

## Тема 7. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 7.1. Схема заміщення лінії

Найбільш характерним прикладом кола з розподіленими параметрами є електрична довга лінія.

До кіл з розподіленими параметрами відносяться довгі лінії електропередачі (ЛЕП), лінії телеграфного і телефонного зв'язку, радіотрансляційні лінії, лінії телекерування і телевимірювання тощо.

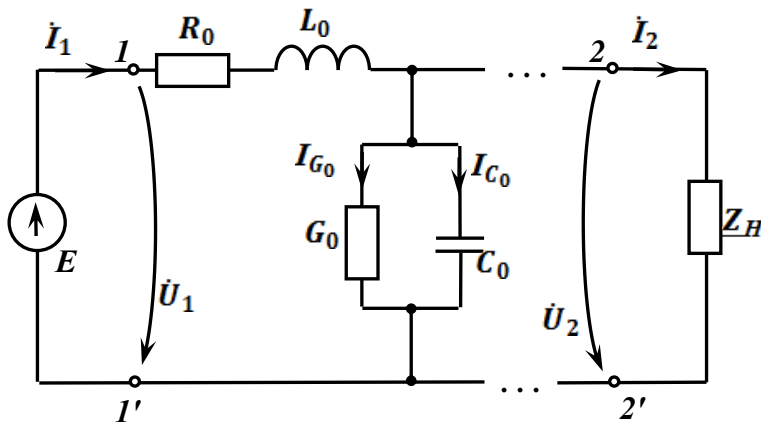


Рис. 7.1

На рис. 7.1 наведена схема електричного кола, що складається з джерела і приймача електричної енергії, які з'єднані двопровідною лінією. У загальному уявленні – це нерозгалужене коло з однаковим струмом у всіх його елементах. Таке представлення правильне, якщо не враховувати струми, обумовлені ємністю між проводами (ємнісні струми) і провідністю ізоляції (струми втрат крізь ізоляцію).

Ємнісні струми і струми втрат пропорційні напрузі між проводами; крім того, ємнісні струми збільшуються з ростом частоти, тобто швидкості зміни напруги. В зв'язку з цим при високій напрузі або великій частоті, а також при

великій довжині лінії ємнісні струми і струми втрат стають значними і їх необхідно враховувати.

Струми між проводами існують на будь-якому маленькому відрізку лінії, завдяки цьому струм у проводах у міру віддалення від початку лінії зменшується.

Напруга між проводами також неоднакова уздовж лінії. Вона зменшується в напрямку від початку до кінця лінії, оскільки росте спад напруги, обумовлений активним та індуктивним опорами проводів.

Активний опір, індуктивність, провідність і ємність вважаються рівномірно розподіленими уздовж лінії, а  $R_0, L_0, G_0, C_0$  – значення цих параметрів на одиницю довжини лінії.

Лінія з рівномірним розподілом параметрів називається однорідною.

Реальні лінії однорідними можна вважати лише наближено, так як їх параметри строго вважати рівномірно розподіленими не можна. Наприклад, провідність повітряної лінії зосереджена в основному на опорах, і завдяки провисанню проводів ємність відносно землі уздовж прольоту не однакова.

Електричні кола, в яких параметри розподілені уздовж їх довжини, називаються колами з розподіленими параметрами.

Слід зауважити, що при строгому підході будь-яке електричне коло має розподілені параметри.

У багатьох випадках не ставиться задача виявлення величин і співвідношень, які б характеризували внутрішні процеси у пристроях, що утворюють електричне коло (електричні машини, трансформатори, лінії тощо), а треба встановити величини і співвідношення, які відображають їх зовнішні зв'язки між собою. Тоді ці пристрої розглядаються в цілому і замінюються у схемах двополюсниками або чотириполюсниками з зосередженими параметрами  $R, L, C$ .

В інших випадках шукають величини та їх співвідношення для аналізу внутрішніх процесів в електричних пристроях (наприклад, визначається напруга і

струм у різних пунктах лінії електропередачі, в окремих витках обмотки трансформатора тощо); тоді пристрої розглядаються як кола з розподіленими параметрами. Залежно від цілей і необхідної точності виконання розрахунків можна враховувати всі чотири параметри  $R_0, L_0, G_0, C_0$  або деякі з них. При розгляді лінії електропередачі напругою до 35 кВ при частоті 50 Гц часто не враховують ємнісні струми і струми втрат, тобто параметри  $G_0$  і  $C_0$  вважаються рівними нулю.

При високій частоті (наприклад, в радіотехнічних пристроях) або при коротких імпульсах напруги, які виникають, наприклад, в лініях електропередачі при грозових розрядах, ємнісні струми між проводами можуть бути порівняно великими і нехтувати ними не можна.

Разом з тим, при високій частоті і малій довжині лінії буває можливим в окремих випадках знехтувати активним опором  $R_0$  і провідністю  $G_0$ . При такому спрощенні одержується лінія без втрат.

## 7.2. Основні рівняння однорідної лінії

При синусоїдній напрузі джерела живлення напруга і струм в лінії на будь-якій відстані  $x$  від її початку змінюються в часі. Разом з тим, напруга і струм змінюються уздовж лінії.

Диференціальні рівняння однорідної лінії, в які входять комплекси струмів і напруг, що змінюються в часі синусоїдно, а також їх похідні по змінній координаті довжини  $x$  мають вигляд:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\dot{I} = \underline{Z}_0\dot{I}; \quad (7.1)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U} = \underline{Y}_0\dot{U}, \quad (7.2)$$

де  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  – повний комплексний опір одиниці довжини лінії, який визначається повздовжніми її параметрами  $R_0$  й  $L_0$ ;  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  – повна комплексна провідність одиниці довжини лінії, яка визначається поперечними параметрами  $G_0$  і  $C_0$ .

Повздовжні і поперечні параметри лінії характеризують абсолютно різні фізичні явища і через це між собою не зв'язані.

Щоб одержати рівняння, в яких змінними були б тільки струм і напруга, продиференціюємо рівняння (7.1) і (7.2) по  $x$ :

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\dot{I}}{dx}; \quad -\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \frac{d\dot{U}}{dx}.$$

Підставивши сюди вирази перших похідних  $\frac{d\dot{I}}{dx}$  і  $\frac{d\dot{U}}{dx}$  з рівнянь (7.1) і (7.2), одержимо лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U}, \quad (7.3)$$

$$\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{I}. \quad (7.4)$$

Розв'язком рівняння (7.3) є вираз:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma} \cdot x} + \dot{A}_2 e^{+\underline{\gamma} \cdot x}. \quad (7.5)$$

Розв'язавши сумісно рівняння (7.1) і (7.5), одержимо вираз для комплексного струму в лінії:

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \times \frac{d\dot{U}}{dx} = \left(\frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0}\right) \times (\dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma} \cdot x} - \dot{A}_2 e^{+\underline{\gamma} \cdot x}), \quad (7.6)$$

де  $\dot{A}_1$  й  $\dot{A}_2$  – постійні комплексні коефіцієнти, які визначаються умовами на початку або в кінці лінії,  $\underline{\gamma}$  – коефіцієнт поширення електромагнітної хвилі вздовж лінії (також комплексне число):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \times \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \times (G_0 + j\omega C_0)}. \quad (7.7)$$

Враховуючи формулу (7.7) вираз для струму запишеться так:

$$\dot{I} = \left(\frac{\sqrt{\underline{Z}_0 \times \underline{Y}_0}}{\underline{Z}_0}\right) \times (\dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma} \cdot x} - \dot{A}_2 e^{+\underline{\gamma} \cdot x})$$

або

$$\underline{\mathcal{R}} = \frac{(\underline{\mathcal{A}}_1 e^{-\underline{\gamma} \cdot x} - \underline{\mathcal{A}}_2 e^{+\underline{\gamma} \cdot x})}{\sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}} = \frac{(\underline{\mathcal{A}}_1 e^{-\underline{\gamma} \cdot x} - \underline{\mathcal{A}}_2 e^{+\underline{\gamma} \cdot x})}{\underline{Z}_C}. \quad (7.8)$$

Величина

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = Z_C \times e^{j\theta^\circ} \quad (7.9)$$

має розмірність опору і носить назву характеристичного або хвильового опору лінії.

Постійні коефіцієнти  $\dot{A}_1$  й  $\dot{A}_2$  легко знаходяться, якщо відомий режим на початку лінії, тобто відомі  $\dot{U}_1$  та  $\dot{I}_1$  при  $x = 0$ .

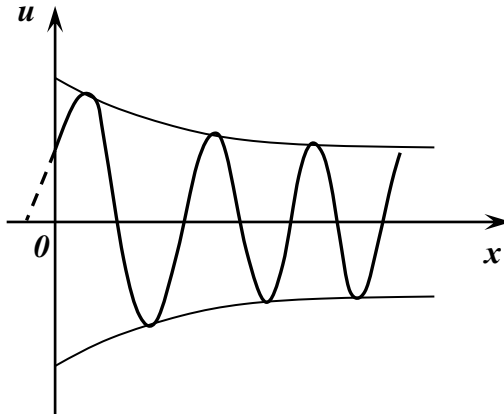
З рівностей (7.5) і (7.8) при  $x = 0$  одержуємо:

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_1 - \dot{A}_2}{Z_c},$$

Звідки

$$\dot{A}_1 = \frac{(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \times Z_c)}{2}; \quad (7.10)$$

$$\dot{A}_2 = \frac{(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \times Z_c)}{2}. \quad (7.11)$$



Коефіцієнт поширення електромагнітної хвилі, як комплексна величина, може бути представлений сумою дійсної та уявної складових

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta. \quad (7.12)$$

Цей коефіцієнт характеризує дві сторони електромагнітного процесу в лінії: затухання амплітуд і зміну фази напруги й струму в залежності від відстані від початку лінії. Відповідно до цього дійсна частина  $\alpha$  комплексу називається коефіцієнтом затухання, а уявна  $-\beta$  – коефіцієнтом фази.

Коефіцієнт затухання  $\alpha$  показує ступінь затухання амплітуди коливань при поширенні хвилі на одиницю довжини.

На рис. 7.2 наведено графік розподілу напруги вздовж лінії в деякий фіксований момент часу. Із графіка видно, що напруга вздовж лінії розподілена за періодичним законом, а амплітуди напруги згасають за експоненціальним законом в напрямку від початку до кінця лінії.

### 7.3. Режими роботи безвтратної лінії

#### 7.3.1. Усталений режим у безвтратній лінії

Одержані в попередніх параграфах рівняння можна застосувати для лінії з малими втратами, покладаючи  $R_0 = 0, G_0 = 0$ .

