# Тема 26. Первісна. Інтеграл

Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $X$, якщо для довільного $x \in X$ справедлива рівність $F'(x) = f(x)$. Наприклад, оскільки $(x^3)' = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, то $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на $R$.

***Основна властивість первісної***

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку $X$, то функція $f(x)$ має безліч первісних, і всіх їх можна задати формулою $F(x) + C$, де $C$ — довільне число. Наприклад, первісною для функції $f(x) = 4x^3$, є функція $F(x) = x^4$, оскільки $\left(x^4\right)' = 4x^3$. Первісними для функції $f(x) = 4x^3$ є також функції $F(x) = x^4 + 6$, $F(x) = x^4 + 50{,}1$, $F(x) = x^4 - 1$ і взагалі, $F(x) = x^4 + C$, де $C$ — довільне число.

Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку $X$ називають *невизначеним інтегралом* функції на цьому проміжку і позначають $\int f(x)dx = F(x) + C$. Наприклад, $\int \cos x dx = \sin x + C$.

***Властивості невизначеного інтеграла***

1. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
3. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

***Таблиця інтегралів***

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
3. $\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
6. $\int e^x dx = e^x + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$.
10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$.

При обчисленні інтегралів підінтегральну функцію зводять до однієї з табличних. Наприклад, знайти інтеграл $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$. Виконаємо перетворення: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = 1{,}5\sqrt[3]{x^2} + C$.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ не може бути безпосередньо перетворена до однієї з табличних, то можна використати метод заміни змінної чи інтегрування за частинами.

Наприклад, знайти $\int \cos(3x+6)dx$. Введемо позначення $t = 3x + 6$, звідки $x = \frac{1}{3}t - 2$. Тоді $dx = d\left(\frac{1}{3}t - 2\right) = \frac{1}{3}dt$. Одержимо: $\int \cos(3x+6)dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+6) + C$.

Згідно методу інтегрування частинами, $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — диференційовані функції. Наприклад, знайти $\int x\ln x dx$. Уведемо позначення: $u = \ln x$, $v' = x$. Звідси $u' = \frac{1}{x}$, $v = \int v'dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Отже, $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$

На рис. 1 а) зображена криволінійна трапеція, обмежена графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$. Площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою $S = F(b) - F(a)$, де $F$ — будь-яка первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

При обчисленні визначеного інтеграла $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$. Рівність $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ називають *формулою Ньютона — Лейбніца*.

Слід враховувати, що якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають первісні на проміжку $[a; b]$, то справедливі рівності:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Наприклад, обчислити $\int_1^5 (2x+6)dx$. Маємо: $\int_1^5 (2x+6)dx = \int_1^5 2xdx + \int_1^5 6dx = \left(x^2 + 6x\right)\Big|_1^5 = 5^2 + 6\cdot 5 - \left(1^2 + 6\cdot 1\right) = 48.$

Відповідь. 48.

Формула площі криволінійної трапеції запишеться так: $S = \int_a^b f(x)dx$, якщо $f(x) \geq 0$ (рис. 1).

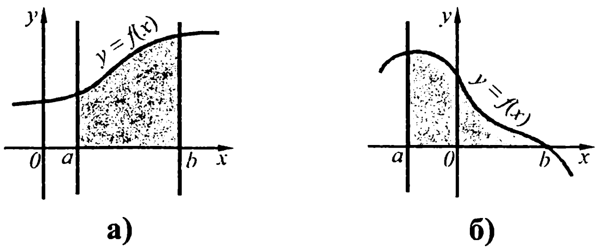



**Рис. 1**

Наприклад, знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4x - 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Фігура, обмежена заданими лініями, є криволінійною трапецією (рис. 2). Функція $y = x^2 - 4x - 1$ на відрізку

[0; 3] набуває від'ємних значень, тому площа фігури дорівнює модулю відповідного визначеного інтеграла:

$$S=\left|\int_0^3\left(x^2-4x-1\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-2x^2-x\right|_0^3\Bigg|=\left|9-18-3-0\right|=12.$$

