Тема 2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

На практиці енергію постійного струму використовують дуже обмежено, так як, наприклад, машини постійного струму за своїм виготовленням і в експлуатації значно дорожчі від машин змінного струму; електричну енергію постійного струму не можна трансформувати за допомогою трансформаторів і пересилати на великі відстані.

Ці недоліки значною мірою компенсуються при використанні змінного струму, так як генератори електричної енергії змінного струму значно дешевші, їх можна виготовляти на вищі напруги і потужності, ніж генератори постійного струму. Енергію змінного струму можна перетворювати за допомогою трансформаторів в енергію інших величин струму і напруги, що дуже важливо при пересиланні енергії на великі відстані.

Доцільність технічного використання синусоїдного струму зумовлена ще й тим, що ККД генераторів, моторів, трансформаторів і ліній пересилання при синусоїдній формі ЕРС, напруг і струмів одержується вищим, порівняно з несинусоїдним струмом.

2.1. Основні параметри синусоїдних ЕРС, напруг і струмів

Електричні кола, в яких значення та спрямування змінних ЕРС, напруг і струмів періодично змінюється в часі за синусоїдним законом, називають колами синусоїдного струму, чи просто колами змінного струму.

Генератори на електростанціях змінного струму побудовані так, що ЕРС, яку вони генерують, змінюється за синусоїдним законом:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \qquad (2.1)$$

Синусоїдна ЕРС в лінійних електричних колах з активними опорами, індуктивностями та ємностями

викликає також синусоїдні струми й напруги, які змінюватись з частотою ЕРС, і їх ***миттєві значення***, тобто їх значення в будь-який момент часу, виражається синусоїдними функціями (рис. 2.1, *б*):

$$\left.\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u). \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Проміжок часу, протягом якого відбувається один повний цикл зміни синусоїдної величини, називається ***періодом***; позначається період літерою ***T*** і вимірюється в секундах (*с*).

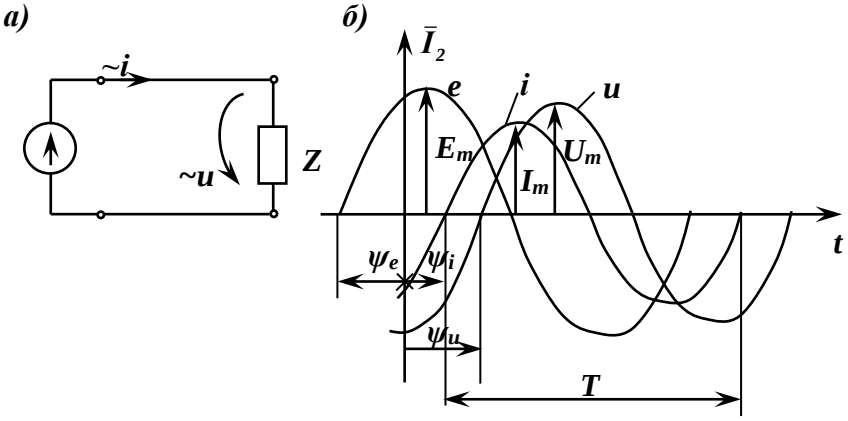

Рис. 2.1

Число періодів за одну секунду називають ***частотою*** і позначають літерою *f* :

$$f = \frac{1}{T}. \qquad (2.3)$$

Одиниця вимірювання частоти – герц (*Гц*):

$$1\ Гц = 1\ с^{-1} = 1/с\ .$$

Величину

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (2.4)$$

називають кутовою частотою; вона вимірюється в *рад/с* або в $с^{-1}$.

Аргумент синуса або фаза синусоїдної величини ($\omega t + \psi$) визначає значення цієї величини в даний момент часу *t*; ψ – початкова фаза, яка визначає значення синусоїдної величини в момент $t = 0$.

Найбільші значення синусоїдних величин (E_m, U_m, I_m) називають ***максимальними*** або амплітудними значеннями, відповідно ЕРС, напруги та струму.

Якщо синусоїдна напруга і струм досягають максимального значення не одночасно (рис. 2.1, *б*), то говорять, що напруга і струм зсунуті за фазою одне відносно одного і що струм випереджує напругу на кут:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i . \qquad (2.5)$$

Різницю φ початкових фаз двох синусоїдних величин називають ***зсувом фаз*** між цими величинами.

Електрична енергія синусоїдного струму виробляється синхронними генераторами на електростанціях: частотою *50 Гц* в країнах Європи і частотою *60 Гц* – в США і Японії. Вибір такої частоти зумовлений техніко-економічними причинами. Так, при частотах, менших від *50 Гц*, габарити електричних машин і трансформаторів зростають, помітне мигання освітлювальних приладів тощо. При більших частотах в електричних машинах і трансформаторах зростають втрати електроенергії, збільшуються втрати напруги в проводах ліній електропостачання внаслідок збільшення їх індуктивного опору тощо.

Як для постійного, так і для змінного струму залишається в силі основні співвідношення:

$$\sum i_k = 0; \ \sum u_k = \sum e_k; \ p = u \times i = i^2 \times R = \frac{u^2}{R}. \qquad (2.6)$$

Застосовуючи до миттєвих значень другий закон Кірхгофа, в сумі ЕРС $\sum e_k$ треба враховувати не тільки ЕРС джерел живлення (генераторів), а й ЕРС самоіндукції

e_L й ЕРС взаємоіндукції e_M, а в суму напруг $\sum u_k$ необхідно включати і напругу u_C на ємності.

Теплова дія струму $i(t)$ в довільний момент часу t пропорційна квадрату миттєвого значення струму ($Q = Ri^2t$) і тому про величину синусоїдних ЕРС, напруг і струмів судять не за їхніми максимальними значеннями, а за середньоквадратичними значеннями.

Якщо струм змінюється за синусоїдним законом, то його середньоквадратичне значення:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_m \sin\omega t)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \frac{(1-\cos 2\omega t)}{2} dt} =$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T dt - \frac{1}{T}\int_0^T \cos 2\omega t dt} = \qquad (2.7)$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m,$$

так як: $\int_0^T dt = T$ і $\int_0^T \cos 2\omega t dt = 0$.

Середньоквадратичне значення $I = I_м / \sqrt{2}$ називається діючим або ефективним значенням синусоїдного струму.

Аналогічно $E = E_м / \sqrt{2}$, $U = U_м / \sqrt{2}$.

Діючому значенню струму пропорційний момент електричних моторів змінного струму. Коли говорять про напругу чи струм в колах змінного струму, то мають на увазі їх діючі значення. Шкали вимірювальних приладів змінного струму, як правило, проградуйовані в діючих значеннях струму чи напруги.

При аналізі випрямляючих пристроїв користуються ***середнім значенням*** струму протягом півперіоду (середнє

значення синусоїдної величини за повний період рівне нулеві):

$$I_{сер} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} i\,dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t\,dt =$$

$$= \frac{2I_m}{\omega T}\Big|-\cos\omega t\Big|_0^{T/2=\pi} = \frac{2I_m^2}{2\pi\dfrac{1}{T}T} = \frac{2}{\pi}I_m = 0{,}636\,I_m. \qquad (2.8)$$

Аналогічно: $U_{сер} = 0{,}636\,U_m$; $E_{сер} = 0{,}636\,E_m$.

2.2. Додавання синусоїдних величин. Векторні діаграми

Розраховуючи електричні кола змінного струму, доводиться додавати величини синусоїдних ЕРС, напруг чи струмів однієї частоти, але різних амплітуд і початкових фаз. Розв'язання цієї задачі значно спрощується, якщо синусоїдні функції відобразити векторами, що обертаються з постійною кутовою швидкістю ω, яка рівна кутовій частоті ω синусоїдної функції. При цьому довжина вектора в певному масштабі відображає амплітуду даної функції, а початкове положення його в момент часу $t = 0$ – початкову фазу ψ_i синусоїдної функції.

Для струму це можна записати так:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Rightarrow \bar{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}. \qquad (2.9)$$

Приклад 2.1. Виконаємо додавання двох синусоїдних струмів (рис. 2.2, *а*):

$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1)$ та $i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2)$.

Результуючий струм i_3 теж буде змінюватись за синусоїдним законом з цією ж самою частотою ω, але буде мати свою амплітуду $I_{m3} = \sqrt{2}I_3$ і початкову фазу ψ_3 (рис. 2.2, *б*):

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) + I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2) =$$
$$= I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3).$$

Діюче значення I_3 і початкову фазу ψ_3 сумарного струму i_3 можна одержати з векторної діаграми.

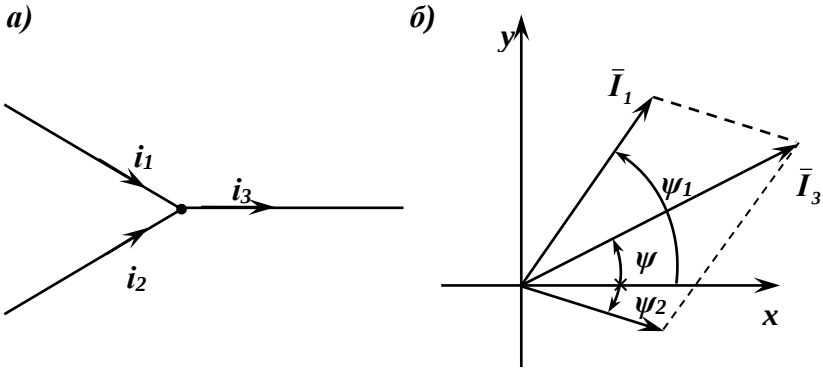

Рис. 2.2

Отже, за допомогою зображених векторів та дій над ними можна розрахувати електромагнітний процес, який відбувається в електричному колі синусоїдного струму. Взаємне розташування векторів від часу не залежить, тому що всі вони відображають синусоїдні величини однієї кутової частоти ω.

Таким чином, ***векторна діаграма*** *– це сукупність кількох векторів, які характеризують усталений режим кола синусоїдного струму.*

2.3. Резистивний опір у колі синусоїдного струму

Елемент, в якому відбувається перетворення електромагнітної енергії в інші види енергії (теплову, променеву, механічну тощо), як необоротний процес, називають ***активним*** (резистивним) ***опором*** і позначають літерою R.

Нехай до кола (рис. 2.3, *а*) прикладена синусоїдна напруга:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (2.10)$$

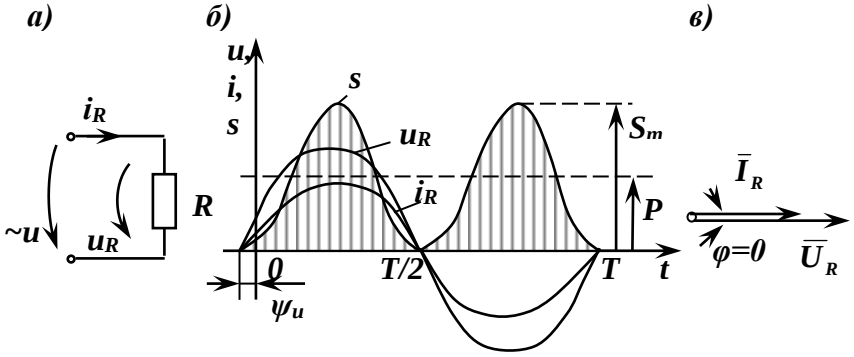

Рис. 2.3

Дослідимо, як буде змінюватись струм та потужність в синусоїдному колі.

Згідно з законом Ома:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (2.11)$$

Порівнюючи (2.10) і (2.11), бачимо, що синусоїда струму співпадає за фазою з синусоїдою напруги (рис. 2.3, *б*).

Амплітуда струму: $I_m = \frac{U_m}{R}$.

Розділивши ліву і праву сторони останньої рівності на $\sqrt{2}$, одержимо закон Ома для кола з резистивним опором для діючих значень напруги і струму:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (2.12)$$

Синусоїдний струм, який співпадає за фазою з напругою, називається ***активним струмом***.

Миттєве значення потужності рівне добутку миттєвого значення напруги на миттєве значення струму:

$$
\begin{aligned}
s(t) = u \times i = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi_u) = \\
= U_m I_m \times \frac{(1 - \cos 2(\omega t + \psi_u))}{2} = \\
= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \times \frac{I_m}{\sqrt{2}} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)) = \\
= UI - UI \cos 2(\omega t + \psi_u).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Як видно із виразу (2.13) та з часової діаграми (рис. 2.3, *б*), потужність $s(t)$ в резистивному опорі змінюється від нуля до S_m і залишається завжди додатною. Це означає, що в колі з резистивним опором потужність (енергія) весь час надходить із мережі до споживача R і незворотньо перетворюється в інші види енергії.

Середнє значення потужності за період називають ***активною потужністю*** P:

$$
P = s(t)_{сер} = \frac{1}{T}\int_0^T s dt = \frac{1}{T}\int_0^T [UI(1 - \cos 2(\omega t + \psi_u))] dt =
$$

$$
= \frac{UI}{T}\int_0^T dt - \frac{UI}{T}\int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_u) dt = UI.
$$

Підставивши $U = RI$, одержимо:

$$
P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.
$$

Одиниця вимірювання активної потужності – Ват (*Вт*).

На рис 2.3, *б* зображені часові залежності напруги, струму та миттєвої потужності $s(t)$, а на рис. 2.3, *в* наведена векторна діаграма напруги та струму в резистивному колі.

Взагалі активний (резистивний) опір провідника змінному струмові не рівний його омічному опорові $R = \rho l / S$ постійному струмові.

При проходженні змінного струму всередині провідника створюється змінне магнітне поле, яке

спричинює поперечне переміщення вільних електронів, що призводить до неоднакової густини зарядів у перерізі провідника. В центрі перерізу густина буде найменша, а ближче до поверхні – найбільша. При високих частотах змінного струму ця нерівномірність проявляється так, що густина струму в центральній частині перерізу практично нульова і струм в основному проходить тільки в поверхневому шарі, звідки це явище і одержало назву поверхневого ефекту.

Отже, поверхневий ефект призводить ніби до зменшення активного перерізу провідника, а, значить, до збільшення його опору в порівнянні з опором провідника постійному струмові.

2.4. Індуктивність у колі синусоїдного струму

Обмотки (котушки) електричних машин, трансформаторів, котушки різних електричних пристроїв тощо володіють великою індуктивністю. Параметрами котушок є резистивний опір $\boldsymbol{R}$ та індуктивність $\boldsymbol{L}$. Розглянемо котушку, резистивний (активний) опір якої дуже малий і ним можна знехтувати – ідеальну котушку (рис. 2.4, *а*).

Під дією синусоїдної напруги струм в котушці теж буде синусоїдним:

$$\boldsymbol{i_L = I_m \sin(\omega t + \psi_i)}. \qquad (2.14)$$

Цей струм створює змінне магнітне поле, яке наводить в індуктивності L ЕРС самоіндукції:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_L} &= \boldsymbol{-L\frac{di}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left[I_m \sin(\omega t + \psi_i)\right] =} \\ &= \boldsymbol{-\omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) =} \\ &= \boldsymbol{\omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) =} \\ &= \boldsymbol{E_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ)}, \end{aligned} \qquad (2.15)$$

де $\boldsymbol{\omega L I_m = E_{Lm}}$, або, розділивши на $\sqrt{2}$, одержимо:

$$\boldsymbol{E_L = \omega L I}. \qquad (2.16)$$

Отже, ЕРС самоіндукції e_L відстає від струму на 90°.

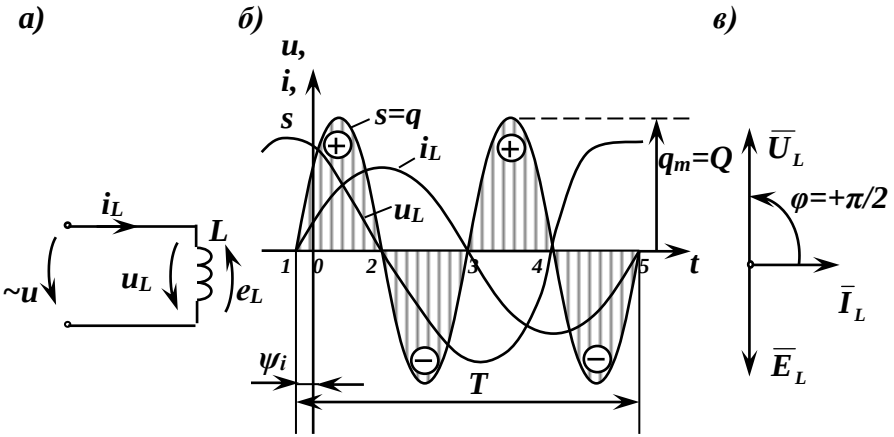

Рис. 2.4

Оскільки теплові втрати в ідеальній котушці відсутні, то вся прикладена зовнішня напруга компенсується ЕРС самоіндукції e_L.

Синусоїда цієї напруги:

$$u = u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \\ = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) \qquad (2.17)$$

і її амплітуда: $U_{Lm} = \omega L I_m$ або $U_L = \omega L I$,

тобто напруга u_L випереджує за фазою струм на 90° або струм відстає від напруги на 90°. Кут зсуву фаз між струмом котушки і напругою на ній: $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ - 0^\circ = +90^\circ$; $\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0$.

Добуток ωL має розмірність опору. Його позначають:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \qquad (2.18)$$

і називають ***індуктивним опором*** або реактивним опором індуктивності.

Миттєве значення потужності $s(t)$ в колі з індуктивністю:

$$s(t) = ui_L = U_{Lm} \times I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) \times$$
$$\times \sin(\omega t + \psi_i) = U_L I_L \cos(2\omega t + 2\psi_i + 90^\circ) =$$
$$= U_L I_L \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Якщо початкова фаза струму $\psi_i = 0$, то

$$s(t) = U_L I_L \sin 2\omega t. \qquad (2.19)$$

Таким чином, ***миттєва потужність*** $s(t)$ в колі з індуктивністю змінюється в часі з частотою в два рази більшою, ніж частота струму в котушці.

На рис. 2.4, *б* зображено часові залежності напруги, струму та миттєвої потужності $s(t)$, а на рис. 2.4, *в* наведена векторна діаграма напруги, струму та ЕРС самоіндукції котушки індуктивності.

Середнє значення цієї потужності за період (активна потужність) дорівнює нулю:

$$P = s(t)_{сер} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0. \quad (2.20)$$

Для з'ясування енергетичних процесів у колі з індуктивністю використаємо часові залежності миттєвих значень $u(t)$, $i(t)$, $s(t)$ (рис. 2.4, *б*).

В інтервалі часу від точки *1* до точки *2* (перша чверть періоду), коли струм в колі зростає від *0* до I_m електрична енергія з мережі надходить в індуктивність $(s(t) > 0)$ і нагромаджується в ній у вигляді енергії магнітного поля. Найбільше значення цієї енергії буде при максимальному струмові: $W_m = LI_m^2 / 2$. В інтервалі часу між точками *2* і *3* (друга чверть періоду) струм у колі зменшується і енергія магнітного поля котушки повертається назад в мережу $(s(t) < 0)$. В момент часу, що відповідає точці 3, струм і енергія магнітного поля дорівнює нулю.

Отже, в колі з індуктивністю відбувається неперервний періодичний процес обміну енергією між

джерелом електроенергії (електричною мережею) і магнітним полем індуктивності без витрачання енергії джерела. Цю енергію називають реактивною енергією.

Для кількісної оцінки інтенсивності обміну реактивною енергією між джерелом і реактивною котушкою застосовують поняття реактивної потужності:

$$Q_L = U_L I_L = X_L I_L^2 = U_L^2 / X_L . \qquad (2.21)$$

Реактивна потужність Q_L має ту ж розмірність, що й активна потужність P, але для зручності при вимірюванні реактивної потужності застосовують назву: ***вольт-ампер реактивний*** (*ВАр*) або кіловольт-ампер реактивний (*кВАр*).

2.5. Ємність у колі синусоїдного струму

У будь-якій електричній установці ємності утворюються між проводами і землею (в лініях електропостачання) та іншими елементами струмоведучих конструкцій. В силових установках конденсатори використовують для підвищення коефіцієнта потужності.

Нехай до ідеальної ємності (конденсатора без втрат) підведено синусоїдну напругу (рис. 2.5, *а*):

$$u = u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (2.22)$$

Тоді струм через ємність:

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt}\left[U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u)\right] = \\ &= \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) = \\ &= I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ), \end{aligned} \qquad (2.23)$$

тобто синусоїда струму через ємність випереджує за фазою синусоїдну напругу на 90° або напруга відстає від струму на 90°. Кут зсуву фаз між ними: $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90^\circ = -90^\circ$; $\cos\varphi = \cos(-90^\circ) = 0$.

Тут позначено $I_m = \omega C U_{Cm} = U_{Cm} / (1/\omega C)$ або, перейшовши до діючих значень:

$$I = \omega C U_C = U_C / \left(1/\omega C\right). \qquad (2.24)$$

Величину: $X_C = 1/\omega C = 1/2\pi f C$, (2.25)

яка має розмірність опору, називають реактивним опором ємності або просто ***ємнісним опором***.

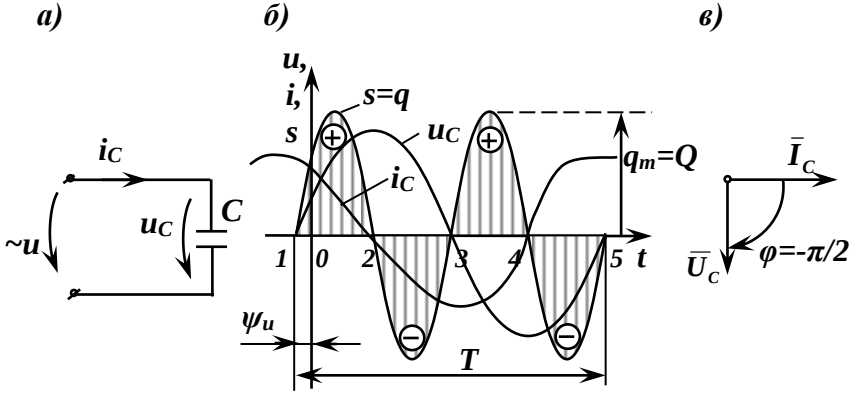

Рис. 2.5

На рис. 2.5, *б* зображені часові залежності напруги, струму та миттєвої потужності, а на рис. 2.5, *в* наведена векторна діаграма напруги й струму ідеальної ємності.

Миттєве значення потужності $s(t)$ в колі з ємністю:

$$s(t) = u_C i_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_u\right) \times I_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_u + 90^\circ\right)$$

або $$s(t) = U_C I_C \sin 2\left(\omega t + \psi_u\right). \qquad (2.26)$$

Середнє значення потужності за період (активна потужність) дорівнює нулю:

$$P = s(t)_{сер} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_C I_C \sin 2(\omega t + \psi_u)dt = 0, \qquad (2.27)$$

тобто коло з ємністю не споживає енергії від електромережі.

Для з'ясування енергетичних процесів у колі з ємністю використаємо часові залежності миттєвих значень (рис. 2.5, *б*). У першу чверть періоду між точками *1* і *2* напруга на ємності зростає, ємність заряджається, електрична енергія з мережі надходить до ємності

$(s(t) > 0)$ і нагромаджується у формі енергії електричного поля: $W_E = Cu_C^2 / 2$. В наступну чверть періоду між точками *2* і *3* струм змінює свій напрям і напруга на ємності зменшується; проходить розряд ємності, енергія електричного поля повертається в мережу ($s(t) < 0$).