Тоді, згідно з формулами (7.7) і (7.12) коефіцієнт згашання  $\alpha$  стає рівним нулю, а коефіцієнт поширення хвилі  $\gamma$  – рівним коефіцієнту фази  $\beta$ :

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(0 + j\omega L_0) \times (0 + j\omega C_0)} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta. \quad (7.13)$$

Значить, амплітуда синусоїдної хвилі вздовж лінії залишається незмінною.

Хвильовий опір лінії згідно з (7.9):

$$\underline{Z}_c = \sqrt{(0 + j\omega L_0)/(0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0/C_0} = Z_c. \quad (7.14)$$

Рівняння напруги (7.5) і струму (7.8) для безвтратної лінії набудуть вигляду:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{+j\beta x}; \quad (7.15)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{Z_c} e^{-j\beta x} + \frac{\underline{A}_2}{Z_c} e^{+j\beta x}. \quad (7.16)$$

Підставимо в (7.15) і (7.16) замість коефіцієнтів  $\underline{A}_1$  й  $\underline{A}_2$  їх вирази з (7.10) й (7.11) через відомі комплексні напругу  $\underline{U}_1$  і струм  $\underline{I}_1$  на початку лінії ( $x = 0$ ). Крім того, проведемо заміну:

$$e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j \sin(\beta x);$$

$$e^{-j\beta x} = \cos(\beta x) - j \sin(\beta x).$$

Після перетворення рівнянь (7.15) і (7.16) одержимо:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cos(\beta x) + j \dot{I}_1 Z_C \sin(\beta x); \quad (7.17)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \cos(\beta x) - j \frac{\dot{U}_1}{Z_C} \sin(\beta x). \quad (7.18)$$

З цих рівнянь можна також одержати вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії, якщо відомі напруга  $\dot{U}_2$  й струм  $\dot{I}_2$  в кінці лінії, при умові відліку відстані від кінця лінії:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j \dot{I}_2 Z_C \sin(\beta x); \quad (7.19)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin(\beta x). \quad (7.20)$$

За допомогою виразів (7.19) і (7.20) можна досліджувати різні режими роботи лінії без втрат.

### 7.3.2. Неробочий (холостий) режим лінії

При неробочому режимі  $\dot{I}_2 = 0$  і вирази (7.19) і (7.20) набудуть вигляду:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x); \quad (7.21)$$

$$\dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin(\beta x) = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} e^{j90^\circ} \sin(\beta x). \quad (7.22)$$

Напруга і струм уздовж лінії в будь-який момент часу розподілені за синусоїдним законом, причому, в пунктах, де напруга рівна нулю, струм має найбільше значення, а в пунктах з максимальною напругою струм рівний нулю.

*Точки з нульовим значенням напруги або струму називаються вузлами, а точки з найбільшим значенням напруги або струму називаються пучностями (видогами).*

Таким чином, вузли напруги за місцем розміщення на лінії співпадають з пучностями струму.

Нехай вектор напруги на кінці лінії ( $x = 0$ ) направлений по дійсній осі комплексної площини, тобто початкова часова фаза  $\psi_{U_2} = 0^\circ$ :

$$u_2(0, t) = U_{2m} \sin(\omega t) \quad \text{або} \quad \dot{U}_2 = U_2 \times e^{j0^\circ} = U_2.$$

Миттєві значення напруги й струму в будь-якій точці лінії в цьому випадку запишуться так:

$$u(x, t) = U_{2m} \cos(\beta x) \times \sin(\omega t); \quad (7.23)$$

$$i(x, t) = \frac{U_{2m}}{Z_C} \sin(\beta x) \times \cos(\omega t). \quad (7.24)$$

При  $\omega t = 0$   $\sin(\omega t) = 0$  й  $u(x, 0) = 0$ ; отже в усіх точках лінії напруга відсутня. Потім напруга збільшується у всіх точках лінії, крім вузлів, і при  $\omega t = \pi/2$  досягає найбільшого значення.

Але ці найбільші значення для кожної точки лінії різні. В точці пучності напруга досягає найбільшої величини  $U_{2m}$ , а у вузлі вона завжди рівна нулю.

Електромагнітний процес, який описується виразами (7.23) і (7.24), називається стоячою хвилею.

Використавши перетворення

$$\cos(\beta x) \times \sin \omega t = \frac{\sin(\omega t + \beta x) + \sin(\omega t - \beta x)}{2},$$

вирази (7.23) і (7.24) представимо сумою двох складових, кожна з яких є рівнянням біжучої хвилі:

$$u(x, t) = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta x); \quad (7.25)$$

$$i(x, t) = \frac{U_{2m}}{2Z_C} \sin(\omega t + \beta x) - \frac{U_{2m}}{2Z_C} \sin(\omega t - \beta x). \quad (7.26)$$

Перший доданок у цих рівняннях – пряма хвиля, яка поширюється від початку до кінця лінії; другий доданок – зворотна хвиля з такою ж амплітудою.

У цьому можна переконались, розглянувши більш детально одну із складових, наприклад, першу складову в рівнянні напруги.

Припустимо, що деяке значення напруги  $u'$  в момент часу  $t$  має місце в пункті лінії, просторове положення якого визначається відстанню  $x$  від кінця або початку лінії:



$$u' = u(x; t) = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x). \quad (7.27)$$

Поширення хвилі напруги означає, що через нескінченно малий проміжок часу  $dt$  така ж напруга  $u'$  виникає у другому пункті лінії, який віддалений від першого на нескінченно малу відстань  $dx$ :

$$u' = u(x + dx; t + dt) = \frac{U_{2m}}{2} \sin[\omega(t + dt) + \beta(x + dx)]. \quad (7.28)$$

Рівність напруг  $u(x; t)$  й  $u(x + dx; t + dt)$  можлива при рівності аргументів синусів в обох рівняннях, тобто при

$$\omega t + \beta x = \omega t + \omega dt + \beta x + \beta dx. \quad (7.29)$$

Звідси

$$-\omega \times dt = \beta \times dx$$

або

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = V_{\Phi}. \quad (7.30)$$

Відношення приросту відстані  $dx$  до приросту часу  $dt$  характеризує швидкість поширення хвилі напруги вздовж лінії. Вона називається фазовою швидкістю хвилі. Знак «мінус» вказує на те, що хвиля рухається від початку до кінця лінії (відстань  $x$  зменшується).

Аналогічним чином можна показати, що друга складова в рівнянні (7.25) являє собою хвилю напруги, яка поширюється у зворотному напрямку ( $x$  збільшується).

Хвиля, яка поширюється від початку до кінця лінії, називається прямою або падаючою хвилею. Хвиля, яка поширюється від кінця лінії до початку, називається зворотною або відбитою хвилею.

Таким чином, стояча хвиля напруги є сумою, а стояча хвиля струму – різницею прямої (падаючої) і зворотної (відбитої) хвиль однакової амплітуди, тобто:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{nad} + u_{sidb}; \\ i &= \frac{u_{nad}}{Z_C} - \frac{u_{sidb}}{Z_C} = i_{nad} - i_{sidb}. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Звідси випливає, що хвильовий опір лінії виражається відношенням напруги падаючої хвилі до

струму падаючої хвилі, або аналогічним відношенням для відбитих хвиль.

Великий інтерес являє собою також відстань, на яку біжуча хвиля поширюється за час одного періоду синусоїдної напруги або струму.

З формули (7.30) видно, що фазова швидкість є сталою величиною і тому

$$x = \frac{\omega t}{\beta}.$$

*Шлях, пройдений хвилею за час періоду  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,*

$$\lambda = V_{\Phi} \times T = \frac{\omega T}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta} \text{ називається довжиною хвилі.}$$

Для лінії без втрат фазова швидкість

$$V_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \times \sqrt{L_0 \times C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \times C_0}}, \quad (7.32)$$

а довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \times \sqrt{L_0 \times C_0}} = \frac{1}{f \sqrt{L_0 \times C_0}}. \quad (7.33)$$

Враховуючи, що для повітряної лінії без втрат

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \times \ln(2D/d) \quad \text{і} \quad C_0 = \frac{\pi \times \varepsilon_0}{\ln(2D/d)},$$

фазова швидкість хвилі прийме значення

$$V_{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \times C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \times \mu_0}} = c_0 = 3 \times 10^8 \text{ м/с}. \quad (7.34)$$

*Таким чином, фазова швидкість електромагнітної хвилі в повітряній лінії без втрат рівна швидкості світла.*

Якщо середовище, в якому поширюється електромагнітна хвиля, характеризується значенням діелектричної проникності  $\varepsilon_a$  і магнітної проникності  $\mu_a$ , то

$$V_{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \times \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \times \varepsilon \times \mu_0 \times \mu}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \times \mu}}. \quad (7.35)$$

Наприклад, якщо для кабелю  $\mu = 1$  й  $\varepsilon \approx 3$ , то фазова швидкість менша від швидкості світла в  $\sqrt{3}$  разів. Приймаючи  $V_{\Phi} = c_0$  при частоті  $f = 50 \text{ Гц}$  одержимо довжину хвилі

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{300000}{50} = 6000 \text{ км.}$$

При частоті  $f = 50 \text{ Гц}$  в реальних лініях електропередач 6, ..., 220 кВ, довжина яких значно менша

6000км, вздовж лінії вкладається тільки невелика частина довжини хвилі. Тому хвилеподібна зміна напруги й струму вздовж цих ліній при  $f = 50\text{Гц}$  практично не спостерігається. У лініях далеких передач з напругою вище 500кВ зміна напруги вздовж лінії стає помітною і приходить приймати спеціальні міри для її вирівнювання.

### 7.3.3. Коротке замикання лінії

Аналогічна картина утворення стоячих хвиль спостерігається і при короткому замиканні безвтратної лінії. Відмінність електромагнітних процесів у лінії без втрат в неробочому режимі і при короткому замиканні полягає лише в тому, що змінюється розміщення пучностей та вузлів напруги й струму по довжині лінії: в тих пунктах лінії, де при н.р. знаходяться пучності напруги й вузли струму, при к.з. знаходяться пучності струму й вузли напруги. Наприклад, в кінці розімкненої лінії є пучність напруги і вузол струму ( $\dot{I}_2 = 0$ ), а в кінці короткозамкненої лінії пучність струму і вузол напруги ( $\dot{U}_2 = 0$ ).

### 7.3.4. Режим з угодженням навантаженням

Режим роботи в лінії називається узгодженням, якщо опір навантаження в кінці лінії рівний її хвильовому опору ( $Z_2 = Z_C$ ).