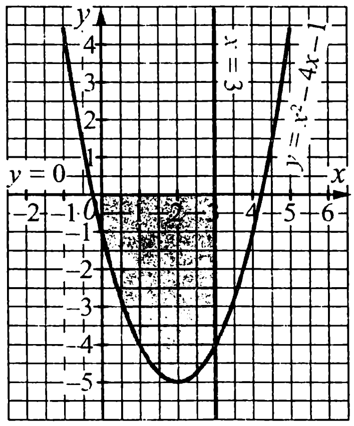



**Рис. 2**

Як і у випадку невизначеного інтеграла, при обчисленні визначеного інтеграла використовують безпосереднє інтегрування, та методи заміни змінної й інтегрування частинами.

Наприклад, обчислити $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln^2 xdx$. Оскільки функція $\ln^2 x$ є неперервною на проміжку $[e; e^2]$ і $\ln x$ має неперервну похідну $\frac{1}{x}$ на цьому відрізку, то, використовуючи заміну змінної $t=\ln x$, одержимо нові межі інтегрування: якщо $x_1=e$, то $t_1=\ln e=1$; якщо ж $x_2=e^2$, то $t_2=\ln e^2=2$. Таким чином, $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln^2 xdx=\int_1^2 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$

Відповідь. $2\frac{1}{3}$.

Наприклад, обчислити $\int_0^1 x\cdot 2^x dx$. Позначимо $u=x$, $v'=2^x$. Тоді $u'=1$, $v=\frac{2^x}{\ln 2}$. Отже, $\int_0^1 x\cdot 2^x dx=$

$$=x\cdot 2^x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2^x}{\ln 2}dx=1\cdot 2-0-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2^x dx=2-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=2-\frac{1}{\ln^2 2}\left(2^1-2^0\right)=2-\frac{1}{\ln^2 2}.$$

Нехай $y=f(x)$ і $y=g(x)$ — неперервні на проміжку $[a; b]$ функції і для всіх $x\in[a; b]$ виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$. Тоді площу фігури, зображеної на рисунку 3, обчислюють за формулою:

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

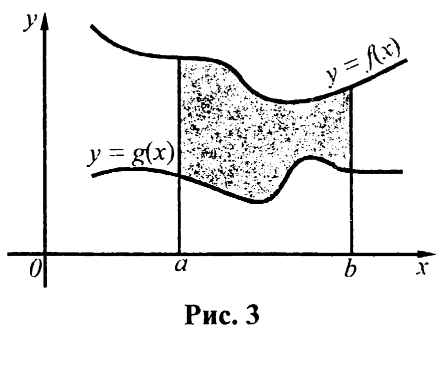
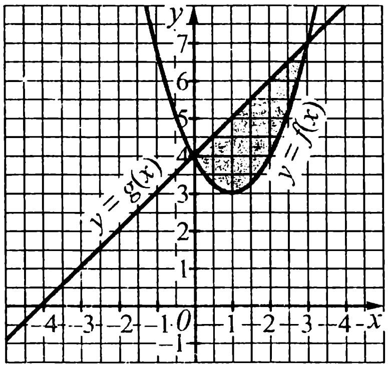



**Рис. 3**

Наприклад, знайти площу фігури, обмеженої функціями $f(x) = x^2 - 2x + 4$ і $g(x) = x + 4$. Побудуємо фігуру, площу якої слід знайти. Знайдемо точки перетину графіків заданих функцій: $x^2 - 2x + 4 = x + 4$; $x^2 - 3x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Графіки заданих функцій перетинаються у точках з абсцисами $x = 0$ і $x = 3$. Оскільки $g(x) > f(x)$, то площа фігури дорівнює: $S = \int_0^3 \left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_0^3 \left(x + 4 - x^2 + 2x - 4\right)dx =$

$$= \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{0}{3}\right) = 4{,}5.$$




Відповідь. 4,5.

