Тема 1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Основні поняття про електромагнітне поле

Основою всіх електромагнітних явищ є електромагнітне поле та електричний заряд. ***Електромагнітне поле*** – особливий вид матерії, який у всіх точках простору поєднує дві його складові, що називаються, відповідно, електричне та магнітне поля. ***Електромагнітне поле*** проявляється своєю дією на електрично заряджені частинки.

Електричний заряд $\boldsymbol{q}$ – джерело електромагнітного поля, яке пов'язане з матеріальним носієм; елементарний електричний заряд – це внутрішній параметр елементарної частинки, що визначає її електромагнітну сутність, здатність до взаємодій. Уся сукупність електричних і магнітних явищ є проявом існування, руху і взаємодії електричних зарядів. Розрізняють два види електричних зарядів, які умовно називають додатними («+») та від'ємними («–»). Останні названі на честь електрона – елементарної від'ємно зарядженої частинки; заряд електрона $\boldsymbol{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл}$.

Електричне поле – одна із двох складових електромагнітного поля, яка проявляється у дії на електрично заряджену частинку із силою $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{E}}$, пропорційною зарядові частинки $\boldsymbol{q}$ і незалежною від швидкості її руху. Це поле характеризується векторною величиною – напруженістю електричного поля $\overline{\boldsymbol{E}}$, яка чисельно дорівнює відношенню сили, що діє на заряджену частинку, до її заряду і має напрямок сили, що діє на частинку з додатним зарядом, тобто $\overline{\boldsymbol{E}} = \lim\limits_{q \to 0} \dfrac{\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{E}}}{\boldsymbol{q}}$.

Магнітне поле – друга складова електромагнітного поля, яка проявляється у дії на рухому електрично заряджену частинку із силою $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{M}}$, пропорційною заряду частинки q і швидкості її руху V. Це поле характеризується векторними величинами: напруженістю магнітного поля $\overline{H}$ і пов'язаною з нею магнітною індукцією $\overline{B}$. Чисельно магнітна індукція дорівнює відношенню сили F_M до добутку заряду q і швидкості V частинки, тобто $B = \lim\limits_{q \to 0} \frac{F_{M\,max}}{q \times V}$, якщо напрямок швидкості такий, що ця сила максимальна. Вектор магнітної індукції перпендикулярний до векторів сили $\overline{F}_M$ і швидкості $\overline{V}$, а його напрямок при цьому збігається з поступальним переміщенням правоходового гвинта при його обертанні від напрямку сили до напрямку швидкості частинки з додатним зарядом. У підсумку перелічені величини поєднує формула $\overline{F}_M = q\left[\overline{V} \times \overline{B}\right]$.

У природному стані різні матеріальні тіла є електрично нейтральними, тобто елементарні додатні та від'ємні заряди рівномірно розподілені в їхньому об'ємі і врівноважують один одного. Щоб вивільнити заряди різних знаків і примусити їх рухатись в заданому напрямку, треба затратити енергію. Сили, які розділяють заряди різних знаків, долаючи електростатичні сили тяжіння між ними, називаються сторонніми. Походження сторонніх сил може бути різним: в електромеханічних генераторах це механічні сили, що передаються через вихрове електричне поле, яке виникає при зміні магнітного поля з часом, або це сили Лоренса, що діють з боку магнітного поля на електрони в провіднику, який рухається; в гальванічних елементах – це хімічні сили.

1.2. Основні фізичні величини

Для опису електромагнітних полів і процесів застосовують цілий ряд формальних фізичних величин. Поряд зі вже згаданими величинами виняткову роль мають також наступні електричні величини.

Електричний струм – це впорядкований (направлений) рух електрично заряджених частинок. За напрямок струму приймають напрямок руху додатно заряджених частинок. Якщо струм створюється від'ємно зарядженими частинками (наприклад, електронами), то напрямок струму вважають протилежним напрямку їхнього руху. Кількісно електричний струм характеризується скалярною величиною – ***силою струму*** $\boldsymbol{I}$ і векторною величиною – густиною електричного струму $\boldsymbol{\bar{J}}$. Сила струму дорівнює відношенню абсолютного значення електричного заряду $\boldsymbol{dq}$, який проходить за малий проміжок часу $\boldsymbol{dt}$ крізь визначену поверхню (наприклад, крізь поперечний переріз провідника), до значення $\boldsymbol{dt}$, тобто $\boldsymbol{I = dq / dt}$.

Для опису потенціальної енергетичної здатності електричного поля слугує скалярна величина – ***електричний потенціал*** $\boldsymbol{\varphi}$. Потенціал даної точки поля є відношенням роботи $\boldsymbol{A}$, яку може виконати поле, переміщуючи заряд $\boldsymbol{q}$ із заданої точки в нескінченно віддалену точку, до самого заряду, тобто $\boldsymbol{\varphi = A / q}$. Нескінченно віддалену точку беруть там, де електричне поле відсутнє і, отже, де потенціал дорівнює нулю.

Електрична напруга – це скалярна величина, яка є порідненою до потенціалу і яка введена для енергетичної характеристики електричного поля або електричного кола. Вона характеризує здатність поля виконувати роботу при переміщенні заряджених частинок між точками простору. Електрична напруга між двома точками електричного кола або електричного поля чисельно дорівнює роботі електричного поля, затраченій на переміщення одиничного додатного заряду із точки $\boldsymbol{a}$ в точку $\boldsymbol{b}$. У загальному випадку напруга дорівнює відношенню роботи $\boldsymbol{A}$, яку виконує поле переміщуючи заряд $\boldsymbol{q}$ із даної точки в іншу точку, до величини заряду, тобто $\boldsymbol{U_{ab} = A / q}$. У потенціальному електричному полі (електростатичне поле) ця робота не залежить від шляху переміщення заряду. В такому разі електрична напруга між двома точками дорівнює різниці потенціалів між ними, тобто $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$.

Електрорушійна сила (ЕРС) – це скалярна величина, яка характеризує дію сторонніх сил у джерелах постійного або змінного струму. Сторонні сили призводять до руху електричні заряди всередині генераторів, гальванічних елементів та інших джерел струму. ЕРС E (тут E не треба плутати з позначенням напруженості електричного поля) чисельно дорівнює роботі, яка виконується силами стороннього електричного поля (не електростатичного) при перенесенні вздовж замкненого контуру електричного кола одиниці додатного електричного заряду. В загальному випадку ЕРС дорівнює відношенню роботи A, яку виконують сторонні сили, переміщуючи заряд q вздовж замкненого провідникового контуру, до величини заряду, тобто $E = A/q$. З іншого боку, ЕРС джерела напруги дорівнює різниці потенціалів або напрузі на його електродах (полюсах) при розімкненому зовнішньому колі, тобто при відсутності електричного струму в джерелі.

Взаємодія та взаємовідношення величин, що описують електромагнітні процеси в електротехнічних пристроях, регулюються законами електромагнетизму. Нижче ці закони формулюються, головним чином, стосовно понять постійного струму, як це прийнято в курсі фізики; у подальшому ці закони отримають і більш поширене тлумачення.

1.3. Закони електромагнетизму

1.3.1. Закон Ома має наступні варіанти:

а) сила струму I прямо пропорційна напрузі U і обернено пропорційна електричному опору R ділянки кола (рис. 1.1, *а*):

$$I = \frac{U}{R}\ ; \qquad (1.1)$$

б) сила струму в електричному колі прямо пропорційна ЕРС джерела електроенергії й обернено пропорційна повному опору кола (рис. 1.1,*б*):

$$I = \frac{E}{R + R_0}; \tag{1.2}$$

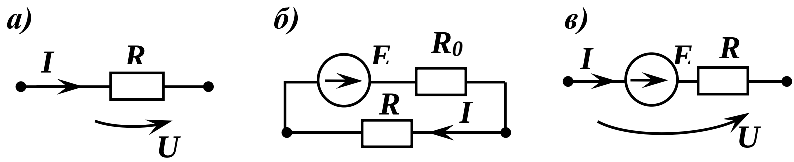


Рис. 1.1

в) узагальнений закон Ома (рис.1.1,*в*) для ділянки кола (знак «–» у разі зміни напрямку напруги):

$$I = \frac{E \pm U}{R}. \tag{1.3}$$

1.3.2. Закони Кірхгофа: 1–ий закон – алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{m} I_k = 0, \tag{1.4}$$

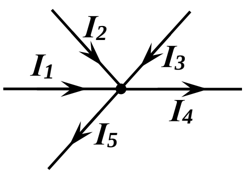


Рис. 1.2

де m – кількість віток у даному вузлі.

Або, наприклад, обираючи напрямок до вузла додатним, маємо для випадку на рис. 1.2:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Перенісши струми I_4 й I_5 у праву частину рівності, одержимо:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5,$$

тобто сума струмів, які підтікають до вузла, рівна сумі струмів, які з нього витікають.

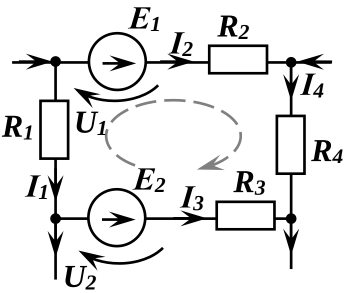


Рис. 1.3

2–ий закон – алгебраїчна сума спадів напруг на елементах замкненого контуру електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що знаходяться в цьому контурі, тобто:

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k = \sum_{k=1}^{q} E_k\ , \qquad (1.5)$$

де n, q – кількості пасивних елементів і джерел ЕРС у даному контурі.