Отже, у колі з ємністю, так само, як і в колі з індуктивністю, відбувається неперервний періодичний обмін енергією між джерелом та ємністю. Потужність, що характеризує швидкість обміну цією енергією, теж називають реактивною потужністю і позначають Q_C:

$$Q_C = U_C I_C = X_C I_C^2 = \frac{U_C^2}{X_C}. \qquad (2.28)$$

Одиниці вимірювання реактивної потужності ємності: *ВАр*, *кВАр*.

Таким чином, реактивна енергія (потужність) коливається між джерелом електричної енергії й споживачем; вона не виходить з електричної мережі, а йде на утворення магнітних полів у котушках й електричних полів у конденсаторах.

2.6. Котушка індуктивності в колі синусоїдного струму

Як правило, реальна котушка, крім індуктивності L, має ще активний опір R_K (рис. 2.6, *а*). Цей опір зумовлений наявністю самого опору провідника котушки ($R_{пр} = \rho l / S$) та опору, що імітує втрати в сталі ($\Delta P_{ст}$) магнітопроводу котушки ($R_{ст} = E^2 / \Delta P_{ст}$, де E – ЕРС самоіндукції котушки). Повний активний опір котушки $R_K = R_{пр} + R_{ст} = P_K / I_K^2$, де P_K – активна потужність, що йде на втрати в котушці, I_K – струм котушки. В цьому випадку кут зсуву фаз $\varphi_K < 90^\circ$.

Струм в колі з реальною котушкою (рис. 2.6, *а*) створюється сумісною дією прикладеної напруги u та ЕРС

самоіндукції e_L. Тоді рівняння другого закону Кірхгофа для кола буде мати вигляд:

$$u = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}. \qquad (2.29)$$

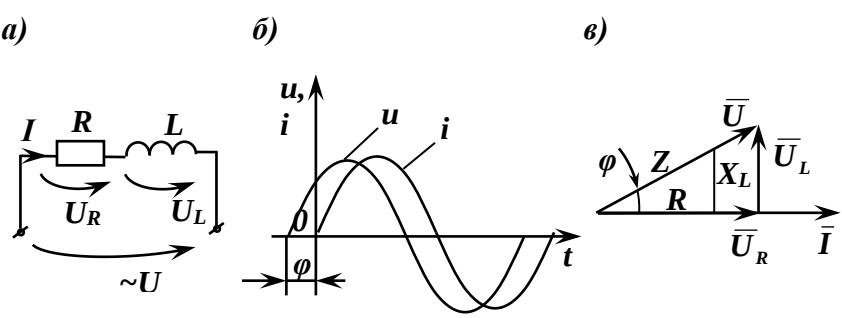

Рис. 2.6

Визначимо, як повинна змінюватись напруга на вході кола, щоб через котушку проходив синусоїдний струм:

$$i = I_m \sin \omega t. \qquad (2.30)$$

Підставимо вираз (2.30) у рівність (2.29):

$$u = RI_m \sin \omega t + \omega L I_m \cos \omega t. \qquad (2.29, a)$$

Щоб отримати безпосередній вираз вхідної напруги: $u = u(t)$, виконаємо тригонометричне перетворення – будемо розглядати відношення $\omega L / R$, як тангенс деякого кута φ:

$$\varphi = arctg\,\frac{\omega L}{R} = arctg\,\frac{X_L}{R}.$$

Ці відношення можна відобразити графічно трикутником опорів (рис. 2.6, *в*), у якого гіпотенуза $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$.

Помножимо і розділимо праву частину рівності (2.29, *а*) на величину Z:

$$u = I_m\left(Z\frac{R}{Z}\sin \omega t + Z\frac{\omega L}{Z}\cos \omega t\right) =$$

$$= ZI_m(\cos \varphi \times \sin \omega t + \sin \varphi \times \cos \omega t)$$

або

$$u = ZI_m \sin(\omega t + \varphi). \qquad (2.31)$$

Отже, напруга на вході RL *– кола випереджує за фазою струм на кут* φ*, величина якого визначається відношенням індуктивного опору* X_L *до активного* R_K *(рис. 2.6, в).*

Згідно з виразом (2.31) максимальне значення цієї напруги відповідає значенню $\sin(\omega t + \varphi) = 1$, тобто

$$U_m = ZI_m,$$

або у діючих значеннях:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}, \qquad (2.32)$$

де Z – повний опір кола.

Взагалі, повним опором кола змінного струму, яке не містить джерела електроенергії, називають відношення діючого значення синусоїдної напруги на вході кола до діючого значення вхідного струму:

$$Z = \frac{U}{I}. \qquad (2.33)$$

На рис. 2.6, *б* зображено часові залежності напруги і струму, а на рис. 2.6, *в* – векторну діаграму кола – трикутник напруг, який подібний трикутнику опорів.

2.7. Послідовне сполучення R, L, C в колі синусоїдного струму

Нехай на вході електричного кола (рис. 2.7, *а*) прикладена синусоїдна напруга:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \qquad (2.34)$$

Диференціальне рівняння кола:

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt. \qquad (2.35)$$

а) *б)*

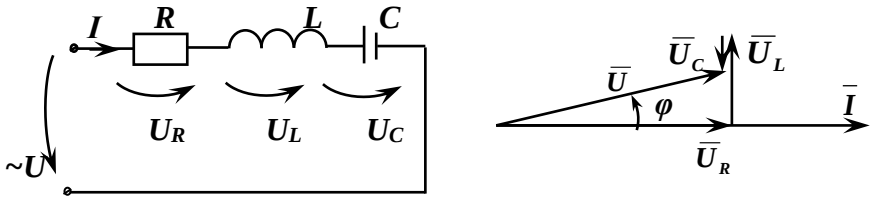

Рис. 2.7

Струм усталеного режиму в колі також синусоїдний і змінюється з тією ж частотою, що й вхідна напруга u:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi), \quad (2.36)$$

де $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – кут зсуву фаз між струмом і напругою на вході кола.

На основі рівняння (2.35) будуємо векторну діаграму кола для діючих значень струму і напруг (рис. 2.7, *б*). Вектор напруги $\overline{U}_R = R\overline{I}$ на резистивному опорі збігається за напрямком із вектором струму $\overline{I}$, вектор $\overline{U}_L = X_L\overline{I}$ напруги на індуктивності випереджує вектор струму на кут $\pi/2$, а вектор $\overline{U}_C = X_C\overline{I}$ напруги на ємності відстає від вектора струму на кут $\pi/2$. Отже, між векторами $\overline{U}_L$ та $\overline{U}_C$ утворюється кут, що дорівнює π. Вектор напруги $\overline{U}$, прикладеної до кола, дорівнює сумі векторів напруг на окремих його ділянках:

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C \ , \quad (2.35, a)$$

а його величина

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \ .$$

Завдання полягає у відшуканні величини I_m і φ при відомих величинах U_m і ψ_u.

При дослідженні усталеного режиму величина ψ_u або ψ_i може бути вибрана довільно. Так як спільним у даному випадку для всіх ділянок є струм, то доцільно вибрати його початкову фазу $\psi_i = 0$, тобто $\psi_u = \varphi + \psi_i = \varphi + 0 = \varphi$.

Тоді

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \sin(\omega t + \varphi); \qquad (2.37)$$

$$i = I_m \sin \omega t. \qquad (2.38)$$

Підставивши вирази (2.37) і (2.38) у рівняння (2.35), одержимо

$$RI_m \sin \omega t + \omega L I_m \cos \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \varphi). \qquad (2.39)$$

Рівність (2.39) справедлива для довільного моменту часу t. Зокрема, поклавши $\omega t = \pi / 2$ і $\omega t = 0$, одержимо

$$RI_m = U_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m \cos \varphi; \qquad (2.40)$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m = U_m \sin \varphi. \qquad (2.41)$$

Піднесемо рівності (2.40) і (2.41) до квадрату і додамо їх ліві і праві частини

$$R^2 I_m^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I_m^2 = U_m^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right)$$

або

$$\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] I_m^2 = U_m^2.$$

Звідси одержимо зв'язок між амплітудами струму і напруги

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (2.42)$$

Розділивши на $\sqrt{2}$ ліву і праву частини рівності, одержимо зв'язок між їх діючими значеннями, тобто закон Ома в класичній формі

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (2.43)$$

Поділивши (2.41) на (2.40), одержимо

$$tg\varphi = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} = \frac{X_L - X_C}{R},$$

звідки $\varphi = arctg \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} = arctg \frac{(X_L - X_C)}{R}.$ (2.44)

У виразах (2.42) і (2.43) величина знаменника має розмірність опору. Її позначають літерою Z і називають ***повним опором*** кола

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (2.45)$$

При збільшенні частоти ω індуктивний опір $X_L = \omega L$ збільшується за рахунок збільшення ЕРС, самоіндукції e_L, а ємнісний опір $X_C = 1/\omega C$ зменшується, так як збільшується струм зміщення, який пропорційний du_C / dt – швидкості зміни напруги на обкладинках конденсатора.

Напруга на активному опорі

$$u_R = Ri = RI_m \sin\omega t$$

за фазою співпадає зі струмом у колі.

Напруга на індуктивності

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \pi/2\right)$$

випереджує струм на кут $\pi/2$.

Напруга на ємності

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i dt = \frac{1}{\omega C}\cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \pi/2\right)$$

відстає від струму на кут $\pi/2$.

Додаючи геометрично вектори напруг $\bar{U}_R$, $\bar{U}_L$, $\bar{U}_C$, одержимо вектор напруги $\bar{U}$ на вході кола, який зміщений відносно вектора струму $\bar{I}$ на кут φ.

Так як напруги u_R і $\left(u_L + u_C\right)$ зсунуті одна відносно одної на кут $\pi/2$, то не можна повний опір Z визначити шляхом арифметичного додавання величин опорів R і $X = \left(X_L + X_C\right)$, а слід визначити за формулою:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}\ . \qquad (2.46)$$

Розглянемо тепер зсув фаз φ між напругою u та струмом i на вході кола.

Струм співпадає за фазою з прикладеною напругою тільки при $X = 0$, тобто при відсутності в колі реактивних опорів, або при їх взаємній компенсації. Останнє має місце при резонансі напруг.

При $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C = 0$ векторна сума $\bar{U}_L + \bar{U}_C = 0$ і вектори $\bar{U}$ та $\bar{I}$ співпадають за напрямком.

Якщо $\omega L > 1/\omega C$, то $X = \omega L - 1/\omega C > 0$ і $0 < \varphi = arctg\left(X/R\right) < \pi/2$. Струм відстає від прикладеної напруги на кут φ (кут зсуву фаз).

Якщо $\omega L < 1/\omega C$, то $X = \omega L - 1/\omega C < 0$ і $-\pi/2 < \varphi = arctg\left(X/R\right) < 0$. Стум випереджує за фазою напругу на кут φ.

Таким чином, границі зміни кута зсуву фаз: $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

2.8. Паралельне сполучення *G, L, C* в колі синусоїдного струму

Нехай на вхід електричного кола (рис. 2.8, *а*) подається синусоїдна напруга:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) . \qquad (2.47)$$

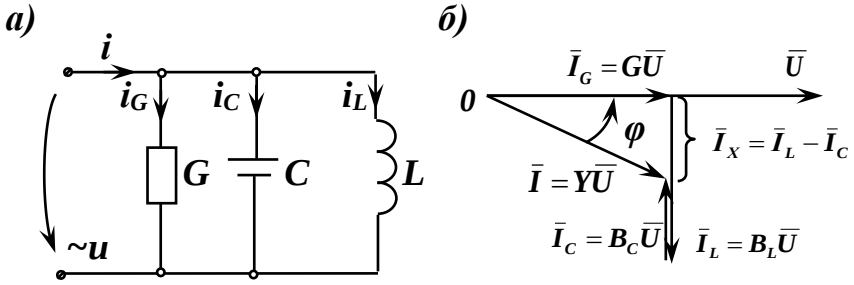

Рис. 2.8

Згідно з першим законом Кірхгофа диференціальне рівняння кола запишеться:

$$i = i_G + i_C + i_L = Gu + C\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t u dt + i_L(0) . \qquad (2.48)$$

Так як напруга на вході кола є спільною для всіх віток кола, то доцільно прийняти рівною нулю її початкову фазу ($\psi_u = 0$). Тоді $\varphi = 0 - \psi_i = -\psi_i$ або $\psi_i = -\varphi$ і синусоїда вхідного струму прийме вигляд:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t - \varphi). \qquad (2.49)$$

Підставивши вирази (2.47) і (2.49) у рівність (2.48), одержимо:

$$GU_m \sin\omega t + \omega C U_m \cos\omega t - \frac{U_m}{\omega L}\cos\omega t = I_m \sin(\omega t - \varphi). \qquad (2.48, a)$$

Рівність (2.48, *а*) справедлива для будь-якого моменту часу t. Зокрема, поклавши $\omega t = \pi/2$ і $\omega t = 0$, одержимо:

$$GU_m = I_m \cos\varphi ; \qquad (2.50)$$

$$\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)U_m = I_m \sin\varphi. \qquad (2.51)$$

Піднесемо рівності (2.50) і (2.51) до квадрата і додамо їх ліві і праві частини:

$$G^2U_m^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2 U_m^2 = I_m^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)$$

або

$$\left[G^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C^2\right)\right]U_m^2 = I_m^2,$$

звідки одержимо зв'язок між амплітудами струму і напруги

$$I_m = U_m\sqrt{G^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}. \qquad (2.52)$$

Розділивши на $\sqrt{2}$ ліву і праву частини, будемо мати зв'язок між їх діючими значеннями

$$I = U\sqrt{G^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}. \qquad (2.52,a)$$

Розділивши (2.51) на (2.50), одержимо

$$tg\varphi = \frac{\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)}{G},$$

звідки

$$\varphi = arctg\,\frac{\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)}{G}. \qquad (2.53)$$

У виразах (2.52) і (2.52, *а*) співмножник-радикал має розмірність провідності. Його позначають літерою Y і називають повною провідністю кола

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}. \qquad (2.54)$$

Провідність G *називають активною провідністю. Величину* $(1/\omega L - \omega C)$*, що має також розмірність провідності, називають реактивною провідністю і позначають літерою* B*. При цьому член* $(1/\omega L)$ *називають індуктивною провідністю і позначають* B_L*, а член* ωC *називають ємнісною провідністю і позначають* B_C.

Маємо

$$B = \frac{1}{\omega L} - \omega C = B_L - B_C; \quad Y = \sqrt{B^2 + G^2}.$$

На (рис. 2.8, *б*) приведена векторна діаграма паралельного G,L,C – кола для випадку $(1/\omega L) > \omega C$. При $B_L = B_C$ в G,L,C – колі має місце резонанс: вхідний струм i рівний активному струму i_G в першій вітці. При $(1/\omega L) > \omega C$ струм i відстає від прикладеної напруги на кут φ, причому: $0 < \varphi \le \pi/2$. При $\omega C > (1/\omega L)$ струм i випереджує напругу: $-\pi/2 \le \varphi < 0$.

2.9. Потужність у колі синусоїдного струму

Якщо на вхід лінійного електричного кола (рис. 2.9, *а*) прикладена синусоїдна напруга: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, то в колі буде протікати синусоїдний струм: $i = I_m \sin \omega t$, який зсунутий відносно напруги на кут φ:

$$\varphi = arctg\left(X / R\right) = arctg\left(\left(X_L - X_C\right)/ R\right).$$

Якщо $X_L > X_C$, то $\varphi > 0$ і напруга випереджає струм за фазою; якщо $X_L < X_C$, то $\varphi < 0$ і напруга відстає від струму. Якщо $X_L = X_C$, то $\varphi = 0$ і напруга збігається за фазою зі струмом. На рис. 2.9, *б* наведені часові залежності $u(t)$ та $i(t)$ для $\varphi > 0$.

Миттєве значення потужності

$$s(t) = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) \times I_m \sin \omega t =$$
$$= 2UI \cos \varphi \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} + 2UI \sin \varphi \frac{\sin 2\omega t}{2}$$

або

$$s(t) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) + UI \sin \varphi (\sin 2\omega t) = \\ = p(t) + q(t). \qquad (2.55)$$

Перша складова виразу (2.55) – це миттєве значення активної потужності $p(t)$, а друга складова – реактивної $q(t)$.

На рис. 2.9, *в*, *г*, *д* показані часові залежності миттєвих величин потужностей, відповідно: повної $s(t)$, активної $p(t)$ та реактивної $q(t)$.

Амплітуда реактивної потужності є величиною, яку в колах синусоїдного струму називають реактивною потужністю, отже

$$q_m = Q = UI \sin \varphi \ . \qquad (2.56)$$

Визначимо середнє значення потужності за період, тобто активну потужність

$$P = s(t)_{сер} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} UI \cos \varphi \left(1 - \int_0^T \cos 2\omega t \right) dt + \\ + \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin \varphi \times \sin 2\omega t dt = UI \cos \varphi . \qquad (2.57)$$

Інтеграл другої складової виразу (2.57) дорівнює нулю.

Піднесемо до квадрата вирази (2.56) і (2.57)

$$P^2 = (UI)^2 \times \cos^2 \varphi ; \quad Q^2 = (UI)^2 \times \sin^2 \varphi$$

і почленно додамо

$$P^2 + Q^2 = (UI)^2 = S^2 .$$

Величину $S = UI$ називають повною або позірною потужністю, а трикутник (рис. 2.9, *е*) – трикутником потужностей. Отже, формули для визначення активної, реактивної та повної потужностей мають вигляд:

$$P = UI\cos\varphi\,;\quad Q = UI\sin\varphi\,;\quad S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}\,. \qquad (2.58)$$

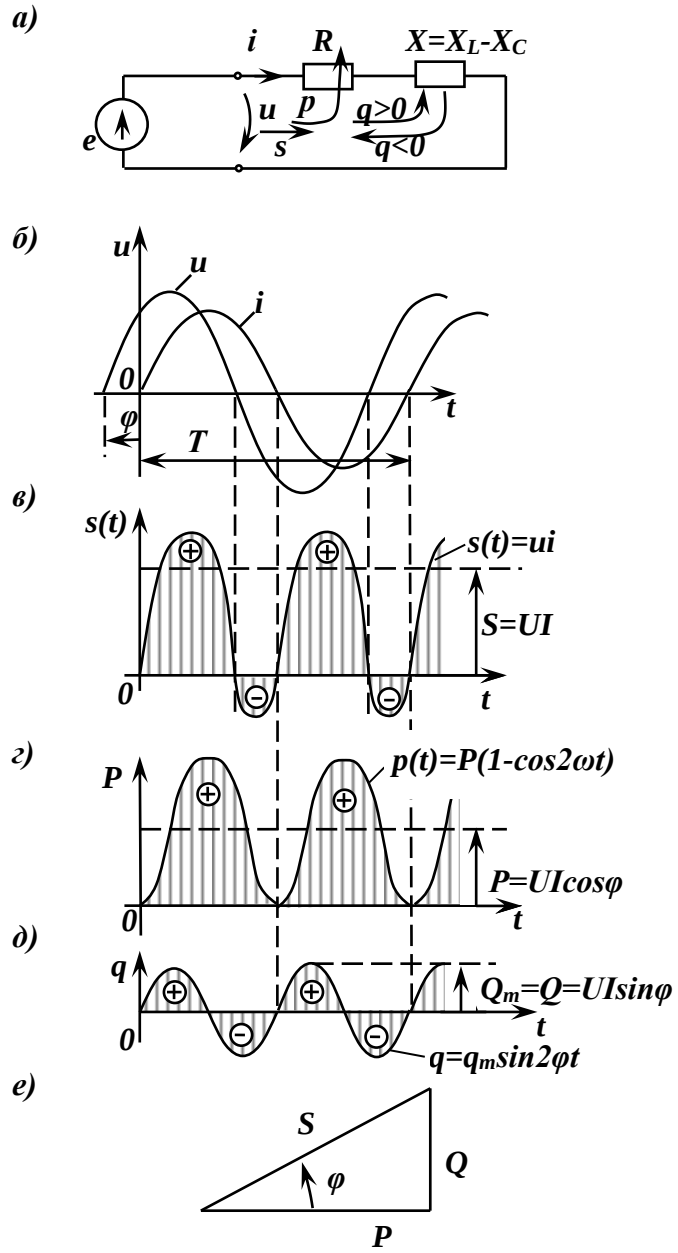

Рис. 2.9

Наведені потужності можуть бути також розраховані за діючими значеннями струму й відповідних опорів за формулами:

$$P = RI^2; \qquad Q = XI^2; \qquad S = ZI^2.$$

Одиниці вимірювання потужностей: $[S]$=1 *ВА*, 1 *кВА*; $[P]$= 1 *Вт*, 1 кВт; $[Q]$ =1 *ВАр*, 1 *кВАр*.

Повна S і активна P потужності завжди додатні. Якщо $\varphi > 0$ (резистивно – індуктивні кола), реактивна потужність Q – додатна, а якщо $\varphi < 0$ (резистивно – ємнісні кола), Q – від'ємна.

Повна потужність S *характеризує найбільше значення активної потужності, яку можна одержати в колі за заданих діючих значень напруги та струму (тобто, якщо* $\cos\varphi = 1$*). На щитках генераторів, моторів і трансформаторів як номінальну потужність вказують їх повну потужність у вольт-амперах (ВА) або кіловольт-амперах (кВА).*

Величину $\cos\varphi = P / S$ *називають коефіцієнтом потужності. Він показує, яку частину всієї потужності, виробленої джерелом електроенергії, складає активна потужність.*

Очевидно, що чим більший $\cos\varphi$*, тим економніше працює енергосистема, так як при одних і тих же значеннях струму* I *й напруги* U *джерела можна одержати більшу активну потужність. Або при певних значеннях напруги і потужності джерела можна передавати активну енергію меншим струмом, що зменшує втрати в лінії електропересилання.*

Приклад 2.2. Визначимо повний опір, коефіцієнт потужності, діючі значення струму і напруг на елементах, активну, реактивну і повну потужності електричного кола (рис. 2.7, *а*) з послідовно сполучених резистивного опору $R = 5$ *Ом*, індуктивності $L = 0{,}032$ *Гн* і ємності $C = 640$ *мкФ*, яке приєднане до електричної мережі

синусоїдної напруги з діючим значенням $U = 220\ В$ і частотою $f = 50\ Гц$.