*Об'єм тіла,* утвореного від обертання криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, де $x \in [a; b]$, навколо осі $x$, обчислюють за формулою: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ (рис. 4).

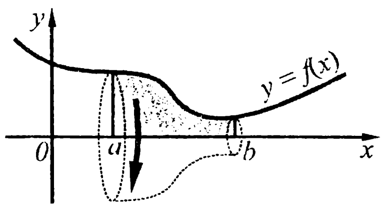
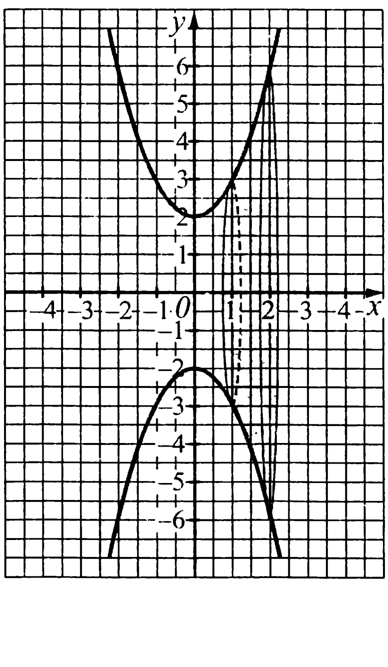



**Рис. 4**

Наприклад, знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Побудуємо фігуру, об'єм якої слід знайти.



$$V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2 (x^2+2)^2dx=\pi\int_1^2 (x^4+4x^2+4)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+4\cdot\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{32}{5}+4\cdot\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{3}+4\right)\right]=\frac{293\pi}{15}.$$

***Приклад 1.*** Знайти первісну $F(x)$ функції $f(x) = \sin x$.

■ Оскільки $(-\cos x)' = \sin x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, то $F(x) = -\cos x$ є однією з первісних. Загальний вигляд первісної функції має вигляд $F(x) = -\cos x + C$. ■

***Приклад 2.*** Знайти первісну функції $f(x) = 3x^2$, графік якої проходить через точку (2; 10).

■ Оскільки $(x^3)' = 3x^2$, то загальний вигляд первісної є $F(x) = x^3 + C$. Знайдемо значення $C$. За умовою, $F(2) = 10$. Тому $2^3 + C = 10$; $C = 2$. Таким чином, первісна функції $f(x) = 3x^2$, яка проходить через точку (2; 10), має вигляд $F(x) = x^3 + 2$. ■

***Приклад 3.*** Знайти невизначений інтеграл: **а)** $\int\left(4x^3-6\right)dx$; **б)** $\int\left(3\cos x+\frac{10}{x}\right)dx$.

■ **а)** $\int\left(4x^3-6\right)dx=4\int x^3dx-6\int dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot x+C=x^4-6x+C$.

**б)** $\int\left(3\cos x+\frac{10}{x}\right)dx=3\int\cos xdx+10\int\frac{dx}{x}=3\sin x+10\ln|x|+C$.

Відповідь. **а)** $x^4 - 6x + C$; **б)** $3\sin x + 10\ln|x| + C$. ■

***Приклад 4.*** Знайти невизначений інтеграл $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

■ Врахуємо, що $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$. Тоді $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C$.

Відповідь. $\frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C$. ■

***Приклад 5.*** Знайти невизначений інтеграл $\int x\sin xdx$.

■ Проінтегруємо частинами, припустивши, що $u = x$, $v' = \sin x$. Тоді $u' = 1$, $v = -\cos x$. Маємо: $\int x\sin xdx=x\cdot\left(-\cos x\right)-\int\left(-\cos x\right)dx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

