриса трикутника ABC, то $DC = H\text{tg}\beta\sin\alpha$, $\angle CBD = \frac{\alpha}{2}$. З ΔBDC ($\angle D = 90°$): $DB = DC\text{ctg}\frac{\alpha}{2} = H\text{tg}\beta\sin\alpha\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$. З ΔDKB ($\angle K = 90°$): $DK = DB\cos\beta = H\text{tg}\beta\sin\alpha\text{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta = H\sin\beta\sin\alpha\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}AC \cdot DK; \quad S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} \cdot 2H\,\text{tg}\beta\sin\alpha \cdot H\sin\beta\sin\alpha\,\text{ctg}\frac{\alpha}{2} = H^2\sin^2\alpha\sin\beta\,\text{tg}\beta\,\text{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Якщо $H = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, то:

$$S_{\Delta AKC} = 4^2\sin^2 60°\sin 30°\,\text{tg}30°\,\text{ctg}\frac{60°}{2} = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

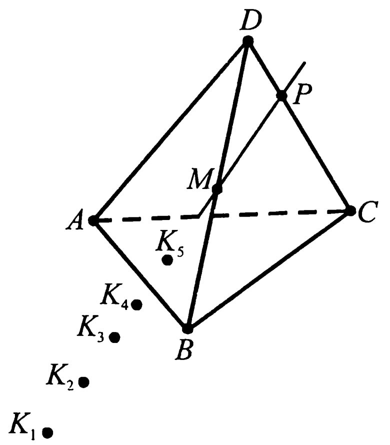
Відповідь. 6. ■

Завдання 35.1–35.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

35.1. Шість точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій?

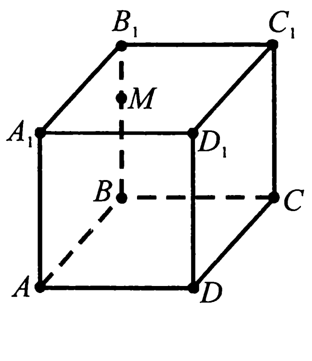
А	Б	В	Г	Д
дві	три	чотири	п'ять	шість

35.2. На рисунку зображено тетраедр $ABCD$. Точка M належить ребру DB, а точка P — ребру DC. Точки K_1, K_2, K_3, K_4 і K_5 належать площині ABC. У якій з цих точок пряма PM перетинає площину ABC?



	Б	В	Г	Д
K_1	K_2	K_3	K_4	K_5

35.3. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точку M на ребрі BB_1. Якій із прямих належить точка перетину прямої MC із площиною $A_1B_1C_1$?

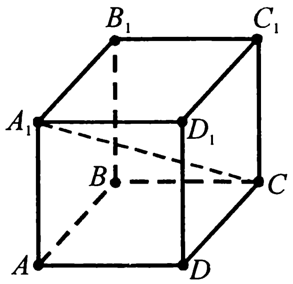


А	Б	В	Г	Д
A_1B_1	B_1C_1	C_1D_1	A_1C_1	B_1D_1

35.4. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією прямокутної трапеції?

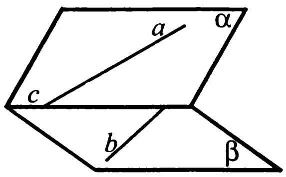
А	Б	В	Г	Д
трапеція з тупим кутом при більшій основі	прямокутна трапеція	рівнобічна трапеція	відрізок	паралелограм

35.5. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати ортогональну проекцію діагоналі A_1C на площину DD_1C_1.



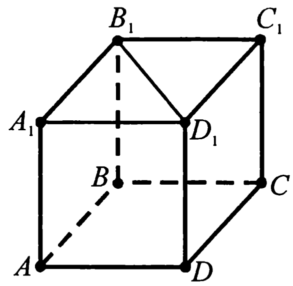
А	Б	В	Г	Д
C_1D	CC_1	C_1D_1	DD_1	CD_1

35.6. На рисунку площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a належить площині α, пряма b — площині β. Яке з наведених тверджень правильне?



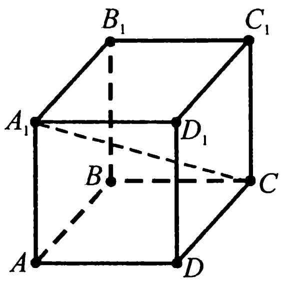
А	Б	В	Г	Д
прямі a і b перетинаються	прямі a і b паралельні	прямі a і b мимобіжні	прямі a і b паралельні або мимобіжні	прямі a і b паралельні або перетинаються

35.7. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1. Знайти відстань між прямими AA_1 і B_1D_1.