У цьому випадку  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \times Z_C$  а вирази (7.19) і (7.20) запишуться так

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j\dot{U}_2 \sin(\beta x) = \\ &= \dot{U}_2 \times [\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)]; \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos(\beta x) + j\dot{I}_2 \sin(\beta x) = \\ &= \dot{I}_2 \times [\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Враховуючи, що

$$\cos(\beta x) + j \sin(\beta x) = e^{j\beta x},$$

вирази для напруги і струму можна записати простіше

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta x}; \quad (7.38)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 e^{j\beta x}. \quad (7.39)$$

Припустимо, що синусоїдна напруга в кінці лінії має початкову фазу  $\psi_{U_2} = 0^\circ$ , тоді  $\dot{U}_2 = U_2 e^{j\omega t}$ .

Якщо навантаження лінії активне ( $Z_2 = R_2 = Z_C$ ), то струм і напруга співпадають за фазою ( $\psi_{i_2} = 0^\circ$ ) і комплекс струму запишеться:

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\omega t}.$$

Тоді згідно з (7.36),..., (7.39) комплекси напруги й струму вздовж лінії:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta x} = U_2 e^{j\omega t} \times e^{j\beta x} = U_2 e^{j(\omega t + \beta x)}; \quad (7.40)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 e^{j\beta x} = I_2 e^{j\omega t} \times e^{j\beta x} = I_2 e^{j(\omega t + \beta x)}. \quad (7.41)$$

Миттєві значення напруги й струму в будь-якому пункті лінії на відстані  $x$  від її кінця в цьому випадку запишуться виразами:

$$u(x, t) = U_{2m} \sin(\omega t + \beta x); \quad (7.42)$$

$$i(x, t) = I_{2m} \sin(\omega t + \beta x), \quad (7.43)$$

що являють собою рівняння біжучих хвиль напруги й струму, які поширюються від початку до кінця лінії (прямі хвилі) з фазовою швидкістю  $V_\Phi = \omega/\beta$ .

*При узгодженому навантаженні відбитих хвиль в лінії немає, значить енергія падаючої хвилі повністю поглинається навантаженням (споживачем).*

### 7.3.5. Режим з неузгодженим навантаженням

Навантаження лінії називається неузгодженим, якщо опір навантаження  $Z_2$  в кінці лінії не рівний хвильовому опорі лінії, тобто  $Z_2 \neq Z_C$ .

Розглянемо випадок, коли лінія замкнена на активний опір  $R_2 > Z_C$ . Тоді напруга в кінці лінії визначиться добутком:

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2.$$

Рівняння (7.19) і (7.20) для цього випадку приймуть вигляд:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos(\beta x) + j Z_C \frac{\dot{U}_2}{R_2} \sin(\beta x);$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{R_2} \cos(\beta x) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin(\beta x).$$

Відношення  $k = Z_C / R_2$  називається коефіцієнтом біжучої хвилі. Враховуючи це, а також, якщо замість  $\cos(\beta x)$  в рівняння напруги і замість  $\sin(\beta x)$  в рівняння струму підставити тотожні їм вирази:

$$\cos(\beta x) = k \cos(\beta x) - (1 - k) \cos(\beta x);$$

$$\sin(\beta x) = k \sin(\beta x) + (1 - k) \sin(\beta x),$$

то одержимо

$$\dot{U} = k \dot{U}_2 [\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)] + (1 - k) \dot{U}_2 \cos(\beta x); \quad (7.44)$$

$$\dot{I} = k \frac{\dot{U}_2}{Z_C} [\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)] + (1 - k) \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin(\beta x). \quad (7.45)$$

Першими доданками в цих рівняннях є відповідно вираз (7.36) для напруги і вираз (7.37) для струму. Аналіз цих виразів у попередньому параграфі показав, що вони являють собою рівняння біжучої хвилі напруги і струму.

Другі доданки аналогічні відповідно виразам (7.21) і (7.22), які, як було показано раніше, є рівняннями стоячих хвиль.

Вирази для миттєвих значень напруги й струму при неузгодженому навантаженні:

$$u(x, t) = k U_{2m} \sin(\omega t + \beta x) + (1 - k) U_{2m} \cos(\beta x) \times \sin(\omega t); \quad (7.46)$$

$$i(x, t) = k \frac{U_{2m}}{Z_C} \sin(\omega t + \beta x) + (1 - k) \frac{U_{2m}}{Z_C} \sin(\beta x) \times \cos(\omega t). \quad (7.47)$$

Таким чином, режим в лінії без втрат при неузгодженому навантаженні можна розглядати як накладання біжучих і стоячих хвиль напруги й струму.

Наявність біжучих хвиль у напрямку від початку до кінця лінії вказує на споживання енергії навантаженням. Але в навантаженні поглинається лише частина енергії електромагнітних хвиль, друга частина відбивається від кінця лінії.

Неробочий режим (н.р.) і режим з узгодженим навантаженням лінії без втрат є частковими випадками, які відповідають значенням коефіцієнта біжучої хвилі  $k = 0$  (н.р.) і  $k = 1$  (узгоджене навантаження).

#### 7.4. Коефіцієнти відбиття і заломлення

Представлення електромагнітного процесу в лінії як накладання прямих (падаючих) і зворотних (відбитих) хвиль напруги й струму відповідає загальним рівнянням напруги (7.15) і струму (7.16) в лінії, в правій частині яких записана сума (різниця) двох складових. При аналізі електромагнітних процесів у довгих лініях вводиться поняття про коефіцієнт відбиття  $n$ , який дорівнює відношенню комплексу напруги відбитої хвилі до комплексу напруги падаючої хвилі або аналогічному відношенню комплексів струмів:

$$n = \frac{\dot{U}_{\text{відб}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{I}_{\text{відб}}}{\dot{I}_{\text{пад}}}$$

Представимо напругу й струм в кінці лінії їх падаючими й відбитими складовими згідно з рівняннями (7.25) і (7.26):

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пад}} + \dot{U}_{2\text{відб}} = R_2 \times \dot{I}_2; \quad (7.25,$$

а)

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_C} - \frac{\dot{U}_{2\text{відб}}}{Z_C}. \quad (7.26, \text{ а})$$

При сумісному розв'язку цих рівнянь знаходимо коефіцієнт відбиття:

$$n = \frac{\dot{I}_{2\text{відб}}}{\dot{I}_{2\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_{2\text{відб}}}{\dot{U}_{2\text{пад}}} \times \frac{R_2 - Z_C}{R_2 + Z_C}. \quad (7.48)$$

Підставивши вираз (7.48)  $n$  в рівняння напруги (7.25, а) і в рівняння струму (7.26, а), одержимо:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пад}} + \frac{R_2 - Z_C}{R_2 + Z_C} \dot{U}_{2\text{пад}} = \frac{2\dot{U}_{2\text{пад}}}{1 + \frac{R_2}{Z_C}}; \quad (7.49)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_C} - n \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_C} \times \left(1 - \frac{R_2 - Z_C}{R_2 + Z_C}\right) = \frac{2\dot{I}_{2\text{пад}}}{1 + \frac{R_2}{Z_C}}. \quad (7.50)$$

*Множники*

$$m_U = \frac{2}{1 + \frac{R_2}{Z_C}} = \frac{2R_2}{R_2 + Z_C}; \quad m_I = \frac{2}{1 + \frac{R_2}{Z_C}} = \frac{2Z_C}{R_2 + Z_C} \quad (7.51)$$

відповідно мають назви: коефіцієнт заломлення хвиль напруги і коефіцієнт заломлення хвиль струму. З виразів (7.50) і (7.51) випливає, що коефіцієнт заломлення рівний відношенню комплексів напруги (струму) в розглядуваній точці до комплексу напруги (струму) падаючої хвилі:

$$m = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_{2\text{пад}}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_{2\text{пад}}}.$$

Проаналізуємо одержані формули.

1) При неробочому режимі лінії ( $R_2 = \infty$ ) згідно з виразом (7.48) коефіцієнт відбиття  $n = 1$ , а у відповідності з (7.51) коефіцієнти заломлення в кінці лінії:  $m_U = 2$ ,  $m_I = 0$ .

На підставі (7.49) напруга в кінці лінії рівна подвоєному значенню напруги падаючої хвилі, а струм згідно з виразом (7.50) рівний нулю:

$$\dot{U}_2 = m_U \times \dot{U}_{2\text{пад}} = 2\dot{U}_{2\text{пад}}; \quad \dot{I}_2 = m_I \times \dot{I}_{2\text{пад}} = 0.$$

2) При короткому замиканні лінії ( $R_2 = 0$ ) коефіцієнт відбиття  $n = -1$ ; коефіцієнти заломлення:  $m_U = 0$ ,  $m_I = 2$ . Напруга в кінці лінії рівна нулю, а струм – подвоєному значенню струму падаючої хвилі:

$$\dot{U}_2 = 0; \quad \dot{I}_2 = 2\dot{I}_{2\text{пад}}.$$

3) При узгодженому навантаженні ( $R_2 = Z_C$ ) коефіцієнт відбиття  $n = 0$ , коефіцієнти заломлення  $m_U = 1$ ,  $m_I = 1$ . Напруга й струм у кінці лінії рівні своїм падаючим складовим:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пад}}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2\text{пад}}.$$

4) При неузгодженому навантаженні ( $R_2 > Z_C$ ) коефіцієнт відбиття:

$$0 < n = \frac{1-k}{1+k} < 1,$$

де  $k$  – коефіцієнт біжучої хвилі, а напруга й струм в кінці лінії визначаються виразами:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{2\dot{U}_{2\text{пад}}}{1+k} \quad \text{або} \quad \dot{U}_{2\text{над}} < \dot{U}_2 < 2\dot{U}_{2\text{над}}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{I}_{2\text{пад}}}{1+k} \quad \text{або} \quad \dot{I}_{2\text{над}} > \dot{I}_2 > 0. \end{aligned}$$

## 7.5. Перехідні процеси в однорідній лінії

### 7.5.1. Загальні засади

Як було показано вище, усталений режим в довгій лінії при синусоїдній зміні напруги й струму зручно представляти накладанням прямих і зворотних електромагнітних хвиль.

Перехідні процеси в колах з розподіленими параметрами розглядаються як переміщення прямих і відбитих електромагнітних хвиль, що виникають після увімкнення чи відключення будь-якої ділянки при передачі телемеханічних чи телефонно-телеграфних сигналів по лініях зв'язку і тощо. Перехідні процеси також можуть бути наслідком зміни зовнішніх електричних і магнітних полів, викликаних грозовими явищами.

У колі з зосередженими параметрами перехідний процес починається і протікає одночасно у всіх його елементах.