Відповідь. $-x\cos x+\sin x+C$. ■

***Приклад 6.*** Знайти невизначений інтеграл $\int\sqrt{x^2+3x+1}\left(2x+3\right)dx$.

■ Використаємо метод заміни змінної, позначивши $t = x^2 + 3x + 1$, звідки $t' = 2x + 3$. Тоді $\int\sqrt{x^2+3x+1}\left(2x+3\right)dx=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\left(x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Відповідь. $\frac{2}{3}\left(x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}$. ■

***Приклад 7.*** Знайти визначений інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$.

■ $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}dx-\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos xdx\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}-\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{2}-1}{4}=\frac{\pi-6\sqrt{2}+6}{24}.$

Відповідь. $\frac{\pi-6\sqrt{2}+6}{24}$. ■

***Приклад 8.*** Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^1(2x-1)^6dx$.

■ Уведемо заміну: $t=2x-1$, тоді $t'=2$. Якщо $x=0$, то $t=-1$; якщо $x=1$, то $t=1$. Отже,

$\int\limits_0^1(2x-1)^6dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2x-1)^6\cdot 2dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 t^6dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^7}{7}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1^7}{7}-\frac{(-1)^7}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}.$

Відповідь. $\frac{1}{7}$. ■

***Приклад 9.*** Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^e \ln xdx.$

■ Використаємо інтегрування частинами, прийнявши, що $u=\ln x$, $v'=1$, звідки $u'=\frac{1}{x}$, $v=x$. Маємо: $\int\limits_1^e\ln xdx=(\ln x\cdot x)\Big|_1^e-\int\limits_1^e\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)dx=(\ln e\cdot e-\ln 1\cdot 1)-\int\limits_1^e dx=e-x\Big|_1^e e-(e-1)=1.$

Відповідь. 1. ■

***Приклад 10.*** Знайти визначений інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2x\sin x\,dx.$

■ $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2x\sin x\,dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}(\cos(2x-x)-\cos(2x+x))dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}-$

$-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos 3x\cdot\frac{1}{3}\cdot 3dx=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{6}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos 3x\cdot 3dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\sin 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}(0-1)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3\sqrt{3}-1}{12}.$

Відповідь. $\frac{3\sqrt{3}-1}{12}$. ■

***Приклад 11.*** Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

**1** $\int\limits_1^3 \left(x^2+2\right)dx$

**2** $\int\limits_1^e \frac{3}{x}dx$

**3** $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6} \sin^2 2x\cos 2x\,dx$

**4** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x\cos x\,dx$

**А** $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{48}$

**Б** $3$

**В** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}$

**Г** $\frac{1}{8}$

**Д** $12\frac{2}{3}$

**1.** $\int\limits_1^3 \left(x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3=\frac{3^3}{3}+6-\frac{1}{3}-2=12\frac{2}{3}\rightarrow$ **Д**

**2.** $\int\limits_1^e \frac{3}{x}dx=3\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx=3\ln|x|\Big|_1^e=3\left(\ln e-\ln 1\right)=3\rightarrow$ **Б**

**3.** $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6} \sin^2 2x\cos 2x\,dx$. Уведемо заміну $t=\sin 2x$, тоді $dt=2\cos 2x dx$ і $\cos 2x dx=\frac{dt}{2}$. Обчислимо нові межі інтегрування: якщо $x=\frac{\pi}{8}$, то $t=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; якщо $x=\frac{\pi}{6}$, то $t=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким чином,

$$\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6} \sin^2 2x\cos 2x\,dx=\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} t^2\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} t^2dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{48}\rightarrow \textbf{А}$$

**4.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x\cos x\,dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 2x dx$. Уведемо позначення: $t=2x$, тоді $x=\frac{t}{2}$, $dx=\frac{dt}{2}$. Якщо $x=\frac{\pi}{6}$, то $t=\frac{\pi}{3}$; якщо $x=\frac{\pi}{4}$, то $t=\frac{\pi}{2}$. Отже, $\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sin t\frac{dt}{2}=\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sin t dt=$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos t\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2}=-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\rightarrow \textbf{Г}$$

Відповідь.

