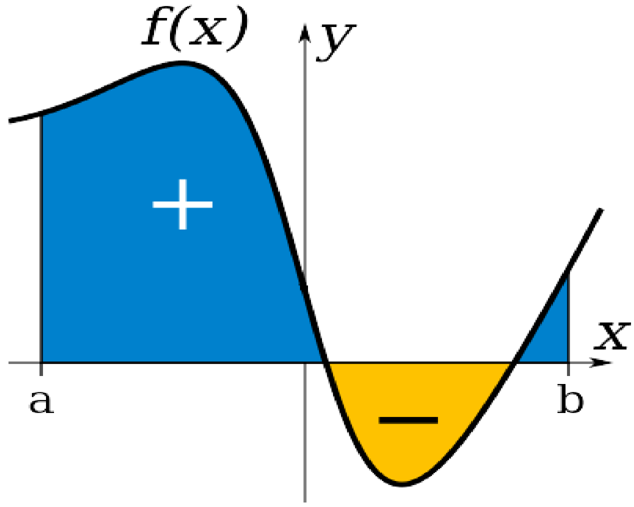
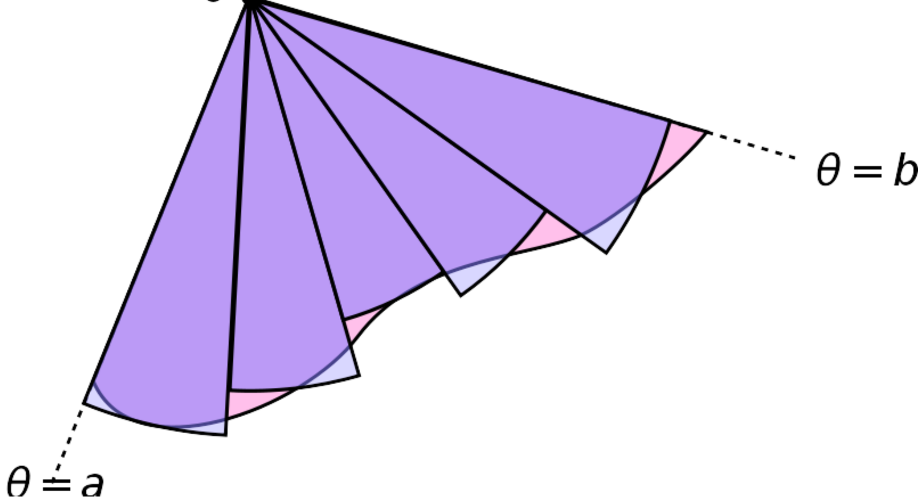


А.П. Харченко, В.О. Гаєвська, Г.В Лисянська

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ ЧАСТИНА І

Навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

А.П. Харченко, В.О. Гаєвська, Г.В Лисянська

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ
ЧАСТИНА І

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків „НТМТ” 2013

УДК 517
Х – 22

Рецензенти:
В.С.Михайленко, доктор фіз.-мат. наук, професор каф. вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (ХНАДУ)
Г.І. Кошовий, кандидат фіз.-мат. наук, доцент каф. вищої математики Харківського національного аерокосмічного університету (ХАІ)
Л.І. Щелкунова, доцент каф. вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист №1/11-15965 від 22.10.13)

А.П. Харченко, В.О. Гаєвська, Г.В. Лисянська

Х-22 Вища математика в прикладах і задачах, частина І: Навчальний посібник. – Х.: „НТМТ”, 2013. – 194с.

ISBN 978-617-578-145-6

У навчальному посібнику наведено необхідний теоретичний матеріал з курсу «Вища математика » для розв'язання прикладів і задач, а також достатню кількість прикладів докладного розв'язання типових задач. Посібник містить варіанти домашніх завдань та підсумкових завдань. Видання розроблено відповідно до діючої в вищих навчальних закладах програми з курсу «Вища математика».

Призначається для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Іл.: 82; табл.: 10; бібліогр.: 8 назв.

УДК 517

ISBN 978-617-578-145-6

ВСТУП

Мета даного навчального посібника – допомогти студентам опанувати курс вищої математики. Особливо плідно видання може бути використане при самостійній роботі.

Кожний розділ посібника супроводжується короткими відомостями з теорії, наводяться типові задачі й методика їх розв’язання. Подається також ряд задач і прикладів для самостійного розв’язування. До всіх завдань є відповіді, у деяких випадках – необхідні вказівки.

Щоб забезпечити безперервну роботу над курсом протягом семестру, наводяться варіанти підсумкових завдань з кожного розділу. Є також питання для підготовки до модульного контролю.

Даний посібник є лише першою частиною запланованого авторами видання курсу вищої математики українською мовою. Він включає розділи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та в просторі, вступ до математичного аналізу.

Розділ лінійної алгебри містить поняття комплексного числа та дій над такими числами, основні відомості з теорії визначників і матриць, викладається теорія систем лінійних рівнянь.

У розділі векторної алгебри розглянуто основні положення векторного числення; лінійні операції над векторами: скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх зв’язок з конкретними фізичними явищами.

Розділ аналітичної геометрії присвячений всебічному вивченню прямих ліній на площині, площин і прямих ліній у просторі; ліній другого порядку: еліпса, гіперболи, параболи.

Досліджуються лінії, що визначаються в декартових координатах алгебраїчними рівняннями другого ступеня.

У розділі «Вступ до математичного аналізу» розглядаються властивості основних елементарних функцій, вводяться поняття границі та неперервності функцій, подається класифікація точок розриву функцій.

1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД ТАКИМИ ЧИСЛАМИ

Під комплексним числом будемо розуміти вираз $x+yi$, де x, y - дійсні числа, i - так звана уявна одиниця, що визначається рівністю $i=\sqrt{-1}$ або $i^2=-1$. Далі будемо позначати комплексне число $x+yi$ буквою z. Зазначену форму комплексного числа $z=x+yi$ називають алгебраїчною.

Число x прийнято називати дійсною частиною, а y – уявною частиною комплексного числа $z=x+yi$. Комплексне число, в якому дійсна частина $x=0$, тобто число yi, називають суто уявним.

Комплексні числа $z_1=x_1+y_1i$ і $z_2=x_2+y_2i$ вважаються рівними між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх дійсні та уявні частини. Тобто з рівності $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ безпосередньо випливає, що $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$. Зокрема, $x + yi = 0$ рівнозначне $x = 0$ і $y = 0$.

Слід зазначити, що порівняння нерівних комплексних чисел неможливе. Не можна, наприклад, сказати, яке з двох чисел більше: $2+3i$ чи $5-7i$, $2i$ чи $4i$ і т. ін.

Два комплексних числа, $z = x + yi$ і $\overline{z} = x - yi$, що відрізняються одне від одного тільки знаком при уявній частині, називають спряженими. Число, спряжене з комплексним числом z, позначають символом $\overline{z}$. Наприклад, комплексне число $z = 5+3i$ спряжене з комплексним числом $\overline{z} = 5-3i$. Дійсне число x, очевидно, є спряженим самому собі.

Комплексні числа $x + yi$ і $-x - yi$ називають протилежними.

