

Практична робота №18

Розрахунок електричного кола із взаємною індуктивністю комплексним методом

Мета: навчитися розраховувати параметри електричного кола із взаємною індуктивністю комплексним методом .

На вхід електричного кола (рис. 18.1), фізичні параметри якого задані в табл. 18.1, подається синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$ частотою $f = 50$ Гц. Діюче значення напруги U, B . відоме. Необхідно:

1. Побудувати схему заміщення кола.
2. Визначити комплексні опори, струми та напруги.
3. Побудувати векторну діаграму на комплексній площині.
4. Написати вирази для миттєвих значень струмів і напруг кола.
5. Розрахувати потужності, які споживаються колом.

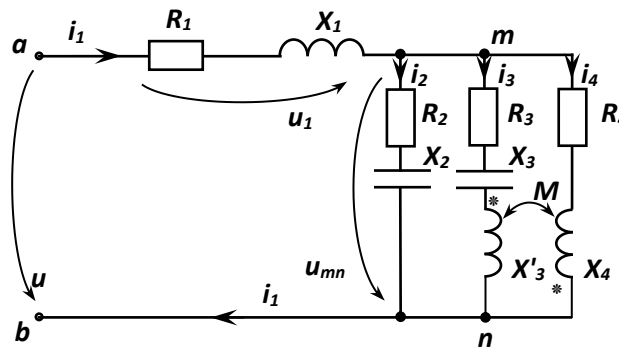


Рис. 18.1

Таблиця 17.1 - Вихідні дані до задачі

Цифри номера залікової книжки											
десятки	одиниці	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	U, B	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
	$f, Гц$	50	60	50	60	50	60	50	60	50	60
	$R_1, Ом$	10	12	14	16	18	20	22	24	27	30
	$R_2, Ом$	15	18	20	24	27	32	40	47	51	36
	$R_3, Ом$	11	18	22	27	20	39	47	24	16	15
	$R_4, Ом$	43	27	36	18	24	33	18	27	30	20
	$M_1, Гн$	0,16	0,12	0,32	0,36	0,43	0,39	0,47	0,51	0,56	0,62
	$X_1, Ом$	30	33	36	39	43	47	51	56	62	68
	$X_2, Ом$	-24	-36	-42	-30	-20	-18	-25	-32	-40	-50
	$X_3, Ом$	-20	-30	-40	-50	-30	-10	-50	-20	-60	-30
	$X'_3, Ом$	32	44	24	36	14	12	26	33	40	22
	$X_4, Ом$	40	20	30	25	15	10	35	45	50	18

Приклад. На вхід електричного кола (рис. 2.29), фізичні параметри якого задані в табл. 2.2, подається синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$ частотою $f = 50$ Гц. Діюче значення напруги $U = 380$ В.

Таблиця 2.2

$R_1,$ $Ом$	$X_1,$ $Ом$	$R_2,$ $Ом$	$X_2,$ $Ом$	$R_3,$ $Ом$	$X_3,$ $Ом$	$X'_3,$ $Ом$	$M,$ $Гн$	$R_4,$ $Ом$	$X_4,$ $Ом$
20	30	30	-40	50	-50	50	0,15	40	30

2.14.1. Побудова схеми заміщення кола

Замінімо задану схему (рис. 2.29) еквівалентною їй розрахунковою схемою заміщення (рис. 2.30), в якій магнітний зв'язок між індуктивними опорами X'_3 й X_4 замінено електричним зв'язком і замість активних і реактивних опорів віток уведено комплексні опори віток $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$ і комплексний опір взаємодукції \underline{Z}_M .

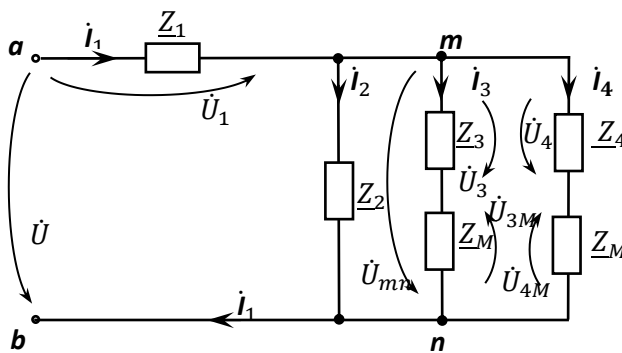


Рис. 2.30

Вкажемо на схемі (рис. 2.30) умовні додатні напрямки комплексних струмів у вітках і методом еквівалентних перетворень визначимо комплексний повний опір кола, комплексний загальний струм \dot{I}_1 , комплексну міжвузлову напругу \dot{U}_{mn} і через неї – комплексні струми у паралельних вітках. Потім визначимо комплексні спади напруг на ділянках кола і побудуємо векторну діаграму струмів і напруг на комплексній площині.