Або, для прикладу, вибравши вказаний на рис. 1.3 напрямок обходу контуру можна записати:

$$-R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3 = E_1 - E_2\ .$$

1.3.3. Закон Джоуля – Ленца: теплова енергія, що виділяється в провіднику (наприклад, у резисторі) дорівнює добутку квадрата сили струму I, опору провідника R і часу t, а саме:

$$W_T = I^2 R t\ . \qquad (1.6)$$

1.3.4. Закон Біо–Савара–Лапласа: індукція dB магнітного поля, що створюється елементом струму $I\overline{dl}$ на відстані r від нього в однорідному середовищі з відносною магнітною проникністю μ_r (рис. 1.4), обернено пропорційна квадрату відстані і прямо пропорційна елементу струму і синусу кута β поміж векторами $\overline{dl}$ і $\bar{r}$, тобто у векторній, а потім і в скалярній формах:

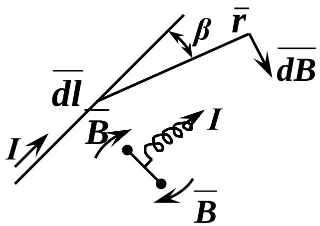


Рис. 1.4

$$d\overline{B} = \frac{\mu_0 \mu_r \left[I \cdot \overline{dl} \times \bar{r} \right]}{4\pi r^3}; \quad dB = \frac{\mu_0 \mu_r I dl}{4\pi r^2} \sin\beta\ , \qquad (1.7)$$

де $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $Гн/м$ – магнітна стала.

Напрямок вектора магнітної індукції визначається відомим правилом правоходового гвинта, як показано на рис. 1.4.

1.3.5. Закон повного струму: циркуляція вектора напруженості $\overline{\boldsymbol{H}}$ магнітного поля по контуру $\boldsymbol{l}$ (рис. 1.5) дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплюються цим контуром:

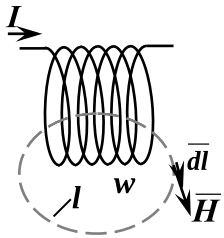


Рис. 1.5

$$\oint \overline{\boldsymbol{H}}\,\overline{\boldsymbol{dl}} = \sum \boldsymbol{I}, \tag{1.8}$$

де повний струм $\sum \boldsymbol{I} = \boldsymbol{wI}$;

$\boldsymbol{w}$ – кількість витків котушки, якою протікає струм $\boldsymbol{I}$.

1.3.6. Закон електромагнітної індукції: ЕРС $\boldsymbol{e}$, яка індукується в провідниковому контурі або в котушці (рис. 1.6), дорівнює швидкості зміни його магнітного потокозчеплення $\boldsymbol{\psi}$:

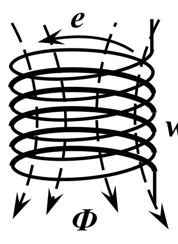


Рис. 1.6

$$\boldsymbol{e} = -\frac{\boldsymbol{d\psi}}{\boldsymbol{dt}}, \tag{1.9}$$

де $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{w} \times \sum_{k=1}^{w} \boldsymbol{\Phi_k}$; $\boldsymbol{w}$ – кількість витків котушки; $\boldsymbol{\Phi_k}$ – магнітний потік, який пронизує її k – ий виток.

У частковому випадку, коли всі витки пронизуються одним магнітним потоком, потокозчеплення $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{w\Phi}$, а ЕРС самоіндукції:

$$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{w}\frac{\boldsymbol{d\Phi}}{\boldsymbol{dt}}. \tag{1.10}$$

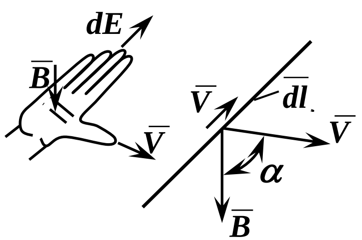


Рис. 1.7

У загальному випадку для елемента $\boldsymbol{dl}$ провідника, який переміщується зі швидкістю $\boldsymbol{V}$ в магнітному полі з індукцією $\boldsymbol{B}$ (рис. 1.7), ЕРС має вираз:

$$dE = \overline{B}\left[\overline{dl} \times \overline{V}\right]. \qquad (1.11)$$

Якщо при цьому магнітне поле однорідне, тобто індукція $\boldsymbol{B}$ скрізь однакова за величиною і напрямком, то ЕРС на всю довжину $\boldsymbol{l}$ провідника:

$$E = VBl\,sin\alpha. \qquad (1.12)$$

Напрямок ЕРС визначається правилом правої руки (рис. 1.7).

1.3.7. Закон Ампера (рис. 1.8) виражає силу Ампера:

$$\overline{dF_A} = I\left[\overline{dl} \times \overline{B}\right], \qquad (1.13)$$

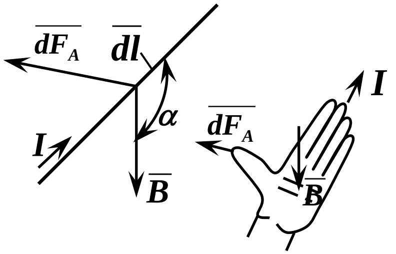


Рис. 1.8

яка діє на елемент довжини $\boldsymbol{dl}$ провідника зі струмом $\boldsymbol{I}$, що знаходиться в магнітному полі з індукцією $\boldsymbol{B}$.

У простішому випадку, при однорідному магнітному полі на всю довжину $\boldsymbol{l}$ провідника діє сила Ампера:

$$F_A = IBl\,sin\alpha. \qquad (1.14)$$

Напрямок сили Ампера визначається правилом лівої руки (рис. 1.8).

1.3.8. Правило Ленца: індукційний струм $\boldsymbol{i}$, який виникає в замкненому контурі, має такий напрямок, що створений ним магнітний потік крізь площу, обмежену контуром, прагне зкомпенсувати ту зміну потоку, яким викликається даний струм.

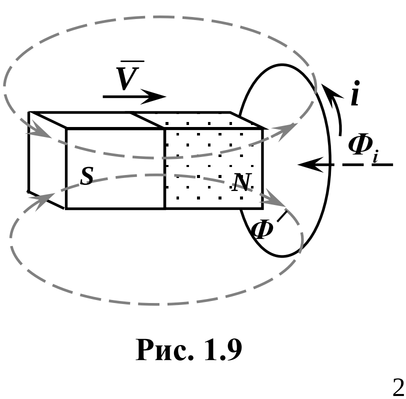


Рис. 1.9

На рис. 1.9, як окрема ілюстрація правила Ленца, вказано напрямок потоку

$\boldsymbol{\Phi_i}$ магнітного поля, який у свою чергу, індукований магнітним потоком $\boldsymbol{\Phi}$ постійного магніту, що вноситься в контур.

Правило Ленца безпосередньо торкається закону електромагнітної індукції, визначаючи напрямок індукованої ЕРС, як і напрямок струму, що нею викликається.

1.3.9. Закон Кулона визначає силову взаємодію вільних електричних зарядів: два точкові заряди, що знаходяться в однорідному середовищі з відносною діелектричною проникністю $\boldsymbol{\varepsilon_r}$, взаємодіють один з одним із силою $\boldsymbol{F_K}$, яка пропорційна добутку зарядів $\boldsymbol{q_1}$ і $\boldsymbol{q_2}$ та обернено пропорційна квадрату відстані $\boldsymbol{r}$ між ними:

$$\boldsymbol{F_K = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}}\ , \qquad (1.15)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \Phi / м}$ – електрична стала.

Сила $\boldsymbol{F_K}$ спрямована по лінії, яка з’єднує заряди, і відповідає притяганню для різнойменних зарядів й відштовхуванню для однойменних.

1.4. Еквівалентні перетворення електричних кіл

1.4.1. Взаємні еквівалентні перетворення трикутника та зірки пасивних двополюсників

На рис. 1.10, *а* зображено схему з’єднання трьох пасивних двополюсників $\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_2}, \boldsymbol{R_3}$ в зірку, на рис. 1.10, *б* – трьох пасивних двополюсників $\boldsymbol{R_{12}}, \boldsymbol{R_{23}}, \boldsymbol{R_{31}}$ у трикутник. Ці схеми будуть еквівалентними тоді, коли при однакових відповідних напругах $\boldsymbol{U_{12}}, \boldsymbol{U_{23}}, \boldsymbol{U_{31}}$ вхідні струми $\boldsymbol{I_1}, \boldsymbol{I_2}, \boldsymbol{I_3}$ в обох схемах також будуть відповідно однаковими. Ця умова рівнозначна умові рівності вхідних опорів (провідностей) між будь-якими парами вузлів 1–2; 2–3; 3–1 приведених схем.

Таким чином, можна записати:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \ ; \\ R_2 + R_3 &= \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \ ; \\ R_3 + R_1 &= \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \ . \end{aligned} \qquad (1.16)$$

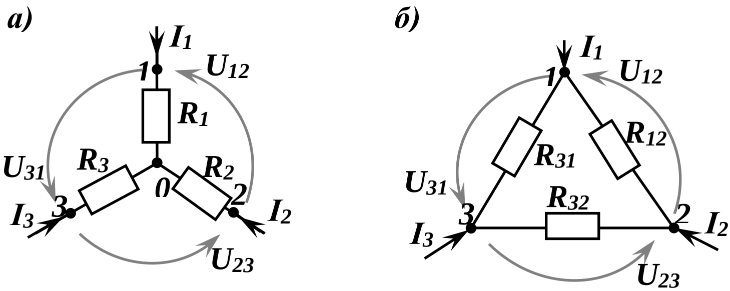


Рис. 1.10

З рівностей (1.16) знаходимо опори зірки:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{\Delta R}; \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{\Delta R}; \quad R_3 = \frac{R_{13}R_{32}}{\Delta R}, \qquad (1.17)$$

де

$$\Delta R = R_{12} + R_{23} + R_{31}.$$

Згідно з (1.17) опір променя зірки рівний добутку двох відповідних примикаючих опорів трикутника, поділеному на суму опорів усіх сторін трикутника.