Додавання, віднімання, множення та піднесення до степеня комплексних чисел, поданих в алгебраїчній формі, виконуються за правилами дій над многочленами. При цьому слід враховувати, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = -i$ і т. ін.

Очевидно, що за будь-якого натурального n:

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Віднімання, ділення та добування кореня виконуються як дії, обернені відповідно до додавання, множення та піднесення до степеня.

Зазначимо, що сума й добуток спряжених комплексних чисел є дійсні числа. Справді:

$$(x + yi) + (x - yi) = 2x;$$

$$(x + yi) + (x - yi) = x^2 + y^2.$$

Комплексне число $z = x + yi$ визначається парою дійсних чисел (x, y), тому його зручно зобразити точкою $M\,(x, y)$ площини $x0y$ або радіусом-вектором точки M: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.1).

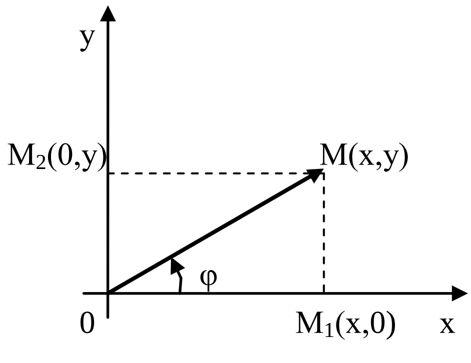


Рис. 1.1

Між множиною комплексних чисел і сукупністю точок (або векторів, що виходять з початку координат) площини існує взаємно однозначна відповідність: кожному комплексному числу відповідає одна, і тільки одна, точка площини (або радіус-вектор), і навпаки.

Зазначимо, що дійсні числа, і тільки вони, зображуються точками осі абсцис $0x$, тому цю вісь називають дійсною. Суто уявні числа yi, і тільки вони, зображуються точками осі ординат $0y$, тому цю вісь називають уявною.

Число $z = x + yi$ можна однозначно визначити не тільки прямокутними координатами x і y, а й полярними r і φ, тобто довжиною вектора $\vec{r}$ і кутом φ, який утворює вектор $\vec{r}$ з додатним напрямком осі $0x$.

У цьому випадку з трикутника OMM_1 (рис. 1.1) маємо:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \le r < \infty,$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{1.2}$$

Невід'ємне число r називають модулем комплексного числа z і позначають символом $|z|$. Кут φ називають аргументом комплексного числа z і позначають $\arg z$. Таким чином, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Застосувавши формули (1.1) до будь-якого відмінного від нуля комплексного числа $z = x + yi$, дістанемо:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.3}$$

Ця форма комплексного числа називається тригонометричною. Згідно з формулою (1.3) та Формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.4}$$

можна одержати так звану показникову форму комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Наприклад, $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Замінюючи у формулі (1.4) φ на $(-\varphi)$, одержимо:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{1.5}$$

Тоді з рівностей (1.4) і (1.5) випливає:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.6}$$

Формули (1.6) використовуються для вираження степенів $\cos\varphi$ *і* $\sin\varphi$, а також їх добутків через синус і косинус кратних дуг.

Слід зауважити, що додавати й віднімати комплексні числа простіше і зручніше, коли вони подані в алгебраїчній формі, а множити, ділити, підносити до степеня і добувати корінь простіше і зручніше, коли комплексні числа подані в тригонометричній і показниковій формах.

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, а $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \tag{1.7}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]; \tag{1.8}$$

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi); \tag{1.9}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n}\right); \tag{1.10}$$

$\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \quad n-1.$

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, а $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{(\varphi_1+\varphi_2)i};$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\phi_1-\phi_2)i};$$
$$z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n = r^n e^{in\phi};$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}i}, \quad \kappa = 0, 1, ..., \quad n-1.$$

Формули (1.9) і (1.10) називають формулами Муавра. За їх допомогою можна виводити тригонометричні формули для синусів і косинусів кратних кутів.

Так, розкладаючи ліву частину рівності (1.9) за формулою бінома Ньютона

$$\left(x+a\right)^m = m \cdot a \cdot x^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} a^2 x^{m-2} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m$$ і

прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержимо формули для $\sin n\varphi$ і $\cos n\varphi$ через степені $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$. Наприклад, при $n=3$ маємо

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Використовуючи тепер умову рівності двох комплексних чисел, одержимо :

$$\cos^3\varphi = \cos^3\varphi \cdot 3\cos\varphi \sin^2\varphi, \ \sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi + \sin\varphi.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $(3+5i)(4-i)$.

Розв'язання. За правилом множення двох многочленів $(3+5i)(4-i) = 12 + 20i - 3i - 5i^2 = 12 + 5 + (20-3)i = 17 + 17i$. Тут враховано, що $i^2 = -1$.

Приклад 2 Обчислити $\frac{3-i}{4+5i}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник на число $4-5i$, спряжене знаменнику, і виконаємо відповідні дії. Тоді

$$\frac{3-i}{4+5i} = \frac{(3-i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{12-4i-15i+5i^2}{16+25} = \frac{7-19i}{41} = \frac{7}{41} - \frac{19}{41}i.$$

Приклад 3 Знайти $(4-7i)^3$.

Розв'язання. Використовуючи формулу куба різниці двох чисел, одержимо $(4-7i)^3 = 64 - 3\cdot 16\cdot 7i + 3\cdot 4\cdot 49i^2 - 343i^3 = 64 - 336i + 588i^2 - 343i^3 =$ $64 - 336i + 588 - 343i = -524 + 7i,$ оскільки $i^2 = -1$, а $i^3 = i^2 \cdot i = -i.$

Приклад 4 Подати в тригонометричній формі число $z = 1 - i$.

Розв'язання. За формулами (1.2) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \arg z = arctg\,\frac{y}{x}$.

Маємо $x = 1,\ y = -1$, тому $r = \sqrt{1^2 + \left(-1^2\right)^2} = \sqrt{2}$,

$\varphi = arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = arctg(-1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, через те що φ - кут четвертої чверті, бо $x = 1 > 0$ і $y = -1 < 0$. Згідно з формулою (1.3), одержимо:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Примітка: дане число в тригонометричній функції можна записати ще й так: $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, бо $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$, а $\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$.

Приклад 5 Установити, чи рівні між собою комплексні числа $\sqrt{3} + i$ і $\left(2\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Запишемо число $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ в алгебраїчній формі. Для цього за формулами (1.1) знайдемо значення x та y:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Таким чином, $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$.

Отже, дані комплексні числа рівні між собою.

Зауваження. Можна було б число $\sqrt{3} + i$ подати в тригонометричній формі і переконатися в тому, що воно дорівнює числу $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Приклад 6 Знайти добуток комплексних чисел

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ і $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (1.7), маємо:

$$z_1 z_2 = 2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(0 + i\right) = 6i.$$

Приклад 7 Знайти частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. На підставі формули (1.8) дістанемо:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-5\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+i)=2i\,.$$

Приклад 8 Обчислити $(1+i)^6$.

Розв'язання. Подамо число $z=1+i$ в тригонометричній формі:

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тоді за формулою (1.9):

$$(1+i)^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6=\sqrt{2^6}\left(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}\right)=2^3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=8(0-i)=-8i$$

Зауважимо, що застосування безпосередньо формули бінома Ньютона призвело б до значно складніших обчислень.