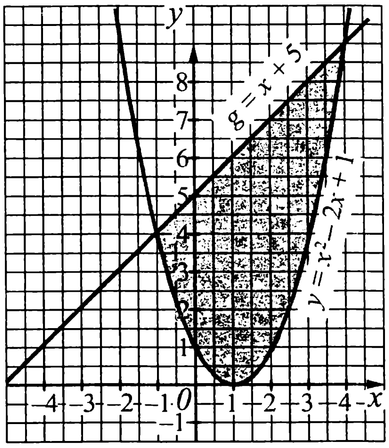
| | А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | X |
| 2 | | X | | | |
| 3 | X | | | | |
| 4 | | | | X | |

■

***Приклад 12.*** Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2x+1$, $g=x+5$.

■ Розв'язавши рівняння $x^2-2x+1=x+5$; $x^2-3x-4=0$; $x_1=4$, $x_2=-1$, знаходимо абсциси точок перетину графіків даних функцій (межі інтегрування): 4 і –1. На відрізку [–1; 4] $g(x)\ge y(x)$ (див. рис. 4). Тому площа фігури, обмеженої графіками даних функцій дорівнює:

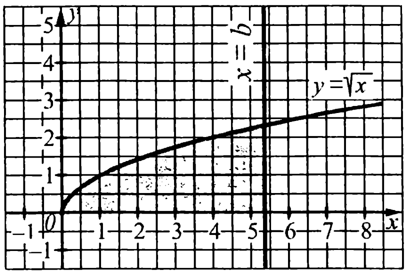
$$S=\int\limits_{-1}^{4}\left(x+5-\left(x^2-2x+1\right)\right)dx=\int\limits_{-1}^{4}\left(-x^2+3x+4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=20\frac{5}{6}.$$



■

***Приклад 13.*** За яких значень $b$ площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=b$ дорівнює 18?

■

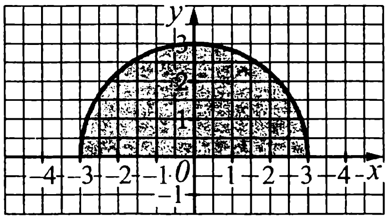



$S=\int_0^b \sqrt{x}\,dx=\int_0^b x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^b=\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$. За умовою, $S=18$. Отже, $\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}=18$; $b^{\frac{3}{2}}=27$; $b=27^{\frac{2}{3}}$; $b=9$.

Відповідь. 9. ■

***Приклад 14.*** Обчислити значення визначеного інтеграла $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$.

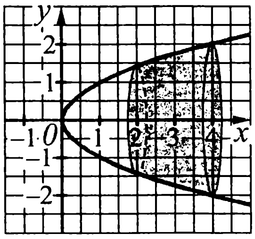
■ Значення визначеного інтеграла $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ можна розглядати якф площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{9-x^2}$, $x=-3$, $x=3$. Перетворимо функцію $y=\sqrt{9-x^2}$. Піднесемо обидві частини $y=\sqrt{9-x^2}$ до квадрату, врахувавши, що $y\ge 0$ і $-3\le x\le 3$. Одержимо: $y^2=9-x^2$; звідси $x^2+y^2=9$. Це є рівняння півкола з центром у точці (0; 0) і радіусом $R=3$. Отже, досить знайти площу відповідного півкруга: $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2=\frac{9\pi}{2}=4{,}5\pi$.