Далі маємо:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \ ; \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \ ; \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \ , \end{aligned} \qquad (1.18)$$

тобто опір сторони трикутника рівний сумі двох відповідних примикаючих опорів зірки і їх добутку, поділеному на третій опір зірки.

Слід відзначити, що виведені формули еквівалентних перетворень можна застосувати й до схем зірок і трикутників, складених з активних двополюсників. Справді, якщо в променях зірок є ЕРС, то їх завжди можна віднести до зовнішньої схеми.

Приклад 1.1. Визначимо струми у вітках електричного кола, схему якого наведено на рис. 1.11, при наступних значеннях фізичних величин: $\boldsymbol{E = 3{,}8\ В}$; $\boldsymbol{R_1 = 8\ Ом}$; $\boldsymbol{R_2 = 2\ Ом}$; $\boldsymbol{R_3 = 4\ Ом}$; $\boldsymbol{R_5 = 5\ Ом}$; $\boldsymbol{R_0 = 0{,}2\ Ом}$; $\boldsymbol{R_4 = 10\ Ом}$.

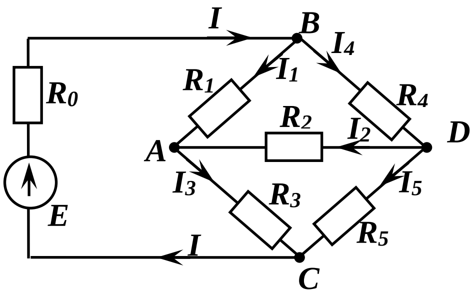


Рис. 1.11

Розв'язання. Загальний струм $\boldsymbol{I}$ у вузлі $\boldsymbol{B}$ розгалужується на два струми: $\boldsymbol{I_1}$ й $\boldsymbol{I_4}$. Напрямок струму $\boldsymbol{I_2}$ залежить від параметрів схеми і визначається тільки після її розрахунку. Крім цього, дане коло не має ні послідовного ні паралельного сполучення віток (ділянок), тобто є складним електричним колом, яке має два з'єднання зіркою ($\curlywedge\boldsymbol{R_1R_2R_3}$ і $\curlywedge\boldsymbol{R_4R_2R_5}$) та два з'єднання трикутником ($\Delta\boldsymbol{R_1R_4R_2}$ і $\Delta\boldsymbol{R_2R_5R_3}$).

Перетворимо трикутник опорів $\boldsymbol{R_1R_4R_2}$ (рис. 1.11) в еквівалентну зірку $\boldsymbol{R_AR_BR_D}$ (рис. 1.12, *а*). З цією метою від вузлів $\boldsymbol{A, B, D}$ від'єднаємо $\Delta\boldsymbol{R_1R_4R_2}$ і на його місце підключимо $\curlywedge\boldsymbol{R_AR_BR_D}$, опори якої:

$$R_A = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{8 \times 2}{8 + 10 + 2} = 0{,}8\ Ом;$$

$$R_B = \frac{R_1 \times R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{8 \times 10}{20} = 4\ Ом;$$

$$R_D = \frac{R_2 \times R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{2 \times 10}{20} = 1\ Ом.$$

Далі розрахунок одержаної схеми виконується відомими методами. Дійсно, опори R_A й R_3 та R_D й R_5 сполучені у вітках послідовно, тоді:

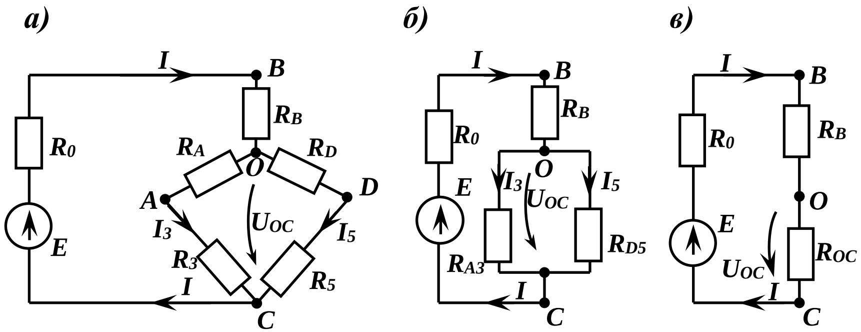


Рис. 1.12

$$R_{A3} = R_A + R_3 = 0{,}8 + 4 = 4{,}8\ Ом;$$

$$R_{D5} = R_D + R_5 = 1 + 5 = 6\ Ом.$$

Опори R_{A3} і R_{D5} сполучені паралельно (рис. 1.12, *б*) і їх еквівалентний опір:

$$R_{OC} = \frac{R_{A3} \times R_{D5}}{R_{A3} + R_{D5}} = \frac{4{,}8 \times 6}{4{,}8 + 6} = 2{,}67\ Ом.$$

Еквівалентний опір всього кола (рис. 1.12, *в*):

$$R_e = R_O + R_B + R_{OC} = 0{,}12 + 4 + 2{,}67 = 6{,}79\ Ом.$$

Струм у нерозгалуженій частині кола:

$$I = \frac{E}{R_e} = \frac{3{,}8}{6{,}79} = 0{,}53\ A.$$

Міжвузлова напруга (рис. 1.12, *в*):

$$U_{OC} = R_{OC} \times I = 2{,}67 \times 0{,}53 = 1{,}42\ B$$

прикладена одночасно до віток ***OAC*** й ***ODC***, (рис. 1.12, *б*), по яких протікають струми I_3 й I_5 відповідно:

$$I_3 = \frac{U_{OC}}{R_{A3}} = \frac{1,42}{4,8} = 0,295 \;\; A; \quad I_5 = \frac{U_{OC}}{R_{D5}} = \frac{1,42}{6} = 0,236 \;\; A.$$

Для визначення струму I_2 складемо рівняння другого закону Кірхгофа для контуру ***ADCA*** (рис. 1.11), обходячи його в напрямку годинникової стрілки:

$$-R_2 I_2 + R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0$$

або

$$-2I_2 + 5 \times 0,236 - 4 \times 0,295 = 0 \, .$$

Звідси одержуємо: $I_2 = 0 \;\; A$.

Струми першої і четвертої віток (рис. 1.11):

$$I_1 = I_3 - I_2 = I_3 = 0,295 \;\; A\,;$$

$$I_4 = I_2 + I_5 = I_5 = 0,236 \;\; A\,.$$

Розглянута схема електричного кола являє собою вимірювальну мостову схему, в якій діагональний струм I_2 рівний нулю при рівності добутків величин опорів протилежних плечей моста:

$$R_1 \times R_5 = R_3 \times R_4 \qquad \text{або} \qquad 8 \times 5 = 4 \times 10 \, .$$

1.4.2. Перетворення паралельних віток з джерелами енергії

Паралельне сполучення віток з джерелами енергії можна замінити еквівалентною ділянкою, яка являє собою або послідовне з’єднання ідеальної ЕРС й опору (рис. 1.13), або паралельне з’єднання ідеального джерела струму й опору (рис. 1.14). Додатні напрямки енергії цих джерел беруться довільними.

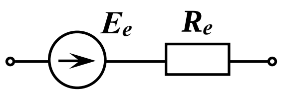


Рис. 1.13

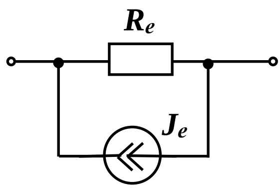


Рис. 1.14

Параметри еквівалентних ділянок:

$$\boldsymbol{E_e} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{E_k G_k} + \sum\limits_{k=1}^{m} \boldsymbol{J_k}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{G_k}}\ ; \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{J_e} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{E_k G_k} + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{J_k}\ ; \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{R_e} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{G_k}}, \tag{1.21}$$

де n – число віток з джерелами ЕРС: m – число віток з джерелами струму.

У виразах (1.19) і (1.20) обидві суми є алгебраїчними. У першу суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{E_k G_k}$ входять зі знаком «+» («–») добутки ЕРС віток на провідності віток, напрямки ЕРС в яких співпадають (протилежні) з напрямком розрахункового еквівалентного джерела відносно вузлів їх приєднання. У другій сумі зі знаком «+» («–») враховуються ті джерела струму, напрямки яких співпадають (протилежні) з напрямком еквівалентного джерела струму відносно вузлів приєднання. Еквівалентний опір $\boldsymbol{R_e}$ – обернена величина сумарної провідності паралельно з'єднаних віток початкової схеми кола.

Розглянемо деякі часткові випадки перетворення віток з джерелами енергії.

Якщо в паралельних вітках відсутні джерела енергії, то еквівалентна ЕРС (джерело струму) рівна нулю.

Якщо в паралельному з'єднанні є вітка тільки з ідеальним джерелом ЕРС, то відповідна еквівалентна ЕРС рівна ідеальній ЕРС і має такий же напрямок; еквівалентний опір $\boldsymbol{R_e}$ при цьому рівний нулю.