Особливістю перехідного процесу в довгій лінії є те, що збурення, яке виникає в деякій точці, поширюється вздовж лінії з певною швидкістю, тому перехідний процес в даній точці лінії починається тим пізніше, чим вона далі від місця збурення. При цьому можуть виникнути електромагнітні хвилі різної форми.

### 7.5.2. Поширення електромагнітної хвилі з прямокутним фронтом по безвтратній лінії



Якісний аналіз явища поширення електромагнітної хвилі розглянемо на прикладі хвилі з прямокутним фронтом (рис. 7.3, а) уздовж безвтратної лінії. Для такої лінії характерним є те, що у всіх точках лінії, які розміщені до фронту хвилі, напруга і струм постійні:

$$u = U_0; \quad i = I_0.$$

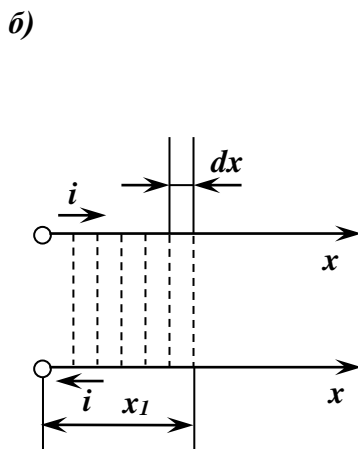
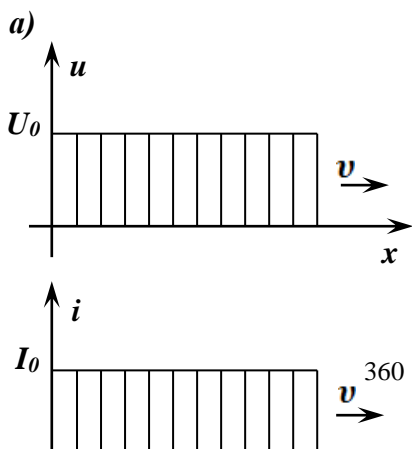
Поширення електромагнітної хвилі з прямокутним фронтом означає, що напруга й струм послідовно в кожному пункті лінії змінюються стрибкоподібно. Але така зміна напруги й струму в реальних колах, що містять в собі індуктивності та ємності, неможлива, оскільки вимагає наявності джерела нескінченно великої потужності, а таких джерел не існує, тому електромагнітну хвилю з прямокутним фронтом необхідно розглядати як деяку ідеалізацію процесу.

Електричні й магнітні явища в лінії – це дві сторони єдиного електромагнітного процесу, але на практиці ці явища зручно розглядати окремо, тобто виділяти з електромагнітної хвилі хвилю напруги і хвилю струму (рис. 7.3)

Одержані вище рівняння (7.1) і (7.2) записані в комплексній формі для синусоїдного закону зміни напруги й струму. Ті ж рівняння для миттєвих значень напруги й струму в однорідній лінії без втрат мають вигляд:

$$-\frac{du}{dx} = L_0 \frac{di}{dt}; \quad (7.52)$$

$$-\frac{di}{dx} = C_0 \frac{du}{dt}. \quad (7.53)$$



Розв'язками цих рівнянь у загальному вигляді є функції:

$$u(x, t) = f_1(x - V \times t) + f_2(x + V \times t) = u_{\text{над}} + u_{\text{відб}}; \quad (7.54)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_C} f_1(x - V \times t) - \frac{1}{Z_C} f_2(x + V \times t) = \\ = i_{\text{над}} - i_{\text{відб}}, \quad (7.55)$$

де  $V = 1/\sqrt{L_0 \times C_0}$  – швидкість поширення електромагнітної хвилі вздовж лінії; ця величина, яка називається хвильовою швидкістю, чисельно рівна фазовій швидкості (формула (7.32));  $Z_C$  – хвильовий опір лінії.

Рівняння (7.54) і (7.55) за своєю структурою подібні до рівнянь (7.25) і (7.26), тому будь-який електромагнітний перехідний процес в лінії можна розглядати як накладання прямих і зворотних хвиль напруги й струму.

Фізичний зміст перехідних процесів у лінії зручно вияснити на простих прикладах.

### 7.5.3. Підключення джерела постійної напруги до нескінченно довгої лінії

Після увімкнення джерела постійної напруги  $U_0$  вздовж лінії буде поширюватися хвиля з прямокутним фронтом, яка буде заряджати лінію послідовно (від однієї точки до іншої) до напруги  $U_0$ . На поверхні проводів появиться заряд, величина якого на одиницю довжини:

$$Q_0 = C_0 U_0.$$

Якщо за час  $dt$  хвиля переміститься на відстань  $dx$ , то лінія одержить додатковий заряд:

$$dQ = Q_0 dx = C_0 U_0 dx.$$

Цей заряд ніби поширюється від джерела по проводах уздовж лінії від точки  $x_1$ , в якій перебуває в цей момент фронт хвилі, створюючи струм:

$$i(x, t) = \frac{dQ}{dt} = C_0 U_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 V = I_0. \quad (7.56)$$

При цьому один провід зарядиться додатно, а другий (зворотний) провід – від’ємно, що відповідає протилежному напрямку струмів у них (рис. 7.3, б).

На відрізку  $dx$  довжини лінії біля фронту хвилі виникнення електричного поля супроводжується струмом зміщення між проводами. Таким чином, коло виявиться замкнутим. При русі хвилі це коло видовжується, але струм залишається постійним і рівним  $I_0$ .

Контур, яким протікає струм, пронизується магнітним потоком, що згідно з правилом правоходового гвинта замикається в площинах, перпендикулярних до осей проводів.

Переміщення хвилі на відстань  $dx$  супроводжується збільшенням магнітного потоку на величину

$$d\Phi = L_0 I_0 dx = L_0 I_0 V dt$$

і наведенням в контурі ЕРС самоіндукції

$$e(x, t) = -\frac{d\Phi}{dt} = L_0 I_0 \frac{dx}{dt} = -L_0 I_0 V, \quad (7.57)$$

яка направлена проти струму, тобто біля фронту хвилі вона спрямована зустрічно напрuzzi  $U_0$  та рівна їй за величиною:

$$U_0 = L_0 I_0 V. \quad (7.58)$$

Відношення напруги до струму дає величину хвильового опору лінії:

$$\frac{U_0}{I_0} = L_0 V = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 \times C_0}} = \sqrt{L_0 / C_0} = Z_C.$$

Енергія, яку віддає джерело в лінію за одиницю часу:

$$P_0 = U_0 I_0. \quad (7.59)$$

На відрізку довжини лінії, рівному одиниці, запасається енергія  $C_0 U_0^2 / 2$  – в електричному полі й  $L_0 I_0^2 / 2$  – в магнітному полі.

На підставі закону збереження енергії потужність джерела струму повинна бути рівна енергії, яка нагромаджується в електромагнітному полі лінії за 1 сек:

$$U_0 I_0 = \left( \frac{c_0 U_0^2}{2} + \frac{L_0 I_0^2}{2} \right) \times V, \quad (7.60)$$

де  $V$  – швидкість поширення електромагнітної хвилі, що рівна відстані, яку пробігає хвиля за 1 сек., створюючи на своєму шляху електричне і магнітне поля.

### 7.5.4. Увімкнення джерела постійної напруги на лінію кінечної довжини

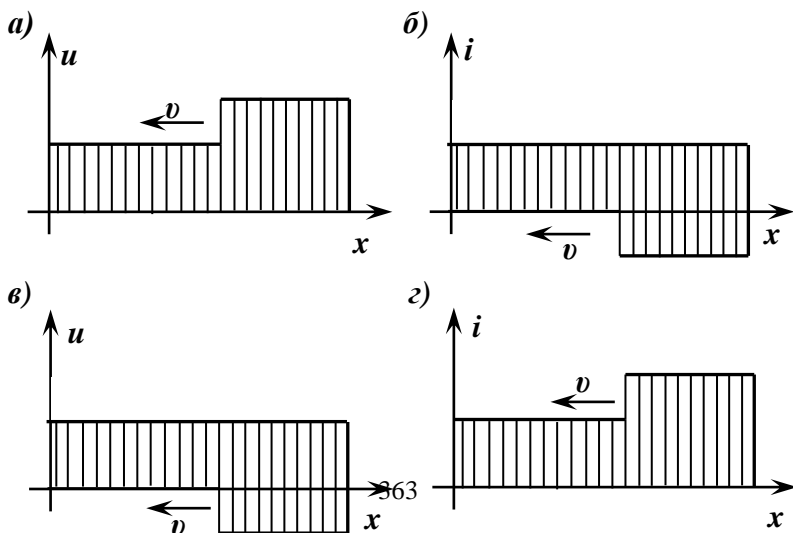
Розглянемо поширення електромагнітних хвиль з урахуванням можливості відбивань від кінця лінії.

Якщо лінія розімкнена на кінці, то коефіцієнт відбиття  $\rho$  і коефіцієнт заломлення  $\tau$  набудуть значень:  $\rho = 1$ ,  $\tau_U = 2$ ,  $\tau_I = 0$ . Значить  $u_2 = 2U_{\text{пад}}$ ,  $i_2 = 0$ .

Відбита хвиля напруги накладається на падаючу хвилю, в результаті чого напруга на лінії подвоюється (рис. 7.4, а, б). При цьому енергія електромагнітної хвилі перетворюється в енергію електричного поля.

При короткому замиканні кінця лінії  $\rho = 1$ ,  $\tau_U = 0$ ,  $\tau_I = 2$ . Цей процес супроводжується переходом всієї енергії хвилі в енергію магнітного поля (рис. 7.4, в, з).

При узгодженому навантаженні ( $R_2 = Z_C$ )  $\rho = 0$ ,  $u_2 = U_{\text{пад}}$ ,  $i_2 = I_{\text{пад}}$ , отже відбитих хвиль немає, а енергія хвилі повністю поглинається навантаженням (рис. 7.4, д, е).



## 7.6. Розрахунок однорідної довгої лінії

### 7.6.1. Розрахунок усталеного режиму в реальній однорідній лінії

#### 7.6.1.1. Постановка задачі

Однорідна лінія довжиною  $l$  з первинними параметрами:  $R_0, L_0, G_0, C_0$  на одиницю довжини замкнена на опір  $Z_H$ , величина якого рівна характеристичному опору  $Z_C$  при частоті  $\omega$  (рис. 7.5). Напряга на приймальному кінці лінії:

$$u_2(0, t) = U'_{2m} \sin \omega t + U''_{2m} \sin(\omega t + \psi_2'').$$

Визначимо: вторинні параметри лінії  $-Z_C, \gamma, \alpha, \beta$ ; довжину хвилі  $\lambda$ ; фазову швидкість поширення хвиль  $V_\Phi$ .