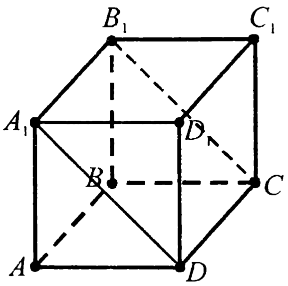
А	Б	В	Г	Д
$1\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$

35.8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати кут між прямою A_1C і площиною DCC_1.



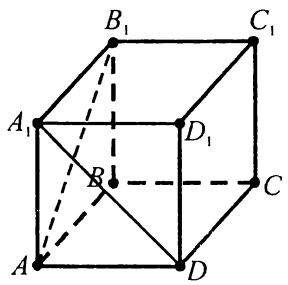
А	Б	В	Г	Д
$\angle A_1CC_1$	$\angle A_1CD$	$\angle A_1CD_1$	$\angle ACB_1$	$\angle A_1CA$

35.9. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $ABCD$ — квадрат зі стороною 1, а бічне ребро $AA_1 = \sqrt{3}$. Чому дорівнює кут між площинами AA_1B_1 і A_1B_1C?



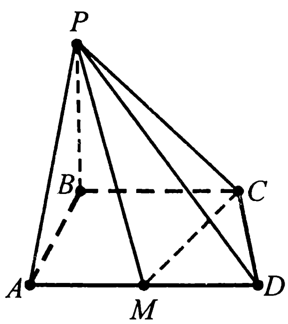
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

35.10. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти кут між прямими AB_1 і A_1D.



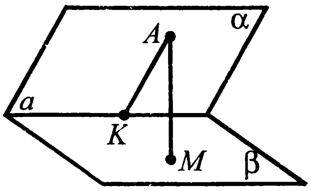
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

35.11. На рисунку $ABCD$ — прямокутна трапеція з прямим кутом B, точка M — середина сторони AD. PB — перпендикуляр до площини ABC. Визначити кут між площинами ABC і APD.



А	Б	В	Г	Д
$\angle PMC$	$\angle PMD$	$\angle PDB$	$\angle PAD$	$\angle PAB$

35.12. Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом 60°. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK — відстанню від точки A до прямої a. Знайти довжину відрізка AK, якщо $AM = \sqrt{3}$.



А	Б	В	Г	Д
2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	3

35.13. Точка A віддалена від площини на відстань $6\sqrt{3}$ см. Обчислити довжину проекції похилої, проведеної з цієї точки під кутом 60° до площини.

А	Б	В	Г	Д
18 см	$3\sqrt{3}$ см	3 см	$2\sqrt{3}$ см	6 см

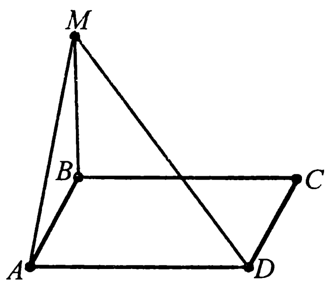
35.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a. Точка A розміщена від кожної вершини трикутника на відстані b. Визначити відстань від точки A до площини трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{b^2 + \frac{a^3}{3}}$	$\sqrt{b^2 - a^2}$	$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{12}}$	$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$	$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{9}}$

35.15. Точка M розміщена на відстані m від кожної сторони правильного трикутника і на відстані h від площини трикутника. Визначити сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{m^2 + h^2}$	$2\sqrt{m^2 - h^2}$	$2\sqrt{3(m^2 - h^2)}$	$\sqrt{3(m^2 - h^2)}$	$\sqrt{3(m^2 + h^2)}$

35.16. На рисунку $ABCD$ — квадрат, MB — перпендикуляр до площини ABC. Похила AM нахилена до площини ABC під кутом 45°. Під яким кутом нахилена до площини ABC похила MD?