2.14.2. Визначення комплексних опорів, струмів і напруг

Комплексний опір першої вітки:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 20 + j30 = Z_1 e^{j\phi_1} = 36,1 e^{j56,3^\circ} \text{ Ом},$$

де модуль опору: $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36,1 \text{ Ом}$ і аргумент: $\phi_1 = \arctg(X_1/R_1) = \arctg(30/20) = 56,3^\circ$.

Комплексні опори віток без врахування взаємної індукції:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 30 - j40 = 50 e^{-j53,1^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j(X'_3 + X_3) = 50 + j(50 - 50) = 50 e^{j0^\circ} = 50 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + jX_4 = 40 + j30 = 50e^{j36,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Опір третьої вітки виявився чисто активним, так як $|X'_3| = |X_3|$, тобто в цій вітці має місце резонанс напруг.

Комплексний опір взаємодукції:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_M &= j2\pi fM = j \times 2 \times 3,14 \times 50 \times 0,15 = \\ &= j47,12 \text{ Ом} = 47,12e^{j90^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплексні опори третьої та четвертої віток з врахуванням взаємної індукції визначаємо за формулами (2.108) і (2.109):

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{-3} &= \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_4 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_M} = \frac{50 \times (40 + j30) - (j47,12)^2}{40 + j30 + j47,12} = \\ &= \frac{2000 + j1500 - (-2220,3)}{40 - j77,12} = \frac{4220,3 + j1500}{40 + j77,12} = \\ &= \frac{4479e^{j19,6^\circ}}{86,9e^{j62,9^\circ}} = 51,54e^{-j43,3^\circ} \text{ Ом;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{-4} &= \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_4 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_M} = \frac{4220,3 + j1500}{50 + j47,12} = \frac{4479e^{j19,6^\circ}}{68,7e^{j43,3^\circ}} = \\ &= 65,2e^{-j23,7^\circ} \text{ Ом,} \end{aligned}$$

де $\underline{Z}_M^2 = (j47,12)^2 = j1500 = -2220,3 \text{ Ом}^2.$

Тепер схема заміщення (рис. 2.30) спроститься і прийме вигляд рис. 2.31.

Комплексний еквівалентний опір паралельного з'єднання третьої та четвертої віток з врахуванням взаємної індукції між ними при паралельному зустрічному включенні індуктивностей визначаємо за формулою (2.110):

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{-34} &= \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_4 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + 2\underline{Z}_M} = \frac{4220,3 + j1500}{50 + 40 + j30 + 2 \times j47,12} = \\ &= \frac{4479e^{j19,6^\circ}}{153,4e^{j54,1^\circ}} = 29,2e^{-j34,5^\circ} \text{ Ом} = (24,1 - j16,5) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

З врахуванням опору \underline{Z}'_{-34} схема заміщення прийме вигляд рис. 2.32:

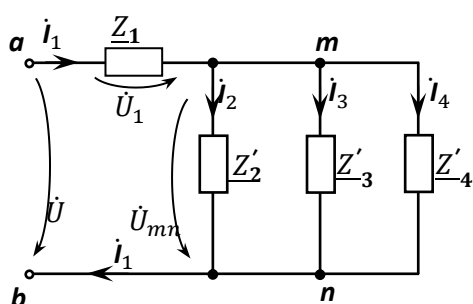


Рис. 2.31

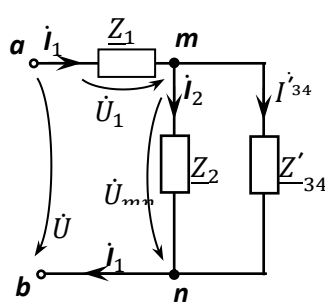


Рис. 2.32

Комплексний еквівалентний опір паралельного з'єднання опорів \underline{Z}'_{-34} і \underline{Z}_2 (рис. 2.32):