Приклад 9 Знайти $\sqrt{-5-12\,i}$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{-5-12\,i}=x+iy$. Тоді $-5-12i=(x+iy)^2$, або $-5-12i=x^2-y^2+2xyi$. Звідси $\begin{cases} x^2-y^2=-5, \\ 2xy=-12. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $x=2, \quad y=-3$ або $x=-2, \quad y=3$. Тому $z_1=2-3i, \quad z_2=-2+3i$.

Отже, $\sqrt{-5-12\,i}=\pm(2-3i)$.

Як бачимо, добування кореня (навіть квадратного) з комплексного числа в алгебраїчній формі – операція досить складна. Тому, як уже зазначалося раніше, спочатку треба записати комплексне число в тригонометричній формі, а потім виконати цю дію.

Приклад 10 Знайти всі значення $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Розв'язання. Подамо комплексне число $z=-2+2i$ в тригонометричній формі. За формулами (1.2) $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\varphi=arctg\left(\frac{-2}{2}\right)=arctg(-1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, через те що φ - кут другої чверті, бо $x=-2<0$ і $y=2>0$.

За формулою (1.10):

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3}\right)$$

$\kappa=0,1,2$.

При $\kappa = 0$: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$.

При $\kappa = 1$: $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = -1{,}366 + 0{,}365i$.

При $\kappa = 2$: $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = 0{,}366 - 1{,}366i$.

Отже, кубічний корінь з комплексного числа $-2 + 2i$ має три різних значення: $1 + i$; $-1{,}366 + 0{,}365i$; $0{,}336 - 1{,}366i$.

Приклад 11 Подати через степені $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ вирази $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$.

Розв'язання. За формулою (1.9) при $r = 1$ одержимо

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Нехай $n = 2$. Тоді $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$,

або $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

Прирівнюючи дійсні та уявні частини цієї рівності, остаточно одержимо вже відомі формули тригонометрії:

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi,$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi.$$

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення комплексного числа.

2 Як визначається уявна одиниця?

3 Які комплексні числа називаються а) рівними;
б) спряженими;
в) протилежними?

4 Чи можна порівняти між собою нерівні комплексні числа?

5 Що є геометричним образом комплексного числа на площині?

6 Який вигляд має алгебраїчна, тригонометрична та показникові форми комплексного числа?

7 Які дії можна виконувати над комплексними числами?

8 За якими правилами виконуються дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі?

9 Запишіть і сформулюйте правила, за якими виконуються дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі.

10 Як виконати дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі?

11 Запишіть формули Ейлера. Коли їх використовують?

12 Чому дорівнює сума протилежних комплексних чисел?

13 Чому дорівнює сума і добуток взаємно спряжених комплексних чисел?

14 Чому дорівнюють модуль і аргумент комплексного нуля?

15 Чи можуть бути модулем комплексного числа одночасно числа r і $-r$?

16 Чи можуть бути аргументом комплексного числа одночасно кути φ і $-\varphi$?

17 Як зміняться модуль і аргумент комплексного числа в результаті ділення цього числа на а) i ; б) $-i$?

Вправи

1 Знайти дійсні значення x і y з рівнянь:

а) $(2x-13i)+(7y+2xi)=-17+3yi$; *б)* $\left(\frac{3}{4}x-2yi\right)-\left(\frac{1}{3}y+6xi\right)=21i$.

Відповідь: *а)* $x=2$, $y=-3$; *б)* $x=-2$, $y=-4{,}5$.

2 Знайти комплексне число z з рівняння $(2-3i)z=-1-5i$.

Відповідь: $1-i$.

3 Довести рівність $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$.

4 Подати в алгебраїчній формі число $4\left(\cos 30^0+i\sin 30^0\right)$.

Відповідь: $2\sqrt{3}+2i$.

5 Подати в тригонометричній формі числа: а) $-\sqrt{3-1}$; *б*) 3; *в*)$5i$.

Відповідь: *а)* $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; *б*) $3(\cos 0+i\sin 0)$; *в*)$5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

6 Піднести до куба число $z=2\left(\cos 20^0+i\sin 20^0\right)$.

Відповідь: $4+4\sqrt{3}i$

7 Піднести до 20-го степеня число $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8 Скласти квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, коренями якого є числа $x_1=5-i$; $x_2=5+i$.

Відповідь: $x^2-10x+26=0$.

9 Знайти всі значення коренів: *а)* $\sqrt[4]{i}$; *б*)$\sqrt[3]{1}$; *в)* $\sqrt{16\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)}$; *г*)$\sqrt[3]{1-\sqrt{3i}}$.

Відповідь: *а)* $z_1=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$; $z_2=\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$;

$z_3=\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$; $z_4=\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$;

б) $z_1 = 1;$ $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2};$ $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

в) $z_1 = 2\sqrt{3+2i;}$ $z_2 = -2\sqrt{3-2i;}$

г) $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right);$ $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right);$

$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right).$

10 Знайти модуль и аргумент комплексного числа $(1+3i)\cdot(2-i)$.

Відповідь: $r = 5\sqrt{2};$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

11 За якого дійсного значення α число $3i^3 - 2\alpha i^2 + (1-\alpha)i + 5$

а) дійсне; б) суто уявне; в) дорівнює нулю?

Відповідь: *а) -2; б) -2,5; в)* $\varnothing$.

12 Подати в показниковій формі числа: *а) -2; б) i; в)* $-1-\sqrt{3}i$

Відповідь*: а)* $2e^{\pi i}$*; б)* $e^{\frac{\pi i}{2}}$*; в)* $2e^{\frac{4\pi}{3}}$.

13 Подавши числа $z_1 = \sqrt{3+i}$ *і* $z_2 = 1-i$ в показниковій формі, знайти:

а) z_1^6*; б)* $z_1 z_2$*; в)* $\frac{z_1}{z_2}$*; г)* $\sqrt[3]{z_2}$.

Відповідь: *а)* $64e^{\pi i}$*; б)* $2\sqrt{2e^{\frac{23\pi}{12}}}$*; в)* $\sqrt{2e^{-\frac{19\pi}{12}}}$*; г)* $\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{k\pi}{4}+2k\pi}{10}}$, (к=0,1,2,3,4).

14 Виразити $\cos^3\gamma$ через косинуси кратних кутів.

Відповідь: $\frac{1}{4}(\cos 3\gamma + 3\cos\gamma)$.

Вказівка: на підставі формули (1.6) $\cos^3\gamma = \left(\frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2}\right)^3$. Після виконання дій у правій частині цієї рівності, повернутися до тригонометричних функцій.

2 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

2.1 Визначники

Визначником (детермінантом) називається вираз, складений за певним законом з n^2 елементів (чисел, функцій, векторів тощо) квадратної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначником n-го порядку, що відповідає цій матриці, називають алгебраїчну суму $n!$ доданків виду $\pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, кожен з яких є добутком

n елементів матриці А, узятих з кожного рядка і стовпця по одному. Знак добутку “+” або “–“ беруть залежно від того, парне чи непарне число інверсій (змін порядку) матиме перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, яку утворюють номери стовпців, коли номери рядків розташовані у порядку їх зростання. Позначають визначники так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

a_{ij} називають елементами визначника Δ. Для зручності вони позначаються буквою a з двома індексами, причому i означає номер рядка (горизонталі), j - номер стовпця (вертикалі), на перетині яких розташований елемент a_{ij}.