Запишемо вирази для миттєвих значень напруги  $u_1(l, t)$  й струму  $i_1(l, t)$  на початку лінії.

Побудуємо для основної (першої) гармоніки графіки розподілу діючих значень напруги  $U(x)$  і струму  $I(x)$  уздовж лінії, виконавши обчислення для  $n$  рівних інтервалів.

### 7.6.1.2. Загальна характеристика узгодженого режиму роботи лінії

Лінії передачі інформації часто працюють в режимі узгодження, при якому опір навантаження  $\underline{Z}_H$  рівний хвильовому опору  $\underline{Z}_C$  (рис. 7.5).

При узгодженому навантаженні електромагнітна енергія переміщається уздовж лінії тільки в одному напрямку – від джерела до приймача (прямі хвилі напруги і струму). В кінці лінії вся енергія і, відповідно, вся інформація, яка передається по лінії, приймається споживачем без відбиття хвиль (сигнали назад не повертаються).

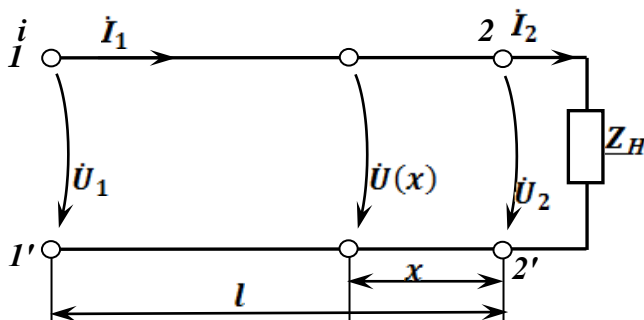


Рис. 7.5

В узгодженому режимі навантаження (при  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$ ) комплексна напруга в будь-якій точці лінії на відстані  $x$  від її кінця (рис. 7.5) визначається тільки прямою хвилею:

$$\dot{U} = \dot{U}_{np} = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_C \times \dot{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma}x} = \dot{U}_2 \times e^{\underline{\gamma}x}, \quad (7.61)$$

оскільки  $\underline{Z}_C \times \dot{I}_2 = \dot{U}_2$ .

Комплексний струм у будь-якій точці лінії:

$$\dot{I} = \dot{I}_{np} = \frac{\dot{U}_{np}}{\underline{Z}_C} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \times e^{\underline{\gamma}x} = \dot{I} \times e^{\underline{\gamma}x}, \quad (7.62)$$

де  $\dot{U}_2, \dot{I}_2$  – комплекси напруги і струму в кінці лінії;

$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  – коефіцієнт поширення хвилі;

$\underline{Z}_C$  – хвильовий опір лінії.

У формулах (7.61) і (7.62) невідомі вторинні параметри лінії:  $\underline{Z}_C$  і  $\underline{\gamma}$ ; проведемо їх обчислення.

### 7.6.1.3. Визначення вторинних параметрів лінії

Розрахунки будемо проводити за числовими даними, наведеними в табл. 7.1.

Хвильовий (характеристичний) опір лінії визначимо за формулою:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = Z_C \times e^{j\theta^\circ}, \quad (7.63)$$

де  $\underline{Z}_0, \underline{Y}_0$  – відповідно комплексний повний опір і комплексна повна провідність лінії на 1 км її довжини:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 &= R_0 + j\omega L_0 = R_0 + j2\pi f L_0 = 5,4 + j \times 2 \times 3,14 \times \\ &\times 800 \times 2 \times 10^{-3} = 5,4 + j10,05 = 11,4e^{j61,7^\circ} \text{ Ом/км}; \\ \underline{Y}_0 &= G_0 + j\omega C_0 = G_0 + j2\pi f C_0 = 1 \times 10^{-6} + j \times 2 \times 3,14 \times \\ &\times 800 \times 6 \times 10^{-9} = (1 + j30) \times 10^{-6} \\ &= 30 \times 10^{-6} e^{j88,1^\circ} \text{ См/км}. \end{aligned}$$

Таблиця 7.1

$R_0,$ Ом/км	$G_0,$ См/км	$L_0,$ Гн/км	$C_0,$ Ф/км	$f,$ Гц	$n,$ -	$l,$ км	$U'_{\gamma m},$ В	$U''_{\gamma m},$ В	$\psi''_{\gamma},$ град
5,4	$1 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-9}$	800	5	100	28,2	14,1	30

Тоді комплексний хвильовий опір лінії:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_C &= \sqrt{\frac{11,4e^{j61,7^\circ}}{30 \times 10^{-6} e^{j88,1^\circ}}} = \sqrt{0,38 \times 10^6 e^{-j26,4^\circ}} = \\ &= 616,4e^{-j13,2^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт поширення хвилі:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \gamma e^{j\theta^\circ} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \times \underline{Y}_0} = \\ &= \sqrt{11,4e^{j61,7^\circ} \times 30 \times 10^{-6} \times e^{j88,1^\circ}} = \\ &= 18,5 \times 10^{-3} \times e^{j74,9^\circ} = \\ &= 18,5 \times 10^{-3} \times (\cos 74,9^\circ + j \sin 74,9^\circ) = \\ &= (4,8 \times 10^{-3} + j17,9 \times 10^{-3}) \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

Дійсна частина комплексної величини коефіцієнта поширення хвилі називається коефіцієнтом затухання

( $\alpha = 4,8 \times 10^{-3} \text{ Нп/км}$ ), а уявна частина – коефіцієнтом фази ( $\beta = 17,9 \times 10^{-3} \text{ рад/км}$ ).

Коефіцієнт  $\underline{\gamma}$  визначає основні параметри електромагнітних хвиль –  $\lambda$  і  $V_\Phi$ :

Довжина хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2 \times 3,14}{17,9 \times 10^{-3}} = 350,8 \text{ км.}$$

Фазова швидкість поширення хвилі:

$$V_\Phi = \lambda \times f = 350,8 \times 800 = 280640 \text{ км/с.}$$

### 7.6.1.4. Обчислення напруги і струму на початку лінії

Згідно з числовими даними (табл. 7.1) варіанта задачі амплітуда першої гармоніки напруги в кінці лінії ( $x = 0$ )  $U'_{2m} = 28,2 \text{ В}$ , а початкова фаза її  $\psi'_2 = 0^\circ$ .

Виходячи з цього, запишемо:

$$\dot{U}'_2(0, t) = U'_2 e^{j0^\circ} = U'_2 = \frac{U'_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{28,8}{\sqrt{2}} = 20 \text{ В.}$$

Перетворивши формулу (7.61), одержимо вираз комплексної напруги першої гармоніки в будь-якій точці лінії:

$$\dot{U}'(x, t) = U'_2 \underline{\gamma} x^{(\alpha + j\beta)x} e^{\alpha x + j\beta x} \quad (7.64)$$

Оскільки  $x$  – це відстань від кінця лінії, то при  $x = l$ , де  $l$  – довжина лінії, одержимо згідно з формулою (7.64) комплексну напругу  $\dot{U}'_1(l)$  на початку лінії. Для цього попередньо обчислимо числові значення показників степенів  $\alpha x$  і  $\beta x$  у формулі (7.64) для початку лінії (при  $x = l$ ):

$$\alpha \times x|_{x=l} = \alpha \times l = 4,8 \times 10^{-3} \times 100 = 0,48 \text{ Нп};$$

$$\beta \times x|_{x=l} = \beta \times l = 17,8 \times 10^{-3} \times 100 = 1,79 \text{ рад.}$$

Так як  $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$ , то  $\beta \times l = 1,79 \times 57,3^\circ = 102,6^\circ$ .

Тоді згідно з (7.64) вираз комплексної напруги першої гармоніки на початку лінії запишеться:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_1(l, t) &= 20 \times e^{0,48} \times e^{j102,6^\circ} = \\ &= 20 \times 1,62 e^{j102,6^\circ} = 32,4 e^{j102,6^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Миттєве значення напруги першої гармоніки:



$$u_1'(l, t) = 32,4\sqrt{2} \sin(\omega t + 102,6^\circ) \\ = 45,82 \sin(\omega t + 102,6^\circ) B.$$

Згідно з табл. 7.1, амплітуда третьої гармоніки на кінці лінії  $U_2''' = 14,4B$  і початкова фаза її  $\psi_2''' = 30^\circ$ . Значить, діюче значення цієї напруги:

$$U_2''' = U_{2,m}''' / \sqrt{2} = 14,4 / 1,41 = 10B.$$

Вираз комплексної напруги третьої гармоніки у будь-якій точці лінії:

$$U^m(x,t) = U_2''' e^{j\psi_2} e^{j\beta x} e^{j30^\circ} e^{j(\alpha + j\beta)x} \\ = 10 \times e^{j30^\circ} \times e^{\alpha x} \times e^{j\beta x} B.$$

На початку лінії:  $\alpha x = \alpha l = 0,48Hn$  і  $\beta x = \beta l = 102,6^\circ$ . Тоді комплексна напруга третьої гармоніки на початку лінії:

$$U_1'''(l,t) = 10 e^{j30^\circ} e^{0,48j102,6^\circ} e^{j132,6^\circ}$$

Миттєве значення напруги третьої гармоніки на початку лінії:

$$u_1'''(l, t) = 16,2\sqrt{2} \sin(3\omega t + 132,6^\circ) = \\ = 22,9 \sin(3\omega t + 132,6^\circ) B.$$

Комплексні струми відповідно першої і третьої гармонік на початку лінії:

$$i_1'(l, t) = \frac{\dot{U}_1'(l,t)}{Z_C} = \frac{32,4 \times e^{j102,6^\circ}}{616 \times e^{-j13,2^\circ}} = 52,6 \times 10^{-3} \times e^{j115,8^\circ} A; \\ i_1'''(l, t) = \frac{\dot{U}_1'''(l,t)}{Z_C} = \frac{16,2 \times e^{j132,6^\circ}}{616 \times e^{-j13,2^\circ}} = 26,3 \times 10^{-3} \times e^{j45,2^\circ} A.$$

Миттєві значення струмів першої і третьої гармонік на початку лінії:

$$i_1'(l, t) = 52,6\sqrt{2} \times 10^{-3} \sin(\omega t + 115,8^\circ) = \\ = 74,3 \times 10^{-3} \sin(\omega t + 115,8^\circ) A; \\ i_1'''(l, t) = 26,3\sqrt{2} \times 10^{-3} \sin(3\omega t + 145,8^\circ) = \\ = 37,1 \times 10^{-3} \sin(3\omega t + 145,8^\circ) A.$$