■

***Приклад 15.*** Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 4$.

■ $V = \pi\int_2^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_2^4 x dx = \pi \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 = \pi(8-2) = 6\pi.$




Відповідь. $6\pi$. ■

**Завдання 26.1–26.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**26.1.** Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^{10} - x^8 + x + 13$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $F(x) = 10x^9 - 8x^7 + 1 + C$ | $F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13x + C$ | $F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13 + C$ | $F(x) = 11x^{11} - 9x^9 + 2x^2 + 13x + C$ | $F(x) = -\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^2}{2} - 13x + C$ |

**26.2.** Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = -4\cos x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $F(x) = -4\sin x + C$ | $F(x) = 4\sin x + C$ | $F(x) = -4\cos x + C$ | $F(x) = 4\cos x + C$ | $F(x) = -16\cos x + C$ |

**26.3.** Яка з функцій задовольняє рівняння $f'(x) = \frac{10}{\sin^2 x}$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 10\mathrm{tg}x$ | $f(x) = -10\mathrm{ctg}x$ | $f(x) = -10\mathrm{tg}x$ | $f(x) = -\frac{1}{10}\mathrm{ctg}\, x$ | $f(x) = 10\mathrm{ctg}x$ |

**26.4.** Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $O(0; 0)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $F(x) = \sin x$ | $F(x) = \cos x$ | $F(x) = \cos x + 1$ | $F(x) = 1 - \cos x$ | $F(x) = \cos x - 1$ |

**26.5.** Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^{20} dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 21 | 20 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{21}$ |

**26.6.** Обчислити $\int_0^1 (x^2-4x)dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 2 | $-\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{3}$ |

**26.7.** Обчислити $\int_0^1 2x^5 dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ |

**26.8.** $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = \ldots$

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $2\cos x\Big\vert_0^{\pi}$ | $-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\Big\vert_0^{\pi}$ | $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\Big\vert_0^{\pi}$ | $-2\cos\frac{x}{2}\Big\vert_0^{\pi}$ | $2\cos\frac{x}{2}\Big\vert_0^{\pi}$ |

**26.9.** Обчислити: $80\left(\sqrt{3}+1\right)\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}} \sin\left(10x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0,8 | $\frac{1-\sqrt{3}}{20}$ | –0,8 | 8 | –8 |

**26.10.** Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=2t+1$. Знайти закон руху тіла $S(t)$, якщо $S(1)=3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $S(t)=t^2+t+3$ | $S(t)=t^2+t$ | $S(t)=t^2+t+1$ | $S(t)=t^2+t+2$ | $S(t)=t^2+t-1$ |

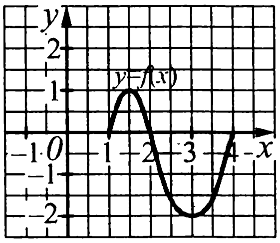
**26.11.** Вказати інтеграл для обчислення площі фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=0$ і $x=2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\int_0^4 x^2dx$ | $\int_0^2 \left(x^2-x\right)dx$ | $\int_0^2 2xdx$ | $\int_0^2 \frac{x^3}{3}dx$ | $\int_0^2 x^2dx$ |

**26.12.** Вказати формулу для обчислення площі $S$ фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ і $y=x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $S=\int_0^1 \left(x^2-x\right)dx$ | $S=\int_0^1 \left(x^2+x\right)dx$ | $S=\int_0^1 \left(x-x^2\right)dx$ | $S=\int_0^1 x^2dx$ | $S=\int_0^1 xdx$ |

**26.13.** Вказати формулу для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $S=\int_1^4 f(x)dx$ | $S=2\int_1^4 f(x)dx$ | $S=\int_1^2 f(x)dx-$ $-\int_2^4 \lvert f(x)\rvert dx$ | $S=\int_1^2 f(x)dx+$ $+\int_2^4 f(x)dx$ | $S=\int_1^2 f(x)dx-$ $-\int_2^4 f(x)dx$ |

**26.14.** Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x)=\cos^2 x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)=-\sin^2 x+C$ | $F(x)=\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ | $F(x)=\frac{x}{2}-$ $-\frac{1}{4}\sin 2x+C$ | $F(x)=\frac{x}{2}+$ $+\sin 2x+C$ | $F(x)=\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2}\cos 2x+C$ |

**26.15.** Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,5 | 6 | 2 | 0,75 |

**26.16.** Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчислити $\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 16 | $8\pi$ | $16\pi$ | $32\pi$ |