А	Б	В	Г	Д
30°	60°	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$	arctg2

35.17. З вершини A квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр AK завдовжки 6 см. Знайти відстань від точки K до вершини C квадрата, якщо його сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

А	Б	В	Г	Д
9 см	10,5 см	17 см	14 см	10 см

35.18. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини найбільшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD, який дорівнює 15 см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{241}$ см	17 см	$\sqrt{31}$ см	23 см	$\sqrt{335}$ см

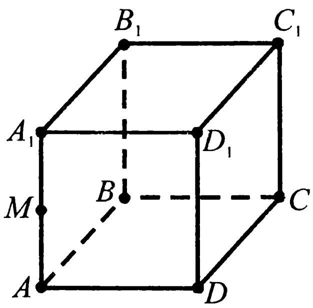
35.19. Знайти кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин утричі далі, ніж від другої площини.

А	Б	В	Г	Д
$\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arcsin\frac{1}{3}$	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{1}{3}$

35.20. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину, його кінці розміщені на відстані 2 м і 3 м від площини. Знайти кут між даним відрізком і площиною.

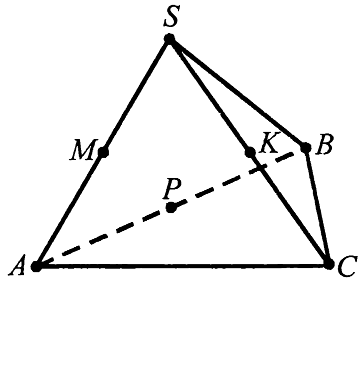
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	$\arcsin\frac{2}{3}$	$\arccos\frac{2}{5}$

35.21. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром $2a$. Точка M — середина ребра AA_1. Встановити вид многокутника, який є перерізом куба площиною MBC, визначити його площу.



А	Б	В	Г	Д
$2a^2\sqrt{3}$	a^2	$2a^2$	$2a^2\sqrt{5}$	$5a^2$

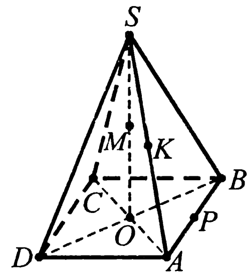
35.22. На рисунку зображено правильний тетраедр $SABC$ з ребром a. Точки M, K і P — відповідно середини ребер AS, SC і AB. Встановити вид многокутника, який є перерізом тетраедра площиною MKP, визначити його периметр.



А	Б	В	Г	Д
$3a$	$\frac{3}{2}a$	a	$2a$	$4a$

Завдання 35.23–35.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

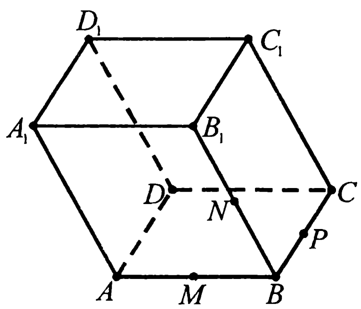
35.23. На рисунку зображено піраміду $SABCD$, де SO — висота піраміди, M — середина висоти, K — середина ребра SA, P — середина ребра AB. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MK і площина ABC
2 Прямі OP і MK
3 Пряма MP і площина SDC
4 Площини BMK і SDC

А Площини перетинаються
Б Пряма і площина перетинаються
В Пряма паралельна площині
Г Прямі паралельні
Д Прямі мимобіжні

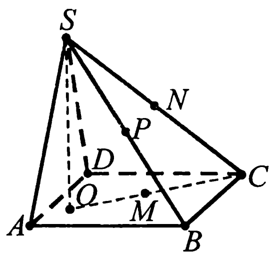
35.24. На рисунку зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N і P — середини ребер AB, BB_1 і BC відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



1 Прямі MN і DD_1
2 Прямі MN і DC_1
3 Площини MNP і AB_1C
4 Прямі NP і CC_1

А Площини паралельні
Б Площини перетинаються
В Прямі паралельні
Г Прямі мимобіжні
Д Прямі перетинаються

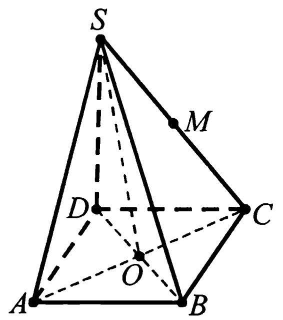
35.25. На рисунку зображено піраміду $SABCD$, в основі якої паралелограм. SO — висота піраміди. Точки M, N і P — середини відрізків OC, SC і SB відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MN і площина ABC
2 Прямі MN і SO
3 Прямі MN і SD
4 Пряма OC і площина ASD

А Не можна встановити
Б Перпендикулярні
В Перетинаються
Г Мимобіжні
Д Паралельні

35.26. На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, у якої SO — висота, M — середина ребра SC, діагональні перерізи — рівносторонні трикутники. Установити відповідність між точками, прямими, площинами (1–4) та відстанями між ними (А–Д).