Миттєві повні значення напруги й струму на початку лінії:

$$u_1(l, t) = u_1'(l, t) + u_1'''(l, t) = 45,82 \sin(\omega t + 102,6^\circ) + \\ + 22,9 \sin(3\omega t + 132,6^\circ) A;$$

$$i_1(l, t) = i_1'(l, t) + i_1''(l, t) \\ = 74,3 \times 10^{-3} \sin(\omega t + 115,8^\circ) +$$

$$+ 37,2 \times 10^{-3} \sin(3\omega t + 145,8^\circ) A.$$

Діючі значення напруги і струму на початку лінії:

$$U_1 = \sqrt{(U_1')^2 + (U_1'')^2} = \sqrt{32,4^2 + 16,2^2} = 36,2 B;$$

$$I_1 = \sqrt{(I_1')^2 + (I_1'')^2} = \sqrt{(52,6 \times 10^{-3})^2 + (26,3 \times 10^{-3})^2} = \\ = 58,8 \times 10^{-3} A.$$

### 7.6.1.5. Обчислення струму в кінці лінії

Комплексний струм в кінці лінії ( $x = 0$ ) для кожної гармоніки обчислимо за формулою (7.60):

$$I_2' = \frac{\dot{U}_2'}{\underline{Z}_H} = \frac{\dot{U}_2'}{\underline{Z}_C} = \frac{20e^{\alpha \times 0} \times e^{j\beta \times 0}}{616,4e^{j13,2^\circ}} = \\ = \frac{20}{616,4e^{-j13,2^\circ}} = 32,5 \times 10^{-3} e^{j13,2^\circ} A;$$

$$I_2'' = \frac{\dot{U}_2''}{\underline{Z}_C} = \frac{10e^{j30^\circ}}{616,4e^{-j13,2^\circ}} = 16,2 \times 10^{-3} \times e^{j143,2^\circ} A.$$

Зсув фаз між напругою і струмом в кінці лінії залежить від аргументу опору навантаження. При узгодженому навантаженні, тобто при

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta^\circ} = 616,4e^{-j13,2^\circ} \text{ Ом}$$

зсув фаз  $\theta^\circ = -13,2^\circ$ .

Таким чином, при узгодженому навантаженні зсуви фаз на вході і виході лінії рівні між собою.

### 7.6.1.6. Побудова графіків залежностей $U'(x)$ й $I'(x)$

Формула (7.64) дозволяє обчислити діюче значення комплексної напруги  $\dot{U}(x)$  в будь-якій точці лінії. Модуль цієї напруги для першої гармоніки:

$$U'(x) = U_2' e^{\alpha x} = 20^{4,8 \times 10^{-3} \times x} B \quad (7.65)$$

визначає діюче значення напруги в залежності від відстані  $x$  від кінця лінії.

Для побудови графіка  $I'(x)$  перетворимо рівняння (7.62) до вигляду, аналогічного (7.65):

$$I(x) = \frac{U_2}{Z_c} e^{\alpha x} = I_2' e^{\alpha x} = 32,5 \times 10^{-3} \times e^{\alpha x} = 32,5 \times 10^{-3} \times e^{4,8 \times 10^{-3} \times x} A. \quad (7.66)$$

Для різних відстаней  $x$  за формулами (7.65) і (7.66) обчислюємо ряд значень напруги  $U'(x)$  й струму  $I'(x)$  першої гармоніки і заносимо їх в табл. 7.2 ( $\alpha = 4,8 \times 10^{-3} \text{Hn}$  взято з попереднього розрахунку).

Таблиця 7.2

$x, \text{ км}$	0	25	50	75	100
$\alpha \times x, \text{ Hn}$	0	0,12	0,24	0,36	0,48
$e^{\alpha x}, -$	1	1,13	1,27	1,43	1,62
$U' = 20e^{\alpha x}, B$	20	22,6	25,4	28,6	32,4
$I'(x) = 32,5e^{\alpha x}, \times 10^{-3} A$	32,5	36,7	41,3	46,5	52,7

За одержаними значеннями величин  $U'$  та  $I'$  будуюмо графіки зміни напруги й струму вздовж лінії (рис. 7.6), де по осі абсцис відкладено відстані  $(l - x)$ .

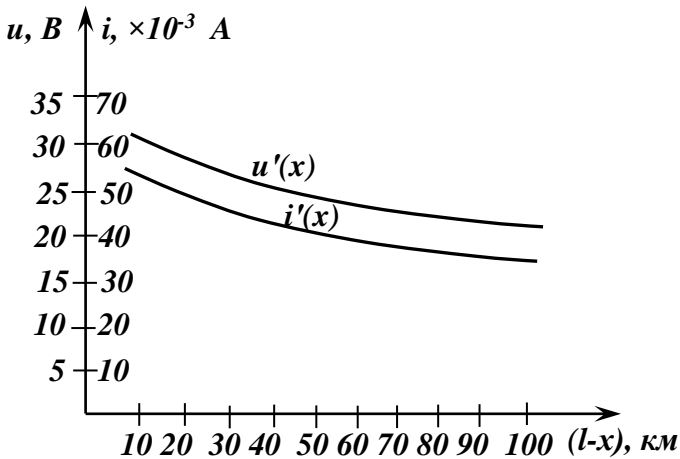


Рис. 7.6

## 7.6.2. Розрахунок усталеного режиму в безвтратній лінії

### 7.6.2.1. Постановка задачі

Однорідна безвтратна лінія ( $R_0 = 0$ ;  $G_0 = 0$ ) довжиною  $l$  з первинними параметрами  $L_0$  і  $C_0$  на одиницю довжини замкнена на активний опір  $R_2$ .

Напряга на приймальному кінці лінії ( $x = 0$ ):

$$u_2(0, t) = U'_{2m} \sin \omega t.$$

Визначимо вторинні параметри лінії:  $Z, \gamma, \alpha, \beta$ ; довжину хвилі  $\lambda$ ; фазову швидкість поширення хвилі  $V_\Phi$ .

Запишемо вирази для миттєвих значень напруги  $u_1(l, t)$  і струму  $i_1(l, t)$  на початку лінії.

Визначимо вхідний опір лінії: а) при активному навантаженні  $R_2$ ; б) при неробочому режимі лінії; в) при короткому замиканні в кінці лінії.

Визначимо параметри Т-подібної схеми заміщення лінії.

Визначимо вхідний опір лінії при неробочому режимі і при короткому замиканні для двох випадків: а) при довжині лінії  $l = \lambda/4$ ; б) при довжині лінії  $l = \lambda/2$ .

### 7.6.2.2. Визначення вторинних параметрів безвтратної лінії

Розрахунки будемо проводити за числовими даними, наведеними в табл. 7.3.

Таблиця 7.3

$R_0,$ Ом/к $m$	$G_0,$ См/км	$L_0,$ Гн/км	$C_0,$ Ф/км	$f,$ Гц	$l,$ км	$n$ —	$U'_{2m},$ В
0	0	$2 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-9}$	800	100	5	28,5

Хвильовий опір лінії:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{(0 + j\omega L_0) / (0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0 / C_0} = \\ = \sqrt{2 \times 10^{-3} / 6 \times 10^{-9}} = 577 \text{ Ом} = R_C.$$

Так як комплекс опору  $\underline{Z}_C$  має тільки дійсну частину, то хвильовий опір чисто активний ( $\underline{Z}_C = R_C = 577 \text{ Ом}$ ).

Коефіцієнт поширення хвилі:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \times \underline{Y}_0} = \sqrt{j\omega L_0 \times j\omega C_0} = \\ = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\omega \sqrt{2 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-9}} = \\ = j2 \times 3,14 \times 800 \times 3,46 \times 10^{-6} = \\ = j0,0174 \text{ км}^{-1} = j\beta.$$

Звідси одержуємо: коефіцієнт затухання хвилі  $\alpha = 0$ ; коефіцієнт фази  $\beta = 0,0174 \text{ рад/км}$ .

Довжина хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2 \times 3,14}{0,0174} = 361 \text{ км}.$$

Фазова швидкість поширення хвилі:

$$U_\Phi = \lambda \times f = 361 \times 800 = 288736 \text{ км/с}.$$

### 7.6.2.3. Визначення напруги і струму на початку лінії

Комплексні напруги першої і третьої гармонік на початку лінії:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_1(l, t) &= \dot{U}'_2 \times e^{\gamma \times l} = U'_2 e^{j\psi} \times e^{(0+\beta x)} = 20e^{j0^\circ} \times e^{j99,7^\circ} = \\ &= 20e^{j99,7^\circ} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}''_1(l, t) &= \dot{U}''_2 \times e^{\gamma l} = U''_2 e^{j30^\circ} \times e^{\beta l} = 10e^{j30^\circ} \times e^{j99,7^\circ} = \\ &= 10e^{j129,7^\circ} \text{ В,} \end{aligned}$$

де  $\beta \times l = 0,0174 \times 100 = 1,74 \text{ рад} = 1,74 \times 57,3 = 99,7^\circ$ ,  
так як  $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$ .

Миттєві значення напруги на початку лінії

$$\begin{aligned} u_1(l, t) &= u'_1(l, t) + u''_1(l, t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 99,7^\circ) + \\ &+ 10\sqrt{2} \sin(3\omega t + 129,7^\circ) = 28,2 \sin(\omega t + 99,7^\circ) + \\ &+ 14,1 \sin(3\omega t + 129,7^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Миттєве значення струму на початку лінії:

$$\begin{aligned} i_1(l, t) &= i'_1(l, t) + i''_1(l, t) = \frac{28,2}{577} \sin(\omega t + 99,7^\circ) + \\ &+ \frac{14,1}{577} \sin(3\omega t + 129,7^\circ) = 50 \times 10^{-3} \sin(\omega t + 99,7^\circ) + \\ &+ 25 \times 10^{-3} \sin(3\omega t + 129,7^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

#### 7.6.2.4. Визначення вхідного опору лінії

а) При активному навантаженні ( $R_H = R_C$ ) вхідний опір рівний хвильовому:

$$Z_{BX} = Z_C = R_C = 577 \text{ Ом.}$$

б) При неробочому режимі ( $I_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_{BX_0} = \frac{\dot{U}_{10}}{i_{10}}.$$

На підставі виразів (7.19) і (7.20) комплексні напруга і струм на початку безвтратної лінії мають вигляд:

$$\dot{U}_1(l, t) = \dot{U}_2 \cos(\beta l) + jZ_C \dot{I}_2 \sin(\beta l); \quad (7.19)$$

$$\dot{I}_1(l, t) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin(\beta l) + \dot{I}_2 \cos(\beta l). \quad (7.20)$$