Розв'язання

Реактивні опори та повний опір кола

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \times 3{,}14 \times 50 \times 3{,}2 \times 10^{-3} = 10\ Ом;$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{10^6}{2 \times 3{,}14 \times 50 \times 640} = 5\ Ом;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{5^2 + (10-5)^2} = 7{,}07\ Ом.$$

Коефіцієнт потужності

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{5}{7{,}07} = 0{,}707; \quad \varphi = 45^\circ.$$

Діюче значення струму

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{7{,}07} = 31{,}1\ А.$$

Діючі значення напруг на активному, індуктивному та ємнісному опорах:

$$U_R = R \times I = 5 \times 31{,}1 = 155{,}6\ В;$$

$$U_L = X_L \times I = 10 \times 31{,}1 = 311\ В;$$

$$U_C = X_C \times I = 5 \times 31{,}1 = 155{,}6\ В.$$

Діюче значення загальної напруги

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{155{,}6^2 + (311 - 155{,}6)^2} = 220\ В.$$

Потужності:

- активна $P = UI\cos\varphi = 220 \times 31{,}1 \times 0{,}707 = 4837\ Вт;$
- реактивна $Q = UI\sin\varphi = 220 \times 31{,}1 \times 0{,}707 = 4837\ Вт;$
- повна $S = UI = 220 \times 31{,}1 = 6842\ ВА.$

2.10. Еквівалентні параметри складного кола синусоїдного струму

У будь-якому складному колі з постійними параметрами при синусоїдній напрузі на вході загальний

вхідний струм кола буде синусоїдним і, в загальному випадку, зсунутий відносно напруги на кут φ.

Якщо розглядати коло в цілому як двополюсник, не звертаючи увагу на його внутрішню будову, то можна охарактеризувати його деякими еквівалентними параметрами. На рис. 2.10, *а* – це двополюсне коло зображено у вигляді прямокутника, а на рис. 2.10, *б* і 2.10, *в* відповідно – послідовна і паралельна схеми заміщення кола.

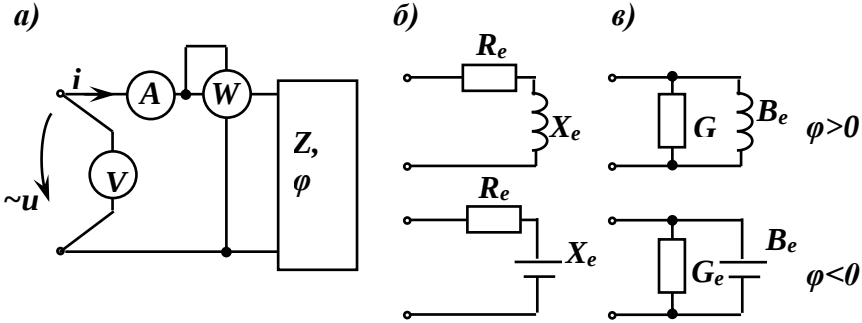

Рис. 2.10

Еквівалентний повний опір кола визначається відношенням діючих значень напруги і струму на вході кола, виміряних за допомогою вольтметра і амперметра:

$$Z_e = \frac{U}{I}. \qquad (2.59)$$

Еквівалентний активний опір послідовної схеми заміщення кола можна визначити як відношення активної потужності до квадрата діючого значення струму:

$$R_e = \frac{P}{I^2}. \qquad (2.60)$$

Еквівалентний реактивний опір цієї схеми заміщення кола визначають так, щоб зберігався зв'язок $Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2}$, який мав місце у розглянутих вище простих колах, тобто

$$X_e = \pm\sqrt{Z_e^2 - R_e^2}\,, \qquad (2.61)$$

причому знак «+» ставиться, якщо $\varphi > 0$, і знак «–», якщо $\varphi < 0$.

Аналогічно визначаються еквівалентні провідності паралельної схеми заміщення (рис. 2.10, *в*):

$$Y_e = \frac{I}{U}; \quad G_e = \frac{P}{U^2}; \quad B_e = \pm\sqrt{Y_e^2 - G_e^2}\,, \qquad (2.62)$$

причому, як і при визначенні X_e, будемо вважати, що $B_e > 0$ при $\varphi > 0$ і $B_e < 0$ при $\varphi < 0$.

2.11. Розрахунок синусоїдного кола методом еквівалентних перетворень

Приклад 2.1

На вхід електричного кола (рис. 2.11) подається синусоїдна напруга $u = U_m \sin\omega t$ частотою $f = 50$ Гц.

Необхідно:

1) Визначити струми у вітках та спади напруг на елементах кола.

2) Побудувати векторну діаграму струмів і топографічну векторну діаграму напруг.

3) Написати вирази для миттєвих значень усіх струмів і напруг кола.

4) Скласти рівняння балансу активної та реактивної потужностей.

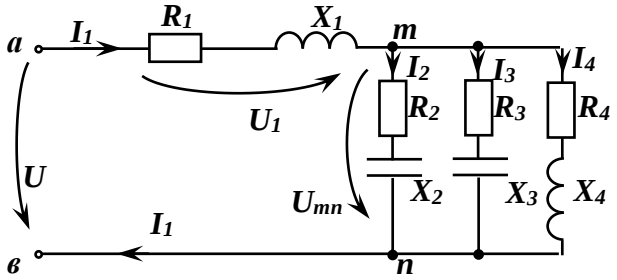

Рис. 2.11

Розв'язання. Розрахунок електричного кола (рис. 2.11) проведемо за числовими даними, наведеними в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

U, *В*	R_1, *Ом*	X_1, *Ом*	R_2, *Ом*	X_2, *Ом*	R_3, *Ом*	X_3, *Ом*	R_4, *Ом*	X_4, *Ом*
300	20	30	30	-40	50	-50	40	30

2.11.1. Визначення струмів у вітках і спадів напруг на елементах кола

Перетворимо послідовне сполучення активних і реактивних опорів (рис. 2.11) в еквівалентне паралельне сполучення відповідних провідностей (рис. 2.12) і визначимо їх параметри, виразивши активні та реактивні провідності віток через відповідні опори.

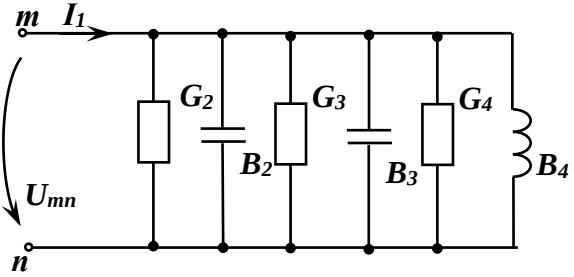

Рис. 2.12

Для цього попередньо визначимо повні опори віток:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36\ Ом;$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \sqrt{30^2 + (-40)^2} = 50\ Ом;$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + X_3^2} = \sqrt{50^2 + (-50)^2} = 70{,}7\ Ом;$$

$$Z_4 = \sqrt{R_4^2 + X_4^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ Ом.$$

Застосувавши формули переходу від послідовного сполучення елементів кола до паралельного, визначимо активні та реактивні провідності віток:

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{30}{50^2} = 0{,}012\ См; \quad B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} = \frac{-40}{50^2} = -0{,}016\ См;$$

$$G_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} = \frac{50}{70{,}7^2} = 0{,}01\ См; \quad B_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} = \frac{-50}{70{,}7^2} = -0{,}01\ См;$$

$$G_4 = \frac{R_4}{Z_4^2} = \frac{40}{50^2} = 0{,}016\ См; \quad B_4 = \frac{X_4}{Z_4^2} = \frac{30}{50^2} = 0{,}012\ См.$$

Еквівалентні активна, реактивна і повна провідності між вузлами *m* і *n*:

$$G_{mn} = G_2 + G_3 + G_4 = 0{,}12 + 0{,}01 + 0{,}016 = 0{,}038\ См;$$

$$B_{mn} = B_2 + B_3 + B_4 = -0{,}016 - 0{,}01 + 0{,}012 = -0{,}014\ См;$$

$$Y_{mn} = \sqrt{G_{mn}^2 + B_{mn}^2} = \sqrt{0{,}038 + (-0{,}014)^2} = 0{,}0405\ См.$$

Знак «мінус» перед значенням реактивної провідності B_{mn} вказує на ємнісний характер еквівалентної провідності між вузлами *m* і *n* (рис. 2.13).

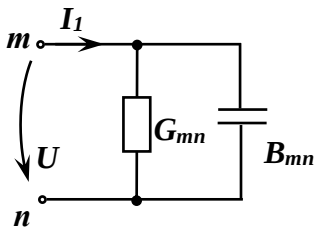

Рис. 2.13

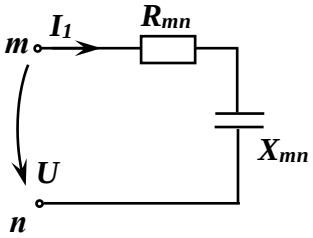

Рис. 2.14

Перетворимо схему (рис. 2.13) в еквівалентну схему з послідовним сполученням елементів кола (рис. 2.14) і обчислимо значення еквівалентних опорів:

$$R_{mn} = \frac{G_{mn}}{Y_{mn}^2} = \frac{0{,}038}{0{,}0405^2} = 23{,}17\ Ом;$$

$$X_{mn} = \frac{B_{mn}}{Y_{mn}^2} = \frac{-0{,}014}{0{,}0405^2} = -8{,}54\ Ом;$$

$$Z_{mn} = \sqrt{R_{mn}^2 + X_{mn}^2} = \sqrt{23{,}17^2 + (-8{,}54)^2} = 24{,}69 \text{ Ом}.$$

Перевірка: $Z_{mn} = \dfrac{1}{Y_{mn}} = \dfrac{1}{0{,}0405} = 24{,}69 \text{ Ом}.$

Після під'єднання до схеми заміщення паралельної частини кола (рис. 2.14) вітки з елементами R_1 та X_1 одержимо спрощений вигляд початкової розрахункової схеми кола (рис. 2.15).

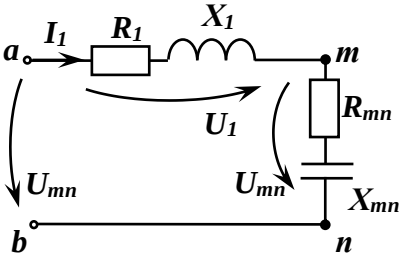

Рис. 2.15

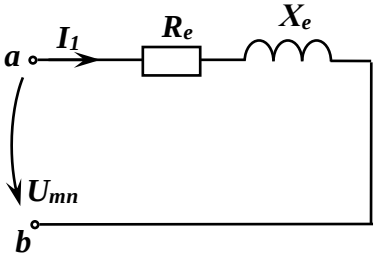

Рис. 2.16

Тоді еквівалентні опори всього кола (рис. 2.16):

$$R_e = R_1 + R_{mn} = 20 + 23{,}17 = 43{,}17 \text{ Ом};$$

$$X_e = X_1 + X_{mn} = 30 - 8{,}54 = 21{,}46 \text{ Ом};$$

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{43{,}17^2 + 21{,}46^2} = 48{,}21 \text{ Ом}.$$

Знак «плюс» перед значенням еквівалентного опору X_e вказує на його індуктивний характер (рис. 2.16). Отже, характер всього кола – активно-індуктивний.

Діюче значення струму в нерозгалуженій частині кола

$$I_1 = \frac{U}{Z_e} = \frac{300}{48{,}21} = 6{,}22 \text{ А}.$$

Діючі значення напруг на ділянках кола:

$$U_1 = Z_1 \times I_1 = 36 \times 6{,}22 = 223{,}92 \text{ В};$$

$$U_{mn} = Z_{mn} \times I_1 = 24{,}69 \times 6{,}22 = 153{,}57 \text{ В}.$$

Діючі значення струмів у паралельних вітках визначимо через міжвузлову напругу U_{mn}, яка прикладена одночасно до всіх цих віток (рис. 2.11):

$$I_2 = \frac{U_{mn}}{Z_2} = \frac{153{,}57}{50} = 3{,}07\ A;$$

$$I_3 = \frac{U_{mn}}{Z_3} = \frac{153{,}57}{70{,}7} = 2{,}17\ A;$$

$$I_4 = \frac{U_{mn}}{Z_4} = \frac{153{,}57}{50} = 3{,}07\ A.$$

2.11.2. Побудова векторних діаграм струмів і напруг

Для побудови векторних діаграм необхідно знати величини струмів у вітках кола, спади напруг на його елементах та кути зсуву фаз між напругами і струмами на окремих ділянках кола.

Спади напруг на активних і реактивних опорах кола (рис. 2.11):

$$U_{R1} = R_1 \times I_1 = 20 \times 6{,}22 = 124{,}4\ B;$$

$$U_{X1} = X_1 \times I_1 = 30 \times 6{,}22 = 186{,}6\ B;$$

$$U_{R2} = R_2 \times I_2 = 30 \times 3{,}07 = 92{,}1\ B;$$

$$U_{X2} = X_2 \times I_2 = (-40) \times 3{,}07 = -122{,}8\ B;$$

$$U_{R3} = R_3 \times I_3 = 50 \times 2{,}17 = 108{,}5\ B;$$

$$U_{X3} = X_3 \times I_3 = (-50) \times 2{,}17 = -108{,}5\ B;$$

$$U_{R4} = R_4 \times I_4 = 40 \times 3{,}07 = 122{,}8\ B;$$

$$U_{X4} = R_4 \times I_4 = 30 \times 3{,}07 = 92{,}1\ B.$$

Кути зсуву фаз між напругами і струмами на ділянках кола:

$$\varphi_1 = arctg\left(\frac{X_1}{R_1}\right) = arctg\left(\frac{30}{20}\right) = arctg\,(1{,}5) = 56{,}3^{\circ};$$

$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{X_2}{R_2}\right) = arctg\left(\frac{-40}{30}\right) = arctg\,(-1{,}33) = -53{,}1^{\circ};$$

$$\varphi_3 = arctg\left(\frac{X_3}{R_3}\right) = arctg\left(\frac{-50}{50}\right) = arctg\,(-1) = -45^{\circ};$$

$$\varphi_4 = arctg\left(\frac{X_4}{R_4}\right) = arctg\left(\frac{30}{40}\right) = arctg\,(0{,}75) = 36{,}9^{\circ}.$$

Кут зсуву фаз між вхідною напругою U та струмом I_1:

$$\varphi_e = arctg\left(\frac{X_e}{R_e}\right) = arctg\left(\frac{21{,}46}{43{,}17}\right) = arctg\,(0{,}5) = 26{,}4^{\circ}.$$

Кут зсуву фаз між вхідним струмом I_1 та міжвузловою напругою U_{mn}:

$$\varphi_{mn} = arctg\left(\frac{X_{mn}}{R_{mn}}\right) = arctg\left(\frac{-8{,}54}{23{,}17}\right) = arctg\,(-0{,}37) = -20{,}2^{\circ}.$$

Побудову векторних діаграм будемо виконувати, вибравши мірила:
для напруг – $m_u = 25\ В/см$; для струмів – $m_i = 0{,}5\ А/см$.

Спочатку будуємо векторну діаграму струмів кола (рис. 2.17), відклавши вздовж осі абсцис вектор вхідної напруги $\bar{U}$ ($\psi_u = 0^{\circ}$), а під кутом $\varphi_e = 26{,}4^{\circ}$ до нього в напрямку відставання – вектор вхідного струму $\bar{I}_1$.

Оскільки реактивний опір X_{mn} має ємнісний характер $(\varphi_{mn} = -20{,}2^{\circ})$, то під кутом $\varphi_{mn} = -20{,}2^{\circ}$ від вектора $\bar{I}_1$ в напрямку відставання відкладемо вектор $\bar{U}_{mn}$.

Так як струми I_2, I_3 й I_4 паралельних віток визначились через міжвузлову напругу U_{mn}, то кути φ_2, φ_3 й φ_4 є кутами зсуву фаз між вказаними струмами і напругою U_{mn}. Тому вектори ємнісних струмів $\bar{I}_2$ й $\bar{I}_3$

відкладемо під кутами $\varphi_2 = -53{,}1^\circ$ й $\varphi_3 = -45^\circ$ від вектора напруги $\overline{U}_{mn}$ в напрямку випередження, а вектор індуктивного струму $\bar{I}_4$ – під кутом $\varphi_4 = +36{,}9^\circ$ в напрямку відставання від вектора $\overline{U}_{mn}$.

Тепер згідно з першим законом Кірхгофа додаємо вектори струмів: $\bar{I}_3 + \bar{I}_4 + \bar{I}_2 = \bar{I}_1$. Для цього вектор $\bar{I}_4$ переносимо паралельно так, щоб його початок співпав з кінцем вектора $\bar{I}_3$ (рис. 2.17), а початок вектора $\bar{I}_2$ – з кінцем вектора $\bar{I}_4$.

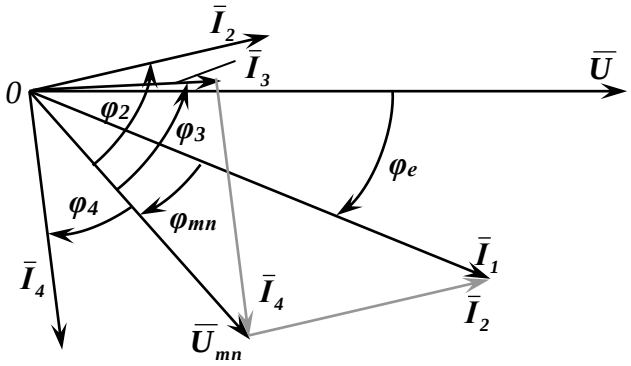

Рис. 2.17

Вектор $\bar{I}_1$ повинен замкнути ламану лінію суми векторів $\bar{I}_3 + \bar{I}_4 + \bar{I}_2$, тобто його кінець повинен співпасти з кінцем вектора $\bar{I}_2$, що є критерієм правильності проведених розрахунків.

Побудову топографічної векторної діаграми напруг (рис. 2.18) виконуємо, відклавши з точки *0* вектор вхідної напруги $\overline{U}$, вектор вхідного струму $\bar{I}_1$, вектор міжвузлової напруги $\overline{U}_{mn}$ і вектори струмів паралельних віток I_2, I_3 й I_4.

Вектор активної складової $\overline{U}_{R1}$ напруги U_1 спрямуємо уздовж вектора струму $\bar{I}_1$, а вектор реактивної складової $\overline{U}_{X1}$ – під прямим кутом до вектора $\bar{I}_1$ в напрямку випередження. Вектор напруги $\overline{U}_1$ знаходимо на верхній півплощині як геометричну суму векторів: $\overline{U}_1 = \overline{U}_{R1} + \overline{U}_{X1}$.

До вектора $\overline{U}_1$ додаємо вектор $\overline{U}_{mn}$, перенесений з нижньої півплощини, кінець якого повинен співпасти з кінцем вектора $\overline{U}$, так як згідно з законом Кірхгофа (рис. 2.11): $\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_{mn}$. Кут між векторами $\overline{U}_1$ та $\bar{I}_1$ – це кут $\varphi_1 = 56{,}3^{\circ}$.

Міжвузлова напруга U_{mn} прикладена одночасно до трьох паралельних віток (рис. 2.11), отже вектор $\overline{U}_{mn}$ служить гіпотенузою прямокутних трикутників векторів активних і реактивних складових напруг цих віток згідно з векторними рівняннями:

$$\overline{U}_{mn} = \overline{U}_{R2} + \overline{U}_{X2}, \quad \overline{U}_{mn} = \overline{U}_{R3} + \overline{U}_{X3}, \quad \overline{U}_{mn} = \overline{U}_{R4} + \overline{U}_{X4}.$$

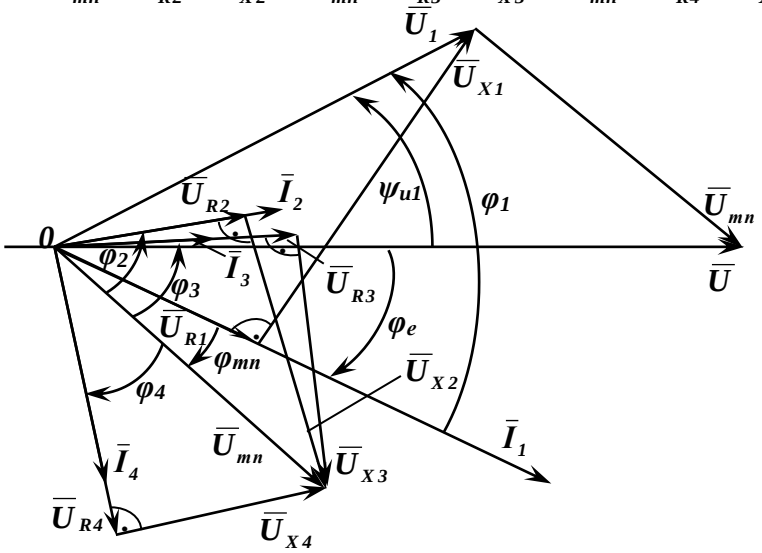

Рис. 2.18

Щоб побудувати ці трикутники (рис. 2.18) відкладемо вектори активних напруг $\overline{U}_{R2}$, $\overline{U}_{R3}$ й $\overline{U}_{R4}$ від точки 0 уздовж векторів струмів $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ й $\bar{I}_4$, вектори ємнісних напруг $\overline{U}_{X2}$ й $\overline{U}_{X3}$ відкладемо з кінців векторів $\overline{U}_{R2}$ й $\overline{U}_{R3}$ перпендикулярно до векторів струмів $\bar{I}_2$ й $\bar{I}_3$ в напрямку відставання, а вектор індуктивної напруги $\overline{U}_{X4}$ – з кінця вектора $\overline{U}_{R4}$ перпендикулярно до вектора струму $\bar{I}_4$ в напрямку випередження. При цьому кінці векторів $\overline{U}_{X2}$, $\overline{U}_{X3}$й $\overline{U}_{X4}$ повинні співпасти з кінцем вектора міжвузлової напруги $\overline{U}_{mn}$.

Слід зауважити, що правильна побудова топографічної векторної діаграми одночасно служить додатковою перевіркою правильності знаходження напруг на всіх ділянках електричного кола.

2.11.3. Обчислення миттєвих значень струмів і напруг

Так як початкова фаза прикладеної напруги $\psi_U = 0^\circ$, то її миттєве значення:

$$u = U \times \sqrt{2}\sin\omega t = 300 \times \sqrt{2}\sin 314t = 510\sin 314t \ B.$$

Миттєве значення вхідного струму:

$i_1 = I_1 \times \sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_{i1})\ A$; так як $\varphi_e = \psi_U - \psi_{i1} = 0 - \psi_{i1}$, то $\psi_{i1} = -\varphi_e = 26{,}4^\circ$.