**26.17.** Вказати формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, утвореної лініями $y=\sqrt{\cos x}$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $V=\pi\sin x\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ | $V=\pi\cos x\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ | $V=\frac{\pi}{2\sqrt{\cos x}}\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ | $V=\pi\sqrt{\cos x}\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ | $V=\pi\sqrt{\sin x}\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ |

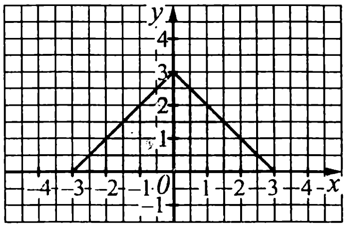
**26.18.** Вказати первісну функцію для функції $f(x)=\mathrm{tg}^2 x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)=\mathrm{ctg}^2 x+C$ | $F(x)=\mathrm{tg}x-x$ | $F(x)=\mathrm{ctg}x-x$ | $F(x)=\mathrm{ctg}x+x$ | $F(x)=\mathrm{tg}x+x$ |

**26.19.** Вказати формулу для обчислення площі фігури, обмеженої частинами параболи $y=x^2-4$ й осі абсцис.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $S=\int_{-4}^{4}(x^2-4)dx$ | $S=\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$ | $S=-\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)dx$ | $S=-\int_{-4}^{4}(x^2-4)dx$ | $S=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$ |

**26.20.** Вказати формулу для обчислення площі трикутника, заштрихованого на рисунку.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $S=\int_{-3}^{3}(\lvert x\rvert-3)dx$ | $S=\int_{-3}^{3}(\lvert x\rvert+3)dx$ | $S=\int_{-3}^{3}(3-\lvert x\rvert)dx$ | $S=\int_{-3}^{3}\lvert 3-x\rvert dx$ | $S=\int_{-3}^{3}\lvert x+3\rvert dx$ |

**26.21.** Серед наведених інтегралів вказати той, значення якого найменше.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\int_0^1 dx$ | $\int_0^1 xdx$ | $\int_0^1 x^2dx$ | $\int_0^1 x^3dx$ | $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ |

**26.22.** Обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $-4\pi$ | $4\pi$ | $-2\pi$ | $2\pi$ | 0 |

**26.23.** Яка з наведених функцій є первісною для функції $y=2\lvert x\rvert$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | $y=\lvert x^2\rvert$ | $y=-x^2$ | $y=x\lvert x\rvert$ | $y=-x\lvert x\rvert$ |

**Завдання 26.24–26.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**26.24.** Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

1 $\int_0^1 2x^3dx$

2 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,dx$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\,dx$

4 $\int_0^1 (x+1)dx$

А $\frac{1}{2}$

Б $\frac{1}{4}$

В 2

Г $1\frac{1}{2}$

Д 1

**26.25.** Установити відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) та їх первісними $F(x)$ (А–Д).

1 $f(x)=x^3$

2 $f(x)=\frac{1}{x^3}$

3 $f(x)=6x$

4 $f(x)=\frac{6}{x}$

А $F(x)=3x^2+C$

Б $F(x)=6\ln x+C$

В $F(x)=\frac{6}{x^2}+C$

Г $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$

Д $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C$

**26.26.** Установити відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) та їх первісними $F(x)$ (А–Д).

1 $f(x)=\cos\frac{x}{4}+\sin 4x$

2 $f(x)=\cos 4x+\sin\frac{x}{4}$

3 $f(x)=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}+4\sin 4x$

4 $f(x)=4\cos 4x+\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}$

А $F(x)=\sin\frac{x}{4}-\cos 4x+C$

Б $F(x)=\sin 4x-\cos\frac{x}{4}+C$

В $F(x)=16\sin 4x-\frac{1}{16}\cos\frac{x}{4}+C$

Г $F(x)=4\sin\frac{x}{4}-4\cos\frac{x}{4}+C$

Д $F(x)=4\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x+C$

**26.27.** Установити відповідність між функціями (1–4), заданими на відрізку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, та їх первісними (А–Д) на цьому відрізку.