Згідно з означенням, визначник другого порядку

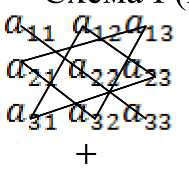
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}, \tag{2.1}$$

визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{23}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} \tag{2.2}$$

Для складання виразу (2.2) можна використати одну з наведених далі схем.

Схема І (правило Саррюса або правило трикутників):



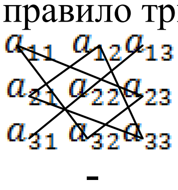
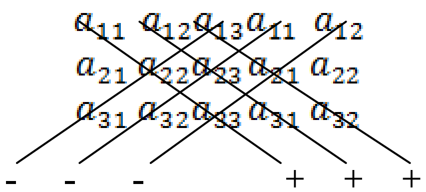
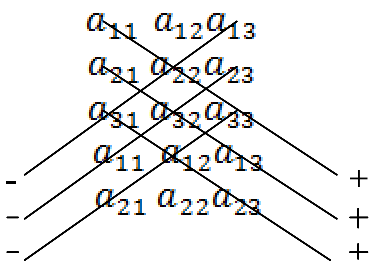


Схема 2 (правило діагоналей): Схема 3 (правило діагоналей):





Розв’язання прикладів

Приклад 1 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. За схемою 1 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 4 + 1\cdot 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1(-2) -$

$-(-2)\cdot(-2)\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 4 = -18$.

За схемою 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix} = 2\cdot(-2)\cdot 4 + 1\cdot 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1(-2) -$

$(-2)\cdot(-2)\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 4 = -18$.

За схемою 3

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} \end{array} = 2\cdot(-2)\cdot 4 + 1\cdot 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1(-2) - (-2)\cdot(-2)\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 4 = -18.$$

Зауваження. Визначники вищих порядків обчислюють зведенням їх до визначників нижчих порядків.

Властивості визначників

1 Величина визначника не зміниться, якщо всі його рядки змінити стовпцями з такими самими номерами, і навпаки, тобто :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 12 + 2 - 12 + 8 + 4 = -18.$

З цієї властивості випливає рівноправність рядків і стовпців визначника.

2 Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (два стовпці), то визначник змінить знак на протилежний, а його абсолютне значення не зміниться.

Це означає, наприклад, що

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо цю властивість на прикладі обчисленого вище визначника. Переставивши в ньому два перші стовпці, одержимо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4+12-8-12-2+16=18$$

3 Визначник, який має два однакові рядки / стовпці/, тобто ряди, відповідні елементи яких рівні між собою, дорівнює нулю. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2-12+12-2-2=0.$$

4 Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Дійсно:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8+6+1-4+2) = -18.$$

(обчислення цього визначника дивіться вище). Слід запам’ятати, що використання цієї властивості дає змогу спростити обчислення визначника, бо після винесення спільного множника елементів рядка (стовпця) за знак визначника, його елементи зменшуються.

5 Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник також дорівнює нулю. Пропонуємо читачеві переконатися в цьому самостійно.

6 Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорціональні, то визначник дорівнює нулю. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 12+24+3-24-12-3=0.$$

У цьому визначнику відповідні елементи другого та третього рядків пропорціональні.

7 Величина визначника не зміниться, якщо до елементів будь-якого його рядка (стовпця) додати відповідні елементи паралельного рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число.

Наприклад, додати до елементів третього стовпця даного визначника відповідні елементи другого стовпця, помножені на (-2). Тоді

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3+(-1)\cdot(-2) \\ 1 & -2 & 1+(-2)\cdot(-2) \\ -2 & 4 & 4+4\cdot(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 16+20+10-20-4-40 =$$

$$=-18$$

(обчислення даного визначника дивіться вище).

Використовуючи цю властивість, можна одержати максимальне число нульових елементів в будь-якому ряду (стовпці) визначника, після чого його обчислення значно спрощується.

Для прикладу обчислимо той самий визначник, виконавши попередньо такі перетворення: елементи другого рядка помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів третього рядка. Тоді

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -24+0+0-0+6-0=-18$$

Як бачимо, одержали такий самий результат.

8 Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника є сумами двох доданків, то цей визначник можна подати як суму двох визначників,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пропонуємо читачеві перевірити це самостійно на прикладі:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2+0 & 3+12 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Цю властивість можна узагальнити на випадок довільного числа доданків.

Перед тим як сформулювати наступну властивість визначників, введемо поняття мінору й алгебраїчного доповнення.

Мінором M_{ij} деякого елемента a_{ij} називають визначник, який дістають з даного визначника викреслюванням $i-$го рядка і $j-го$ стовпця, на перетині яких розташований цей елемент.

Наприклад, мінором елемента a_{32} визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} a_{13} \\ a_{21} & a_{22} a_{23} \\ a_{31} & a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \text{ є } M_{32}= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінором цього елемента, взятий зі знаком “+”, якщо сума номерів викреслених стовпця та рядка є число парне, і зі знаком “-“, якщо ця сума непарна, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Наприклад, алгебраїчним доповненням елемента a_{32} визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} a_{13} \\ a_{21} & a_{22} a_{23} \\ a_{31} & a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \text{ є } A_{32=}(-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

9 Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка/ стовпця/ на їх алгебраїчні доповнення. Наприклад, якщо

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} a_{13} \\ a_{21} & a_{22} a_{23} \\ a_{31} & a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то}$$

$\Delta= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$, $\Delta= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$,

$\Delta= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$, $\Delta= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}$,

$\Delta= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$, $\Delta= a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$,

що називають розкладанням визначника по елементах деякого рядка або деякого стовпця.

Таким чином, одержали ще один спосіб обчислення визначника. Зазначимо, що він буде широко використовуватись у векторній алгебрі.

Для прикладу обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix},$$

розклавши його по елементах другого стовпця.

На основі властивості 9 маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6-28+4=-18$$

Цей самий визначник обчислений вище іншими способами.

Зауваження1: Розкласти визначник можна по елементах будь-якого рядка (стовпця).

Зауваження 2: Властивість 9 дозволяє знизити порядок визначника на одиницю.

Слід зазначити, що властивості 1-9 справедливі для визначників будь-якого порядку.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix}$$

Розв'язання. на основі (2.1) маємо

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$$

Приклад 2 Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання. Розкриваючи визначник, дістаємо

$$\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 1 + 5 = x^2 + 4.$$

рівняння набуває вигляду $x^2 + 4 = 0$. Його розв"язки : $x_{1,2} = \pm 2i$.

Приклад 3 Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$

Розв'язання. Після обчислення визначника одержимо $2x^2 - 12x < 14$ або $x^2 - 6x - 7 < 0$. Розкладемо ліву частину другої нерівності на множники: $(x+1)(x-7)<0$. Для одержання розв'язків цієї нерівності застосуємо метод інтервалів (рис.2.1).