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{-mn} &= \frac{\underline{Z}'_{-34} \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}'_{-34} + \underline{Z}_2} = \frac{29,2e^{-j34,5^\circ} \times 50e^{-j53,1^\circ}}{24,1 - j16,5 + 30 - j40} = \\ &= \frac{1460e^{-j87,6^\circ}}{78,2e^{-j46,2^\circ}} = 18,67e^{-j41,4^\circ} = (14 - j12,4) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплексний еквівалентний опір всього кола:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}'_{mn} = 20 + j30 + 14 - j12,4 = 38,3e^{j27,4^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексний загальний струм у колі:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_e = 300e^{j0^\circ} / 38,3e^{j27,4^\circ} = 7,83e^{-j27,4^\circ} = (6,95 - j3,6) \text{ А}$$

одночасно є струмом першої вітки і тому комплексний спад напруги на першій вітці:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_1 \times \dot{I}_1 = 36,1e^{j56,3^\circ} \times 7,93e^{-j27,4^\circ} = 282,7e^{j28,9^\circ} = \\ &= (247,5 + j136,6) \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексна міжвузлова напруга:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mn} &= \underline{Z}'_{mn} \times \dot{I}_1 = 18,67e^{-j41,4^\circ} \times 7,83e^{-j27,4^\circ} = \\ &= 146,2e^{-j68,8^\circ} = (52,9 - j136,6) \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексні струми в паралельних вітках:

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{U}_{mn} / \underline{Z}_2 = 146,2e^{-j68,8^\circ} / 50e^{-j53,1^\circ} = 2,92e^{-j15,7^\circ} = \\ &= (2,81 - j0,79) \text{ А;} \\ \dot{I}_3 &= \dot{U}_{mn} / \underline{Z}'_3 = 146,2e^{-j68,8^\circ} / 51,54e^{-j43,3^\circ} = 2,84e^{-j25,5^\circ} = \\ &= (2,57 - j1,21) \text{ А;} \\ \dot{I}_4 &= \dot{U}_{mn} / \underline{Z}'_4 = 146,2e^{-j68,8^\circ} / 65,2e^{-j23,7^\circ} = 2,24e^{-j45,3^\circ} = \\ &= (1,58 - j1,59) \text{ А.} \end{aligned}$$

Перевірка

Рівняння першого закону Кірхгофа для комплексних струмів у вузлі m (рис. 2.31):

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4; \\ 6,95 - j3,6 &= 2,81 - j0,79 + 2,57 - j1,21 + 1,58 - j1,59 \end{aligned}$$

або $(6,95 - j3,6) \text{ А} \cong (6,96 - j3,59) \text{ А.}$

Згідно з другим законом Кірхгофа рівняння комплексних напруг для контуру $a - m - n - b - a$ (рис. 2.32):

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_{mn}; \quad 300 = 247,5 + j136,6 + 52,9 - j136,3; \\ 300 \text{ В} &\approx (300,4 + j0,3) \text{ В.} \end{aligned}$$

Отже, розрахунки проведені правильно.

Комплексні спади напруг на опорах \underline{Z}_3 й \underline{Z}_4 :

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 &= \underline{Z}_3 \times \dot{I}_3 = 50 \times 2,84e^{-j25,5^\circ} = 142e^{-j25,5^\circ} = \\ &= (128,2 - j61,1) \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_4 &= \underline{Z}_4 \times \dot{I}_4 = 50e^{j36,9^\circ} \times 2,24e^{-j45,1^\circ} = 112e^{-j8,2^\circ} = \\ &= (110,9 - j16) \text{ В;} \end{aligned}$$

Комплексні спади напруг на опорах взаємоіндукції в третій і в четвертій вітках:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{3M} &= \underline{Z}_M \times \dot{I}_4 = 47,12e^{j90^\circ} \times 2,24e^{-j45,1^\circ} = 105,6e^{j44,9^\circ} = \\ &= (74,8 + j74,5) \text{ В;} \quad \dot{U}_{4M} = \underline{Z}_M \times \dot{I}_3 = 47,12e^{j90^\circ} \times 2,84e^{-j25,5^\circ} = \\ &= 133,8e^{j64,5^\circ} = \\ &= (57,6 + j120,8) \text{ В.} \end{aligned}$$