Якщо в склад паралельного з'єднання входять тільки ідеальні джерела струму, то це з'єднання можна замінити тільки еквівалентним джерелом струму, величина J_e якого рівна алгебраїчній сумі струмів джерел; еквівалентний опір при цьому нескінченно великий ($R_e = \infty$).

Виходячи з виразів (1.19), (1.20) і (1.21), можна зробити висновок, що послідовне з'єднання ідеального джерела ЕРС й опору (рис. 1.13) можна замінити паралельним з'єднанням ідеального джерела струму й опору (рис. 1.14) і навпаки, причому:

$$J_e = \frac{E_e}{R_e}; \qquad (1.22)$$

$$E_e = J_e R_e. \qquad (1.23)$$

Ідеальні джерела ЕРС та ідеальні джерела струму взаємно перетворювати не можна.

Приклад 1.2. У схемі електричного кола (рис. 1.15) перетворимо паралельне з'єднання віток між вузлами «1–2» в еквівалентне джерело струму, а паралельне з'єднання J_1 і R_5 між вузлами «2–3» – в еквівалентне джерело ЕРС при значеннях фізичних величин: $E_1 = 150\ В$; $J_1 = 15\ А$; $R_1 = 36\ Ом$; $R_2 = 31\ Ом$; $R_5 = 40\ Ом$.

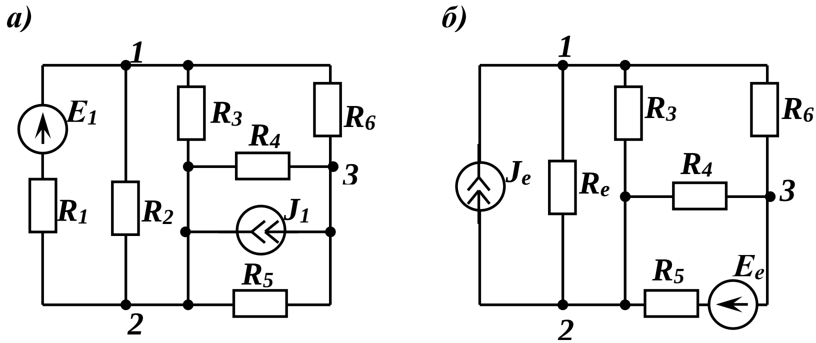


Рис. 1.15

Розв'язання. Параметри еквівалентного джерела струму:

$$J_e = \frac{E_1}{R_1} = \frac{150}{35} = 4,29\ \text{À};$$

$$R_e = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{35 \times 31}{35 + 31} = 16,44\ \text{Îì} \quad .$$

Параметри еквівалентного джерела ЕРС:

$$\text{Å}_{\text{å}} = R_5 \times J_1 = 40 \times 15 = 600\ \text{Â}; \quad R_{\text{å}} = R_5,$$

причому опір R_5, який був під’єднаний паралельно джерелу струму J_1, слід включити послідовно з еквівалентним джерелом ЕРС E_e.

1.5. Методи розрахунку лінійних електричних кіл постійного струму

1.5.1. Метод накладання струмів

Суть принципу накладання полягає в наступному. Якщо лінійне електричне коло піддається дії кількох джерел енергії одночасно, то реакція кола на суму дій рівна сумі реакцій на кожну дію окремо. Якщо під реакцією кола слід розуміти струм у будь-якій вітці кола, то принцип накладання можна інтерпретувати таким чином: струм у будь-якій вітці електричного кола, створюваний кількома джерелами енергії, що діють в даному колі, рівний алгебраїчній сумі струмів, створюваних у даній вітці кожним з цих джерел зокрема.

Приклад 1.3. Застосовуючи принцип накладання, визначимо струми у вітках кола, схема якого приведена на рис. 1.16, якщо:

$E_1 = 3,6\ В$; $E_2 = 4,8\ В$;

$R_{01} = R_{02} = 0,5\ Ом$;

$R_1 = R_3 = 2\ Ом$;

$R_2 = 1,6\ Ом$.

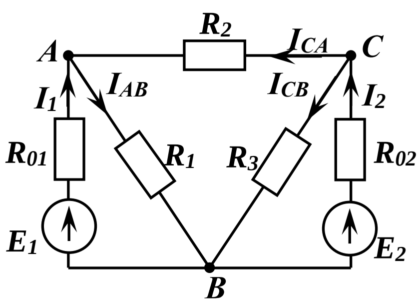


Рис. 1.16

Розв'язання. У заданій схемі будемо визначати частинні струми від ЕРС $\boldsymbol{E_1}$ при відсутності ЕРС $\boldsymbol{E_2}$, тобто розраховуємо просте електричне коло згідно рис. 1.17, *а*; потім знайдемо частинні струми від ЕРС $\boldsymbol{E_2}$ при відсутності ЕРС $\boldsymbol{E_1}$, тобто розрахуємо просте коло згідно з рис. 1.18, а, потім алгебраїчно додамо одержані частинні струми.

Таким чином, метод накладання дає можливість замість розрахунку одного складного кола з кількома джерелами енергії провести розрахунок кількох (у даному випадку двох) кіл з одним джерелом енергії в кожному.

Частинні струми від ЕРС $\boldsymbol{E_1}$ (рис. 1.17) будемо позначати літерою «$\boldsymbol{I}$» з одним штрихом ($\boldsymbol{I'_k}$), а частинні струми від ЕРС $\boldsymbol{E_2}$ (рис. 1.18) – літерою «$\boldsymbol{I}$» з двома штрихами ($\boldsymbol{I''_k}$).

Для кола з ЕРС $\boldsymbol{E_1}$ (рис. 1.17, *а*) обчислимо спочатку його еквівалентний опір, визначимо струм джерела $\boldsymbol{E_1}$, а потім і решту струмів.

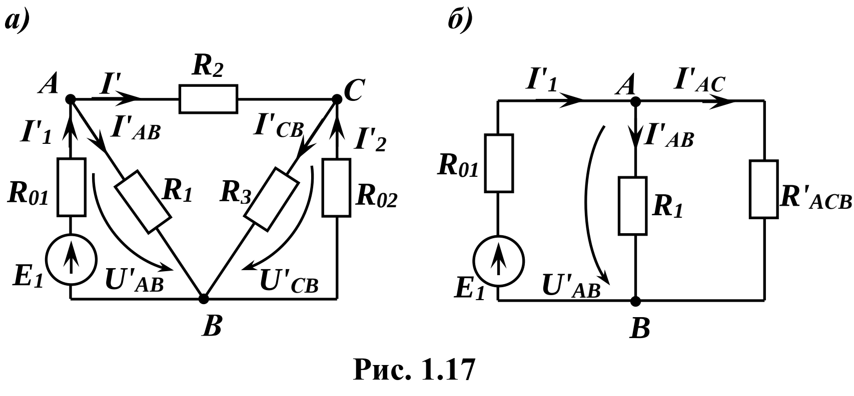


Рис. 1.17

Опір ділянки ***BC***:

$$\boldsymbol{R'_{BC} = \frac{R_3 \times R_{02}}{R_3 + R_{02}} = \frac{2 \times 0{,}5}{2 + 0{,}5} = 0{,}40\ Ом}$$

сполучений послідовно з опором $\boldsymbol{R_2}$ і тому:

$$R'_{ACB} = R_2 + R'_{BC} = 1{,}6 + 0{,}4 = 2\ Ом.$$

Загальний опір зовнішнього кола (рис. 1.17, *б*):

$$R'_{AB} = \frac{R_1 \times R'_{ACB}}{R_1 + R'_{ACB}} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1\ Ом.$$

Частинний струм від джерела ЕРС E_1:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_{01} + R'_{AB}} = \frac{3{,}6}{0{,}5 + 1} = 2{,}4\ A$$

у вузлі A розгалужується на струми I'_{AB} й I'_{AC} (рис. 1.17, *б*), для знаходження яких обчислимо міжвузлову напругу U'_{AB}:

$$U'_{AB} = R'_{AB} \times I'_1 = 1 \times 2{,}4 = 2{,}4\ B.$$

Тоді:

$$I'_{AB} = \frac{U'_{AB}}{R_1} = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2\ A;$$

$$I'_{AC} = \frac{U'_{AC}}{R_1} = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2\ A.$$

Струм I'_{AC} у вузлі C розгалужується на струми I'_{CB} й I'_2 (рис. 1.17, *а*), які обчислюються через міжвузлову напругу U'_{CB}:

$$U'_{CB} = R'_{BC} \times I'_{AC} = 0{,}4 \times 1{,}2 = 0{,}48\ B.$$

Отже,

$$I'_{CB} = \frac{U'_{CB}}{R_3} = \frac{0{,}48}{2} = 0{,}24\ A;$$

$$I'_2 = \frac{U'_{CB}}{R_{02}} = \frac{0{,}48}{0{,}5} = 0{,}96\ A.$$

Розглянемо коло з ЕРС E_2 при відсутності ЕРС E_1 (рис. 1.18).