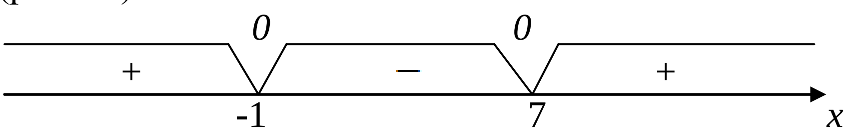


Рис.2.1

Таким чином, розв'язки нерівності такі: $x \in (-1;7)$. Вони будуть і розв'язками вихідної нерівності.

Приклад 4 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$

Розв'язання: Згідно з означенням (2.2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 60 + 0 - 5 - 0 - 0 + 32 = 87.$$

Приклад 5 Не розкриваючи визначників, довести справедливість рівності

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використаємо властивість 7, для чого елементи першого стовпця визначника, що стоїть у лівій частині рівності, помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Тепер помножимо елементи першого стовпця одержаного визначника на -3 додамо до відповідних елементів третього стовпця, в результаті чого одержимо визначник, який стоїть у правій частині вихідної рівності:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Рівність доведено.

Приклад 6 Обчислити визначник четвертого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, розклавши його по елементах третього рядка.

Розв'язання: У силу властивості 9 маємо:

$$\Delta = 4 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + (-3) \cdot A_{33} + 5A_{34} = 4(-1)^{3+1} \cdot M_{31} + (-3) \cdot (-1)^{3+3} M_{33} + 5(-1)^{3+1} M_{34} =$$
$$= 4 \cdot 11 - 3 \cdot 21 - 5(-17) = 66.$$

Приклад 7 Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Розкладемо визначник по елементах першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

За рахунок нулів одержали, що вихідний визначник четвертого порядку дорівнює добутку відмінного від нуля елемента на його алгебраїчне доповнення. Одержаний визначник третього порядку знову розкладемо за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Отже, $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 = 30.$

Зауваження: у розглянутому визначнику всі елементи, які містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Визначники, які мають таку властивість, називаються трикутними. Величина трикутного визначника дорівнює добутку його діагональних елементів.

Приклад 8 Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Спираючись на приклад 7 маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & -16 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -6 & -4 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

Слід зауважити, що нульові елементи можна було б одержати в будь-якому рядку або стовпці визначника.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення визначників другого та третього порядку.

2 Пригадайте всі способи обчислення визначників третього порядку.

3 Які перетворення не змінюють величину визначника?

4 За яких умов визначник може дорівнювати нулю?

5 Яке перетворення змінює лише знак визначника?

6 Що називають мінором деякого елемента визначника?

7 Що називають алгебраїчним доповненням деякого елемента визначника?

8 Розкладіть визначник третього порядку:

а) по елементах першого рядка;

б) по елементах третього стовпця.

Вправи

1 Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+1 & в-c \\ a^2+a & ав-ac \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 18; б) 10; в) 0; г) 0.

2 Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; б) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$;

г) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

Відповідь: а) $x_1 = -\frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{3}{2}$; б) $x_1 = 2$; $x_{2,3} = -2 \pm i$; в) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in Z$; г) $x = \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \in Z$.

3 Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} 2x-3 & -1 \\ 7 & 2x \end{vmatrix} \le 11$.

Відповідь: а) $x > 3$; б) $-0{,}5 \le x \le 2$.

4 Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & ctg\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ ctg\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 0; б) 87; в) 8; г) ab; д) $\sin 2\alpha$.

5 Обчислити визначник третього порядку

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$, розкривши його по елементах а) третього рядка; б) першого стовпця.

Відповідь: 2.

6 Спростити вирази:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) $\cos(\alpha+\beta)$; б) $\sin(\alpha+\beta)$; в) 0.

2.2 Системи лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.3}$$

де відомі a_{ij} - коефіцієнти, b_i - вільні члени, x_j - невідомі, $i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$.

Розв'язати систему означає, що треба знайти упорядковану сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ таким чином, щоб при заміні $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ на ці числа система перетворилась на тотожність.

Серед існуючих способів розв'язку такої системи є правило Крамера.

Правило Крамера для розв'язання системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Система n лінійних рівнянь з n невідомими має один і лише один розв'язок, якщо головний визначник (детермінант) матриці А не дорівнює нулю,і $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, i = \overline{1,n}$, де Δ - головний визначник матриці А, Δx_i - визначник, який одержуємо із Δ шляхом заміни коефіцієнтів невідомого, що визначається, на стовпець вільних членів.

Наприклад, для $n = 3$ система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \tag{2.5}$$

Розглянемо тепер систему двох рівнянь з двома невідомими *x* та *y*:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{12}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Нехай в системі $b_1 = b_2 = 0$. Така система називається однорідною. Якщо $\Delta \neq 0$, однорідна система має єдиний нульовий розв'язок, якщо $\Delta = 0$, то система має безліч відмінних від нуля розв'язків.

Розглянемо тепер систему двох однорідних рівнянь з трьома невідомими *x, y* та *z*:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Складемо таблицю із коефіцієнтів при невідомих

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Введемо такі позначення:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо хоча б один з одержаних визначників відмінний від нуля,то всі розв’язки системи знаходимо за формулами:

$$\begin{cases} x = \Delta_1 \cdot t, \\ y = -\Delta_2 \cdot t, \\ z = \Delta_3 \cdot t, \end{cases} \tag{2.7}$$

де t — довільне число.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$

методом Крамера;

Розв’язання. Для розв’язання системи за правилом Крамера треба обчислити визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 16 = 31, \; \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 23 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 69 + 24 = 93, \; \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 60 - 184 = -124.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{93}{31} = 3, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{-124}{31} = -4.$

Приклад 2 Знайти всі розв’язки системи $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

Розв’язання. Складемо таблицю з коефіцієнтів при невідомих

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначники $\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$, які одержимо викреслюванням в таблиці відповідно першого, другого та третього стовпців:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Тепер за формулами (2.5) знаходимо всі розв’язки вихідної системи:

$x = -4t; \quad y = 14t; \quad z = 8t,$ або $x = -2t; \quad y = 7t; \quad z = 4t,$ t - довільне число.

Приклад 3 Знайти всі розв’язки системи $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$

Розв’язання. Складемо таблицю з коефіцієнтів при невідомих
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначники $\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$, які одержимо викреслюванням в таблиці відповідно першого, другого та третього стовпців:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Тепер за формулами (2.5) знаходимо всі розв’язки вихідної системи:
$x=2t; \quad y=5t; \quad z=4t, \quad t$ - довільне число.

Приклад 4 Установити, що система лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=3 \end{cases}$

має єдиний розв’язок і знайти його.

Розв‘язання. а) Для розв’язання системи за правилом Крамера треба обчислити визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4,$$

Оскільки $-4 \neq 0$, то система має єдиний розв’язок.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14-(-18)) = -4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45-(-49)) = -4.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1.$

Перевірка: $\begin{cases} 3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2, \\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1, \\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2=2, \\ 1=1, \\ 3=3. \end{cases}$

Зауваження. якщо робиться перевірка СЛАР, обов'язково треба перевіряти всі рівняння.