Для неробочого режиму роботи лінії ( $I_2 = 0$ ) ці рівності запишуться так

$$\dot{U}_{10}(l, t) = \dot{U}_2 \cos(\beta l); \quad (7.19, a)$$

$$\dot{I}_{10}(l, t) = j \frac{\dot{U}_2}{R_C} \sin(\beta l). \quad (7.20, a)$$

Тоді вхідний опір лінії:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{BX_0} &= \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{\dot{U}_2 \cos(\beta l)}{j \frac{\dot{U}_2}{R_C} \sin(\beta l)} = \frac{ctg(\beta l) \times Z_C}{j} = \frac{-jR_C}{tg(\beta l)} = \\ &= -j \frac{577}{tg 99,7^\circ} = -j \frac{577}{-5,85} = j98,6 \text{ Ом} > 0. \end{aligned}$$

в) При короткому замиканні ( $\dot{U}_2 = 0$ ) рівняння лінії (7.19, а) і (7.20, а) приймуть вигляд:

$$\dot{U}_{1K3} = jR_C \dot{I}_2 \sin(\beta l); \quad (7.19, б)$$

$$\dot{I}_{1K3} = \dot{I}_2 \cos(\beta l), \quad (7.20, б)$$

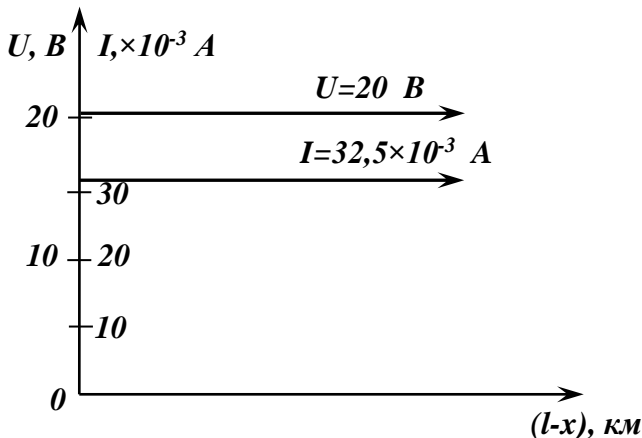
а вхідний опір лінії:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{BX_{K3}} &= \frac{\dot{U}_{1K3}}{\dot{I}_{1K3}} = \frac{jR_C \dot{I}_2 \sin(\beta l)}{\dot{I}_2 \cos(\beta l)} = jR_C tg(\beta l) = j577 tg 99,7^\circ = \\ &= j577(-5,85) = -j3375 \text{ Ом} < 0. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо  $tg(\beta l) < 0$ , то при неробочому режимі лінія має індуктивний характер ( $\underline{Z}_{BX} > 0$ ), а при короткому замиканні – ємнісний характер ( $\underline{Z}_{BX} < 0$ ).

Запишемо формули (7.65) і (7.66) для лінії без втрат ( $\alpha = 0$ ):

$$\begin{aligned} U &= U'_2 e^{\alpha x x} = U'_2 e^{0 \times x} = U'_2 = 20 \text{ В}; \\ I &= I'_2 e^{\alpha x x} = I'_2 e^{0 \times x} = I'_2 = 32,5 \times 10^{-3} \text{ А}. \end{aligned}$$



374  
Рис. 7.7

Таким чином, завдяки тому, що коефіцієнт затухання  $\alpha = 0$ , діючі значення  $U$  та  $I$  незмінні вздовж всієї довжини лінії і графіки  $U(x)$  та  $I(x)$  будуть являти собою прями лінії, які паралельні осі абсцис (рис. 7.7).

### 7.6.2.5. Визначення параметрів Т-подібної схеми заміщення лінії

Напруги й струми на вході і виході безвтратної лінії зв'язані співвідношеннями (7.19, а) і (7.20, а):

$$\dot{U}_1(l, t) = \dot{U}_2 \cos(\beta l) + jR_C \dot{I}_2 \sin(\beta l);$$

$$\dot{I}_1(\beta l) = j \frac{\dot{U}_2}{R_C} \sin(\beta l) + \dot{I}_2 \cos(\beta l).$$

Співставляючи ці рівняння з рівняннями симетричного чотириполюсника:

$$\dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2,$$

можна записати:  $\underline{A} = \underline{D} = \cos(\beta l) = \cos 99,7^\circ = 0,170 \text{ Ом};$

$$\underline{B} = jR_C \sin(\beta l) = j577 \times \sin 99,7^\circ = j570 \text{ Ом};$$

$$\underline{C} = j \frac{\sin(\beta l)}{R_C} = j \frac{\sin 99,7^\circ}{577} = j0,0017 \text{ См}.$$

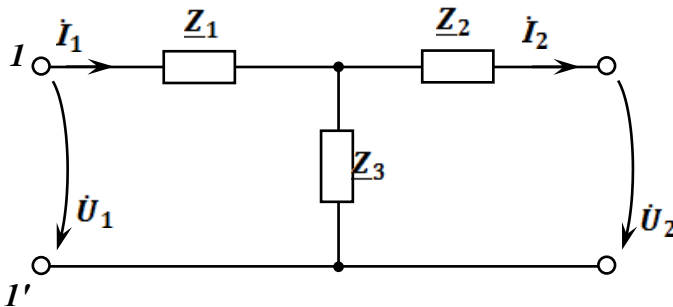


Рис. 7.8

Для перевірки правильності обчислення параметрів  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  використаємо рівність:

$$\underline{A} \times \underline{B} - \underline{C} \times \underline{D} = 1;$$



$$0,17 \times 0,17 - j570 \times j0,0017 = 0,029 + 0,971 = 1; \\ 1 = 1.$$

Визначаємо Z-параметри T-подібної схеми заміщення лінії (рис. 7.8):

$$\underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C} = \frac{0,17-1}{j0,0017} = (-j) \frac{-0,83}{0,0017} = j488 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{D-1}{C} = \frac{0,17-1}{j0,0017} = (-j) \frac{-0,83}{0,0017} = j488 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{C} = \frac{1}{j0,0017} = -j588 \text{ Ом}.$$

### 7.6.2.6. Визначення вхідного опору лінії при неробочому режимі і короткому замиканні лінії

Вхідний опір лінії при неробочому режимі лінії ( $\dot{I}_2 = 0$ ) згідно з формулами (7.19, а) і (7.20, а):

$$\underline{Z}_{BX_0} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{\dot{U}_2 \cos(\beta l)}{j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin(\beta l)} = -j \frac{R_C}{\text{tg}(\beta l)}.$$

При довжині лінії  $l = \lambda/4$ :

$$\underline{Z}_{BX_0} = \frac{-jR_C}{\text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4}\right)} = \frac{-jR_C}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-jR_C}{\infty} = 0.$$

При довжині лінії  $l = \lambda/2$ :

$$\underline{Z}_{BX_0} = \frac{-jR_C}{\text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{-jR_C}{\text{tg}(\pi)} = \frac{-jR_C}{0} = \infty.$$

Вхідний опір лінії в режимі короткого замикання на кінці лінії ( $\dot{U}_2 = 0$ ) згідно з формулами (7.19, б) і (7.20, б):

$$\underline{Z}_{BX_{K3}} = \frac{\dot{U}_{1K3}}{\dot{I}_{1K3}} = \frac{jR_C \dot{I}_2 \sin(\beta l)}{\dot{I}_2 \cos(\beta l)} = jR_C \text{tg}(\beta l).$$

При довжині лінії  $l = \lambda/4$ :

$$\underline{Z}_{BX_{K3}} = jR_C \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4}\right) = jR_C \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = jR_C \times \infty = \infty.$$

При довжині лінії  $l = \lambda/2$ :

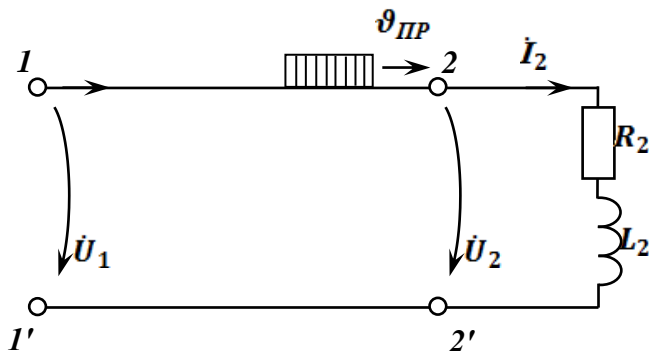
$$\underline{Z}_{BX_{K3}} = jR_C \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2}\right) = jR_C \text{tg}(\pi) = jR_C \times 0 = 0.$$

## 7.6.3. Розрахунок перехідного процесу в однорідній лінії

### 7.6.3.1. Постановка задачі

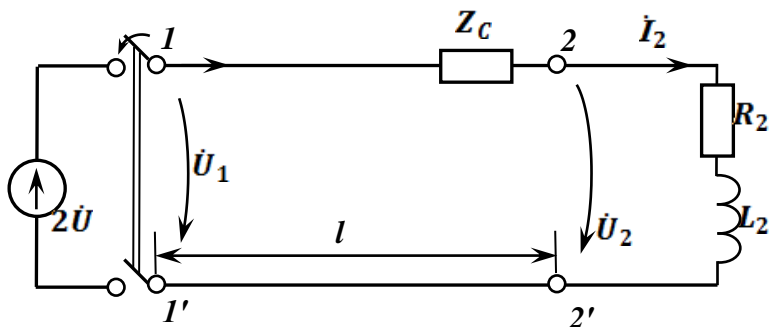
До кінця однорідної лінії довжиною  $l$  (рис. 7.9) під'єднана котушка індуктивності  $(R_2, L_2)$ . Характеристичний опір лінії  $Z_C$ . Уздовж лінії від її початку поширюється хвиля напруги  $U$  з прямокутним фронтом.

Побудуємо графіки зміни напруги і струму в інтервалах:  $0 < x < l_1$  та  $l_1 < x < l$ , де  $l_1$  – відстань від кінця лінії до точки, куди в момент часу  $t_1$  прийшла відбита хвиля.



**Рис. 7.9**

Для того, щоб визначити форму прямої хвилі, яка прийде до навантаження, і форму відбитої хвилі, яка піде у зворотному напрямку, і як вони будуть змінюватися в часі застосуємо схему заміщення лінії (рис. 7.10).



**Рис. 7.10**

Розрахунки будемо проводити за числовими даними, наведеними в табл.7.4.

Таблиця 7.4

$R_2,$ <i>Ом</i>	$L_2,$ <i>Гн</i>	$U,$ <i>кВ</i>	$Z_C,$ <i>Ом</i>	$l,$ <i>км</i>	$l_1,$ <i>км</i>
1000	0,1	60	480	150	60

### 7.6.3.2. Аналіз перехідного процесу

Починаючи з того моменту, коли падаюча хвиля досягне кінця лінії, через навантаження пройде струм  $i_2$  і на ньому буде спад напруги  $u_2$ .