Опір ділянки AB (рис. 1.18, *а*):

$$R''_{AB} = \frac{R_1 \times R_{01}}{R_1 + R_{01}} = \frac{2 \times 0{,}5}{2 + 0{,}5} = 0{,}4\ Ом$$

сполучений послідовно з опором R_2, тому:

$$R''_{BAC} = R''_{AB} + R_2 = 0,4 + 1,6 = 2\ Ом.$$

Опори R''_{BAC} і R_3 сполучені паралельно (рис. 1.18, *б*), отже опір зовнішньоі частини кола:

$$R''_{BC} = \frac{R''_{BAC} \times R_3}{R''_{BAC} + R_3} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1\ Ом.$$

Частинний струм від джерела ЕРС E_2:

$$I''_2 = \frac{E_2}{R''_{BC} + R_{02}} = \frac{4,8}{1 + 0,5} = 3,2\ A$$

у вузловій точці C розгалужується на струми I''_{CA} й I''_{CB} (рис. 1.18, *б*), які визначаються через міжвузлову напругу U''_{CB}:

$$U''_{CB} = R''_{CB} \times I''_2 = 1 \times 3,2 = 3,2\ B.$$

Отже, $$I''_{CB} = \frac{U''_{CB}}{R_3} = \frac{3,2}{2} = 1,6\ A;$$

$$I''_{CA} = \frac{U''_{CB}}{R''_{BAC}} = \frac{3,2}{2} = 1,6\ A.$$

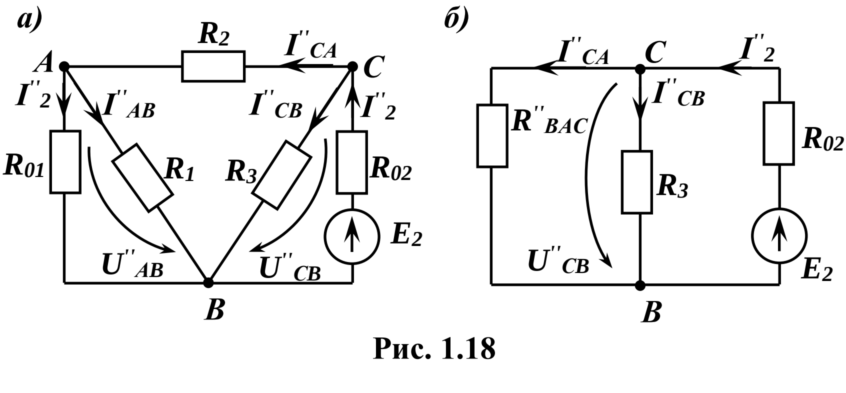


Рис. 1.18

Струм I''_{CA} у вузловій точці A (рис. 1.18, *а*) розгалужується на струми I''_1 й I''_{AB}:

$$I_1'' = \frac{U''_{AB}}{R_{01}} = \frac{0{,}64}{0{,}5} = 1{,}28\ A;$$

$$I''_{AB} = \frac{U''_{AB}}{R_1} = \frac{0{,}64}{2} = 0{,}32\ A,$$

де $$U''_{AB} = R''_{AB} \times I''_{CA} = 0{,}4 \times 1{,}6 = 0{,}64\ B.$$

Струми в початковій схемі (рис. 1.16) знайдемо, склавши алгебраїчно частинні струми допоміжних схем.

У першій вітці частинний струм I_1' (рис. 1.17, *а*) направлений від вузла ***B*** до вузла ***A***, а частинний струм I_1'' (рис. 1.18, *а*) – від вузла ***A*** до вузла ***B***, тобто зустрічно струму I_1''. Тому, сумарний струм:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 2{,}4 - 1{,}28 = 1{,}12\ A$$

співпадає за напрямком з більшим частинним струмом.

Аналогічно визначаються струми I_{CA} й I_2:

$$I_{CA} = I''_{CA} - I'_{CA} = 1{,}6 - 1{,}2 = 0{,}4\ A;$$

$$I_2 = I_2'' - I_2' = 3{,}2 - 0{,}96 = 2{,}24\ A.$$

У вітках *AB* і *BC* обидва частинні струми співпадають за напрямком, тому:

$$I_{AB} = I'_{AB} + I''_{AB} = 1{,}2 + 0{,}32 = 1{,}52\ A;$$

$$I_{CB} = I'_{CB} + I''_{CB} = 0{,}24 + 1{,}6 = 1{,}84\ A.$$

1.5.2. Метод міжвузлової напруги (метод двох вузлів)

Якщо електричне коло має кілька віток, що приєднані до двох вузлів, то при його розрахунку доцільно використовувати метод міжвузлової напруги. Переваги його перед іншими методами зростають зі збільшенням кількості паралельних віток.

Спочатку обчислюють міжвузлову напругу у відповідності з виразом:

$$U = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} G_k \times E_k + \sum_{k=1}^{m} J_k \right)}{\sum_{k=1}^{n} G_k}, \qquad (1.24)$$

де n – число віток з джерелами ЕРС;

m – число віток з джерелами струму;

$\sum_{k=1}^{n} G_k \times E_k$ – алгебраїчна сума добутків провідностей віток на ЕРС цих віток;

$\sum_{k=1}^{m} J_k$ – алгебраїчна сума струмів джерел струму у вітках;

$\sum_{k=1}^{n} G_k$ – сума провідностей усіх віток.

Потім визначають струми віток, записуючи рівняння Кірхгофа для кожного контуру, утвореного відповідною віткою і міжвузловою напругою, приймаючи ЕРС вітки додатною (від'ємною), якщо її напрямок співпадає (не співпадає) з напрямком обходу контуру.

Приклад 1.4. Визначимо струми у вітках електричного кола (рис. 1.19), фізичні параметри якого:

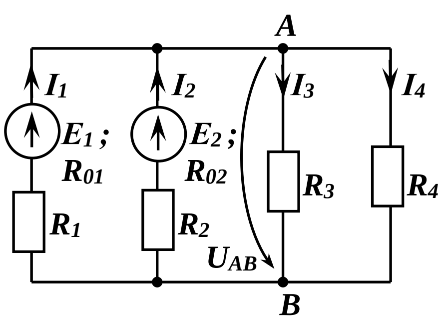


Рис. 1.19

$E_1 = 12\ В$;

$E_2 = 15\ В$;

$R_{01} = R_{02} = 0{,}1\ Ом$;

$R_1 = 1{,}9\ Ом$;

$R_2 = 1{,}4\ Ом$;

$R_3 = 9\ Ом$;

$R_4 = 18\ Ом$.

Розв'язання. Задамося умовними додатними напрямками струмів у вітках і міжвузлову напругу $\boldsymbol{U_{AB}}$ спрямуємо від вузла $\boldsymbol{A}$ до вузла $\boldsymbol{B}$.

Обчислимо провідності віток:

$$G_1 = \frac{1}{R_{01}+R_1} = \frac{1}{0{,}1+1{,}9} = 0{,}5\ См;$$

$$G_2 = \frac{1}{R_{02}+R_2} = \frac{1}{0{,}1+1{,}4} = 0{,}67\ См;$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{9} = 0{,}11\ См;$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{18} = 0{,}056\ См.$$

Так як джерела струму в колі відсутні, то в формулі (1.24) $\sum_{k=1}^{m} J_k = 0$ і міжвузлова напруга:

$$U_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k \times E_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = \frac{G_1 \times E_1 + G_2 \times E_2}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} =$$

$$= \frac{0{,}5 \times 12 + 0{,}67 \times 15}{0{,}5 + 0{,}67 + 0{,}11 + 0{,}056} = 12{,}01\ \hat{A}.$$

Оскільки напруга $\boldsymbol{U_{AB}}$ прикладена одночасно до всіх віток кола, то для першого контуру можна записати рівняння другого закону Кірхгофа:

$$(R_{01}+R_1) \times I_1 + U_{AB} = E_1,$$

звідки:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{R_{01}+R_1} = (E_1 - U_{AB}) \times G_1 = (12 - 12{,}01) \times 0{,}5 = -0{,}005\ A.$$

Аналогічно:

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{R_{02}+R_2} = (E_2 - U_{AB}) \times G_2 = (15 - 12{,}01) \times 0{,}67 = 2\ A.$$

У третій і в четвертій вітках джерела ЕРС відсутні і тому:

$$-R_3 I_3 + U_{AB} = 0; \qquad -R_4 I_4 + U_{AB} = 0.$$

Тоді струми у цих вітках:

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{12{,}01}{9} = 1{,}33\ A;$$

$$I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4} = \frac{12{,}01}{18} = 0{,}67\ A.$$

1.5.3. Метод контурних струмів

За допомогою законів Кірхгофа можна розрахувати будь-яку схему. Але, у випадку дуже розгалужених кіл приходиться розв'язувати системи з великою кількістю рівнянь. Тому були розроблені більш простіші методи розрахунку електричних кіл. Одним з найбільш поширених є метод контурних струмів, застосування якого дозволяє зменшити загальну кількість сумісно розв'язуваних рівнянь за рахунок вилучення з системи рівнянь Кірхгофа всіх рівнянь, складених на підставі першого закону, і збереження тільки рівнянь для контурів.

Метод контурних струмів, запропонований англійським фізиком Д.Д. Максвеллом (1831 – 1874 р. р.), базується на понятті про контурні струми, під якими розуміють розрахункові (умовні) струми, що протікають у кожному незалежному контурі. Рівняння кола складають відносно контурних струмів, після чого справжні (реальні) струми у вітках визначають через знайдені контурні струми.