Тоді

$$i_1 = 6{,}22 \times \sqrt{2}\sin(314t - 26{,}4^\circ) = 8{,}77\sin(314t - 26{,}4^\circ)\ A.$$

Миттєве значення міжвузлової напруги:

$$u_{mn} = U_{mn} \times \sqrt{2}\sin(314t + \psi_{mn})\ B;$$

$$\varphi_{mn} = \psi_{mn} - \psi_{i1};$$

$$\psi_{mn} = \varphi_{mn} + \psi_{i1} = -20{,}2^\circ - 26{,}4^\circ = -46{,}6^\circ;$$

$$u_{mn} = 153{,}6 \times \sqrt{2}\sin(314t - 46{,}6^\circ) = 217{,}2\sin(314t - 46{,}6^\circ)\ B.$$

Миттєве значення напруги на першій вітці:

$$u_1 = U_1 \times \sqrt{2}\, \sin(\omega t + \psi_{U1})\ B;$$

$$\varphi_1 = \psi_{U1} - \psi_{i1};\quad \psi_{U1} = \varphi_1 + \psi_{i1} = 56{,}3^\circ - 26{,}4^\circ = 29{,}9^\circ;$$

$$u_1 = 224{,}5 \times \sqrt{2}\, \sin(314t + 29{,}9^\circ) = 317{,}5\, \sin(314t + 29{,}9^\circ)\ B.$$

При розрахунках миттєвих значень струмів у паралельних вітках використаємо кути зсуву фаз φ_2, φ_3 й φ_4 між струмами I_2, I_3, I_4 цих віток і міжвузловою напругою U_{mn}:

$$i_2 = I_2 \times \sqrt{2}\, \sin(\omega t + \psi_{i2})\ A;\quad \varphi_2 = \psi_{mn} - \psi_{i2};$$

$$\psi_{i2} = \psi_{mn} - \varphi_2 = -46{,}6^\circ - (-53{,}1^\circ) = 6{,}7^\circ;$$

$$i_2 = 3{,}07 \times \sqrt{2}\, \sin(314t + 6{,}3^\circ) = 4{,}33\, \sin(314t + 6{,}7^\circ)\ A;$$

$$i_3 = I_3 \times \sqrt{2}\, \sin(\omega t + \psi_{i3})\ A;$$

$$\varphi_3 = \psi_{mn} - \psi_{i3};$$

$$\psi_{i3} = \psi_{mn} - \varphi_3 = -46{,}6^\circ - (-45^\circ) = -1{,}6^\circ;$$

$$i_3 = 2{,}17 \times \sqrt{2}\, \sin(314t - 1{,}6^\circ) = 3{,}07\, \sin(314t - 1{,}6^\circ)\ A;$$

$$i_4 = I_4 \times \sqrt{2}\, \sin(\omega t + \psi_{i4})\ A;$$

$$\varphi_4 = \psi_{mn} - \psi_{i4};\ \psi_{i4} = \psi_{mn} - \varphi_4 = -46{,}6^\circ - 36{,}9^\circ = -83{,}5^\circ;$$

$$i_4 = 3{,}07 \times \sqrt{2}\, \sin(314t - 83{,}5^\circ) = 4{,}34\, \sin(314t - 83{,}5^\circ)\ A.$$

2.11.4. Складання рівнянь енергетичного балансу

Баланс активної потужності*: активна потужність, яка надходить від джерела енергії рівна активній потужності, що розсіюється на всіх активних опорах кола, тобто* $P_1 = \sum_{k=1}^{4} P_k$ *або*

$$U \times I_1 \times \cos\varphi_e = \sum_{k=1}^{4} I_k^2 \times R_k.$$

Підставивши числові значення, одержимо

$$300 \times 6{,}22 \times \cos 26{,}6^{\circ} = 6{,}22^2 \times 20 + 3{,}07^2 \times 30 +$$

$$+ 2{,}17^2 \times 50 + 3{,}07^2 \times 40$$

або $$1671\ Вт \approx 1669\ Вт .$$

Відносна похибка балансу активної потужності:

$$\delta_p\% = \frac{1671 - 1669}{1671} \times 100\% = 0{,}12\ \% .$$

Рівняння балансу реактивної потужності:

$$U \times I_1 \times \sin\varphi_e = \sum_{k=1}^{4} I_k^2 \times X_k ;$$

$$300 \times 6{,}22 \times \sin 26{,}4^{\circ} = 6{,}22^2 \times 30 + 3{,}07^2 \times (-40) +$$

$$+ 2{,}17^2 \times (-50) + 3{,}07^2 \times 30$$

або $$830\ ВАр \approx 831\ ВАр .$$

Відносна похибка балансу реактивної потужності:

$$\delta_Q\% = \frac{830 - 831{,}3}{830} \times 100\% = 0{,}16\ \% .$$

2.12. Комплексний метод розрахунку синусоїдних кіл

2.12.1. Форми запису комплексних чисел

Комплексний (символічний) метод застосовують при розрахунках усталених режимів у лінійних електричних колах змінного струму, коли ЕРС, напруги і струми є синусоїдними функціями часу. Він дає можливість замінити розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь синусоїдних функцій часу розв'язуванням алгебраїчних рівнянь з комплексними значеннями цих функцій.

Так як кожна синусоїдна функція часу, наприклад напруга $u = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$ при заданій частоті ω визначається двома величинами – амплітудою U_m і початковою фазою ψ_U, так і кожне комплексне число містить у собі дві величини – модуль U і аргумент ψ_U у показниковій формі запису: $\dot{U} = Ue^{j\psi_U}$ або дійсну

$u_1 = U\cos\psi_U$ і уявну $ju_2 = jU\sin\psi_U$ складові при алгебраїчній і тригонометричній формах запису, де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, причому

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1; \qquad j = e^{j\pi/2};$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j\times 1}{j^2\times 1} = \frac{j}{-1} = -j = e^{-j\pi/2}.$$

При зворотному переході від алгебраїчної форми до показникової: модуль $U = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$; аргумент $\psi_U = arctg\left(u_2 / u_1\right)$.

Дві комплексні величини, які мають рівні модулі і рівні, але протилежні за знаком аргументи, називають спряженими.

Якщо маємо комплексне число

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_U} = u_1 + ju_2,$$

то спряжене йому комплексне число

$$\overset{*}{U} = Ue^{-j\psi_U} = u_1 - ju_2.$$

Добуток спряжених комплексних чисел рівний квадрату їх модуля:

$$\underline{U}\times\overset{*}{U} = Ue^{j\psi_U}\times Ue^{-j\psi_U} = U^2e^{j(\psi_U-\psi_U)} = U^2e^{j0^\circ} = U^2.$$

Для дійсної і уявної частин комплексного числа вживають вирази

$$u_1 = \Re e\left(\underline{U}\right); \qquad u_2 = \Im m\left(\underline{U}\right).$$

2.12.2. Комплексні зображення синусоїдного струму, його похідної та інтегралу

Нехай ми маємо синусоїдний струм:

$$i = I_m\sin\left(\omega t + \psi_i\right). \qquad (2.61)$$

Комплексне число:

$$I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = I_m e^{j\psi_i}\times e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

будемо розглядати як символічне зображення синусоїдного струму. Це число також, як і величина миттєвого струму (2.61), визначається двома величинами – амплітудою I_m і початковою фазою ψ_i.

Комплексну величину $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ називають комплексною амплітудою струму.

Використовуючи знак відображення: «$\doteq$» , можна записати:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \doteq I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t} \ . \qquad (2.62)$$

Таким чином, при переході від дійсної синусоїдної функції (оригіналу) до її комплексного зображення необхідно взяти його модулем амплітуду синусоїдної функції, а аргументом – початкову фазу синусоїдної функції.

При зворотному переході від комплексного числа, що відображує синусоїдну функцію часу, до оригіналу необхідно взяти коефіцієнт при уявній частині комплексного числа: $i(t) = \Im m(\dot{I})$.

Похідна за часом від синусоїдного струму:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left[I_m \sin(\omega t + \psi_i)\right] = \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \pi/2\right).$$

Комплексне відображення похідної буде мати вигляд:

$$\omega I_m e^{j\left(\omega t + \psi_i + \pi/2\right)} = \omega I_m e^{j\pi/2} \times e^{j(\omega t + \psi_i)} = j\omega I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} =$$

$$= j\omega I_m e^{j\psi_i} \times e^{j\omega t} = j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Отже,

$$\frac{di}{dt} \doteq j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}, \qquad (2.63)$$

тобто операція взяття похідної від дійсної синусоїдної функції часу замінюється помноженням на $j\omega$ *її комплексного зображення.*

Відповідно для похідної n – го порядку

$$\frac{d^n i}{dt^n} \doteq (j\omega)^n \times \dot{I}_m e^{j\omega t}. \qquad (2.64)$$

Вираз для електричного заряду рівний інтегралу від синусоїдного струму:

$$q(t) = \int_0^t i dt + q(0) = \int_0^t I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt =$$

$$= -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \psi_i - \pi/2\right).$$

Тоді комплексне відображення інтегралу запишеться виразом:

$$\int_0^t i dt \doteq \frac{I_m}{\omega} e^{j\left(\omega t + \psi_i - \pi/2\right)} = \frac{I_m}{\omega} e^{-j\pi/2} \times e^{j\omega t} \times e^{j\psi_i} =$$

$$= \frac{I_m}{j\omega} e^{j\psi_i} \times e^{j\omega t} = \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}.$$

Отже, $$\int_0^t i dt \doteq \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}, \qquad (2.65)$$

тобто операція інтегрування дійсної синусоїдної функції часу замінюється діленням на $j\omega$ комплексного зображення цієї функції.

Таким чином, комплексний метод є методом алгебраїзації інтегро-диференціальних рівнянь лінійних електричних кіл.

Суть його полягає в тому, що всі дійсні функції часу замінюють їх комплексними відображеннями, а всі диференціальні й інтегральні рівняння, записані згідно з законами Кірхгофа, замінюють алгебраїчними рівняннями у комплексній формі. Ці рівняння містять у собі комплекси заданих і шуканих функцій та їх інтегралів і похідних.

Розв'язуючи ці рівняння, знаходять комплексні вирази шуканих функцій часу, від яких переходять до оригіналів цих функцій.

Розглянемо коло з послідовним сполученням активного опору, індуктивності і ємності (рис. 2.19), на вхід якого подається синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

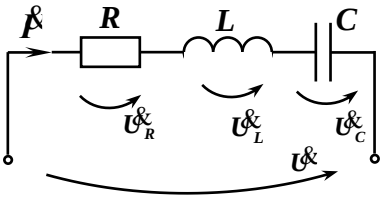

Рис. 2.19

Згідно з другим законом Кірхгофа рівняння кола має вигляд

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt. \qquad (2.66)$$

Запишемо комплексні відображення синусоїдних величин, що входять у рівняння (2.66)

$$u \doteq \dot{U}_m e^{j\omega t}; \qquad i \doteq \dot{I}_m e^{j\omega t}; \qquad L\frac{di}{dt} \doteq j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t};$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i dt \doteq \frac{\dot{I}_m}{j\omega C} e^{j\omega t}$$

і підставимо їх у це рівняння

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = R\dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

Скоротивши на $e^{j\omega t}$, одержимо

$$\dot{U}_m = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \times \dot{I}_m = \underline{Z}\dot{I}_m, \qquad (2.67)$$

де $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ – комплексний опір кола.

З рівності (2.67) легко визначається комплексна амплітуда струму $\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = I_m e^{j\psi_i}$, з якої можна визначити вираз для миттєвого значення струму в колі

$$i(t) = \Im_m\left(\dot{I}_m e^{j\omega t}\right) = \Im_m\left[I_m \cos(\omega t + \psi_i) + jI_m \sin(\omega t + \psi_i)\right] = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Комплексні діючі значення струму і напруги:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = Ie^{j\psi_i}; \quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = Ue^{j\psi_U}. \qquad (2.68)$$

В подальшому комплексні діючі значення ЕРС, напруг і струмів будемо називати – комплексна ЕРС, комплексна напруга, комплексний струм, а множник $e^{j\omega t}$ будемо опускати.

2.12.3. Відповідність між комплексними струмами і напругами та їх векторними зображеннями

Вектори синусоїдних функцій відкладають на комплексній площині, де горизонтальна вісь – вісь дійсних, а вертикальна вісь – вісь уявних чисел.

Довжини векторів приймають пропорційними діючим значеннями синусоїдних величин, а кути між дійсною віссю і векторами – рівними початковим фазам цих синусоїдних величин. Тоді кожній комплексній величині буде відповідати певний вектор, а спряженим комплексним величинам – вектори, що є дзеркальними відображеннями один до одного відносно дійсної осі.

Нехай задані синусоїдна напруга і синусоїдний струм, що зсунуті за фазою на кут $\varphi = \psi_u - \psi_i$. При переході від вектора струму $\bar{I}$ до вектора напруги $\bar{U} = Z \times \bar{I}$ (рис. 2.20) необхідно повернути вектор струму на кут φ і змінити його довжину в $\left(m_i / m_u\right) \times m_z$ разів, де

m_i й m_u – мірила векторів струму й напруги відповідно, а m_z – мірило опору.

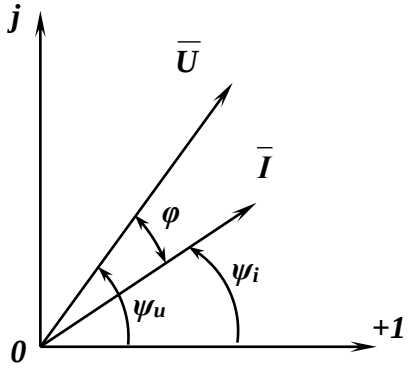

Рис. 2.20

При переході від комплексного струму до комплексної напруги необхідно аргумент струму збільшити на φ°, так як $\psi_u = \psi_i + \varphi$, і модуль струму I помножити на модуль опору Z, так як $\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}$, тобто необхідно помножити комплексний струм $\dot{I}$ на комплексний опір $Ze^{j\varphi}$.

Таким чином, помноження комплексної величини на $e^{j\varphi}$ відповідає повороту її вектора на кут φ, а помноження комплексної величини на $e^{+j90^{\circ}}$ відповідає повороту вектора на кут 90° у верх від осі дійсних чисел.

Геометричне додавання векторів струму або напруги відповідає алгебраїчному додаванню відповідних їм комплексних величин, так як при геометричному додаванні векторів алгебраїчно сумуються їх проекції на відповідних осях, а при алгебраїчному додаванні комплексних чисел – алгебраїчно сумуються їх дійсні і уявні складові.

2.12.4. Комплексні опір і провідність

Відношення комплексної напруги $\dot{U}$ до комплексного струму $\dot{I}$ називають комплексним опором кола і позначають символом $\underline{Z}$.

Згідно з законом Ома:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = Ze^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ze^{j\varphi} = \\ = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX, \tag{2.69}$$

де R, X, Z – відповідно активний, реактивний і повний опори кола.

Відношення комплексного струму до комплексної напруги називають комплексною провідністю кола і позначають символом $\underline{Y}$ *:*

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{1}{Z}e^{j(\psi_i - \psi_u)} = Ye^{-j(\psi_u - \psi_i)} = \\ = Ye^{-j\varphi} = Y\cos\varphi - jY\sin\varphi = G - jB, \tag{2.70}$$

де G, B, Y – активна, реактивна і повна провідності кола.

Очевидно, має місце зв'язок:

$$\underline{Z} \times \underline{Y} = 1 \quad \text{або} \quad (R + jX) \times (G - jB) = 1. \tag{2.71}$$

Напрямки векторів, що відповідають комплексним величинам $\underline{Y}$ і $\underline{Z}$, є дзеркальними відображеннями один відносно одного в осі дійсних чисел, так як аргументи комплексних величин $\underline{Y}$ і $\underline{Z}$ рівні за величиною і протилежні за знаком.

2.12.5. Закони Ома й Кірхгофа в комплексній формі

Вирази закону Ома в комплексній формі мають вигляд:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}; \quad \dot{U} = \underline{Z}\dot{I}; \quad \dot{U} = \frac{\dot{I}}{\underline{Y}}; \quad \dot{I} = \dot{U}\underline{Y}. \tag{2.72}$$

Перевага цих виразів в тому, що ними враховується як зв'язок між діючими значеннями струму I й напруги U, так і зсув фаз φ між ними.

Перший закон Кірхгофа, який стосовно до вузла для миттєвих значень мав вигляд: $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$, в комплексній формі запишеться: $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$. (2.73)

Другий закон Кірхгофа, який стосовно до контуру кола для миттєвих значень мав вигляд $\sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{m} u_k$, в комплексній формі запишеться:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k = \sum_{k=1}^{m} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{m} \underline{Z}_k \times \dot{I}_k, \qquad (2.74)$$

де $\dot{E}_k, \dot{U}_k, \dot{I}_k, \underline{Z}_k$ – комплексні ЕРС, спади напруг, струми й опори k – ої вітки.

Як і для миттєвих значень, перед складанням рівнянь згідно з законами Кірхгофа в комплексній формі необхідно вибрати умовно додатні напрямки ЕРС, напруг і струмів у всіх вітках кола і показати їх на схемі стрілками.

Якщо в позначеннях використовуються подвійні індекси, то мають місце співвідношення:

$$\dot{E}_{ab} = -\dot{E}_{ba} \;\; ; \;\; \dot{U}_{ab} = -\dot{U}_{ba} ; \;\; \dot{I}_{ab} = -\dot{I}_{ba}.$$

Опори або провідності віток є параметрами, що не мають напрямків, і порядок індексів для них не грає ролі, тобто:

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ba} ; \qquad \underline{Y}_{ab} = \underline{Y}_{ba}.$$

2.12.6. Комплексна потужність

Для обчислення активної і реактивної потужностей необхідно знати діючі значення напруги U й струму I та зсув фаз φ між ними.

Величина φ рівна різниці початкових фаз напруги й струму ($\varphi = \psi_u - \psi_i$) і тому при визначенні комплексної потужності необхідно перемножувати не комплексні

величини $\dot{U}$ та $\dot{I}$, так як при цьому $\dot{U}\times\dot{I}=Ue^{j\psi_u}\times Ie^{j\psi_i}=UIe^{j(\psi_u+\psi_i)}$, тобто аргумент добутку рівний сумі $\psi_u+\psi_i$ початкових фаз, а взяти добуток комплексної напруги $\dot{U}$ на спряжену величину комплексного струму $\dot{I}$. В результаті одержимо комплексну потужність:

$$\begin{aligned}\tilde{S}=\dot{S}&=\dot{U}\times\overset{*}{\dot{I}}=Ue^{j\psi_u}\times Ie^{-j\psi_i}=UIe^{j(\psi_u-\psi_i)}=\\&=Ue^{j\varphi}=UI\cos\varphi+jUI\sin\varphi=\\&=S\cos\varphi+jS\sin\varphi=P+jQ.\end{aligned}\qquad(2.75)$$

Приклад 2.3. Визначимо активний і реактивний опори приймача та споживану ним активну і реактивну потужності, якщо відомі комплексний струм і комплексна напруга в колі:

$$\dot{I}=(16+j12)\ A;\qquad \dot{U}=j100\ B.$$

Розв'язання. Комплексний опір визначимо, використовуючи показникову форму запису комплексів струму і напруги:

$$\dot{U}=j100=100e^{j90^\circ}\ B;\qquad \dot{I}=Ie^{j\psi_i}=20e^{j36,9^\circ}\ A,$$

де $I=\sqrt{16^2+12^2}=20\ A;\qquad \psi_i=arctg\left(12/16\right)=36,9^\circ.$

Отже,

$$\underline{Z}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{100e^{j90^\circ}}{20e^{j36,9^\circ}}=5e^{j53,1^\circ}=5\cos 53,1^\circ+j5\sin 53,1^\circ=$$
$$=(3+j4)\ \ Ом=R+jX.$$

Таким чином, активний опір приймача $R=3\ Ом$, а індуктивний $X_L=4\ Ом$.

Для визначення комплексної потужності помножимо комплексну напругу на спряжену величину комплексного струму:

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^{*} = 100e^{j90^{\circ}} \times 20e^{-j36,9^{\circ}} = 2000e^{j53,1^{\circ}} =$$
$$= 2000\left(\cos 53,1^{\circ} + j\sin 53,1^{\circ}\right) = \left(1200 + j1600\right) BA.$$

А так як: $\tilde{S} = P + jQ$, то з останнього виразу одержимо величини повної, активної та реактивної потужностей приймача:

$$S = 2000\ BA; \quad P = 1200\ Bm; \quad Q = 1600\ BAp.$$

2.12.7. Розрахунок синусоїдних кіл комплексним методом

2.12.7.1. Послідовне сполучення ділянок кола

Згідно з другим законом Кірхгофа при послідовному сполученні елементів кола (рис. 2.21) напруга на вході кола рівна сумі спадів напруг на окремих ділянках: $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$, або в комплексній формі:

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \times \dot{I} = \dot{I} \times \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k = \dot{I} \times \underline{Z}, \quad (2.76)$$

де $\underline{Z}_k = R_k \pm X_k$ – комплексний опір k – ої ділянки кола.

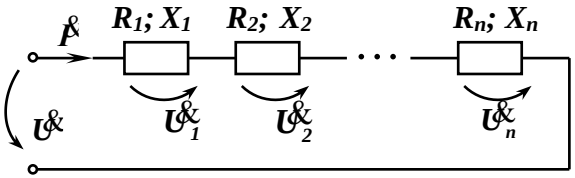

Рис. 2.21

Отже, при послідовному сполученні ділянок кола комплексний опір усього кола рівний алгебраїчній сумі комплексних опорів окремих його ділянок:

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \pm j\sum_{k=1}^{n} X_k = R \pm jX. \quad (2.77)$$

Обчисливши комплексний опір кола $\underline{Z}$, можна визначити комплексний струм: $\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z}$.

Із рівностей:

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad \text{та} \qquad X = \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{2.78}$$

слідує, що необхідно алгебраїчно додавати окремо активні й окремо реактивні опори послідовно сполучених ділянок кола.

Домноживши ліві й праві частини рівностей (2.78) на квадрат струму, одержимо:

$$I^2 R = I^2 \sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} I^2 R_k \quad \text{або} \quad P = \sum_{k=1}^{n} P_k ; \tag{2.79}$$

$$I^2 X = I^2 \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} I^2 X_k \quad \text{або} \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k , \tag{2.80}$$

тобто активна P *і реактивна* Q *потужності всього кола рівні алгебраїчним сумам відповідно активних і реактивних потужностей усіх послідовно сполучених його ділянок.*

2.12.7.2. Паралельне сполучення ділянок кола

Згідно з першим законом Кірхгофа при паралельному сполученні ділянок кола (рис. 2.22) загальний струм на вході кола рівний сумі струмів окремих ділянок кола: $i = \sum_{k=1}^{n} i_k$ або в комплексній формі:

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k \underline{Y}_k = \dot{U} \times \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k = \dot{U} \underline{Y}, \tag{2.81}$$

де $\underline{Y}_k = (G_k - jB_k)$ – комплексна провідність k – ої ділянки кола.

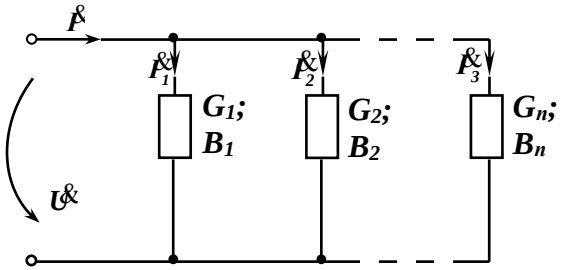

Рис. 2.22

Таким чином, при паралельному сполученні ділянок кола комплексна провідність усього кола рівна алгебраїчній сумі комплексних провідностей його паралельних ділянок:

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^{n} G_k - j\sum_{k=1}^{n} B_k = G - jB\,. \qquad (2.82)$$

Обчисливши комплексну провідність кола, знаходимо комплексний струм на вході кола: $\dot{I} = \dot{U}\underline{Y}$.

Із рівностей:

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad \text{та} \qquad B = \sum_{k=1}^{n} B_k \qquad (2.83)$$

слідує, що при розрахунках необхідно алгебраїчно додавати окремо активні і окремо реактивні провідності ділянок кола.

Домноживши ліві і праві частини рівностей (2.83) на квадрат напруги, одержимо:

$$U^2 G = U^2 \sum_{k=1}^{n} G_k = \sum_{k=1}^{n} U^2 G_k \quad \text{або} \quad P = \sum_{k=1}^{n} P_k\,; \qquad (2.84)$$

$$U^2 B = U^2 \sum_{k=1}^{n} B_k = \sum_{k=1}^{n} U^2 B_k \quad \text{або} \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k\,, \qquad (2.85)$$

тобто активна P і реактивна Q потужності всього кола рівні алгебаїчним сумам відповідно активних і реактивних потужностей усіх паралельно сполучених його ділянок.