Отже, єдиний розв'язок системи: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Приклад 5 Розв'язати систему $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Визначник системи

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 3 - 2 + 18 - 2 = 0.$ Обчислимо визначник Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 3 - 9 - 6 - 18 + 2 = 0.$$

Через те, що $\Delta = 0$, а $\Delta_x = -20 \neq 0$, система не має розв'язку.

Питання для самоперевірки

1 Яку систему називають лінійною?
2 Що називається визначником системи?
3 Запишіть неоднорідну систему двох рівнянь з двома невідомими.
4 Запишіть неоднорідну систему трьох рівнянь з трьома невідомими.
5 Запишіть формули Крамера.
6 Як складаються визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z?
7За яких умов неоднорідна система двох (трьох) рівнянь з двома (трьома) невідомими має а) єдиний розв'язок; б) безліч розв'язків; в) не має жодного розв'язку?
8 В яких випадках система лінійних рівнянь є а) сумісною, б) несумісною?
9 Що означають поняття : а) сумісна система; б) несумісна система; в) невизначена система?
10 Який вигляд має система двох однорідних рівнянь з трьома невідомими? Запишіть формули, за якими знаходяться розв'язки такої системи.

Вправи

1 Знайти всі розв'язки систем:

а) $\begin{cases} 5y - 4x = 1, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x - 9y + 3z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 6x - 4y + 3z = 0. \end{cases}$

Відповідь: а) $x=2,\ y=3$; б)) $x=0,\ y=t,\ z=3t$; в) $x=2t,\ y=3t,\ z=0$.

2 Установити, що система має єдиний розв'язок і знайти його.

$$\text{а)}\ \begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$$

Відповідь: а) $x=y=z=1$; б)) $x=1,\ y=3,\ z=5$.

3 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x-3y-6=0, \\ 4x-6y-5=0. \end{cases}$

Відповідь: Система не має розв'язку.

4 За яких значень a та b неоднорідна система $\begin{cases} 3x-ay=1, \\ 6x+4y=b \end{cases}$ двох рівнянь з двома невідомими має а) єдиний розв'язок; б) безліч розв'язків; в) не має жодного розв'язку?

Відповідь: а) $a\neq -2$; б) $a=-2, b=2$; в) $a=-2, b\neq 2$.

5 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1-2x_2-2x_3=-3. \end{cases}$

Відповідь: Система не має розв'язку.

6 Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-2. \end{cases}$

Відповідь: Система має безліч розв'язків, які можна одержати за формулами: $x_1=2x_3-1,\quad x_2=x_3+1$. Числові значення x_3 задаються довільно.

7 Знайти всі розв'язки систем рівнянь а) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=4, \\ 4x_1+x_2+x_3=5; \end{cases}$

$$\text{б)}\ \begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3, \\ x_1-5x_2+3x_3=-1, \\ x_1-x_2+x_3=1; \end{cases} \quad \text{в)}\ \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+3x_3=8. \end{cases}$$

Відповідь: а) Система несумісна; б) $x_1=2,\quad x_2=0,\quad x_3=-1$;
в) $x_1=\dfrac{1}{2}(5-x_3),\quad x_2=\dfrac{1}{2}(2x_3-1)$. Числові значення x_3 задаються довільно.

8 Знайти всі розв'язки однорідних систем рівнянь:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: а) система має безліч розв'язків, які можна одержати за формулами: $x_1 = x_2 = x_3 = t$, б) система має безліч розв'язків, які можна одержати за формулами: $x_1 = 2x_3 - 3x_2$. Числові значення x_2, x_3 задаються довільно.

2.3 Матриці та дії над ними

Матрицею називають систему елементів (зокрема, чисел), розміщених у певному порядку і утворюючих таблицю.

Матриці прийнято позначати великими буквами, а їх елементи, для зручності, – малими буквами з двома індексами (перший – номер рядка, другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент). Наприклад, якщо матриця A складена з mn елементів, розміщених в m рядків і n стовпців, то її позначають символом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{mn} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

при цьому кажуть, то матриця A розміру $m \times n$.

Елемент в i -му рядку j -му стовпці матриці A позначають a_{ij}.

Коротко цю саму матрицю можна записати так:

$$A = (a_{ij}), \quad (i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n).$$

Матрицю, в якій число рядків не дорівнює числу її стовпців $(m \neq n)$, називають прямокутною. Якщо $m = n$, то матрицю називають квадратною, а число n - порядком матриці.

Скорочено квадратну матрицю n -го порядку можна записати так:

$$A = (a_{ij}), \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n \qquad).$$

Наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ — прямокутна розміру 2×3,

а $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ — квадратна матриця другого порядку (або розміру 2×2).

Визначник, складений з елементів квадратної матриці, називається визначником цієї матриці і позначаться $det\,A$ або $|A|$.

Якщо визначник квадратної матриці відмінний від нуля, то її називають неособливою. Квадратну матрицю, визначник якої дорівнює нулю, називають особливою.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають нульовою.

Квадратна матриця, діагональні елементи якої $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ відмінні від нуля, а всі інші дорівнюють нулю, називається діагональною. Ця матриця має такий вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називається одиничною. Позначають її буквою *E*. Наприклад, одинична матриця третього порядку

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mn} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

замінимо рядки стовпцями з тими самими номерами, то одержимо нову мат рицю, що називається транспонованою і позначається A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{mn} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2x3,}$$, тоді транспонована матриця $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3x2,}.$$

Якщо скласти матрицю з алгебраїчних доповнень всіх елементів квадратної матриці $A = (a_{ij})$, $(i,\ j = 1,\ 2;\ \cdots n)$ і транспонувати її, то можна одержати нову матрицю, яку називають союзною, або приєднаною, і позначають $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці лише один рядок, то вона називається матрицею — рядком. Якщо в матриці лише один стовпець, — матрицею-стовпцем. Наприклад, матриця-рядок $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{1x4}$, матриця-стовпець $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{2x1}$.

Дві матриці, A і B , називаються рівними між собою ($A=B$), якщо вони мають однаковий розмір і їх відповідні елементи рівні між собою.

Сумою двох матриць, $A = (a_{ij})$, і $B = (b_{ij})$ одного і того самого розміру $m \times n$ є нова матриця $C = (c_{ij})$, того ж самого розміру, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B.

За визначенням, із $A+B=C$ випливає, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(i = 1,2,\cdots,m;\quad j = 1,2,\cdots n)$.

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}_{2x2} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 0-4 & -3+7 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

Зауважимо, що мають місце рівності:

$A+B=B+A$;

$(A+B)+C=A+(B+C);$

$A+0=A.$

Віднімання матриць одного і того самого розміру визначається як дія, обернена додаванню, тобто $A\text{-}C=A+(-C)$.

Якщо $A-B=D$, $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $(i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,n)$.

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -2-7 & 5+3 \\ 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на число λ або числа λ на мат рицю A є нова матриця того самого розміру, кожний елемент якої до рівнює добутку відповідного елемента матриці A на число λ, тобто $A\cdot\lambda=\lambda\cdot A=(\lambda a_{ij})$.