1 $f(x) = \operatorname{tg} x$

2 $f(x) = \operatorname{ctg} x$

3 $f(x) = \dfrac{2}{\sin 2x}$

4 $f(x) = -\dfrac{2}{\sin 2x}$

**А** $F(x) = \ln \operatorname{tg} x + C$

**Б** $F(x) = \ln \operatorname{ctg} x + C$

**В** $F(x) = \ln \sin x + C$

**Г** $F(x) = -\ln \sin x + C$

**Д** $F(x) = -\ln \cos x + C$

**26.28.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д) — функціями, які задовольняють рівняння.

1 $f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$

2 $f'(x) = \dfrac{16}{\cos^2 4x}$

3 $f'(x) = -\dfrac{32\cos 4x}{\sin^3 4x}$

4 $f'(x) = \dfrac{4}{\sin^2 4x}$

**А** $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2 4x} + C$

**Б** $f(x) = \dfrac{4}{\cos^2 4x} + C$

**В** $f(x) = 4\operatorname{tg} 4x + C$

**Г** $f(x) = -\operatorname{ctg} 4x + C$

**Д** $f(x) = \operatorname{tg} 4x + C$

**26.29.** Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int_0^1 x^3 dx$

2 $\int_0^1 x^2 dx$

3 $\int_0^1 x dx$

4 $\int_0^1 \frac{xdx}{5} dx$

**А** $\frac{1}{10}$

**Б** $\frac{1}{5}$

**В** $\frac{1}{4}$

**Г** $\frac{1}{3}$

**Д** $\frac{1}{2}$

**26.30.** Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}} dx$

2 $\int_0^2 \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} dx$

3 $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$

4 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{2} dx$

**А** $\frac{e}{4} - \frac{1}{4}$

**Б** $\frac{e}{2} - \frac{1}{2}$

**В** $e - 1$

**Г** $2e - 2$

**Д** $4e - 4$

**26.31.** Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$

2 $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x dx$

3 $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2} dx$

4 $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x dx$

**А** –2

**Б** –1

**В** 0

**Г** 1

**Д** 2

**26.32.** Установити відповідність між лініями, заданими рівняннями (1–4), та об'ємами тіл (А–Д), утворених у результаті обертання цих ліній навколо осі $x$.

1 $y = \sqrt{x}$, де $x \in [-2; 2]$

2 $y = \sqrt{\sin x}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

3 $y = \frac{1}{\cos x}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

4 $y = \frac{1}{\sin x}$, де $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

**А** $0{,}5\pi$

**Б** $\pi$

**В** $1{,}5\pi$

**Г** $\sqrt{3}\pi$

**Д** $4\pi$

**Розв'яжіть завдання 26.33–26.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**26.33.** Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 12t^2 + 4$. Знайти закон руху $S(t)$ точки, якщо в момент часу $t = 1$ с її швидкість дорівнювала 10 м/с, а $S(1) = 12$ м. У відповідь записати $S(3)$.

**26.34.** Обчислити інтеграл $12\int\limits_{2}^{3} \frac{1-x^4}{1-x} dx$.

**26.35.** Обчислити інтеграл $3\int\limits_{4}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

**26.36.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 8x - 6x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $y = 0$.

**26.37.** Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

**26.38.** Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмежену лініями $y = x^2$, $y = x^3$.

**26.39.** Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, дотичною до нього в точці $x = -2$ і прямою $x = 1$.

**26.40.** Знайти об'єм $V$ тіла обертання, утвореного при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$ і $y=x$. У відповідь записати $\frac{3V}{\pi}$.

**26.41.** Знайти найменше значення інтеграла $\int_0^a \cos\frac{x}{2}dx$, $a\in R$.

**26.42.** Знайти меншу з площ кожної з фігур, на які пряма $y=x+4$ ділить фігуру, обмежену лініями $y=\frac{1}{2}x^2$ і $y=8$.