2.12.7.3. Змішане сполучення ділянок кола

Під змішаним сполученням розуміють таке, що являє собою сполучення послідовних і паралельних ділянок кола. Для розрахунку таких кіл можна використати всі методи, розглянуті в попередніх параграфах.

Розглянемо це на прикладі схеми кола, наведеній на рис. 2.23. Припустимо, що задана напруга $\boldsymbol{U}$ на вході кола і необхідно відшукати струми у всіх вітках кола.

Комплексні провідності другої і третьої ділянок:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_2 = \frac{\boldsymbol{1}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{jX}_2}; \qquad \underline{\boldsymbol{Y}}_3 = \frac{\boldsymbol{1}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_3} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{jX}_3}.$$

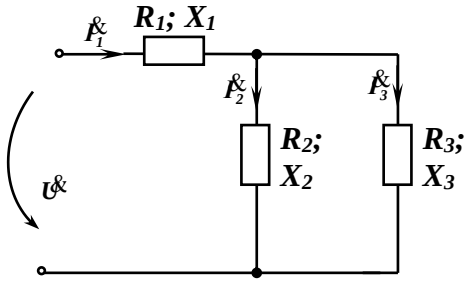

Рис. 2.23

Щоб позбутись уявності у знаменнику, необхідно домножити чисельник і знаменник на спряжену до знаменника комплексну величину:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_2 = \frac{\left(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{jX}_2\right)}{\left(\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{jX}_2\right)\times\left(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{jX}_2\right)} = \frac{\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_2^2 + \boldsymbol{X}_2^2} - \boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{X}_2}{\boldsymbol{R}_2^2 + \boldsymbol{X}_2^2} = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{jB}_2.$$

Аналогічно: $\underline{\boldsymbol{Y}}_3 = \boldsymbol{G}_3 - \boldsymbol{jB}_3$.

Комплексна еквівалентна провідність паралельно сполучених ділянок рівна сумі їх комплексних провідностей:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{23} = \underline{\boldsymbol{Y}}_2 + \underline{\boldsymbol{Y}}_3 = \left(\boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{G}_3\right) - \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3\right) = \boldsymbol{G}_{23} - \boldsymbol{jB}_{23}.$$

Комплексний опір першої ділянки кола:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_1 = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{jX}_1.$$

Перша ділянка сполучена послідовно з разом взятими другою і третьою ділянками. Отже, комплексний опір усього кола:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23},$$

де

$$\underline{Z}_{23} = \frac{1}{\underline{Y}_{23}} = \frac{1}{G_{23} - jB_{23}} = \frac{G_{23}}{G_{23}^2 + B_{23}^2} + j\frac{B_{23}}{G_{23}^2 + B_{23}^2} = R_{23} + jX_{23}.$$

Тоді:

$$\underline{Z} = R_1 + jX_1 + R_{23} + jX_{23} = R + jX.$$

Комплексний струм у нерозгалуженій частині кола:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Для спрощення розрахунків напругу $\dot{U}$ можна вважати дійсним числом, поклавши $\psi_u = 0^\circ$. Тоді $\dot{U} = Ue^{j0^\circ} = U$. Це означає, що вектор прикладної напруги U спрямований вздовж дійсної осі.

Комплексні напруги на другій і третій ділянках знаходимо з рівностей:

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \underline{Z}_1 \times \dot{I}_1 \quad \text{або} \quad \dot{U}_{23} = \underline{Z}_{23} \times \dot{I}_1.$$

Комплексні струми в паралельних ділянках:

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_2 \times \dot{U}_{23}; \qquad \dot{I}_3 = \underline{Y}_3 \times \dot{U}_{23}.$$

Знаючи комплексний опір $Z = R + jX$ всього кола, можна визначити кут зсуву фаз між напругою $\dot{U}$ та струмом $\dot{I}$ із співвідношення:

$$\varphi = arctg\,\frac{X}{R}.$$

Як і в попередніх випадках, при змішаному сполученні ділянок активна потужність всього кола рівна сумі активних потужностей, споживаних в окремих його ділянках, а реактивна потужність усього кола рівна алгебраїчній сумі відповідних реактивних потужностей усіх ділянок.

Приклад 2.4. Визначимо комплексні струми та комплексні спади напруг на ділянках кола (рис. 2.24), якщо задана вхідна напруга $\dot{U} = j25\ \boldsymbol{В}$ і опори елементів кола: $R = 5\ \boldsymbol{Ом};\ X_L = 2{,}5\ \boldsymbol{Ом};\ X_C = 5\ \boldsymbol{Ом}$.

Розв'язання

Комплексні опори ділянок кола:

$$\underline{Z}_1 = jX_L = j2{,}5 = 2{,}5e^{j90^\circ}\ \boldsymbol{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R = 5\ \boldsymbol{Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_c = -j5 = 5e^{-j90^\circ}\ \boldsymbol{Ом}.$$

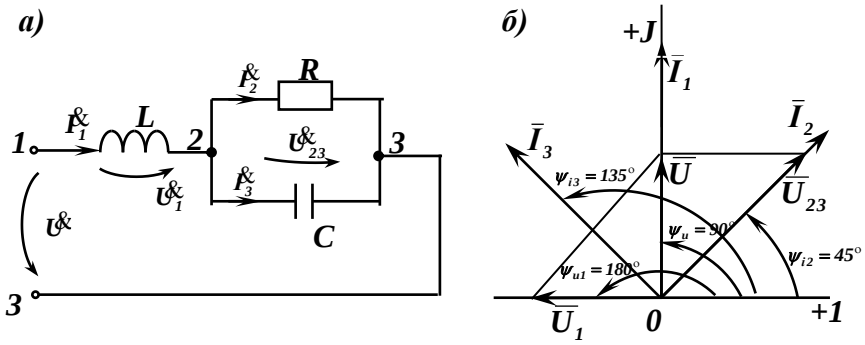

Рис. 2.24

Комплексний опір паралельно з'єднаних опорів $\underline{Z}_2$ і $\underline{Z}_3$:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{5 \times 5e^{-j90^\circ}}{5 - j5} = \frac{25e^{-j90^\circ}}{7{,}07e^{-j45^\circ}} =$$

$$= 3{,}54e^{-j90^\circ - (-45^\circ)} = 3{,}54e^{-j45^\circ} =$$

$$= 3{,}54\left[\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)\right] = (2{,}5 - j2{,}5)\ \boldsymbol{Ом}.$$

Вхідний комплексний опір кола:

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = j2{,}5 + 2{,}5 - j2{,}5 = 2{,}5\ \boldsymbol{Ом}$$

має тільки дійсну величину, що є результатом явища резонансу напруг в колі.

Згідно з законом Ома комплексний вхідний струм кола:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{j25}{2{,}5} = j10 = 10e^{j90^\circ}; \quad I_1 = 10\ A.$$

Знаючи комплексний струм $\dot{I}_1$, можна визначити комплексні напруги $\dot{U}_1$ й $\dot{U}_{23}$:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \times \dot{I}_1 = 2{,}5e^{j90^\circ} \times 10e^{j90^\circ} = 25e^{j180^\circ}\ B;\ \psi_{u1} = 180^\circ;$$

$$\dot{U}_{23} = \underline{Z}_{23} \times \dot{I}_1 = 3{,}54e^{-j45^\circ} \times 10e^{j90^\circ} = 35{,}4e^{j45^\circ}\ B;\ \psi_{u3} = 45^\circ.$$

Як бачимо, вектор напруги $\overline{U}_{23}$ відстає за фазою від вектора вхідного струму $\overline{I}_1$ на кут φ_{23}:

$$\varphi_{23} = \psi_u - \psi_{i_1} = 45^\circ - 90^\circ = -45^\circ.$$

Комплексні струми $\dot{I}_2$ й $\dot{I}_3$ паралельних ділянок визначимо через комплексну напругу $\dot{U}_{23}$:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{35{,}4e^{j45^\circ}}{5} = 7{,}08e^{j45^\circ}\ A; \quad \psi_{i2} = 45^\circ;$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{35{,}4e^{j45^\circ}}{5e^{-j90^\circ}} = 7{,}08e^{j135^\circ}\ A; \quad \psi_{i3} = 135^\circ.$$

2.13. Електричні кола із взаємною індуктивністю

2.13.1. Узгоджене і зустрічне увімкнення магнітозв'язаних котушок

Якщо дві котушки якими протікають синусоїдні струми i_1 та i_2, знаходяться близько одна біля одної, то частина магнітного потоку однієї котушки пронизує витки іншої, і навпаки. Такі дві котушки із взаємною індуктивністю називаються магнітозв'язаними.

В електричному колі із взаємоіндуктивністю згідно з законом електромагнітної індукції в кожній котушці

наводяться ЕРС: самоіндукції $e_L = -Ldi/dt$ і взаємної індукції $e_M = \pm Mdi/dt$.

Якщо ЕРС самоіндукції e_L згідно з правилом Ленца завжди зберігає знак «–», то ЕРС взаємної індукції e_M може змінювати знак в залежності від розташування котушок одна відносно одної, внаслідок чого змінюються напрямки магнітних потоків зв'язку між котушками.

Розрізняють узгоджене і зустрічне увімкнення магнітозв'язаних котушок. На рис. 2.25, *а* показані індуктивно зв'язані котушки, в яких напрямки магнітних

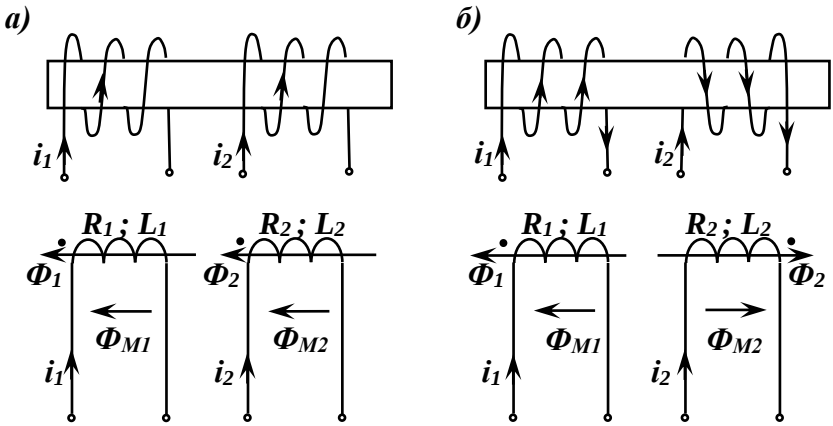

Рис. 2.25

потоків вибрані так, що при вказаних напрямках струмів i_1 та i_2 магнітні потоки самоіндукції: Φ_1 і Φ_2 та взаємної індукції: Φ_{M1} і Φ_{M2} в обох котушках співпадають (узгоджене вмикання).

На рис. 2.25, *б* представлено дві індуктивно зв'язані котушки, в яких магнітні потоки спрямовані так, що при тих же напрямках струмів i_1 та i_2 магнітні потоки самоіндукції і взаємної індукції – протилежні (зустрічне вмикання).

Таким чином, напрямок дії ЕРС взаємної індукції залежить від напрямку намотки котушок.

Для визначення дії ЕРС взаємної індукції прийнято позначати однойменні виводи котушок (початки намоток) «точкою». Тоді, при однакових напрямках струмів i_1 та i_2 відносно цих виводів, магнітні потоки самоіндукції Φ_1 і Φ_2 і взаємної індукції Φ_{M1} і Φ_{M2} котушок додаються (рис. 2.25, *а*). При цьому:

$$\left.\begin{aligned} e_{L1} &= -L_1 \frac{di_1}{dt}; & e_{L2} &= -L_2 \frac{di_2}{dt}; \\ e_{M1} &= -M \frac{di_2}{dt}; & e_{M2} &= -M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.86)$$

де L_1 й L_2 – індуктивності котушок;

M – взаємоіндуктивність між котушками.

На рис. 2.25, *б*, де струми i_1 та i_2 мають зустрічні напрямки відносно однойменних виводів, магнітні потоки самоіндукції і взаємоіндукції протилежні, а ЕРС взаємної індукції визначаються за формулами:

$$e_{M1} = +M \frac{di_2}{dt}; \qquad e_{M2} = +M \frac{di_1}{dt}. \qquad (2.87)$$

2.13.2. Послідовне і паралельне сполучення індуктивно зв'язаних котушок. Опір зв'язку

На рис. 2.26, *а*, і на рис. 2.26, *б* відповідно показані: послідовно-узгоджене та послідовно-зустрічне сполучення двох індуктивно зв'язаних котушок. При цьому $i_1 = i_2 = i$.

Рівняння напруг згідно з другим законом Кірхгофа для узгодженого вмикання котушок:

$$u_{узг} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

При врахуванні рівностей:

$$i_1 = i_2 = i; \qquad \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} \qquad (2.88)$$

рівняння напруг прийме вигляд:

$$u_{узг} = (R_1 + R_2) \times i + (L_1 + L_2 + 2M) \times \frac{di}{dt}. \qquad (2.89)$$

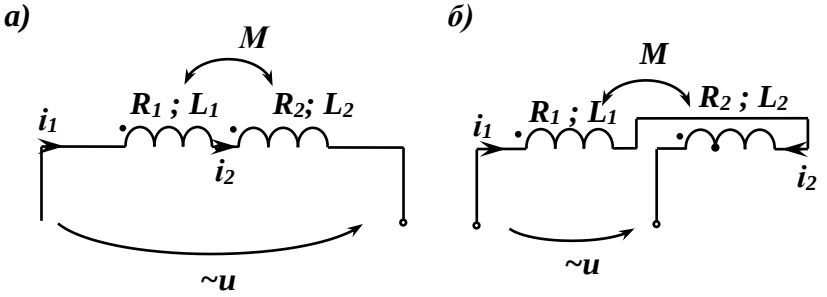

Рис. 2.26

Рівняння напруг при зустрічному вмиканні котушок:

$$u_{зустр} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

або враховуючи (2.88):

$$u_{зустр} = (R_1 + R_2) \times i + (L_1 + L_2 - 2M) \times \frac{di}{dt}. \quad (2.90)$$

З формул (2.89) і (2.90) слідує, що дві індуктивно зв'язані котушки, які сполучені послідовно, можна замінити однією еквівалентною, в якої:

при узгодженому вмиканні:

$$R_{ек} = R_1 + R_2; \qquad L_{ек} = L_1 + L_2 + 2M; \qquad (2.91)$$

при зустрічному вмиканні:

$$R_{ек} = R_1 + R_2; \qquad L_{ек} = L_1 + L_2 - 2M. \qquad (2.92)$$

Отже, при послідовному узгодженому вмиканні індуктивно зв'язаних котушок збільшується індуктивність кола, а при послідовному зустрічному вмиканні – зменшується.

ЕРС взаємної індукції котушок виникає за рахунок опору взаємоіндукції (опору зв'язку).

Визначимо вираз для опору зв'язку. Нехай у колі протікає синусоїдний струм:

$$i = I_m \sin \omega t .$$

Тоді ЕРС взаємоіндукції:

$$e_M = -M \frac{di}{dt} = -M \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = -\omega M I_m \cos \omega t =$$

$$= +\omega M I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

де $$E_m = \omega M I_m = X_M I_m . \qquad (2.93)$$

Звідси опір взаємоіндукції:

$$X_M = \frac{E_M}{I_m} = \omega M = 2\pi f M \qquad (2.94)$$

або в комплексній формі:

$$\underline{Z}_M = jX_M = j\omega M = j2\pi f M . \qquad (2.94,a)$$

Вирази (2.89) і (2.90) в комплексній формі для діючих значень напруг і струмів приймуть вигляд:

$$\dot{U}_{узг} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I}; \qquad (2.95)$$

$$\dot{U}_{зустр} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}. \qquad (2.96)$$

При цьому реактивні опори кола:

$$X_{узг} = \omega(L_1 + L_2 + 2M); \qquad (2.97)$$

$$X_{зустр} = \omega(L_1 + L_2 - 2M). \qquad (2.98)$$

Взявши різницю виразів (2.97) і (2.98), одержимо:

$$X_{узг} - X_{зустр} = 4\omega M .$$

Звідси визначимо взаємну індуктивність котушок:

$$M = \frac{X_{узг} - X_{зустр}}{4\omega} . \qquad (2.99)$$

Паралельне сполучення двох індуктивно зв'язаних котушок представлене на рис. 2.27.

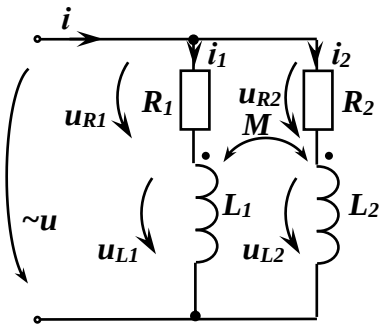

Рис. 2.27

Оскільки котушки живляться від одного джерела напруги, то при заданому напрямку намотки витків котушок струми в них направлені узгоджено. Отже, спад напруги, зумовлений наявністю опору взаємної індукції між котушками, буде мати такий же напрямок, як і спади напруг на активних і реактивних опорах котушок.

Враховуючи вирази комплексних опорів:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1;\ \ \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2;\ \ \underline{Z}_M = j\omega M,\ \ (2.100)$$

рівняння напруг згідно з другим законом Кірхгофа для котушок запишеться у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_M \dot{I}_2 &= \dot{U}; \\ \underline{Z}_M \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 &= \dot{U}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.101)$$

Тоді комплексні струми у вітках визначаться як

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\qquad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U} & \underline{Z}_M \\ \dot{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{U}\underline{Z}_2 - \dot{U}\underline{Z}_M = \dot{U} \times \left(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M\right);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \dot{U} \\ \underline{Z}_M & \dot{U} \end{vmatrix} = \dot{U}\underline{Z}_1 - \dot{U}\underline{Z}_M = \dot{U} \times \left(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M\right).$$

Отже,
$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \dot{U} \times \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \qquad (2.102)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \dot{U} \times \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \qquad (2.103)$$

Комплексний струм в нерозгалуженій частині кола:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U} \times \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} + \dot{U} \times \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \\ = \dot{U} \times \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \qquad (2.104)$$

З рівностей (2.102), (2.103), (2.104) визначимо комплексні опори віток і всього кола з врахуванням взаємної індукції між вітками:

$$\underline{Z}'_{1\,узг.} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}; \qquad (2.105)$$

$$\underline{Z}'_{2\,узг.} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}; \qquad (2.106)$$

$$\underline{Z}'_{узг.} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}. \qquad (2.107)$$

Тоді схема заміщення паралельного сполучення котушок індуктивності при їх узгодженому вмиканні прийме вигляд рис. 2.28:

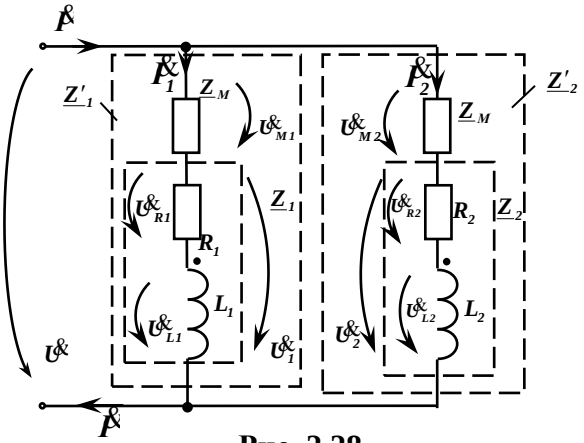

Рис. 2.28

При зустрічному вмиканні паралельно сполучених котушок вирази комплексних опорів кола будуть мати вигляд:

$$\underline{Z}'_{1зустр.} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}; \qquad (2.108)$$

$$\underline{Z}'_{2зустр.} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}; \qquad (2.109)$$

$$\underline{Z}'_{зустр.} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}. \qquad (2.110)$$

Таким чином, вирази: (2.108), (2.109) і (2.110) відрізняються від виразів: (2.105), (2.106) і (2.107) тільки знаками перед добутком $2\underline{Z}_M$ у знаменнику.

2.14. Розрахунок електричного кола із взаємною індуктивністю комплексним методом

Приклад 2.2. На вхід електричного кола (рис. 2.29), фізичні параметри якого задані в табл. 2.2, подається синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$ частотою $f = 50$ *Гц*. Діюче значення напруги $U = 380$ *В*. Необхідно:

1. Побудувати схему заміщення кола.
2. Визначити комплексні опори, струми та напруги.
3. Побудувати векторну діаграму на комплексній площині.
4. Написати вирази для миттєвих значень струмів і напруг кола.
5. Розрахувати потужності, які споживаються колом.

Таблиця 2.2

R_1, *Ом*	X_1, *Ом*	R_2, *Ом*	X_2, *Ом*	R_3, *Ом*	X_3, *Ом*	X'_3, *Ом*	M, *Гн*	R_4, *Ом*	X_4, *Ом*
20	30	30	-40	50	-50	50	0,15	40	30

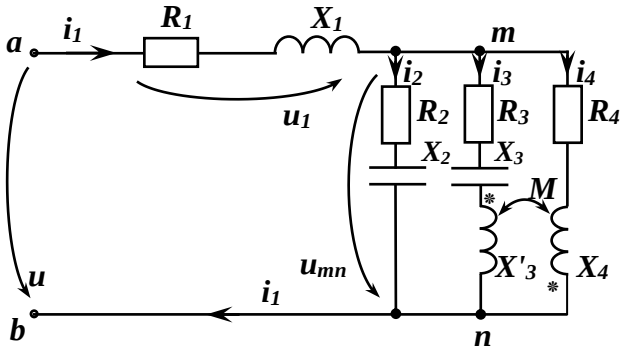

Рис. 2.29

2.14.1. Побудова схеми заміщення кола

Замінимо задану схему (рис. 2.29) еквівалентною їй розрахунковою схемою заміщення (рис. 2.30), в якій магнітний зв'язок між індуктивними опорами X_3' й X_4 замінено електричним зв'язком і замість активних і реактивних опорів віток уведено комплексні опори віток $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$ і комплексний опір взаємоіндукції $\underline{Z}_M$.

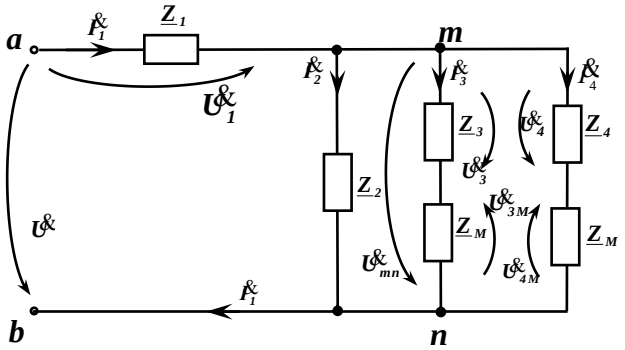

Рис. 2.30

Вкажемо на схемі (рис. 2.30) умовні додатні напрямки комплексних струмів у вітках і методом

еквівалентних перетворень визначимо комплексний повний опір кола, комплексний загальний струм $\dot{I}_1$, комплексну міжвузлову напругу $\dot{U}_{mn}$ і через неї – комплексні струми у паралельних вітках. Потім визначимо комплексні спади напруг на ділянках кола і побудуємо векторну діаграму струмів і напруг на комплексній площині.