Справедливі рівності:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,$$
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu B,$$
$$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A.$$

Наприклад:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{2z2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m\times n$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $n\times s$ називають матрицю $C=c_{ij}$ розміру $m\times s$, елементи якої визначаються рівностями:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},(i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,s).$$

Таким чином, щоб дістати елемент c_{ij} матриці $C=AB$, слід елементи i-го рядка матриці A помножити на відповідні елементи j-го стовпця матриці B і знайдені добутки додати.

Зазначимо, що добуток AB двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

Якщо розмір матриці A дорівнює $m \times n$, а розмір матриці B дорівнює $n \times s$, то матриця AB матиме розмір $m\times s$. Символічно це можна записати так:

$$(m\times n)\cdot(n\times s)=(m\times s).$$

Зазначимо також, що дуже важливо зберігати вказаний порядок множення, бо, взагалі кажучи, $AB\neq BA$, тобто множення матриць не комутативне навіть тоді, коли обидва добутки AB і BA, існують.

Знайдемо, наприклад, AB і BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Матриця A розміру 2×3, матриця B розміру 3×2. Добуток $A\ B$ існує і є матрицею розміру 2×2.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-3)+3\cdot 0 & 1\cdot 4+2\cdot 1+3\cdot 2\\ -1\cdot 2+0\cdot(-3)+1\cdot 0 & -1\cdot 4+0\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 12\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

Добуток $B\ A$ існує і є матрицею розміру 3×3.

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+4\cdot(-1) & 2\cdot 2+4+0 & 2\cdot 2+4\cdot 1\\ -3\cdot 1+1\cdot(-1) & -3\cdot 2+1\cdot 0 & -3\cdot 3+1\cdot 1\\ 0\cdot 1+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+2\cdot 0 & 0\cdot 3+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\\ -4 & -6 & -8\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Очевидно, що $AB\neq BA$.

Операція множення матриць має такі властивості:

1) $A(BC)=(AB)C$ - асоціативність;

2) $\left.\begin{aligned}A(B+C)&=AB+AC\\ (B+A)C&=BA+CA\end{aligned}\right\}$ - дистрибутивність;

3) $(\alpha A)B=A(\alpha B)=\alpha(A+B)$, де α - довільне число.

Треба мати на увазі, що розміри матриць тут такі, що і ліва, і права частини написаних рівностей мають смисл.

Якщо A — квадратна матриця, то оберненою до неї буде матриця того самого порядку, яка позначається A^{-1} і задовольняє умові $AA^{-1}=E$.

Слід зазначити, що квадратна матриця A і обернена до неї A^{-1} комутативні, тобто $AA^{-1} = AA^{-1} = E$.

Матриця, обернена до матриці A, існує тоді й тільки тоді, коли $\Delta = \det A \neq 0$, тобто коли матриця A неособлива.

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\hat{A} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

де A_{ij} алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти матрицю

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи правила множення матриць на число додавання матриць, дістанемо

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 10+12 & 4-15 \\ 6-3 & 14-3 \\ -8-6 & 10+0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Приклад 2 Знайти добуток $A\,B$, якщо $A = (3\ 2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Матриця A має розмір 1×2, матриця B має розмір 2×1, тому добуток $A\,B$ існує і в матрицею розміру 1×1.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(3\cdot 1 + 2\cdot(-1)\right) = (1).$$

Приклад 3 Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}_{2\times2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}8 & 9\\ 9 & 15\end{pmatrix}_{2\times2}$,

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}_{2\times2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 21\end{pmatrix}_{2\times2}.$$

Ще раз переконуємося в тому, що $AB\neq BA$.

Приклад 4 Знайти добуток ABC, якщо $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задані матриці мають розмір 2×2, тому їх можна перемножити, причому одержимо матрицю того самого розміру. Помножимо спочатку A на B:

$$AB=\begin{pmatrix}4\cdot(-28)+3\cdot38 & 4\cdot93+3\cdot(-126)\\ 7\cdot(-28)+5\cdot38 & 7\cdot93+5\cdot(-126)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -6 & 21\end{pmatrix}.$$

Тепер помножимо одержану матрицю на матрицю C:

$$ABC=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -6 & 21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot7+(-6)\cdot2 & 2\cdot3+(-6)\cdot1\\ -6\cdot7+21\cdot2 & (-6)\cdot3+21\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Приклад 5 Знайти матрицю $C=B-2A^T$, якщо $A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 10 & -5\\ 3 & 16\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Маємо,

$$A^T=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 5 & -3\\ 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Тоді $C=B-2A^T=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 10 & -5\\ 3 & 16\end{pmatrix}_{3\times2}-2\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 5 & -3\\ 1 & 8\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}_{3\times2}$.

Приклад 6 Знайти x і y з рівняння

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 11\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо множення в лівій частині рівняння:

$$\begin{pmatrix} -x+2y \\ 3x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

На основі рівності двох матриць

$$\begin{cases} -x+2y=0, \\ 3x+5y=11. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо $x=2$ і $y=1$.

Приклад 7 Довести, що матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ обернена до матриці } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Покажемо, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1+4 & 4-1-3 & -2+1+1 \\ -6+2+4 & 6-2-4 & -3+2+1 \\ -2+2+0 & 2-2+0 & -1+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+6-1 & -2+4-2 & -2+2+0 \\ 2-3+1 & 1-2+2 & 1-1+0 \\ 8-9+1 & 4-5+2 & 4-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Таким чином, матриці A і A^{-1} взаємно обернені.

Приклад 8 Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

.

Через те що $\det A = -2 \neq 0$, матриця A неособлива і має обернену.

Щоб скласти цю матрицю, знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4;$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1;$

На основі формули (2.8):

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 9 Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо обернену матрицю системи:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta = -4.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1/4 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називають матрицею?
2 Як визначити розмір матриці?
3 Які види матриць ви знаєте?
4 Яка матриця називається транспонованою?
5 Як скласти союзну матрицю?
6 Сформулюйте правило додавання матриць, віднімання матриць, множення матриці на число.
7 За яким правилом виконується множення двох матриць?
8 Яку матрицю називають оберненою до даної? Чи завжди вона існує?
9 За якою формулою знаходиться обернена матриця?
10 Сформулюйте умову існування оберненої матриці.

Вправи

1 Виконати дії:

а) $3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $(1 \quad 3 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь:

а) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) Виконати множення не можна;

в) $(-2 \quad 18)$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 12 & -13 & 11 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2 Знайти x і y з рівняння

$$(x \quad y)\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (5 \quad 3).$$

Відповідь: $x = \frac{7}{13}$; $y = \frac{15}{13}$.

3 З добутку $(-3 \quad 2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = (3 - 7)$ знайти матрицю $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Знайти союзну матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, і перевірити, що $AA^{-1}=A^{-1}A=E.$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -9 & 1\\ -11 & 5 & 2\\ -2 & 0 & -8\end{pmatrix}$.

6 Довести, що матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 9 & 2 & -1\end{pmatrix}$ і $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -1\\ 2 & -9 & 2\\ -5 & 28 & -6\end{pmatrix}$ взаємно обернені.