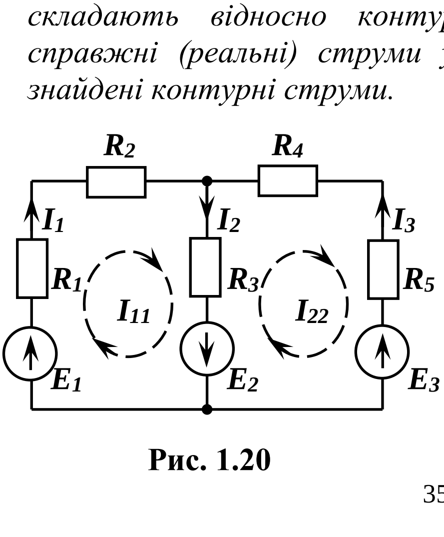


Рис. 1.20

Вивід основних розрахункових рівнянь проведемо стосовно схеми рис. 1.20. Будемо вважати, що в лівому і в правому контурах у напрямку ходу годинникової стрілки течуть контурні струми I_{11} й I_{22}. Для кожного контуру складемо рівняння згідно з другим законом Кірхгофа, врахувавши при цьому, що в суміжній вітці (з опором $\boldsymbol{R_3}$) тече зверху вниз струм ($\boldsymbol{I_{11} - I_{22}}$). Напрямки обходу контурів також приймемо за годинниковою стрілкою.

Маємо:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2})\boldsymbol{I_{11}} + \boldsymbol{R_3}(\boldsymbol{I_{11}} - \boldsymbol{I_{22}}) = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}\,; \\ -\boldsymbol{R_3}(\boldsymbol{I_{11}} - \boldsymbol{I_{22}}) + (\boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5})\boldsymbol{I_{22}} = -\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_3}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1.25)$$

Розкривши дужки і, згрупувавши подібні члени, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_3})\boldsymbol{I_{11}} + (-\boldsymbol{R_3})\boldsymbol{I_{22}} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}\,; \\ (-\boldsymbol{R_3})\boldsymbol{I_{11}} + (\boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5})\boldsymbol{I_{22}} = -\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_3}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1.25,\, a)$$

Позначимо власні опори контурів через $\boldsymbol{R_{11}}$ і $\boldsymbol{R_{22}}$:

$$\boldsymbol{R_{11}} = \boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_2} + \boldsymbol{R_3}; \qquad \boldsymbol{R_{22}} = \boldsymbol{R_3} + \boldsymbol{R_4} + \boldsymbol{R_5}.$$

Опір суміжної вітки, взятий зі знаком «мінус», позначимо через $\boldsymbol{R_{12}}$:

$$\boldsymbol{R_{12}} = \boldsymbol{R_{21}} = -\boldsymbol{R_3};$$

а контурні ЕРС незалежних контурів – через $\boldsymbol{E_{11}}$ і $\boldsymbol{E_{22}}$:

$$\boldsymbol{E_{11}} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}; \qquad \boldsymbol{E_{22}} = -\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_3}.$$

Ці ЕРС рівні відповідно алгебраїчній сумі ЕРС кожного контуру, причому, зі знаком «+» («–») входять ті ЕРС, напрямки яких співпадають (не співпадають) з напрямком обходу контуру.

У загальному випадку можна вважати, що опір $\boldsymbol{R_{km}}$ суміжної вітки між $\boldsymbol{k}$–им і $\boldsymbol{m}$–им контурами входить у рівняння зі знаком «–» («+»), якщо напрямки контурних струмів $\boldsymbol{I_{kk}}$ й $\boldsymbol{I_{mm}}$ уздовж цієї вітки – зустрічні (однакові).

Для одноманітності в знаках опорів суміжних віток бажано всі контурні струми спрямувати в одному напрямку, наприклад, за годинниковою стрілкою.

Якщо в результаті розв’язку системи рівнянь (1.25, *а*) якийсь контурний струм виявиться від’ємним, то це буде означати, що його справжній напрямок є протилежним тому напрямку, який ми вибрали за додатний.

Струми в зовнішніх вітках електричного кола рівні відповідним контурним струмам, наприклад, струми у вітках з джерелами ЕРС E_1 і E_2:

$$I_1 = I_{11}; \qquad I_3 = I_{22}.$$

У суміжних вітках реальні струми визначаються через контурні струми. Наприклад, у вітці з опором R_3 струм I_2, що протікає зверху вниз, рівний різниці струмів: $I_2 = I_{11} - I_{22}$.

Для схеми електричного кола, що має «*n*» незалежних контурів, система контурних рівнянь має вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} + \ldots + R_{1n}I_{nn} = E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} + \ldots + R_{2n}I_{nn} = E_{22}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + R_{n3}I_{33} + \ldots + R_{nn}I_{nn} = E_{nn}. \end{array}\right\} \quad (1.26)$$

Приклад 1.5. Визначимо струми у вітках кола (рис. 1.21, *а*) при значеннях фізичних величин: $E_1 = 18\ В$; $E_2 = 9\ В$; $J = 1\ А$; $R_1 = 5\ Ом$; $R_2 = 12\ Ом$; $R_3 = 6\ Ом$; $R_4 = 7\ Ом$; $R_5 = 5\ Ом$; $R_6 = 10\ Ом$.

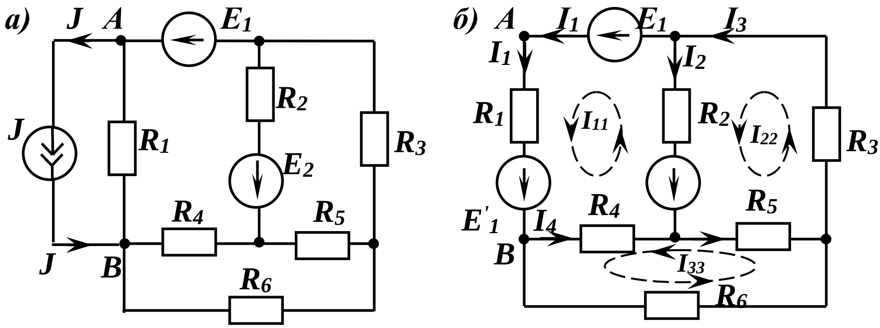


Рис. 1.21

Розв'язання. Для спрощення розрахунків перетворимо паралельне з'єднання ідеального джерела струму J і опору R_1 між вузлами A і B (рис. 1.21, *а*) в еквівалентне джерело ЕРС: $\boldsymbol{E_1' = R_1 \times J = 5 \times 1 = 5\ B}$ і увімкнемо його послідовно з опором $\boldsymbol{R_1}$ (рис. 1.21, *б*).

Виберемо довільно напрямки струмів у вітках, як показано на рис. 1.21, *б*. Контурні струми позначимо $\boldsymbol{I_{11}}$, $\boldsymbol{I_{22}}$, $\boldsymbol{I_{33}}$ і, спрямувавши їх проти ходу годинникової стрілки, запишемо стосовно них систему контурних рівнянь кола:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11};\\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22};\\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

Тут власні опори контурів:

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2 = 5 + 7 + 12 = 24\ Ом;$$

$$R_{22} = R_2 + R_5 + R_3 = 12 + 5 + 6 = 23\ Ом;$$

$$R_{33} = R_4 + R_6 + R_5 = 7 + 10 + 5 = 22\ Ом.$$

Опори суміжних віток будуть від’ємними, оскільки контурні струми через них протікають у взаємно протилежних напрямках:

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -12\ Ом;$$

$$R_{13} = R_{31} = -R_4 = -7\ Ом;$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -5\ Ом.$$

Контурні ЕРС незалежних контурів: $\boldsymbol{E_{11}, E_{22}, E_{33}}$ – рівні відповідним алгебраїчним сумам ЕРС кожного контуру, причому, зі знаком «плюс» («мінус») входять ті ЕРС, напрямки яких співпадають (не співпадають) з напрямком обходу контуру.

Таким чином,

$$E_{11} = E_1 + E_1' - E_2 = 18 + 5 - 9 = 14\ B;$$

$$E_{22} = E_2 = 9\ B;$$

$$E_{33} = 0\ B.$$

Підставивши числові значення фізичних величин в систему (1.27), одержимо:

$$\left.\begin{aligned} 24I_{11} - 12I_{22} - \ 7I_{33} &= 14; \\ -12I_{11} + 23I_{22} - \ 5I_{33} &= 9; \\ -7I_{11} - \quad 5I_{22} + 22I_{33} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.27,a)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь методом детермінантів (визначників).

Головний детермінант системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 24 & -12 & -7 \\ -12 & 23 & -5 \\ -7 & -5 & 22 \end{vmatrix} = 6409\ Ом^3.$$

Допоміжні детермінанти:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & -12 & -7 \\ 9 & 23 & -5 \\ 0 & -5 & 22 \end{vmatrix} = 9425\ В \cdot Ом^3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 24 & 14 & -7 \\ -12 & 9 & -5 \\ -7 & 0 & 22 \end{vmatrix} = 8497\ В \cdot Ом^3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 24 & -12 & 14 \\ -12 & 23 & 9 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 4930\ В \cdot Ом^3.$$

Контурні струми визначаються, як:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9425}{6409} = 1,47\ \ A;$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8497}{6409} = 1,33\ \ A;$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4930}{6409} = 0,77\ \ A.$$

Справжні струми в зовнішніх вітках рівні відповідним контурним струмам:

$$I_1 = I_{11} = 1,47\ A; \quad I_3 = I_{22} = 1,33\ A; \quad I_6 = I_{33} = 0,77\ A.$$

Справжні струми в суміжних вітках рівні алгебраїчним сумам відповідних контурних струмів:

$$I_2 = I_{22} - I_{11} = 1{,}33 - 1{,}47 = -0{,}14\ A;$$
$$I_4 = I_{11} - I_{33} = 1{,}47 - 0{,}77 = 0{,}70\ A;$$
$$I_5 = I_{22} - I_{33} = 1{,}33 - 0{,}77 = 0{,}56\ A.$$

У результаті розрахунку виявилось, що струм I_2 має від'ємне значення, яке свідчить про те, що дійсний напрямок цього струму у вітці протилежний умовно прийнятому напрямку.