1 Точка D і пряма SB
2 Точка M і площина ABC
3 Прямі AD і BC
4 Прямі DB і SC

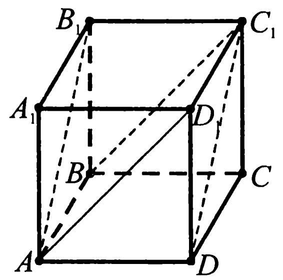
А BD
Б AB
В AM
Г $\frac{AM}{2}$
Д $\frac{SO}{2}$

35.27. Установити відповідність між кількостями точок, які не лежать в одній площині (1–4) та найбільшою з них кількістю точок (А–Д), які можуть лежати на одній прямій.

1 6
2 8
3 12
4 20

А 6
Б 4
В 16
Г 10
Д 18

35.28. Установити відповідність між відрізками (1–4), побудованими на гранях і ребрах куба, та величинами кутів між ними (А–Д).



1 AD_1 і BC_1
2 BA_1 і AD_1
3 AB і AD_1
4 DC_1 і AB

А 60°
Б 0°
В 45°
Г 90°
Д 30°

35.29. Установити відповідність між кутами нахилу (1–4) відрізка завдовжки 10 см до площини та довжиною його проекції на площину (А–Д).

1 30°	**А** 5 см
2 45°	**Б** $5\sqrt{3}$ см
3 60°	**В** $5\sqrt{2}$ см
4 0°	**Г** 0 см
	Д 10 см

Розв'яжіть завдання 35.30–35.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

35.30. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках M і N. Знайти довжину відрізка CN, якщо $AC : CB = 2 : 3$, $BM = 12$.

35.31. Площина α перетинає сторони кута ABC у точках A_1 і C_1, а паралельна їй площина β — у точках A_2 і C_2. Знайти BC_1, якщо $A_1B : A_1A_2 = 1 : 3$, $BC_2 = 12$.

35.32. З точки A до площини проведено дві похилі $AB = 30$ і $AC = 40$. Знайти відстань від точки A до площини, якщо проекції похилих відносяться як 9 : 16.

35.33. З точки B, яка розміщена від площини на відстані 1, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайти квадрат відстані між кінцями похилих.

35.34. Один з катетів прямокутного трикутника ABC дорівнює 6, а гострий кут, прилеглий до цього катета, дорівнює 30°. Через вершину прямого кута C проведено відрізок CD, перпендикулярний до площини цього трикутника, $CD = 4$. Визначити відстань від точки D до прямої AB.

35.35. З точки A, що розміщена на колі, радіус якого дорівнює 2, побудований перпендикуляр AK завдовжки 1 до площини круга. З точки A проведено діаметр AB, а з точки B під кутом 45° до діаметра — хорду BC. Знайти у сантиметрах відстань від точки K до хорди BC.

35.36. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см. Через більшу основу проведено площину на відстані 5 см від меншої основи. Знайти у сантиметрах відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини.

35.37. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на лінію перетину площин. Знайти AB, якщо $AB_1 = 7$, $BA_1 = 5$, $A_1B_1 = \sqrt{10}$.

35.38. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. Знайти у градусах кут α, якщо $AB = 6$, $CD = \sqrt{21}$, $AC = AD = 4$.

35.39. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини B_1 і C_1 та середину ребра DD_1, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt{5\sqrt{5}}$.

35.40. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини B_1 і D та середину ребра CC_1, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt{6\sqrt{6}}$.

35.41. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Знайти площу перерізу куба з точністю до 0,01 площиною, яка проходить через центр куба і середини ребер AB і AD, якщо ребро куба дорівнює 1.

35.42. Через центр основи правильної трикутної піраміди паралельно до двох ребер, які не перетинаються, проведено площину. Визначити площу утвореного перерізу, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 9, а ребро основи — 7.

35.43. У правильній чотирикутній піраміді проведено площину через діагональ основи паралельно до бічного ребра. Сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5. Визначити площу утвореного перерізу.

35.44. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ через середини сторін AB і AD проведено площину, яка паралельна бічному ребру SA. Знайти площу утвореного перерізу, якщо сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5.