Перевірка

Комплексна напруга \dot{U}_{mn} прикладена одночасно до третьої та четвертої віток і, тому, з врахуванням взаємоіндукції між ними при зустрічному паралельному включенні індуктивностей у цих вітках (рис. 2.30) рівняння напруг запишуться:

$$\begin{aligned} \text{для третьої вітки:} \quad & \dot{U}_{mn} = \dot{U}_3 - \dot{U}_{3M}; \\ & 52,9 - j136,3 = 128,2 - j61,1 - 74,8 - j74,5 \\ \text{або} \quad & (52,9 - j136,3)B \approx (54,4 - j135,6)B \\ \text{або} \quad & 146,2e^{-j68,8^\circ} B \cong 146,1e^{-j68,1^\circ} B; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для четвертої вітки:} \quad & \dot{U}_{mn} = \dot{U}_4 - \dot{U}_{4M}; \\ & 52,9 - j136,3 = 110,9 - j16 - 57,6 - j120,8 \\ \text{або} \quad & (52,9 - j136,3)B \cong (53,3 - j136,8)B \\ \text{або} \quad & 146,2e^{-j68,8^\circ} B \cong 146,8e^{-j68,7^\circ} B. \end{aligned}$$

Як видно, розходження невелике.

2.14.4. Обчислення миттєвих значень струмів і напруг

використаємо розраховані вище значення комплексних струмів та напруг:
 $\dot{U} = 300e^{j0^\circ} B$; $\dot{U}_1 = 282,7e^{j28,9^\circ} B$; $\dot{U}_{mn} = 146,2e^{-j68,8^\circ} B$; $\dot{U}_3 = 142e^{-j25,5^\circ} B$;
 $\dot{U}_4 = 112e^{-j8,2^\circ} B$; $\dot{U}_{3M} = 105,6e^{j44,9^\circ} B$; $\dot{U}_{4M} = 133,8e^{j64,65^\circ} B$.
 $\dot{I}_1 = 7,83e^{-j27,4^\circ} A$; $\dot{I}_2 = 2,92e^{-j15,7^\circ} A$; $\dot{I}_3 = 2,84e^{-j25,5^\circ} A$; $\dot{I}_4 = 2,24e^{-j45,1^\circ} A$.

Миттєві значення синусоїдних величин рівні уявним частинам їх комплексних виразів, записаних в алгебраїчній формі:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= 300B; \\ u(t) &= U_m \sin \omega t = 300\sqrt{2} \sin \omega t = 424 \sin \omega t B; \\ \dot{U}_1 &= 282,7e^{j28,9^\circ} B; \\ u_1(t) &= 282,7\sqrt{2} \sin(\omega t + 28,9^\circ) = 399,7 \sin(\omega t + 28,9^\circ) B; \\ \dot{U}_{mn} &= 133,8e^{-j64,5^\circ} B; \\ u_{mn}(t) &= 133,8\sqrt{2} \sin(\omega t - 64,5^\circ) = 189,2 \sin(\omega t - 64,5^\circ) B; \\ \dot{I}_1 &= 7,83e^{-j27,4^\circ} A; \\ i_1(t) &= 7,83\sqrt{2} \sin(\omega t - 27,4^\circ) = 11,1 \sin(\omega t - 27,4^\circ) A; \\ \dot{I}_2 &= 2,92e^{-j15,7^\circ} A; \\ i_2(t) &= 2,92\sqrt{2} \sin(\omega t - 15,7^\circ) = 4,1 \sin(\omega t - 15,7^\circ) A; \\ \dot{I}_3 &= 2,84e^{-j25,5^\circ} A; \\ i_3(t) &= 2,84\sqrt{2} \sin(\omega t - 25,5^\circ) = 4 \sin(\omega t - 25,5^\circ) A; \\ \dot{I}_4 &= 2,24e^{-j45,1^\circ} A; \\ i_4(t) &= 2,24\sqrt{2} \sin(\omega t - 45,1^\circ) = 3,2 \sin(\omega t - 45,1^\circ) A; \\ \dot{U}_3 &= 142e^{-j25,5^\circ} B; \\ u_3(t) &= 142\sqrt{2} \sin(\omega t - 25,5^\circ) = 201 \sin(\omega t - 25,5^\circ) B; \\ \dot{U}_4 &= 112e^{-j8,2^\circ} B; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4(t) &= 112\sqrt{2} \sin(\omega t - 8,2^\circ) = 158,4 \sin(\omega t - 8,2^\circ) B; \\
\dot{U}_{3M} &= 105e^{j44,9^\circ} B; \\
u_{3M}(t) &= 105\sqrt{2} \sin(\omega t + 44,9^\circ) = 149,3 \sin(\omega t + 44,9^\circ) B; \\
\dot{U}_{4M} &= 133,8e^{j64,5^\circ} B; \\
u_{4M}(t) &= 133,8\sqrt{2} \sin(\omega t + 64,5^\circ) = 189,2 \sin(\omega t + 64,5^\circ) B.
\end{aligned}$$