2.14.2. Визначення комплексних опорів, струмів і напруг

Комплексний опір першої вітки:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 20 + j30 = Z_1 e^{j\varphi_1} = 36{,}1e^{j56{,}3^\circ}\ \text{Ом},$$

де модуль опору: $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36\ \text{Ом}$ і аргумент: $\varphi_1 = arctg\,(X_1 / R_1) = arctg\,(30/20) = 56{,}3^\circ$.

Комплексні опори віток без врахування взаємної індукції:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 30 - j40 = 50e^{-j53{,}1^\circ}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j(X_3' + X_3) = 50 + j(50-50) = 50e^{j0^\circ} = 50\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + jX_4 = 40 + j30 = 50e^{j36{,}9^\circ}\ \text{Ом}.$$

Опір третьої вітки виявився чисто активним, так як $|X_3'| = |X_3|$, тобто в цій вітці має місце резонанс напруг.

Комплексний опір взаємоіндукції:

$$\underline{Z}_M = j2\pi fM = j \times 2 \times 3{,}14 \times 50 \times 0{,}15 =$$

$$= j47{,}12\ \text{Ом} = 47{,}12e^{j90^\circ}\ \text{Ом}.$$

Комплексні опори третьої та четвертої віток з врахуванням взаємної індукції визначаємо за формулами (2.108) і (2.109):

$$\underline{Z}'_3 = \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_4 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_M} = \frac{50 \times (40 + j30) - (j47,12)^2}{40 + j30 + j47,12} =$$

$$= \frac{2000 + j1500 - (-2220,3)}{40 - j77,12} = \frac{4220,3 + j1500}{40 + j77,12} =$$

$$= \frac{4479 e^{j19,6^\circ}}{86,9 e^{j62,9^\circ}} = 51,54 e^{-j43,3^\circ} \text{ Îì} \quad ;$$

$$\underline{Z}'_4 = \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_4 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_M} = \frac{4220,3 + j1500}{50 + j47,12} = \frac{4479 e^{j19,6^\circ}}{68,7 e^{j43,3^\circ}} =$$

$$= 65,2 e^{-j23,7^\circ} \text{ Îì},$$

де $\underline{Z}_M^2 = (j47,12)^2 = j1500 = -2220,3$ Îì ^{2}.

Тепер схема заміщення (рис. 2.30) спроститься і прийме вигляд рис. 2.31.

Комплексний еквівалентний опір паралельного з'єднання третьої та четвертої віток з врахуванням взаємної індукції між ними при паралельному зустрічному включенні індуктивностей визначаємо за формулою (2.110):

$$\underline{Z}'_{34} = \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_4 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + 2\underline{Z}_M} = \frac{4220,3 + j1500}{50 + 40 + j30 + 2 \times j47,12} =$$

$$= \frac{4479 e^{j19,6^\circ}}{153,4 e^{j54,1^\circ}} = 29,2 e^{-j34,5^\circ} \text{ Îì} = (24,1 - j16,5) \text{ Îì} \quad .$$

З врахуванням опору $\underline{Z}'_{34}$ схема заміщення прийме вигляд рис. 2.32:

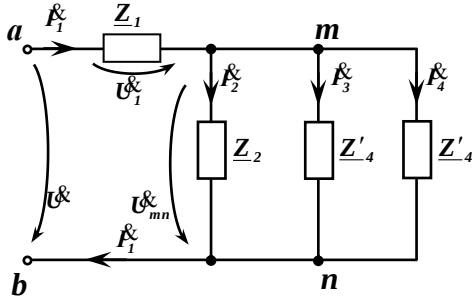

Рис. 2.31

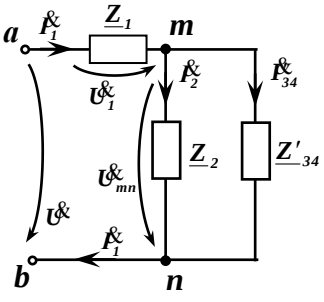

Рис. 2.32

Комплексний еквівалентний опір паралельного з'єднання опорів $\underline{Z}'_{34}$ і $\underline{Z}_2$ (рис. 2.32):

$$\underline{Z}'_{mn} = \frac{\underline{Z}'_{34} \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}'_{34} + \underline{Z}_2} = \frac{29{,}2e^{-j34{,}5^\circ} \times 50e^{-j53{,}1^\circ}}{24{,}1 - j16{,}5 + 30 - j40} =$$

$$= \frac{1460e^{-j87{,}6^\circ}}{78{,}2e^{-j46{,}2^\circ}} = 18{,}67e^{-j41{,}4^\circ} = (14 - j12{,}4)\ \text{Ом}.$$

Комплексний еквівалентний опір всього кола:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}'_{mn} = 20 + j30 + 14 - j12{,}4 = 38{,}3e^{j27{,}4^\circ}\ \text{Ом}.$$

Комплексний загальний струм у колі:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_e = 300e^{j0^\circ} / 38{,}3e^{j27{,}4^\circ} = 7{,}83e^{-j27{,}4^\circ} = (6{,}95 - j3{,}6)\ \text{А}$$

одночасно є струмом першої вітки і тому комплексний спад напруги на першій вітці:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \times \dot{I}_1 = 36{,}1e^{j56{,}3^\circ} \times 7{,}93e^{-j27{,}4^\circ} = 282{,}7e^{j28{,}9^\circ} =$$

$$= (247{,}5 + j136{,}6)\ \text{В}.$$

Комплексна міжвузлова напруга:

$$\dot{U}_{mn} = \underline{Z}'_{mn} \times \dot{I}_1 = 18{,}67e^{-j41{,}4^\circ} \times 7{,}83e^{-j27{,}4^\circ} =$$

$$= 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} = (52{,}9 - j136{,}6)\ \text{В}.$$

Комплексні струми в паралельних вітках:

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{mn} / \underline{Z}_2 = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} / 50e^{-j53{,}1^\circ} = 2{,}92e^{-j15{,}7^\circ} =$$

$$= (2{,}81 - j0{,}79)\ \text{А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{mn} / \underline{Z}'_3 = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} / 51{,}54e^{-j43{,}3^\circ} = 2{,}84e^{-j25{,}5^\circ} =$$

$$= (2{,}57 - j1{,}21)\ \text{А};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{U}_{mn} / \underline{Z}'_4 = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} / 65{,}2e^{-j23{,}7^\circ} = 2{,}24e^{-j45{,}3^\circ} =$$

$$= (1{,}58 - j1{,}59)\ \text{А}.$$

Перевірка

Рівняння першого закону Кірхгофа для комплексних струмів у вузлі m (рис. 2.31):

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4;$$

$$6{,}95 - j3{,}6 = 2{,}81 - j0{,}79 + 2{,}57 - j1{,}21 + 1{,}58 - j1{,}59$$

або $$(6{,}95 - j3{,}6)\ A \cong (6{,}96 - j3{,}59)\ A.$$

Згідно з другим законом Кірхгофа рівняння комплексних напруг для контуру $a - m - n - b - a$ (рис. 2.32):

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{mn};\ 300 = 247{,}5 + j136{,}6 + 52{,}9 - j136{,}3;$$

$$300\ B \approx (300{,}4 + j0{,}3)\ B.$$

Отже, розрахунки проведені правильно.

Векторна діаграма струмів і напруг повинна відповідати розрахунковій схемі заміщення (рис. 2.30) електричного кола і тому необхідно визначити ще комплексні напруги $\dot{U}_3$ й $\dot{U}_4$ на опорах $\underline{Z}_3$ й $\underline{Z}_4$ і комплексні напруги $\dot{U}_{3M}$ й $\dot{U}_{4M}$ на опорах взаємоіндукції $\underline{Z}_M$ у третій і четвертій вітках.

Комплексні спади напруг на опорах $\underline{Z}_3$ й $\underline{Z}_4$:

$$\dot{U}_3 = \underline{Z}_3 \times \dot{I}_3 = 50 \times 2{,}84e^{-j25{,}5^\circ} = 142e^{-j25{,}5^\circ} =$$

$$= (128{,}2 - j61{,}1)\ B;$$

$$\dot{U}_4 = \underline{Z}_4 \times \dot{I}_4 = 50e^{j36{,}9^\circ} \times 2{,}24e^{-j45{,}1^\circ} = 112e^{-j8{,}2^\circ} =$$

$$= (110{,}9 - j16)\ B;$$

Комплексні спади напруг на опорах взаємоіндукції в третій і в четвертій вітках:

$$\dot{U}_{3M} = \underline{Z}_M \times \dot{I}_4 = 47{,}12e^{j90^\circ} \times 2{,}24e^{-j45{,}1^\circ} = 105{,}6e^{j44{,}9^\circ} =$$

$$= (74{,}8 + j74{,}5)\ B;$$

$$\dot{U}_{4M} = \underline{Z}_M \times \dot{I}_3 = 47{,}12e^{j90^\circ} \times 2{,}84e^{-j25{,}5^\circ} = 133{,}8e^{j64{,}5^\circ} =$$

$$= (57{,}6 + j120{,}8)\ B.$$

Перевірка

Комплексна напруга $\dot{U}_{mn}$ прикладена одночасно до третьої та четвертої віток і, тому, з врахуванням взаємоіндукції між ними при зустрічному паралельному

включенні індуктивностей у цих вітках (рис. 2.30) рівняння напруг запишуться:

для третьої вітки: $\dot{U}_{mn} = \dot{U}_3 - \dot{U}_{3M}$;

$$52{,}9 - j136{,}3 = 128{,}2 - j61{,}1 - 74{,}8 - j74{,}5$$

або $(52{,}9 - j136{,}3)\ B \approx (54{,}4 - j135{,}6)\ B$

або $146{,}2e^{-j68{,}8^\circ}\ B \cong 146{,}1e^{-j68{,}1^\circ}\ B$;

для четвертої вітки: $\dot{U}_{mn} = \dot{U}_4 - \dot{U}_{4M}$;

$$52{,}9 - j136{,}3 = 110{,}9 - j16 - 57{,}6 - j120{,}8$$

або $(52{,}9 - j136{,}3)\ B \cong (53{,}3 - j136{,}8)\ B$

або $146{,}2e^{-j68{,}8^\circ}\ B \cong 146{,}8e^{-j68{,}7^\circ}\ B$.

Як видно, розходження невелике.

2.14.3. Побудова векторної діаграми на комплексній площині

При побудові векторної діаграми необхідно використати розраховані вище значення комплексних струмів та напруг:

$\dot{U} = 300e^{j0^\circ}\ B$; $\dot{U}_1 = 282{,}7e^{j28{,}9^\circ}\ B$; $\dot{U}_{mn} = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ}\ B$;

$\dot{I}_1 = 7{,}83e^{-j27{,}4^\circ}\ A$; $\dot{I}_2 = 2{,}92e^{-j15{,}7^\circ}\ A$; $\dot{I}_3 = 2{,}84e^{-j25{,}5^\circ}\ A$.

$\dot{I}_4 = 2{,}24e^{-j45{,}1^\circ}\ A$; $\dot{U}_3 = 142e^{-j25{,}5^\circ}\ B$; $\dot{U}_4 = 112e^{-j8{,}2^\circ}\ B$;

$\dot{U}_{3M} = 105{,}6e^{j44{,}9^\circ}\ B$; $\dot{U}_{4M} = 133{,}8e^{j64б5^\circ}\ B$.

Кожній комплексній величині струму чи напруги відповідає на векторній діаграмі певний вектор, довжина якого пропорційна модулю комплексної величини, а кут між вектором і дійсною віссю рівний її аргументу, причому, додатні кути відкладаються вище від дійсної осі проти руху стрілки годинника.

Побудову векторної діаграми (рис. 2.33) виконуємо, відклавши вектор вхідної напруги $\overline{U}$ вздовж дійсної осі. Під кутом $\psi_{u1} = 28{,}9^\circ$ відкладемо в додатному напрямку вектор напруги $\overline{U}_1$ і з його кінця у від'ємному напрямку

під кутом $\psi_{mn} = -68{,}8^\circ$ – вектор міжвузлової напруги $\overline{U}_{mn}$. Щоб задовольнилось векторне рівняння: $\overline{U}_1 + \overline{U}_{mn} = \overline{U}$, кінець вектора $\overline{U}_{mn}$ повинен співпасти з кінцем вектора $\overline{U}$.

Під кутом $\psi_{i1} = -27{,}4^\circ$ з точки O відкладемо вектор загального струму $\bar{I}_1$, а під кутами $\psi_{i2} = -15{,}7^\circ$, $\psi_{i3} = -25{,}5^\circ$, $\psi_{i4} = -45{,}1^\circ$ – відповідно вектори струмів $\bar{I}_2, \bar{I}_3, \bar{I}_4$ паралельних віток. Вектор $\bar{I}_1$ повинен замкнути ланцюг векторів $\bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4$ згідно з векторним рівнянням: $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4$.

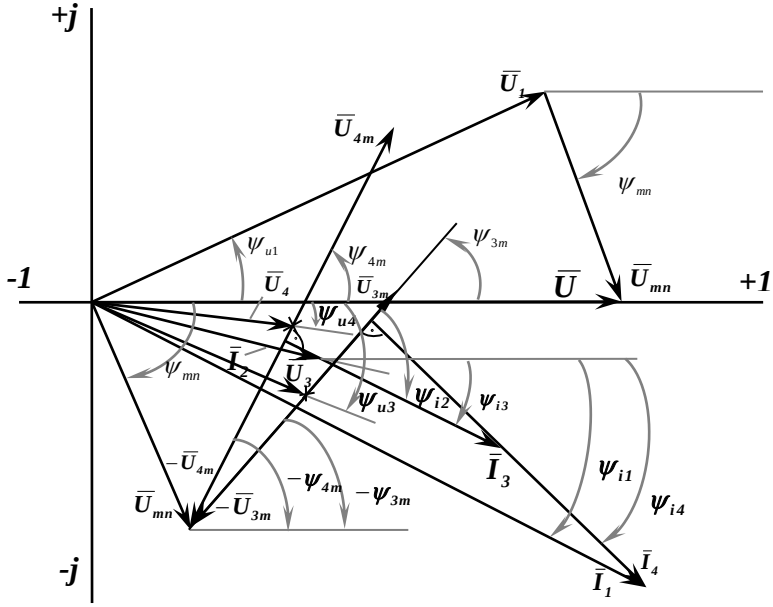

Рис. 2.33

Потім під кутом $\psi_{mn} = -68{,}8^\circ$ відкладемо вектор міжвузлової напруги $\overline{U}_{mn}$, а під кутами $\psi_{u3} = -25{,}5^\circ$ і

$\psi_{u4} = -8{,}2^\circ$ від дійсної осі відкладаємо у від'ємному напрямку вектори напруг $\overline{U}_3$ й $\overline{U}_4$ і з їх кінців під кутами $\psi_{3M} = 44{,}9^\circ$ і $\psi_{4M} = 64{,}5^\circ$ – вектори напруг взаємоіндукції $\overline{U}_{3M}$ й $\overline{U}_{4M}$ (причому $\overline{U}_{3M} \perp \bar{I}_4$, а $\overline{U}_{4M} \perp \bar{I}_3$), кінці яких повинні співпасти з кінцем вектора $\overline{U}_{mn}$ згідно з векторними рівняннями: $\overline{U}_3 + (-\overline{U}_{3M}) = \overline{U}_{mn}$ та $\overline{U}_4 + (-\overline{U}_{4M}) = \overline{U}_{mn}$.

2.14.4. Обчислення миттєвих значень струмів і напруг

Миттєві значення синусоїдних величин рівні уявним частинам їх комплексних виразів, записаних в алгебраїчній формі:

$$\dot{U} = 300 \ B;$$

$$u(t) = U_m \sin\omega t = 300\sqrt{2}\sin\omega t = 424\sin\omega t \ B;$$

$$\dot{U}_1 = 282{,}7e^{j28{,}9^\circ} \ B;$$

$$u_1(t) = 282{,}7\sqrt{2}\sin(\omega t + 28{,}9^\circ) = 399{,}7\sin(\omega t + 28{,}9^\circ) \ B;$$

$$\dot{U}_{mn} = 133{,}8e^{-j64{,}5^\circ} \ B;$$

$$u_{mn}(t) = 133{,}8\sqrt{2}\sin(\omega t - 64{,}5^\circ) = 189{,}2\sin(\omega t - 64{,}5^\circ) \ B;$$

$$\dot{I}_1 = 7{,}83e^{-j27{,}4^\circ} \ A;$$

$$i_1(t) = 7{,}83\sqrt{2}\sin(\omega t - 27{,}4^\circ) = 11{,}1\sin(\omega t - 27{,}4^\circ) \ A;$$

$$\dot{I}_2 = 2{,}92e^{-j15{,}7^\circ} \ A;$$

$$i_2(t) = 2{,}92\sqrt{2}\sin(\omega t - 15{,}7^\circ) = 4{,}1\sin(\omega t - 15{,}7^\circ) \ A;$$

$$\dot{I}_3 = 2{,}84e^{-j25{,}5^\circ} \ A;$$

$$i_3(t) = 2{,}84\sqrt{2}\sin(\omega t - 25{,}5^\circ) = 4\sin(\omega t - 25{,}5^\circ) \ A;$$

$$\dot{I}_4 = 2{,}24e^{-j45{,}1^\circ} \ A;$$

$$i_4(t) = 2{,}24\sqrt{2}\sin(\omega t - 45{,}1^\circ) = 3{,}2\sin(\omega t - 45{,}1^\circ) \ A;$$

$$\dot{U}_3 = 142e^{-j25{,}5^\circ} \ B;$$

$$u_3(t) = 142\sqrt{2}\sin(\omega t - 25{,}5^\circ) = 201\sin(\omega t - 25{,}5^\circ)\ \text{В};$$

$$\dot{U}_4 = 112e^{-j8{,}2^\circ}\ \text{В};$$

$$u_4(t) = 112\sqrt{2}\sin(\omega t - 8{,}2^\circ) = 158{,}4\sin(\omega t - 8{,}2^\circ)\ \text{В};$$

$$\dot{U}_{3M} = 105e^{j44{,}9^\circ}\ \text{В};$$

$$u_{3M}(t) = 105\sqrt{2}\sin(\omega t + 44{,}9^\circ) = 149{,}3\sin(\omega t + 44{,}9^\circ)\ \text{В};$$

$$\dot{U}_{4M} = 133{,}8e^{j64{,}5^\circ}\ \text{В};$$

$$u_{4M}(t) = 133{,}8\sqrt{2}\sin(\omega t + 64{,}5^\circ) = 189{,}2\sin(\omega t + 64{,}5^\circ)\ \text{В}.$$

2.14.5. Обчислення потужностей кола

Комплексна потужність, що споживається ділянкою кола, рівна добутку комплексної напруги на цій ділянці й спряженого значення комплексного струму цієї ділянки:

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_1 \times \dot{I}_1^* = 282{,}7e^{j28{,}9^\circ} \times 7{,}83e^{j27{,}4^\circ} = 2213e^{j56{,}3^\circ} =$$

$$= (1228 + j1841)\ \text{ВА};$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_{mn} \times \dot{I}_2^* = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} \times 2{,}92e^{j15{,}7^\circ} = 426{,}9e^{-j53{,}1^\circ} =$$

$$= (256{,}3 - j341{,}4)\ \text{ВА};$$

$$\tilde{S}_3 = \dot{U}_{mn} \times \dot{I}_3^* = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} \times 2{,}84e^{j25{,}5^\circ} = 415{,}2e^{-j43{,}3^\circ} =$$

$$= (302{,}2 - j284{,}8)\ \text{ВА};$$

$$\tilde{S}_4 = \dot{U}_{mn} \times \dot{I}_4^* = 146{,}2e^{-j68{,}8^\circ} \times 2{,}24e^{j45{,}1^\circ} = 327{,}5e^{-j23{,}7^\circ} =$$

$$= (229{,}7 - j31{,}7)\ \text{ВА}.$$

Комплексна потужність, що подається в коло:

$$\tilde{S} = \dot{U} \times \dot{I}_1^* = 300e^{j0^\circ} \times 7{,}83e^{j27{,}4^\circ} = 2349e^{j27{,}4^\circ} =$$

$$= (2085 + j1081)\ \text{ВА}.$$

Баланс потужностей: комплексна потужність, яка споживається на всіх ділянках кола, повинна бути рівна комплексній потужності, що подається в коло:

$$\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4 = \tilde{S}\,.$$

Підставивши числові значення, одержимо

$$1228 + j1841 + 256{,}3 - j341{,}4 + 302{,}2 -$$

$$- j284{,}8 + 299{,}9 - j131{,}7 = 2085{,}5 + j1081$$

або $$(2086 + 1083)\ \text{ВА} \cong (2085 + 1081)\ \text{ВА}.$$

Звідси визначимо баланс активної та реактивної потужностей:

$$2086\ \text{Вт} \cong 2085\ \text{Вт}; \qquad 1083\ \text{ВАр} \cong 1081\ \text{ВАр}\,.$$

Похибка в межах допустимого.

Якщо увімкнути в третю і в четверту вітки ватметри, то вони виміряють активні потужності, що споживаються цими вітками і які виражаються дійсними частинами комплексних потужностей $\tilde{S}_3$ й $\tilde{S}_4$:

$$Р_3 = \mathrm{Re}\{\tilde{S}_3\} = \mathrm{Re}\{302{,}2 - j284{,}8\} = 302{,}2\ \text{Âò}\ ;$$

$$P_4 = \mathrm{Re}\{\tilde{S}_4\} = \mathrm{Re}\{229{,}7 - j131{,}7\} = 229{,}7\ \text{Вт}\,.$$

Теплові втрати в третій і в четвертій вітках

$$P'_3 = R_3 \times I_3^2 = 50 \times 2{,}84^2 = 403{,}3\ \text{Вт}\ ;$$

$$P'_4 = R_4 \times I_4^2 = 40 \times 2{,}24^2 = 200{,}7\ \text{Вт}\,.$$

Порівнявши покази ватметрів і теплові втрати у вітках

$$P_3 - P'_3 = 302{,}2 - 403{,}3 = -101{,}1\ \text{Вт}\ ;$$

$$P_4 - P'_4 = 299{,}9 - 200{,}7 = 99{,}2\ \text{Вт}\,,$$

бачимо, що частина активної потужності $\Delta P \cong 100\ \text{Вт}$ передається з четвертої вітки в третю шляхом взаємної індукції.

2.15. Основні поняття про чотириполюсник

2.15.1. Види рівнянь чотириполюсника

Багато електротехнічних пристроїв, які служать для передачі енергії або сигналів мають два вхідних і два вихідних вводи (полюси); при цьому їх внутрішня будова

може бути досить складною. Такі пристрої називаються чотириполюсниками: пасивними, якщо всередині них відсутні джерела енергії, і активними, якщо всередині знаходяться джерела енергії.

У подальшому будемо розглядати лише пасивні чотириполюсники, оскільки будь-який активний чотириполюсник може бути замінений еквівалентним йому пасивним і винесеною за його полюси еквівалентною ЕРС. Параметри всіх елементів чотириполюсника будемо вважати постійними.