Струм через опір R_1 (рис. 1.21, *а*) визначимо на підставі першого закону Кірхгофа:

$$I_1' = I_1 - J = 1{,}47 - 1 = 0{,}47\ A.$$

Слід зауважити, що метод контурних струмів вигідно застосовувати при розрахунку складених електричних кіл, в яких число незалежних контурів менше, ніж число вузлів у колі.

1.5.4. Метод вузлових потенціалів

При розрахунку електричних кіл методом вузлових потенціалів як допоміжні невідомі використовують потенціали вузлів кола відносно одного з них – опорного вузла, потенціал якого приймають рівним нулю.

Якщо схема кола має n вузлів і потенціал опорного вузла $\varphi_{оп} = 0\ B$, *то потенціали решти вузлів відносно опорного позначають як* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{(n-1)}$, *внаслідок цього число невідомих зменшується з n до n-1 і стає рівним числу рівнянь, які необхідно скласти для кола згідно з першим законом Кірхгофа. Потім струми у вітках визначають через знайдені потенціали вузлів.*

Метод вузлових потенціалів є економічнішим для розрахунку струмів у складних колах в тих випадках, коли джерелами енергії є джерела струмів і, коли число вузлів хоч би на одиницю менше числа незалежних контурів. Цей метод дає можливість зберегти тільки ті рівняння Кірхгофа, які складені для вузлів, і вилучити рівняння для контурів.

Розрахункові рівняння методу вузлових потенціалів:

$$\left.\begin{aligned} &G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 - \ldots - G_{1k}\varphi_k = I_{11};\\ &-G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 - \ldots - G_{2k}\varphi_k = I_{22};\\ &-G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 - \ldots - G_{3k}\varphi_k = I_{33};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-G_{n1}\varphi_1 - G_{n2}\varphi_2 - G_{n3}\varphi_3 - \ldots + G_{nk}\varphi_k = I_{kk}, \end{aligned}\right\} \quad (1.28)$$

де φ_k – шуканий потенціал ***k****–го* вузла кола;

G_{kk} – власна (вузлова) провідність ***k****–го* вузла, яка рівна сумі провідностей усіх віток, що приєднані до цього вузла;

G_{km} – взаємна міжвузлова провідність вузлів ***k*** і ***m***, яка рівна сумі провідностей усіх віток, увімкнених безпосередньо між цими вузлами, причому, якщо в деякій вітці є кілька опорів, то спочатку визначають загальний опір цієї вітки, а потім її провідність;

I_{kk} – вузловий струм ***k****–го* вузла, розрахункова величина якого визначається з виразу:

$$I_{kk} = \sum_{k=1}^{n} G_k E_k + \sum_{k=1}^{m} J_k \ , \quad (1.29)$$

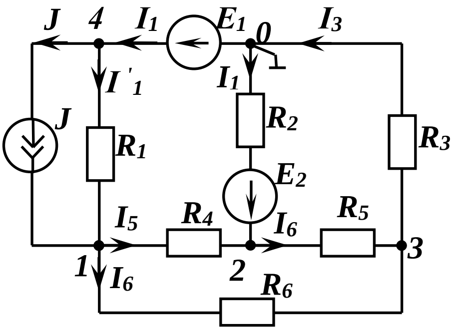
де ***n*** – число віток з джерелами ЕРС, а ***m*** – число віток з джерелами струму.

У рівності (1.29) в першій сумі – добутків провідностей віток, що під’єднані до ***k****–го* вузла, на ЕРС цих віток – ЕРС береться додатною (від’ємною), якщо вона направлена до ***k****–го* вузла (від ***k****–го* вузла). У другій сумі зі знаком «+» («–») враховуються струми джерел струмів, які направлені до ***k****–го* вузла (від ***k****–го* вузла).

Якщо в електричному колі між двома вузлами увімкнене ідеальне джерело ЕРС (внутрішній опір його рівний нулеві), то необхідно прийняти рівним нулеві потенціал одного з його полюсів; тоді потенціал другого полюса джерела буде рівним величині ЕРС з відповідним знаком, а кількість розрахункових рівнянь скоротиться.

Послідовність розрахунку складного кола методом вузлових потенціалів розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 1.5. Визначимо методом вузлових потенціалів струми у вітках складного електричного кола (рис. 1.22) за відомими значеннями фізичних величин:



$E_1 = 18\ В$; $E_2 = 9\ В$;

$J = 1\ А$; $R_1 = 5\ Ом$;

$R_2 = 12\ Ом$; $R_3 = 6\ Ом$;

$R_4 = 7\ Ом$; $R_5 = 5\ Ом$;

$R_6 = 10\ Ом$.

Рис. 1.22

Розв'язання. Виберемо довільно додатні напрямки струмів у вітках, позначимо цифрами вузли кола і приймемо потенціал вузла ***0*** рівним нулеві ($\varphi_0 = 0\ В$).

Тоді: $$\varphi_4 = \varphi_0 + E_1 = 0 + 18 = 18\ В.$$

За допоміжні невідомі будемо вважати потенціали φ_1, φ_2 й φ_3 решти вузлів кола, для визначення яких складемо систему розрахункових рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 &= I_{11}; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 &= I_{22}; \\ -G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 &= I_{33}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Власні провідності вузлів:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} = 0{,}44\ См;$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} = 0{,}43\ См;$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0{,}47\ См.$$

Міжвузлові провідності:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{7} = 0{,}14\ См;$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_6} = \frac{1}{10} = 0{,}10\ См;$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{5} = 0{,}20\ См.$$

Вузлові струми кола згідно з виразом (1.29):

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_1} + J = \frac{18}{5} + 1 = 4{,}6\ А;$$

$$I_{22} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{9}{12} = 0{,}75\ А;$$

$$I_{33} = 0\ А.$$

Вузловий струм I_{33} третього вузла рівний нулю, оскільки в жодній вітці, що приходить до цього вузла, немає ні джерела ЕРС, ні джерела струму.

Підставимо обчислені значення провідностей і вузлових струмів у систему рівнянь (1.30):

$$\left.\begin{aligned} 0{,}44\varphi_1 - 0{,}14\varphi_2 - 0{,}10\varphi_3 = 4{,}6; \\ -0{,}14\varphi_1 + 0{,}43\varphi_2 - 0{,}20\varphi_3 = 0{,}75; \\ -0{,}10\varphi_1 - 0{,}20\varphi_2 + 0{,}47\varphi_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.30,a)$$

Потенціали φ_1, φ_2 й φ_3 знаходимо як розв’язки цієї системи:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0{,}810}{0{,}052} = 15{,}58\ В;$$

$$\varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0{,}560}{0{,}052} = 10{,}77\ В;$$

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0{,}417}{0{,}052} = 8{,}02\ В,$$

де
$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}44 & -0{,}14 & -0{,}10 \\ -0{,}14 & 0{,}43 & -0{,}20 \\ -0{,}10 & -0{,}20 & 0{,}47 \end{vmatrix} = 0{,}052\ См^3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4{,}60 & -0{,}14 & -0{,}10 \\ 0{,}75 & 0{,}43 & -0{,}20 \\ 0 & -0{,}20 & 0{,}47 \end{vmatrix} = 0{,}810 \ \ A \cdot См^2 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}44 & 4{,}60 & -0{,}10 \\ -0{,}14 & 0{,}75 & -0{,}20 \\ -0{,}10 & 0 & 0{,}47 \end{vmatrix} = 0{,}560 \ \ A \cdot См^2 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0{,}44 & -0{,}14 & 4{,}60 \\ -0{,}14 & 0{,}43 & 0{,}75 \\ -0{,}10 & -0{,}20 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}417 \ \ A \cdot См^2 .$$

При вибраному спрямуванні струмів у вітках їх величини визначаються таким алгоритмом:

У чисельнику виразу для струму від потенціалу вузла, з якого струм витікає, віднімається потенціал вузла, до якого струм підтікає; якщо при цьому у вітці є ЕРС, то вона враховується зі знаком «+» («–»), коли її напрямок співпадає (протилежний) з напрямком струму в цій вітці. В знаменнику виразу для струму записується загальний опір вітки. Отже,

$$I_1' = \frac{(\varphi_4 - \varphi_1)}{R_1} = \frac{(18 - 15{,}58)}{5} = 0{,}48 \ A;$$

$$I_2 = \frac{(\varphi_0 - \varphi_2 + E_2)}{R_2} = \frac{(0 - 10{,}77 + 9)}{12} = -0{,}15 \ A;$$

$$I_3 = \frac{(\varphi_3 - \varphi_0)}{R_3} = \frac{(8{,}02 - 0)}{6} = 1{,}34 \ A;$$

$$I_4 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_4} = \frac{(15{,}58 - 10{,}77)}{7} = 0{,}69 \ A;$$

$$I_5 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)}{R_5} = \frac{(10{,}77 - 8{,}02)}{5} = 0{,}55 \ A;$$

$$I_6 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_3)}{R_6} = \frac{(15{,}58 - 8{,}02)}{10} = 0{,}76 \ A.$$

Струм I_1 визначимо з першого закону Кірхгофа, записаного стосовно вузла *4*:

$$I_1 = I_1' + J = 0{,}48 + 1 = 1{,}48 \ A.$$

1.5.5. Метод еквівалентного генератора

У тих випадках, коли виникає необхідність визначення величини струму тільки в одній вітці складного електричного кола, застосовують теорему про еквівалентний генератор, на підставі якої струм через довільний опір R_k, що приєднаний до двох точок кола з джерелами енергії, може бути обчислений за формулою:

$$I_k = \frac{U_0}{R_e + R_k} \ ,$$

де U_0 – напруга нового енергетичного режиму кола між точками приєднання опору R_k після його вилучення з кола;

R_e – еквівалентний опір кола відносно точок приєднання опору R_k.