2.14.5. Обчислення потужностей кола

Комплексна потужність, що споживається ділянкою кола, рівна добутку комплексної напруги на цій ділянці й спряженого значення комплексного струму цієї ділянки:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_1 &= \dot{U}_1 \times \mathbf{I}_1^* = 282,7e^{j28,9^\circ} \times 7,83e^{j27,4^\circ} = 2213e^{j56,3^\circ} = \\
&= (1228 + j1841) \text{ ВА}; \\
\tilde{S}_2 &= \dot{U}_{mn} \times \mathbf{I}_2^* = 146,2e^{-j68,8^\circ} \times 2,92e^{j15,7^\circ} = 426,9e^{-j53,1^\circ} = \\
&= (256,3 - j341,4) \text{ ВА}; \\
\tilde{S}_3 &= \dot{U}_{mn} \times \mathbf{I}_3^* = 146,2e^{-j68,8^\circ} \times 2,84e^{j25,5^\circ} = 415,2e^{-j43,3^\circ} = \\
&= (302,2 - j284,8) \text{ ВА}; \\
\tilde{S}_4 &= \dot{U}_{mn} \times \mathbf{I}_4^* = 146,2e^{-j68,8^\circ} \times 2,24e^{j45,1^\circ} = 327,5e^{-j23,7^\circ} = \\
&= (229,7 - j131,7) \text{ ВА}.
\end{aligned}$$

Комплексна потужність, що подається в коло:

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \dot{U} \times \mathbf{I}_1^* = 300e^{j0^\circ} \times 7,83e^{j27,4^\circ} = 2349e^{j27,4^\circ} = \\
&= (2085 + j1081) \text{ ВА}.
\end{aligned}$$

Баланс потужностей: комплексна потужність, яка споживається на всіх ділянках кола, повинна бути рівна комплексній потужності, що подається в коло:

$$\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4 = \tilde{S}.$$

Підставивши числові значення, одержимо

$$\begin{aligned}
&1228 + j1841 + 256,3 - j341,4 + 302,2 - \\
&-j284,8 + 299,9 - j131,7 = 2085,5 + j1081 \\
\text{або} \quad &(2086 + 1083) \text{ ВА} \cong (2085 + 1081) \text{ ВА}.
\end{aligned}$$

Звідси визначимо баланс активної та реактивної потужностей:

$$2086 \text{ Вт} \cong 2085 \text{ Вт}; \quad 1083 \text{ ВАр} \cong 1081 \text{ ВАр}.$$

Похибка в межах допустимого.

Якщо увімкнути в третю і в четверту вітки ватметри, то вони виміряють активні потужності, що споживаються цими вітками і які виражаються дійсними частинами комплексних потужностей \tilde{S}_3 й \tilde{S}_4 :

$$\begin{aligned}
P_3 &= \text{Re}\{\tilde{S}_3\} = \text{Re}\{302,2 - j284,8\} = 302,2 \text{ Вт}; \\
P_4 &= \text{Re}\{\tilde{S}_4\} = \text{Re}\{229,7 - j131,7\} = 229,7 \text{ Вт}.
\end{aligned}$$

Теплові втрати в третій і в четвертій вітках

$$P'_3 = R_3 \times I_3^2 = 50 \times 2,84^2 = 403,3 \text{Вт};$$

$$P'_4 = R_4 \times I_4^2 = 40 \times 2,24^2 = 200,7 \text{Вт}.$$

Порівнявши покази ватметрів і теплові втрати у вітках

$$P_3 - P'_3 = 302,2 - 403,3 = -101,1 \text{Вт};$$

$$P_4 - P'_4 = 299,9 - 200,7 = 99,2 \text{Вт},$$

бачимо, що частина активної потужності $\Delta P \cong 100 \text{Вт}$ передається з четвертої вітки в третю шляхом взаємної індукції.