Пасивний чотириполюсник узагальнено характеризується трьома незалежними параметрами, які можуть бути визначені розрахунково, якщо відома внутрішня будова чотириполюсника, а також експериментально, якщо його внутрішня будова не відома.

Прикладами пасивних чотириполюсників служать: двообмотковий трансформатор, електричний фільтр, мостова схема випрямлення тощо.

Будемо розглядати властивості чотириполюсників при усталених синусоїдних процесах і встановимо залежності, які зв'язують між собою вхідні та вихідні напруги і струми: $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, вибравши їх напрямки, як показано на рис. 2.34.

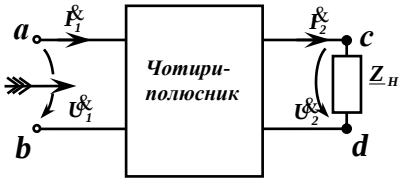

Рис. 2.34

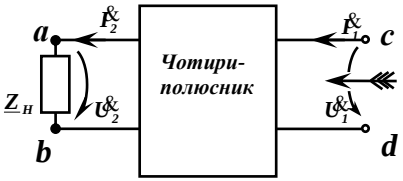

Рис. 2.35

При цьому додатний напрямок потоку енергії на вході «$a-b$» спрямуємо до чотириполюсника, а на виході «$c-d$» – від чотириполюсника. Такий вибір додатних напрямків доцільний, якщо чотириполюсник розглядається як передавальний пристрій.

Вхідний $\dot{I}_1$ та вихідний $\dot{I}_2$ струми пасивного чотириполюсника можна виразити через вхідну $\dot{U}_1$ і вихідну $\dot{U}_2$ напруги за допомогою так званих Y – параметрів, які мають розмірності провідностей:

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2;\\ \dot{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}\right\} \qquad (2.111)$$

Для лінійного пасивного чотириполюсника $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$.

Якщо систему рівнянь (2.111) розв'язати відносно напруг $\dot{U}_1$ та $\dot{U}_2$, то одержимо рівняння чотириполюсника, в яких ці напруги виражаються через Z – параметри, що мають розмірності опорів:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2;\\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2,\end{aligned}\right\} \qquad (2.112)$$

де $\underline{Z}_{11} = \dfrac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}} = \dfrac{\underline{Y}_{22}}{\Delta\underline{Y}}$; $\underline{Z}_{22} = \dfrac{\underline{Y}_{11}}{\Delta\underline{Y}}$;

$$\underline{Z}_{12} = \frac{-\underline{Y}_{12}}{\Delta\underline{Y}}; \qquad \underline{Z}_{21} = \frac{-\underline{Y}_{21}}{\Delta\underline{Y}},$$

Причому $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$.

Найбільш поширеною формою запису рівнянь чотириполюсника є така, при якій вхідні величини $\dot{U}_1$ та $\dot{I}_1$ виражаються через вихідні величини $\dot{U}_2$ та $\dot{I}_2$.

Розв'язавши систему рівнянь (2.112) відносно $\dot{U}_1$ та $\dot{I}_1$, одержимо

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2;\\ \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2,\end{aligned}\right\} \qquad (2.113)$$

де

$$\underline{A} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{B} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}; \quad \underline{D} = -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}.$$

Коефіцієнти $\underline{A}$ і $\underline{D}$ – безрозмірні; коефіцієнт $\underline{B}$ має розмірність опору; коефіцієнт $\underline{C}$ – розмірність провідності.

Оскільки, $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$, то параметри $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ зв'язані рівністю

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1. \qquad (2.114)$$

Наявність цього зв'язку, а також рівностей: $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$ і $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$ вказує на те, що при всіх формах запису рівнянь чотириполюсника незалежними є тільки три його параметри.

Якщо поміняти місцями вхідні й вихідні полюси чотириполюсника (рис. 2.34), то матимемо схему (рис. 2.35), в якій $\dot{U}_1$ замінено на $\dot{U}_2$, $\dot{U}_2$ – на $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ – на $\left(-\dot{I}_2\right)$, $\dot{I}_2$ – на $\left(-\dot{I}_1\right)$.

Виконавши таку ж заміну в рівняннях (2.113) чотириполюсника, які відповідають схемі (рис. 2.34) і, врахувавши рівність (2.114), одержимо рівняння чотириполюсника, що відповідають схемі рис. 2.35:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{D}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{A}\dot{I}_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2.115)$$

тобто при перестановці місцями входу і виходу чотириполюсника в його рівняннях міняються місцями параметри $\underline{A}$ і $\underline{D}$.

2.15.2. Схеми заміщення чотириполюсника

Так як пасивний чотириполюсник характеризується тільки трьома незалежними параметрами, то найпростіша схема заміщення чотириполюсника повинна складатись з трьох лінійно незалежних елементів:

На рис. 2.36 приведена, так звана, T – подібна схема заміщення чотириполюсника, а на рис. 2.37 – $П$ – подібна схема заміщення.

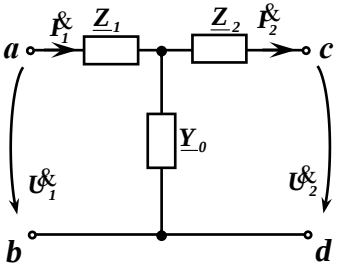

Рис. 2.36

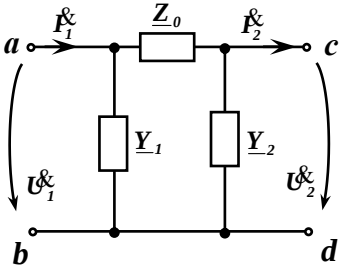

Рис. 2.37

Існує зв'язок між параметрами чотириполюсника і параметрами його $\boldsymbol{T}$ – подібної схеми заміщення:

$$\underline{A}=1+\underline{Z}_1\underline{Y}_0;\quad \underline{B}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_0;\quad \underline{C}=\underline{Y}_0;$$

$$\underline{D}=1+\underline{Z}_2\underline{Y}_0;\quad \underline{Y}_0=\underline{C};\ \underline{Z}_1=\frac{\underline{A}-1}{\underline{C}};\ \underline{Z}_2=\frac{\underline{D}-1}{\underline{C}}. \quad (2.116)$$

Аналогічно для $\boldsymbol{\Pi}$ – подібної схеми заміщення

$$\underline{A}=1+\underline{Z}_2\underline{Y}_0;\quad \underline{B}=\underline{Z}_0;\quad \underline{C}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0;$$

$$\underline{D}=1+\underline{Y}_2\underline{Z}_0;\ \underline{Z}_0=\underline{B};\ \underline{Y}=\frac{\underline{D}-1}{\underline{B}};\ \underline{Y}_2=\frac{\underline{A}-1}{\underline{B}}. \quad (2.117)$$

Для симетричного чотириполюсника $\underline{A}=\underline{D}$ і, відповідно, в схемах заміщення: $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2$ й $\underline{Y}_1=\underline{Y}_2$.

2.15.3. Експериментальне визначення параметрів чотириполюсника

При експериментальному визначенні параметрів чотириполюсника немає необхідності проводити вимірювання при його номінальних струмах і напругах. Досить виконати виміри: при неробочому (холостому) режимі роботи чотириполюсника, коли опір навантаження $\underline{Z}_H=\infty$ й $\dot{I}_2=0$, і при короткому замиканні, коли $\underline{Z}_H=0$ й $\dot{U}_2=0$. Це особливо цінно при вимірюванні параметрів потужних пристроїв, так як споживана ними потужність при цих режимах значно менша від споживаної

пристроями потужності при номінальних режимах роботи. При неробочому режимі і короткому замиканні підведена на вхід потужність йде тільки на покриття втрат усередині чотириполюсника. При номінальному режимі роботи чотириполюсника споживана ним потужність значно більша, так як проходить передача енергії у вторинне коло до приймача.

Позначимо напруги і струми на вході чотириполюсника додатковими індексами: при неробочому режимі – індексом «*о*», а при короткому замиканні – індексом «*к*».

Нехай у вторинному колі чотириполюсника при неробочому режимі напруга $\underline{U}_2$, а при короткому замиканні струм $\underline{I}_2$ будуть номінальними.

Тоді, враховуючи що

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2; \qquad \underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2,$$

при неробочому режимі $\left(\underline{I}_2 = 0\right)$

$$\underline{U}_{10} = \underline{A}\underline{U}_2; \qquad \underline{I}_{10} = \underline{C}\underline{U}_2; \qquad (2.118)$$

при короткому замиканні $\left(\underline{U}_2 = 0\right)$

$$\underline{U}_{1K} = \underline{B}\underline{I}_2; \qquad \underline{I}_{1K} = \underline{D}\underline{I}_2. \qquad (2.119)$$

Накладаючи ці режими один на одного, одержимо

$$\underline{U}_{10} + \underline{U}_{1K} = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 = \underline{U}_1;$$

$$\underline{I}_{10} + \underline{I}_{1K} = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 = \underline{I}_1.$$

Таким чином, для визначення номінальної вхідної напруги $\underline{U}_1$ *та номінального струму* $\underline{I}_1$ *досить провести досліди неробочого режиму і короткого замикання при номінальних значеннях вихідних величин* $\underline{U}_2$ *та* $\underline{I}_2$.

З виразів (2.118) і (2.119) одержимо

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{I}_{1K}} = \frac{\underline{B}\underline{I}_2}{\underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \qquad (2.120)$$

$$\underline{Y}_{10} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{10}} = \frac{\underline{C}\underline{U}_2}{\underline{A}\underline{U}_2} = \frac{\underline{C}}{\underline{A}}. \qquad (2.121)$$

Для симетричного чотириполюсника вимірювання опору $\underline{Z}_{1K}$ і провідності $\underline{Y}_{10}$ з боку первинних полюсів достатньо, так як існують зв'язки: $\underline{AD}-\underline{BC}=1$ та $\underline{A}=\underline{D}$.

Для несиметричного чотириполюсника, коли $\underline{A}\neq\underline{D}$, необхідно виконати ще додатковий дослід: провести виміри на виході чотириполюсника при неробочому режимі на його вході, тобто при розімкнених полюсах «$a-b$», або при короткому замиканні на виході чотириполюсника, тобто при закорочених полюсах «$c-d$». Оскільки, перестановка місцями входу і виходу чотириполюсника призводить до перестановки місцями параметрів $\underline{A}$ і $\underline{D}$, то одержимо:

$$\underline{Z}_{2K}=\underline{B}/\underline{A}; \qquad (2.122)$$

$$\underline{Y}_{20}=\underline{C}/\underline{D}. \qquad (2.123)$$

Співвідношення між експериментальними параметрами чотириполюсника і його $Z-$ та $Y-$ параметрами

$$\underline{Z}_{10}=\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}}=\frac{\underline{A}\dot{U}_2}{\underline{C}\dot{U}_2}=\frac{\underline{A}}{\underline{C}}=\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\Big/\frac{1}{\underline{Z}_{21}}=\underline{Z}_{11};$$

$$\underline{Z}_{20}=\frac{1}{\underline{Y}_{20}}=\frac{\underline{D}}{\underline{C}}=-\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\Big/\frac{1}{\underline{Z}_{21}}=-\underline{Z}_{22};$$

$$\underline{Z}_{1K}=\frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{1K}}=\frac{\underline{B}\dot{I}_2}{\underline{D}\dot{I}_2}=\frac{\underline{B}}{\underline{D}}=-\frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}-\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{21}}\Big/\left(-\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\right)=$$

$$=\underline{Z}_{11}-\frac{\underline{Z}_{12}\cdot\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}.$$

Аналогічно, для $Y-$ параметрів:

$$\underline{Y}_{1K}=\frac{1}{\underline{Z}_{1K}}=\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}-\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}=\underline{Y}_{11};$$

$$\underline{Y}_{2K}=\frac{1}{\underline{Z}_{2K}}=-\underline{Y}_{22}; \qquad \underline{Y}_{10}=\underline{Y}_{11}-\frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}.$$

2.16. Розрахунок параметрів пасивного чотириполюсника

2.16.1. Постановка задачі

Нехай задана вхідна напруга $U_1 = 300\ В$ і параметри $Т$ – подібної схеми заміщення чотириполюсника (рис. 2.36):

$$\underline{Z}_1 = 20 + j30 = 26{,}1e^{j56{,}3^\circ}\ Ом;$$

$$\underline{Z}_2 = 30 - j40 = 50e^{-j53{,}1^\circ}\ Ом;$$

$$\underline{Y}_0 = (0{,}0282 + j0{,}0194) = 0{,}0342e^{j34{,}5^\circ}\ См.$$

Підключимо до виходу $Т$ – подібної схеми індуктивне навантаження $X_н$, величина якого може змінюватись від нуля до нескінченості (рис. 2.28).

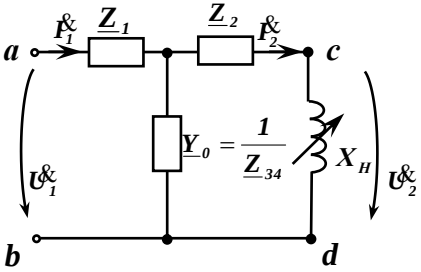

Рис. 2.38

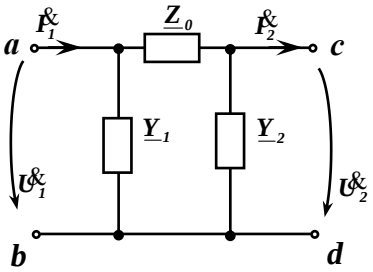

Рис. 2.39

Розглядаючи одержану схему як чотириполюсник з вхідними полюсами «$a-b$» і вихідними – «$c-d$», обчислимо коефіцієнти чотириполюсника, параметри його $П$ – подібної схеми заміщення і побудуємо колову діаграму чотириполюсника.

2.16.2. Розрахунок коефіцієнтів чотириполюсника

Обчислимо коефіцієнти чотириполюсника: $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$, виразивши їх через параметри T – подібної схеми заміщення:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \times \underline{Y}_0 = 1 + 26{,}1e^{j56{,}3^\circ} \times 0{,}0342e^{j34{,}5^\circ} =$$

$$= 1 + 1{,}23e^{j90{,}8^\circ} = 0{,}98 + j1{,}24 = 1{,}58e^{j51{,}6^\circ};$$

$$\underline{C} = \underline{Y}_0 = (0{,}0282 + j0{,}0194) = 0{,}0342e^{j34{,}5^\circ}\ См;$$

$$\underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \times \underline{Y}_0 = 1 + 50e^{-j53{,}1^\circ} \times 0{,}0342e^{j34{,}5^\circ} =$$

$$= 1 + 1{,}71e^{-j18{,}6^\circ} = 2{,}62 - j0{,}52 = 2{,}67e^{-j11{,}2^\circ}.$$

З рівняння $\underline{A} \times \underline{D} - \underline{B} \times \underline{C} = 1$ маємо

$$\underline{B} = (\underline{A} \times \underline{D} - 1) / \underline{C} = \frac{1{,}58e^{j51{,}6^\circ} \times 2{,}67e^{-j11{,}2^\circ} - 1}{0{,}0342e^{j34{,}5^\circ}} =$$

$$= (2{,}21 + j2{,}74) / 0{,}0342e^{j34{,}5^\circ} =$$

$$= 3{,}52e^{j51{,}1^\circ} / 0{,}034e^{j34{,}5^\circ} =$$

$$= 102{,}9e^{j16{,}6^\circ} = (98{,}63 + j29{,}40)\ Ом.$$

2.16.3. Визначення параметрів $П$ – подібної схеми заміщення

Будемо визначати параметри $П$ – подібної схеми заміщення чотириполюсника (рис. 2.37), використовуючи обчислені вище значення коефіцієнтів $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$:

$$\underline{Z}_0 = \underline{B} = (98{,}63 + j29{,}40) = 102{,}9e^{j16{,}6^\circ}\ Ом.$$

З рівності $\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \times \underline{Z}_0$ одержимо

$$\underline{Y}_2 = (\underline{A} - 1) / \underline{B} = (0{,}98 + j1{,}24 - 1) / 102{,}9e^{j16{,}6^\circ} =$$

$$= 0{,}0120e^{j73{,}3^\circ} = (0{,}0034 + j0{,}0115)\ См;$$

З рівності $\underline{D} = 1 + \underline{Y}_1 \times \underline{B}$ знаходимо:

$$\underline{Y}_1 = (\underline{D} - 1) / \underline{B} = (2{,}62 - j0{,}52 - 1) / 102{,}9e^{j16{,}6^\circ} =$$

$$= \frac{1{,}70e^{-j17{,}8^\circ}}{102{,}9e^{j16{,}6^\circ}} = 0{,}0165e^{-j34{,}4^\circ} = (0{,}0136 - j0{,}0093)\ См.$$

Так як розглядуваний чотириполюсник є несиметричним, то, як видно з розрахунку, $\underline{Y}_1 \neq \underline{Y}_2$.

2.16.4. Побудова колової діаграми чотириполюсника

Для побудови колової діаграми чотириполюсника необхідно визначити комплексний струм $\dot{I}_{10}$ на вході чотириполюсника при неробочому режимі на його виході $\left(\dot{I}_2 = 0\right)$ і комплексний струм $\dot{I}_{1K}$ на вході при короткому замиканні на виході чотириполюсника $\left(\dot{U}_2 = 0\right)$.

При неробочому режимі на виході чотириполюсника (рис. 2.40) комплексні опори $\underline{Z}_1$ і $\underline{Z}_{34}$ виявляться сполученими послідовно і через них буде протікати вхідний струм:

$$\dot{I}_{10} = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{10} = \dot{U}_1 / \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{34}\right) =$$

$$= 300e^{j0^\circ} / \left(20 + j30 + 24{,}1 - j16{,}5\right) =$$

$$= 300e^{j0^\circ} / 46{,}1e^{j17^\circ} = 6{,}51e^{-j17^\circ} =$$

$$= \left(6{,}23 - j1{,}90\right)\ A; \qquad \psi_{i0} = -17^\circ.$$

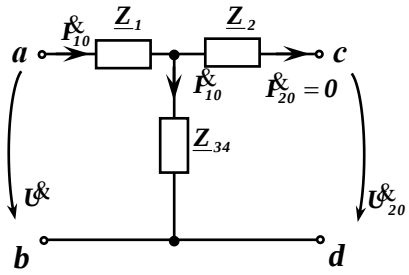

Рис. 2.40

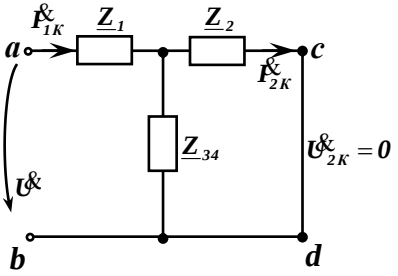

Рис. 2.41

Кут зсуву фаз між вхідною напругою та струмом $\dot{I}_{10}$:

$$\varphi_{10} = \psi_U - \psi_{i0} = 0 - (-17^\circ) = 17^\circ .$$

При короткому замиканні на виході чотириполюсника $(\dot{U}_2 = 0)$ комплексні опори $\underline{Z}_{34}$ і $\underline{Z}_2$ і виявляться сполученими паралельно (рис. 2.41) і їх еквівалентний комплексний опір:

$$\underline{Z}_{24} = \frac{\underline{Z}_{34} \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{34} + \underline{Z}_2} = \frac{29{,}2e^{-j34{,}5^\circ} \times 50e^{-j53{,}1^\circ}}{24{,}1 - j16{,}5 + 30 - j40} =$$

$$= \frac{1460e^{-j87{,}6^\circ}}{78{,}2e^{-j46{,}2^\circ}} = 18{,}67e^{-j41{,}4^\circ} = (14 - j12{,}4)\ \text{Ом}.$$

Повний комплексний опір кола (рис. 2.41):

$$\underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{24} = 20 + j30 + 14 - j12 = 34 + j18 =$$

$$= 38{,}3e^{j27{,}4^\circ}\ \text{Ом}; \qquad \varphi_{1K} = 27{,}9^\circ.$$

Вхідний струм чотириполюсника при короткому замиканні на виході:

$$\dot{I}_{1K} = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{1K} = 300e^{j0^\circ} / 38{,}3e^{j27{,}4^\circ} = 7{,}83e^{-j27{,}4^\circ} =$$

$$= (6{,}95 - j3{,}60)\ \text{A}.$$

При короткому замиканні на вході чотириполюсника $(\dot{U}_1 = 0)$ комплексні опори $\underline{Z}_1$ і $\underline{Z}_{34}$ виявляться сполученими паралельно і послідовно з ними буде увімкнений комплексний опір $\underline{Z}_2$ (рис. 2.42).

Тоді комплексний вихідний опір чотириполюсника:

$$\underline{Z}_{2K} = \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_{34} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{34}) + \underline{Z}_2 =$$

$$= 36{,}1e^{j56{,}3^\circ} \times 29{,}2e^{-j34{,}5^\circ} / (20 + j30 + 24{,}1 - j16{,}5) +$$

$$+ 30 - j40 = \frac{1054e^{j21{,}8^\circ}}{46{,}1e^{j17^\circ}} + 30 - j40 =$$

$$= 52{,}8 - j38{,}1 = 64{,}9e^{-j35{,}8^\circ}\ \text{Ом}; \qquad \psi_{2K} = -35{,}8^\circ.$$

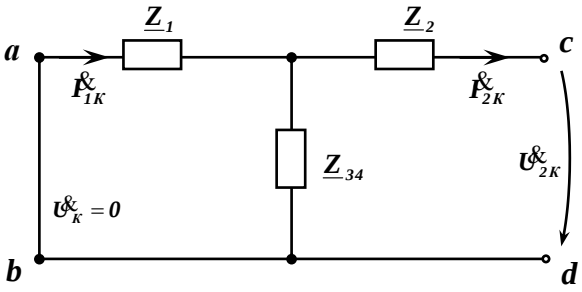

Рис. 2.42

Використовуючи обчислені значення струмів і кутів зсуву фаз, побудуємо колову діаграму чотириполюсника (рис. 2.43). З цією метою відкладемо вздовж осі абсцис вектор вхідної напруги $\bar{U}_1$, а під кутом $\varphi_{10} = 17^\circ$ до нього в напрямку відставання – вектор струму $\bar{I}_{10}$.

Різниця векторів $\left(\bar{I}_{1K} - \bar{I}_{10}\right)$ являється хордою AB дуги колової діаграми чотириполюсника – геометричного місця точок, утвореного кінцем вектора $\bar{I}_1$ вхідного струму чотириполюсника при неперервній зміні його величини від значення $\dot{I}_{10} = 6{,}51e^{-j17^\circ}\ A$ при неробочому режимі на його вході до значення $\dot{I}_{1K} = 7{,}83e^{-j27{,}4^\circ}\ A$ при короткому замиканні на виході чотириполюсника, тобто при зміні модуля X_H комплексного опору:

$$\underline{X}_H = X_H e^{j\varphi_H} = X_H e^{j90^\circ}\ Ом$$

в межах: $0 \le X_H \le \infty$.

Для знаходження центра колової діаграми продовжимо хорду AB і побудуємо $\angle CBD = \varphi_H - \varphi_{2K} = 90^\circ - \left(-35{,}8^\circ\right) = 125{,}8^\circ$ (рис. 2.43). Оскільки $\angle CBD$ – додатний, то він відкладається проти руху годинникової стрілки.