Напруга й струм у будь-якій точці лінії (в тому числі й на кінці лінії) в довільний момент часу можна визначити через суму прямих (падаючих) і відбитих хвиль:

$$u_2 = u_{nad} + u_{sidb}; \quad (7.67)$$

$$i_2 = i_{nad} - i_{sidb} = \frac{u_{nad}}{Z_C} - \frac{u_{sidb}}{Z_C}. \quad (7.68)$$

Знак «мінус» у виразі (7.68) математично виражає собою ту обставину, що потік енергії, який несе з собою відбита електромагнітна хвиля, рухається в протилежному напрямку відносно потоку енергії, який несе з собою падаюча хвиля.

Перемноживши всі члени рівності (7.68) на  $Z_C$ :

$$u_2 = u_{nad} + u_{sidb} \quad (7.67, a)$$

$$Z_C \times i_2 = u_{nad} - u_{sidb}, \quad (7.68, a)$$

додамо (7.67, a) і (7.68, a):

$$2u_{nad} = 2u_1 = u_2 + Z_C i_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + Z_C i_2,$$

$$\text{де} \quad u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (7.69)$$

напруга на активно-індуктивному навантаженні лінії.

Рівняння (7.69) відповідає схемі заміщення лінії, наведеній на рис. 7.10.

Визначимо струм перехідного процесу в навантаженні лінії, як розв'язок диференціального рівняння (7.69):

$$i_2(t) = \frac{2U_1}{Z_C + R_2} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (7.70)$$

за час  $t_1 = \frac{l_1}{v_\phi} = \frac{60}{2,9 \times 10^5} = 2,07 \times 10^{-4} \text{ с,}$

протягом якого відбита хвиля пробіжить відстань  $l_1 = 60 \text{ км}$  (табл. 7.4) від кінця лінії в задану точку:

$$I_2 = \frac{2U_1}{Z_C + R_2} \times \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = \frac{2U_1}{Z_C + R_2} \times (1 - e^{-p \times t_1}) =$$

$$= \frac{20 \times 60 \times 10^3}{480 + 1000} \times (1 - e^{-1,48 \times 10^4 \times 2,07 \times 10^{-4}}) =$$

$$= 81,1 \times (1 - e^{-3,06}) = 81,1 \times (1 - 0,0489) = 77,3 \text{ А,}$$

(7.70, а)

де  $\tau$  – постійна часу кола:  $\tau = L / (Z_C + R_2)$ , а

$$p = \frac{1}{\tau} = \frac{Z_C + R_2}{L} = \frac{480 + 1000}{0,1} = 1,48 \times 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Підставивши у (7.69) вираз (7.70) для струму  $i_2$ , одержимо формулу для перехідної напруги в кінці лінії:

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{2U_1}{Z_C + R_2} \times \left(R_2 + Z_C \times e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (7.71)$$

Тоді миттєві значення напруги й струму відбитої хвилі

$$u_{\text{відб}} = u_2 - u_{\text{пад}} = \frac{U_1}{Z_C + R_1} \times \left(R_2 - Z_C + 2Z_C \times e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad (7.72)$$

$$i_{\text{відб}} = \frac{U_1}{Z_C + R_1} \times \left(1 - \frac{R_2}{Z_C} - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (7.73)$$

### 7.6.3.3. Побудова кривих зміни напруги вздовж лінії

Для побудови кривих зміни напруги й струму вздовж лінії необхідно в формулах (7.71), (7.72), (7.73)

замінити змінну  $t$  на величину  $\left(t_1 - \frac{l_1}{v_\phi}\right)$ , де  $l_1$  – відстань

від кінця лінії до даної точки.

Враховуючи, що  $U_{\text{пад}} = U_{\text{пр}} = 60 \text{ кВ}$ , визначимо струм падаючої (прямої) хвилі в кінці лінії:

$$I_{\text{пад}} = \frac{U_{\text{пад}}}{Z_C} = \frac{60 \times 10^3}{480} = 125 \text{ А.}$$

Підставивши числові значення у вирази (7.72) та (7.73), одержимо формули для побудови графіків:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{відб}} &= \frac{U_1}{Z_C + R_2} \times \left[ R_2 - Z_C + 2Z_C \times e^{-p \times \left( t_1 - \frac{l_1}{v_{\phi}} \right)} \right] = \\
 &= \frac{60 \times 10^3}{480 + 1000} \times (1000 - 480 + \\
 &+ 2 \times 480 \times e^{-1.48 \times 10^4 \times \left( 2.07 \times 10^{-4} - \frac{l_1}{2.9 \times 10^5} \right)}) = \\
 &= 40,54 \times [520 + 960 \times e^{(-3.06 + 0.05l_1)}] = \\
 &= 40,54 \times 520 + 40,54 \times 960 e^{-3.06} \times e^{0.05l_1} = \\
 &= (21,1 \times 10^3 + 1,82 \times 10^3 \times e^{0.05l_1}) B. \quad (7.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_{\text{відб}} &= -\frac{U_1}{Z_C + R_2} \times \left( 1 - \frac{R_2}{Z_C} - 2e^{-p \times \left( t_1 - \frac{l_1}{v_{\phi}} \right)} \right) = \\
 &= -\frac{60 \times 10^3}{480 + 1000} \times \\
 &\times \left( 1 - \frac{1000}{480} - 2e^{-1.4 \times 10^4 \times \left( 2.07 \times 10^{-4} - \frac{l_1}{2.9 \times 10^5} \right)} \right) = \\
 &= -40,54 \times (1 - 2,08 - 2e^{(-3.06 + 0.05l_1)}) = \\
 &= -43,8 - 81,08 \times e^{-3.06} \times e^{0.05l_1} = \\
 &= (-43,8 - 3,8e^{-0.05l_1}) A. \quad (7.75)
 \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що на відрізьку  $0 < x < 60\text{км}$  від кінця лінії наявні падаючі і відбиті хвилі напруги і струму, а на решті довжини лінії ( $60\text{км} < x < 150\text{км}$ ) діють тільки падаючі хвилі, закони зміни величини напруги і струму запишуться виразами (табл. 7.5):

Таблиця 7.5

$x, \text{км}$	$u_{\text{відб}}, \text{кВ}$	$i_{\text{відб}}, \text{А}$
0, ..., 60	$21,08 + 1,83e^{0.05 \times l_1}$	$-4,38 - 3,8e^{0.05 \times l_1}$
60, ..., 150	60	125

Для різних відстаней  $x$  за формулами (7.74) і (7.75) обчислимо значення напруги  $u_{\text{відб}}$  й струму  $i_{\text{відб}}$  і занесемо в табл. 7.6.

За одержаними значеннями:  $u_{\text{відб}}(x)$ ,  $i_{\text{відб}}(x)$ ,  $u(x)$ ,  $i(x)$  будуюмо графіки (рис. 7.11), на яких відстань відкладаємо від кінця лінії справа наліво.

Таблиця 7.6

$x,$ км	$e^{0,05 \times t_1},$ —	$u_{\text{сид}} = 21,08 + 1,83e^{0,05 \times t_1}$ , $\kappa B$	$v_{\text{сид}} = -4,38 - 3,8e^{0,05 \times t_1}$ , $A$
0	1	22,93	-47,6
10	1,66	24,03	-50,11
20	2,77	21,17	-54,33
30	4,62	29,55	-61,36
40	7,71	35,21	-74,0
50	12,81	44,54	-94,5
60	21,32	60,05	-124,95

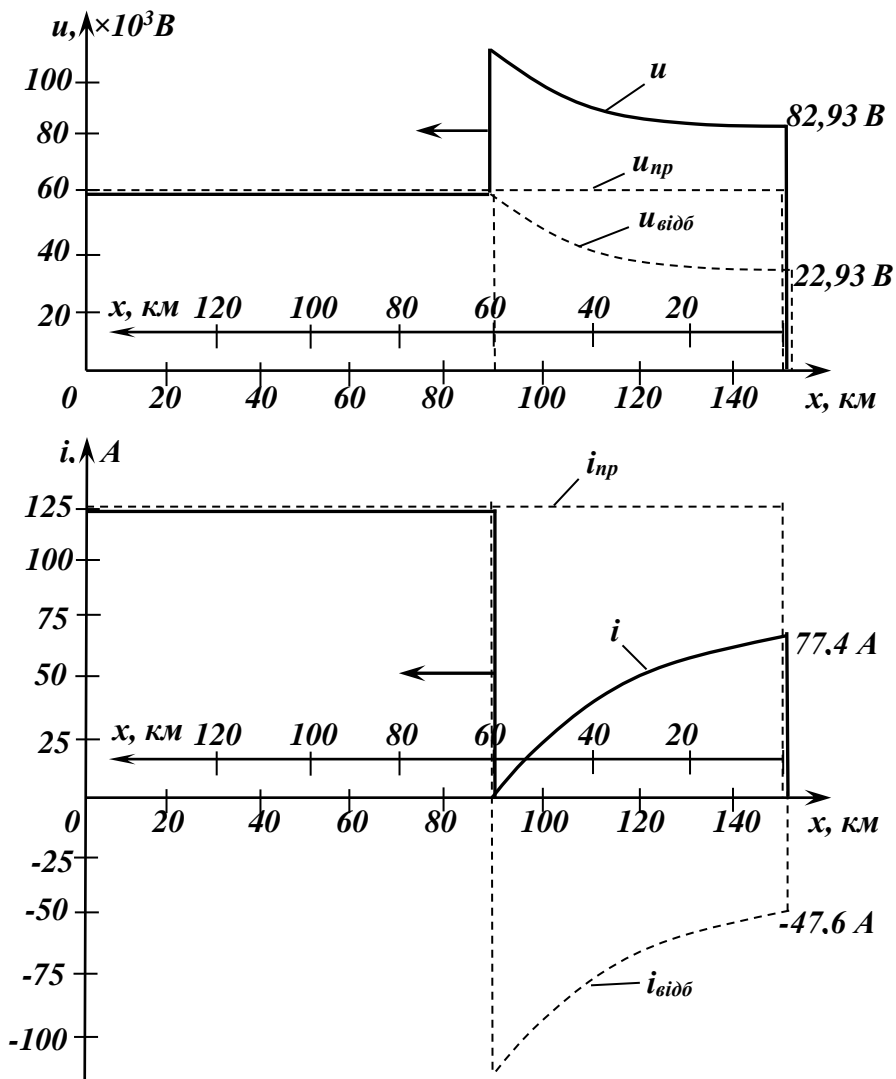


Рис. 7.11