Приклад 1.6. Методом еквівалентного генератора визначимо струм I_2 у вітці з джерелом E_2 складного

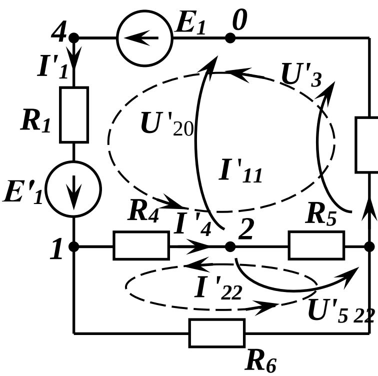


Рис. 1.23

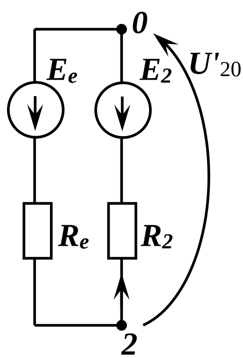


Рис. 1.24

електричного кола (рис. 1.22) при значеннях фізичних величин: $E_1 = 18\ B$; $E_2 = 9\ B$; $J = 1\ A$; $R_1 = 5\ Ом$; $R_2 = 12\ Ом$; $R_3 = 6\ Ом$; $R_4 = 7\ Ом$; $R_5 = 5\ Ом$; $R_6 = 10\ Ом$.

Розв'язання. Розділимо коло на дві частини: вітку «$0-2$» будемо вважати зовнішньою частиною кола, а решту схеми (рис. 1.23) – його внутрішньою частиною, яку замінимо еквівалентним генератором з ЕРС E_e і внутрішнім опором R_e (рис. 1.24). Тоді струм у вітці «$0-2$» визначиться за законом Ома:

$$I_2 = \frac{E_e - E_2}{R_e + R_2}\ . \tag{1.31}$$

ЕРС E_e еквівалентного джерела рівна напрузі $U_{20}^{'}$ при новому електричному режимові, що настав у колі після відключення вітки «$0-2$» (рис. 1.23). При цьому число контурів зменшилось на одиницю, а опори R_4 й R_5 виявились сполученими послідовно в одній вітці й через них протікає один і той же струм I_4' .

Міжвузлову напругу U_{20}' знайдемо з рівняння другого закону Кірхгофа, записаного для контуру «$0-2-3-0$» (рис. 1.23):

$$U_{20}' = U_5' + U_3' = R_5 I_4' + R_3 I_3'\ . \tag{1.32}$$

Струми I_3' й I_4' визначимо, розрахувавши внутрішню частину кола (рис. 1.23) методом контурних струмів. Перетворивши джерело струму J (рис. 1.22) в еквівалентне джерело ЕРС $E_1' = R_1 \times J$ (рис. 1.23), запишемо систему контурних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}' I_{11}' + R_{12}' I_{22}' &= E_1 + E_1'\ ; \\ R_{21}' I_{11}' + R_{22}' I_{22}' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

або
$$\left.\begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_5 + R_3) I_{11}' - (R_4 + R_5) I_{22}' &= E_1 + E_1'\ ; \\ -(R_4 + R_5) I_{11}' + (R_4 + R_6 + R_5) I_{22}' &= 0 . \end{aligned}\right\}$$

Підставивши числові дані, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} 23I'_{11} - 12I'_{22} &= 23\,; \\ -12I'_{11} - 22I'_{22} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1.33,\ a)$$

Розв'язавши систему (1.33, *а*), знаходимо контурні струми:

$$I'_{11} = 0{,}78\ A; \qquad I'_{22} = 0{,}42\ A.$$

Струми третьої й четвертої віток:

$$I'_3 = I'_{11} = 0{,}78\ A;$$

$$I'_4 = I'_{11} - I'_{22} = 0{,}78 - 0{,}42 = 0{,}36\ A.$$

Згідно з виразом (1.32), ЕРС еквівалентного генератора:

$$E_e = U'_{20} = 5 \times 0{,}36 + 6 \times 0{,}78 = 6{,}48\ B.$$

Внутрішній опір R_e еквівалентного генератора, що рівний загальному опору внутрішньої частини кола відносно точок ***0*** і ***2***, визначимо, закоротивши джерела ЕРС E_1 і E'_1 (рис. 1.25, *а*).

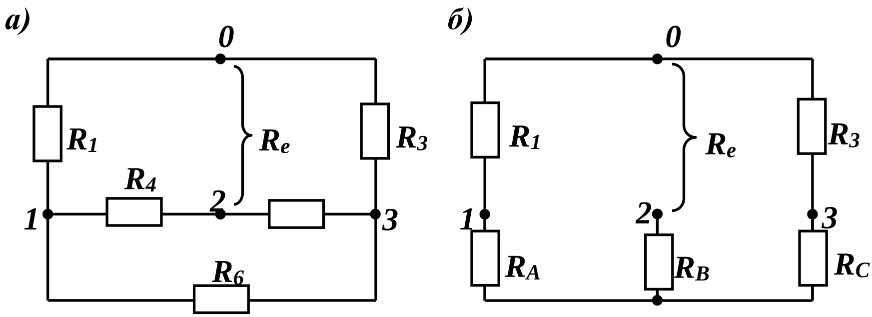


Рис. 1.25

Перетворимо трикутник опорів $R_4R_5R_6$ (рис. 1.25, *а*) в еквівалентну зірку $R_AR_BR_C$ (рис. 1.25, *б*), опори променів якої:

$$R_A = \frac{R_4 \times R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{7 \times 10}{7 + 5 + 10} = \frac{70}{22} = 3{,}18\ Ом;$$

$$R_B = \frac{R_4 \times R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{7 \times 5}{7 + 5 + 10} = \frac{35}{22} = 1{,}59\ Ом;$$

$$R_C = \frac{R_5 \times R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{5 \times 10}{7 + 5 + 10} = \frac{50}{22} = 2{,}27\ Ом.$$

Опори R_1 й R_A та R_3 й R_C виявились сполученими послідовно в першій і третій вітках, а ці вітки з'єднані між собою паралельно, отже, їх загальний опір:

$$R_{заг} = \frac{(R_1 + R_A)\times(R_3 + R_C)}{R_1 + R_A + R_3 + R_C} = \frac{(5 + 3{,}18)\times(6 + 2{,}27)}{5 + 3{,}18 + 6 + 2{,}27} = 4{,}11\ Ом.$$

Тоді еквівалентний опір усієї внутрішньої частини кола:

$$R_e = R_B + R_{заг} = 1{,}59 + 4{,}11 = 5{,}70\ Ом.$$

Струм у вітці «$0 - 2$» (рис. 1.24) знаходимо за формулою (1.31):

$$I_2 = \frac{E_e - E_2}{R_e + R_2} = \frac{6{,}48 - 9}{5{,}7 + 12} = -0{,}14\ A.$$

Порівняльна таблиця результатів обчислень струмів трьома методами

Струми / Методи	I_1, A	I_1', A	I_2, A	I_3, A	I_4, A	I_5, A	I_6, A
Контурних струмів	1,47	0,47	0,14	1,33	0,70	0,56	0,77
Вузлових потенціалів	1,48	0,48	0,15	1,34	0,69	0,55	0,76
Еквівалентного генератора	-	-	0,14	-	-	-	-

1.5.6. Баланс потужностей

У будь-якому електричному колі потужність, що споживається опорами цього кола, повинна бути рівною потужності джерел енергії.

Рівняння енергетичного балансу (балансу потужностей) у загальному випадку записується так:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k \times I_k + \sum_{k=1}^{m} J_k \times U_k = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 \times R_k \ , \qquad (1.34)$$

де n – число віток з джерелами ЕРС; m – число віток з джерелами струму.

У лівій частині рівності (1.34) потужність джерела ЕРС враховується з додатним (від'ємним) знаком, якщо напрямок ЕРС джерела співпадає (протилежний) з напрямком струму, що тече через це джерело.

Для визначення знаку потужності джерела струму необхідно визначити напругу на ньому. Якщо струм джерела витікає з точки більш високого потенціалу порівняно з потенціалом точки, куди струм підтікає, то потужність буде від'ємною, а режим роботи джерела відповідає споживанню енергії.

У правій частині рівності (1.34) записується арифметична сума потужностей, споживаних усіма опорами кола. За своїм фізичним змістом ці потужності можуть бути тільки додатними.

Для електричного кола (рис. 1.22) рівняння енергетичного балансу має вигляд:

$$E_1 \times I_1 + E_2 \times I_2 - (\varphi_4 - \varphi_1) \times J =$$

$$= \left(I_1'\right)^2 \times R_1 + I_2^2 \times R_2 + I_3^2 \times R_3 + I_4^2 \times R_4 +$$

$$+ I_5^2 \times R_5 + I_6^2 \times R_6 \, ;$$

$$18 \times 1{,}48 + 9 \times (-0{,}15) - (18 - 15{,}58) \times 1 =$$

$$= 1{,}48^2 \times 5 + (-0{,}15)^2 \times 12 + 1{,}34^2 \times 6 + 0{,}69^2 \times 7 +$$

$$+ 0{,}55^2 \times 5 + 0{,}76^2 \times 10 \, ;$$

$$23{,}25 \ Вт \cong 23{,}12 \ Вт \, .$$