Центр кола (точка O_1) буде знаходитись на перетині перпендикуляра до хорди AB, поставленого з її центра, і перпендикуляра до дотичної BD, проведеного з точки B.

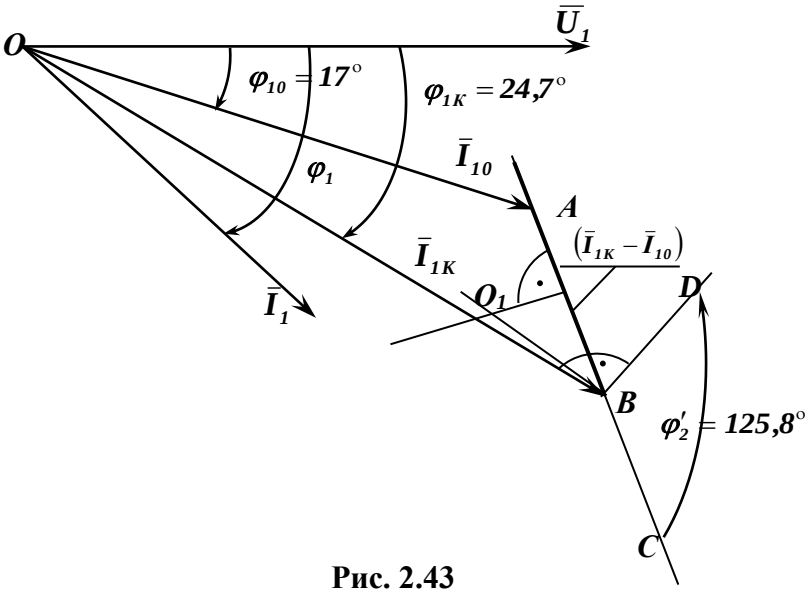

Рис. 2.43

Вектор $\bar{I}_1$, змінюючись, приймає всі можливі значення від $\bar{I}_{10} = 6{,}51\ A$ до значення $\bar{I}_{1K} = 7{,}83\ A$ і кінець його весь час залишається на дузі колової діаграми, якій належать також точки A і B.

2.17. Резонансні явища в лінійних електричних колах

2.17.1. Резонанс у колі з послідовним сполученням елементів

Внаслідок того, що індуктивні та ємнісні опори, а також індуктивні та ємнісні провідності можуть взаємно зкомпенсовуватись, можливі випадки, коли в колі, яке має реактивні елементи, еквівалентний опір і, відповідно, еквівалентна провідність можуть бути рівні нулю. Тоді струм збігається за фазою з вхідною напругою, тобто коло веде себе як чисто активний опір.

Явище, при якому струм у колі за наявності в ньому реактивних опорів X_L *та* X_C *збігається за фазою з напругою, прикладеною до цього кола, називають резонансом.*

При резонансі електричного кола з мережі надходить тільки активна енергія (потужність P), а реактивна енергія (потужність Q) циркулює (коливається) між індуктивністю та ємністю всередині схеми.

Повний опір послідовного $R,L,C-$ кола (рис. 2.44, *а*):

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\ .$$

У відповідності з визначенням при резонансі виконується умова:

$$X = X_L - X_C = 0 \text{ або } \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \text{ чи } \omega^2 LC = 1\ . \quad (2.124)$$

Як випливає з (2.124) резонансу в колі можна досягти, змінюючи частоту, індуктивність або ємність кола. Значення кутової частоти, індуктивності, чи ємності, при яких настає резонанс, визначаються з виразів (2.124):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}\ . \quad (2.125)$$

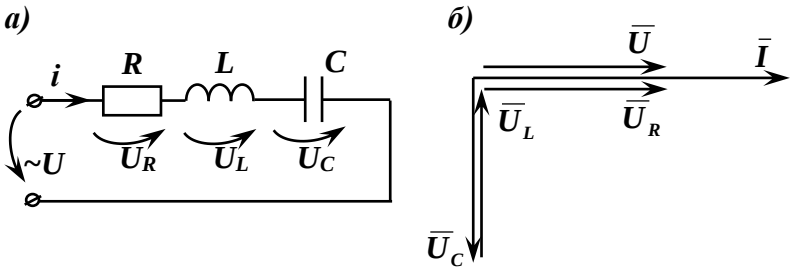

Рис. 2.44

Частоту $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ називають резонансною; вона є власною частотою контуру. З такою частотою в замкненому R,L,C - контурі (рис. 2.44, *а*) при вимкненні

вхідної напруги U і закороченні вхідних клем енергія вільно коливається між індуктивністю та ємністю.

Оскільки, при резонансі повний опір Z досягає найменшого значення $(Z = R)$, то струм у послідовному колі при резонансі має найбільше значення:

$$I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 0}} = \frac{U}{R},$$

яке не залежить від значень реактивних опорів. Векторна діаграма для випадку резонансу приведена на рис. 2.44, *б*.

При великих реактивних опорах X_L і X_C може виявитись, що значення напруг U_L і U_C будуть значно більшими, ніж значення прикладеної напруги U, тобто при резонансі або в режимах наближених до резонансу, напруги на котушці та конденсаторі можуть значно перевищувати напругу, прикладену до схеми з мережі, що може привести до аварійних режимів роботи (пошкодження ізоляції, нещасні випадки тощо). Тому, при проектуванні й налагодженні електричних схем останні перевіряються на можливість виникнення в них резонансу напруг.

Підвищення напруг U_L та U_C і взаємна їх компенсація при резонансі зумовило назву цього явища – резонанс напруг.

Перевищення напруг на реактивних елементах над вхідною напругою має місце за умови

$$R < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

Величину $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ називають хвильовим опором контуру.

Відношення

$$\frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{\omega_0 L I_0}{R I_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

визначає кратність перевищення напруг на індуктивному і ємнісному опорах над напругою на вході кола.

Величину Q*, яка визначає резонансні властивості контуру, називають добротністю контуру. Резонансні властивості характеризують також оберненою величиною* $d = 1/Q$*, яка носить назву затухання контуру.*

При резонансі напруг, коли $|U_L| = |U_C|$*, миттєві потужності:*

$$p_L = U_{L_0} I_0 \sin 2\omega t \qquad і \qquad p_C = -U_{C_0} I_0 \sin 2\omega t$$

в довільний момент часу рівні і протилежні за знаком. Це означає, що відбувається обмін енергією між магнітним полем котушки і електричним полем конденсатора, причому обміну енергією між цими полями і джерелом енергії не відбувається. Джерело енергії, яке живить коло, тільки зкомпенсовує споживання активної енергії на ділянці з опором R *.*

2.17.2. Частотні характеристики послідовного R, L, C – кола

Залежності повного і реактивного опорів кола і кута зсуву фаз φ між струмом і напругою від частоти приведені на рис. 2.45, *а*. В даному колі активний опір не залежить від частоти. Реактивний опір

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

при трьох характерних значеннях частоти приймає граничні значення, які рівні нулю, або нескінченності (рис. 2.45, *б*).

Аргумент функції, при якому вона приймає нескінченне значення, називають полюсом функції, а аргумент, при якому функція приймає нульове значення, називають нулем цієї функції.

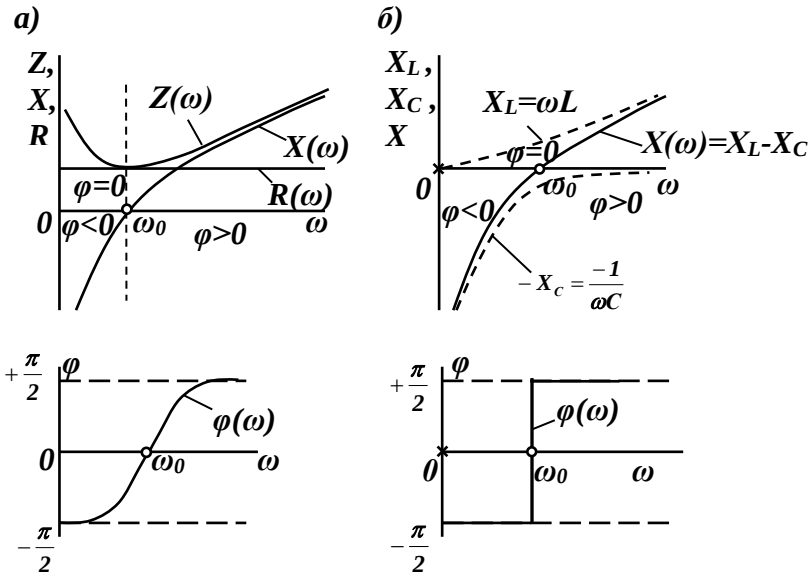

Рис. 2.45

В даному випадку маємо функцію $X(\omega)$ і, значить, її полюсами будуть частоти, при яких $X(\omega)=\infty$, тобто $\omega=0$ і $\omega=\infty$, а нулем буде частота, при якій $X(\omega)=0$, тобто $\omega=\omega_0$. На рис. 2.45, *б* полюси відмічені хрестиками, а нулі – кружечками.

Характерна властивість функції $X(\omega)$ полягає в тому, що при всіх частотах похідна $dX/d\omega>0$. Дійсно, зі збільшенням частоти ростуть обидва доданки величини $X=\omega L+(-1/\omega C)$, тобто ωL і $(-1/\omega C)$, так як $d(\omega L)/d\omega=L>0$; $\dfrac{d(-1/\omega C)}{d\omega}=\dfrac{1}{\omega^2 C}>0$.

Таким чином, із збільшенням частоти величина X в алгебраїчному розумінні завжди зростає.

Слід відмітити, що в момент резонансу відбувається зміна характеру реактивного опору (рис. 2.45). Якщо при $\omega<\omega_0$ реактивний опір кола мав ємнісний характер

($X < 0, \varphi < 0$), то при $\omega > \omega_0$ він приймає індуктивний характер ($X > 0, \varphi > 0$). В частковому випадку, коли $R = 0$, на частоті $\omega = \omega_0$ відбувається стрибкоподібна зміна кута φ: від $+\pi/2$ до $-\pi/2$ (рис. 2.45, *б*).

Частотна характеристика: $I(\omega)$ при $U = const$; $R = const$; $L = const$; $C = const$ виражається формулою:

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

і зображується кривою, представленою на рис. 2.46, де також приведені частотні характеристики: $U_C(\omega) = I(\omega) \times (1/\omega C)$; $U_L(\omega) = I(\omega) \times \omega L$.

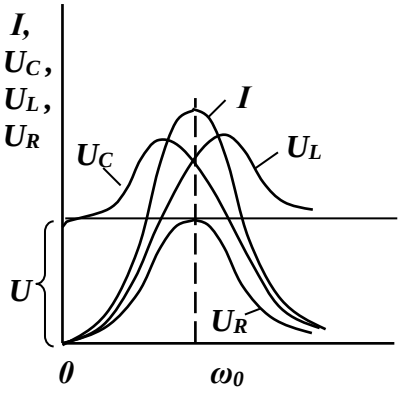

Рис. 2.46

При $\omega = 0$ струм $I = 0$, так як через ємність постійний струм не проходить, і, відповідно, вся прикладена напруга приходиться на клеми конденсатора ($U_C = U$). При $\omega = \infty$ струм $I = 0$, так як опір індуктивності нескінченний, то вся напруга прикладається до клем котушки ($U_L = U$).

На частоті резонансу $(\omega = \omega_0)$ маємо $|U_L| = |U_C|$ і, так як напруги на котушці і на конденсаторі взаємно

зкомпенсовуються, то вся напруга приходиться на ділянку з опором R:

$$U_R = RI = U.$$

Діаграма на рис. 2.46 приведена для випадку, коли затухання $d < 1$, внаслідок чого на частоті резонансу $U_C = U_L > U$ і максимум напруги U_C наступає на частоті, яка менша ω_0, тобто раніше максимуму I, так як для одержання величини U_C необхідно помножити струм I на величину $1/\omega C$, яка зменшується з ростом частоти. Максимум напруги U_L досягається при частоті більший від ω_0, тобто після максимуму струму I, так як для одержання величини U_L необхідно помножити струм I на зростаючу величину ωL.

Криві, які виражають залежність величин I, U_L та U_C від частоти і дають графічне зображення частотних характеристик кола, називають також резонансними кривими. Резонансними кривими називають також залежності цих величин від змінної частоти або від змінної ємності при незмінній частоті.

2.17.3. Резонанс при паралельному сполученні елементів G, L, C

Умовою резонансу при паралельному сполученні активної, індуктивної і ємнісної провідностей (рис. 2.47, *а*) є також відсутність зсуву фаз між струмом і напругою на вході кола.

Оскільки, повна провідність кола:

$$Y = G - jB = Ye^{-j\varphi}, \text{ де}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (1/\omega L - \omega C)^2};$$

$$\varphi = arctg\,\frac{B_L - B_C}{G} = arctg\,\frac{B}{G},$$

то умова $\varphi = 0$ означає, що:

$$B = B_L - B_C = 0 \quad \text{або} \quad \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0 \quad \text{чи} \quad \omega^2 LC = 1.$$

Таким чином, взаємна компенсація реактивних провідностей, при якій наступає резонанс у даному колі, має місце, якщо або частота, або індуктивність, або ємність підібрані згідно з формулами:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \qquad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \qquad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Отже, резонансу при паралельному сполученні можна досягти зміною частоти, індуктивності або ємності кола. Частота ω_0 являється резонансною частотою.

При резонансі реактивна провідність кола B рівна нулю і повна провідність кола Y досягає мінімального значення. В результаті вхідний струм: $I = UY$ при незмінній вхідній напрузі стає мінімальним, на відмінність від резонансу при послідовному сполученні R, L, C, коли струм, навпаки, мав максимальне значення. Векторна діаграма для випадку резонансу струмів приведена на рис. 2.47, *б*.

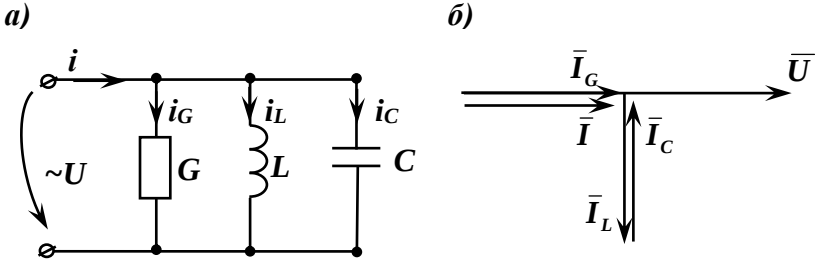

Рис. 2.47

Так як вектор загального струму $\bar{I}$ визначається геометричною сумою векторів трьох струмів, два з яких $\bar{I}_L$ й $\bar{I}_C$ знаходяться в протифазі, то при резонансі можливі випадки, коли струми в індуктивній котушці і в

конденсаторі можуть переважати (іноді й набагато) сумарний струм у колі.

Збільшення значень струмів при резонансі в паралельно сполучених вітках зумовило назву – резонанс струмів.

Перевищення струмів у реактивних елементах над сумарним струмом кола має місце за умови

$$G < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma .$$

Величина $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$, *що має розмірність провідності, носить назву хвильової провідності контуру.*

Відношення

$$\frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{U\omega_0 C}{UG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\gamma}{G} = Q \ ,$$

яке визначає кратність перевищення струму в реактивній котушці і в конденсаторі над сумарним струмом при резонансі, називається добротністю контуру.

Як і раніше, величина $d = 1/Q$, обернена добротності, є затуханням контуру.

У паралельному G, L, C – колі при резонансі в довільний момент часу $i_L = -i_C$, а напруга є спільною і, оскільки $p_L = ui_L$, $p_C = ui_C$, то $p_L = -p_C$. Таким чином, відбуваються коливання енергії в колі. Енергія полів переходить із конденсатора в котушку і назад, не обмінюючись з джерелом, яке живить коло. Джерело енергії тільки зкомпенсовує втрати енергії у вітці з активною провідністю G.

2.17.4. Частотні характеристики паралельного G, L, C – кола

Залежності реактивних і повної провідностей кола та кута зсуву фаз φ між струмом і напругою від частоти

приведені на рис. 2.48, *а*. В даному колі активна провідність G не залежить від частоти. Реактивна провідність (рис. 2.48, *б*):

$$B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{C}{\omega}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$

має три характерні частоти – два полюси $\omega = 0$ і $\omega = \infty$, при яких $B = \infty$, і один нуль $\omega = \omega_0$, коли $B = 0$.

Як і в колі з послідовним сполученням R, L, C, так і в цьому випадку в момент резонансу відбувається зміна характеру реактивної провідності (рис. 2.48). Якщо при $\omega < \omega_0$ реактивна провідність мала індуктивний характер ($B > 0, \varphi > 0$), то при $\omega > \omega_0$ вона приймає ємнісний характер ($B < 0, \varphi < 0$). В частковому випадку, коли $G = 0$, при частоті $\omega = \omega_0$ відбувається стрибкоподібна зміна кута φ: від $+\pi/2$ до $-\pi/2$ (рис. 2.48, *б*).

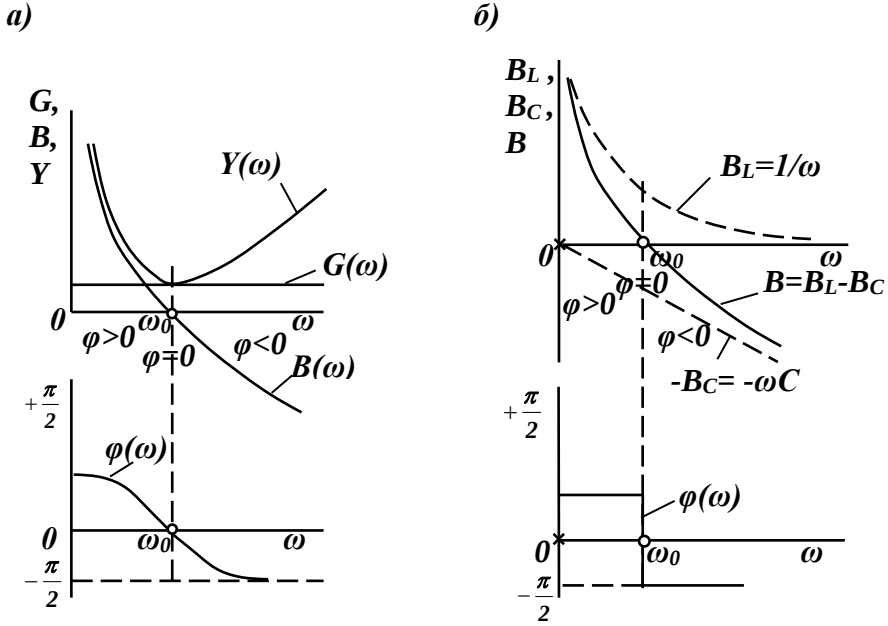

Рис. 2.48

Частотна характеристика: $U(\omega)$ при $I = const$; $G = const$; $L = const$; $C = const$ виражається формулою:

$$U(\omega) = \frac{I}{\sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}}$$

і зображується кривою, представленою на рис. 2.49, де також приведені частотні характеристики: $I_L(\omega) = U(\omega)/\omega L$ та $I_C(\omega) = U(\omega) \times \omega C$.

При $\omega = 0$ маємо $U = 0$, так як реактивний опір котушки при постійному струмі рівний нулю і відповідно весь струм проходить через котушку $(I_L = I)$. При $\omega = \infty$ також $U = 0$, так як при цьому ємнісний опір конденсатора падає до нуля і, відповідно, весь струм проходить через конденсатор $(I_C = I)$. При частоті резонансу $\omega = \omega_0$ маємо $|I_C| = |I_L|$, і, так як струми в котушці і в конденсаторі взаємно зкомпенсовуються, то весь струм I проходить через ділянку з провідністю G:

$$I_G = UG = I.$$

Діаграма на рис. 2.49 приведена для випадку $d < 1$, внаслідок чого при частоті резонансу ω_0: $I_C = I_L > I$. Максимуми величин I_L й I_C не співпадають з максимумом напруги U з тих же причин, що й при резонансі напруг послідовного R, L, C – кола.

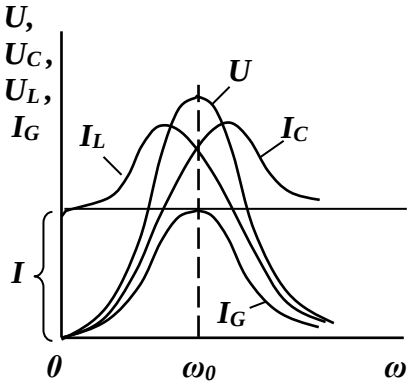

Рис. 2.49

2.17.5. Практичне використання явища електричного резонансу

Явище резонансу широко використовують у радіоелектронних пристроях та в заводських промислових установках.

Генератори високої частоти, які широко використовуються в радіотехніці, мають в собі, як основний елемент, коливальний контур, в якому коливання струму і напруги відбуваються з резонансною частотою. Антени передавальних і приймальних радіостанцій разом з увімкненими в їх коло котушками або конденсаторами являють собою також коливальні контури, які настроюють в резонанс з частотою коливань струму в генераторі передавальної станції і з частотою коливань напруженостей поля в електромагнітній хвилі приймальної станції. Радіоприймачі мають в собі коливальні контури, які можуть настроюватись в резонанс на частоту однієї з передавальних радіостанцій, що дає можливість виділити в приймачеві цю передавальну радіостанцію з числа багатьох одночасно працюючих радіостанцій.

Явище резонансу використовується в радіотехніці також для вимірювання частоти коливань (або довжини хвилі) електромагнітної хвилі за допомогою резонансних хвилемірів. Хвилемір містить в собі коливальний контур з градуйованою індуктивною котушкою, конденсатором і приладом, який вказує струм у контурі. Коливальний контур хвилеміра зв'язується індуктивно з контуром пристрою, в якому необхідно виміряти частоту струму. При плавній зміні ємності хвилеміра добиваються максимуму струму в контурі хвилеміра і за значенням індуктивності і ємності контуру роблять висновки про значення вимірюваної частоті.

Явище резонансу широко використовується також в інших пристроях електроавтоматики.

Компенсація індуктивної реактивної складової струму в потужних пристроях електроенергетичних систем

за допомогою приєднаних паралельно до них конденсаторів або перезбуджених синхронних двигунів, по суті справи, також являє собою мірoприємство, при якому досягається резонанс.

Всі приведені приклади відносились до випадків, коли явище резонансу в електричному колі використовується для практичних цілей. Однак, в тих випадках, коли явище резонансу виникає, не будучи спеціально передбаченим, воно може привести до небажаних наслідків. Особливо небезпечний в цьому відношенні резонанс при послідовному сполученні індуктивних і ємнісних елементів кола при його малому активному опорі, так як при цьому на реактивних елементах можуть появитись досить високі напруги.

Подібні явища можуть, виникнути, наприклад, при підключенні до клем генератора або трансформатора довгої лінії передачі, або кабелю, які не замкнуті на другому їх кінці на приймач енергії. Генератори і трансформатори мають велику індуктивність, а лінія і кабель – індуктивність і ємність. При відсутності активного навантаження затухання в кінці такої лінії невелике і легко можуть появитись перенапруги, якщо частота близька до резонансної.