7 Знайти матрицю $D=2A+BC-A^2$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-7 & 10\\ 32 & 2\end{pmatrix}$

8 Переконатися в тому, що далі наведені матраці не комутативні:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 8\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $AB=\begin{pmatrix}20 & 20 & 4\\ 26 & 36 & 22\\ 15 & 26 & -3\end{pmatrix}$, $\qquad BA=\begin{pmatrix}24 & 17 & 21\\ 24 & 6 & 30\\ 16 & 23 & 23\end{pmatrix}$,

9 Перевірити асоціативний закон множення матриць на прикладі матриць

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ -4 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

10 Дано матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$

Перевірити виконання таких алгебраїчних законів:

1) $(A+B)C=AC+BC;$

2) $A(B+C)=AB+AC:$

3) $A(BC)=(AB)C.$

2.4 Матричний запис системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі

Нехай дано прямокутну матрицю розміру $m \times n$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{mn} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Візьмемо в ній k довільних рядків і k довільних стовпців.

Визначник k — го порядку, складений з k^2 елементів матриці A , розташованих на перетині виділених рядків і стовпців, називають мінором k -го порядку матриці A.

Зауважимо, що самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку.

Рангом матриці називають найбільший порядок її мінору, відмінного від нуля.

Із цього означення випливає, що матриця A має ранг, що дорівнює r, якщо серед її мінорів порядку r є хоча б один відмінний від нуля, а всі мінори матриці вищого порядку, ніж r , дорівнюють нулю.

Наприклад, у матриці

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ мінор третього порядку $\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 4\end{vmatrix}=-1\neq 0$, а мінорів четвертого порядку і вищих в матриці A немає. Тому ранг матриці A дорівнює трьом.

Ранг матриці A позначають *rangA*, або *r(A).*

Ранг матриці обчислюється або способом окантування мінорів, або способом зведення метриці до діагональної.

Суть способу окантування мінорів полягає в тому, що, коли знайдено мінор M k- го порядку, відмінний від нуля, то далі досить роз глянути лише ті мінори ($k+1$) - го порядку, які окантовують мінор M. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Обчислюючи ранг матриці способом окантування мінорів, слід переходити від мінорів нижчих порядків до мінорів вищих порядків.

Наприклад, знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

способом окантування мінорів. Для цього обчислимо спочатку мінор другого порядку, розташований в правому верхньому куті цієї матриці:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Мінор третього порядку, що окантовує його:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 1 - 18 = -33 \neq 0.$$

Мінори четвертого порядку, які окантовують мінор M_3

$$M'_4 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -18 & 13 & -4 & 2 \\ 13 & -10 & 3 & 1 \\ -23 & 16 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 13 & 2 \\ 13 & -10 & 1 \\ 23 & 16 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -44 & 33 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 66 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -44 & 33 \\ -88 & 66 \end{vmatrix} = 0 \text{ (властивість 6).}$$

$$M''_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

(властивість 3).

Мінорів п’ятого порядку і вищих матриця A не має, тому її ранг дорівнює трьом.

Таким чином, $rang A=3$

Суть другого способу полягає в тому, що з допомогою елементарних перетворень матриці зводимо її до діагональної. При цьому ранг матриці не змінюється.

Під елементарними перетвореннями матриці розуміють:

1 заміну рядків стовпцями, а стовпців - відповідними рядками;

2 переставлення двох будь-яких рядків (стовпців);

3 викреслення рядка (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю;

4 множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на одне й те саме число, відмінне від нуля;

5 додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на довільне число.

Дві матриці називають еквівалентними, якщо від кожної з них можна перейти до другої з допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Еквівалентні матриці мають однакові ранги.

Еквівалентність матриць позначають так: $A \sim B$

Зауважимо, що будь-яку матрицю шляхом елементарних перетворень можна привести до діагональної форми. Підрахувавши в такій матриці число відмінних від нуля елементів, розташованих на головній діагоналі, одержимо ранг даної матриці.

Знайдемо ранг тієї самої матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

що й в попередньому прикладі, але способом зведення її до діагональної.

Для цього виконаємо такі елементарні перетворення:

1 поміняємо місцями перший і другий рядки;

2 спочатку елементи першого рядка помножимо на -2 і додамо до відповідних елементів другого рядка; потім елементи першого рядка по множимо на -4 і додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

3 помножимо елементи першого стовпця по черзі на 2, -1, 4, -2 і додамо відповідно до елементів другого, третього, четвертого і п’ятого стовпців;

4 розділимо елементи четвертого стовпця на 3;

5 поміняємо місцями другий і четвертий рядки;

6 віднімемо від елементів другого рядка відповідні елементи третього рядка;

7 спочатку помножимо елементи другого рядка на -4 і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця; потім елементи другого стовпця помножимо на 3 і додамо до відповідних елементів п’ятого стовпця;

8 віднімемо від елементів третього рядка відповідні елементи четвертого рядка;

9 спочатку помножимо елементи третього стовпця на (-3) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця; потім елементи третього стовпця помножимо на 4 і додамо до відповідних елементів п’ятого стовпця.

Всі елементарні перетворення, які ми виконали, зручно записати так:

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-2&1&4&0\\1&-4&3&1&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-4&3\\0&0&1&9&-4\\0&1&-1&3&1\\0&1&0&12&3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&9&-4\\0&1&-1&3&1\\0&1&0&12&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&3&-4\\0&1&-1&1&1\\0&1&0&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&4&-3\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&4&-3\\0&0&1&3&-4\\0&0&1&3&-4\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&3&-4\\0&0&1&3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&3&-4\\0&0&1&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Через те що на головній діагоналі одержаної матриці лише три елементи відмінні від нуля, то її ранг дорівнює трьом, а тому і ранг даної матриці A також дорівнює трьом, бо ці матриці еквівалентні.

Отже, $rangA=3$.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_{11}+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=C_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=C_2,\\a_{nq}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=C_n.\end{cases}\tag{2.9}$$

Введемо:

матрицю коефіцієнтів системи

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{nn}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

яка називається основною матрицею системи або просто - матрицею сис теми; матрицю-стовпець невідомих

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_n\end{pmatrix},$$

матрицю-стовпець вільних членів

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Систему (2.9) в матричній формі можна записати

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ або коротко: } AX = C. \qquad (2.10)$$

Її розв'язок $X = A^{-1}C$, де A^{-1} - матриця, обернена до матриці A системи (2.9).

Розглянемо тепер довільну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = C_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = C_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = C_m, \end{cases} \qquad (2.11)$$

в якій число рівнянь не дорівнює числу невідомих.

Умови сумісності такої системи (зокрема і системи (2.9)) вирішуються з допомогою теореми Кронекера – Капеллі.

Перед тим, як нагадати цю теорему, введемо для системи (2.11) основну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і розширену матрицю } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix},$$

яка утворюється з матриці A шляхом приєднання до неї стовпця вільних членів.

Теорема Кронекера - Капеллі твердить, що, коли ранг матриці A системи лінійних рівнянь дорівнює рангу розширеної матриці B, то система сумісна. При цьому:

якщо $rangA = rangB = n$ (число невідомих), то система має єдиний розв'язок;

якщо $rangA = rangB < n$ система має безліч розв'язків.

Очевидно, що коли $rangA \neq rangB$, то система не сумісна, тобто не має жодного розв'язку.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 За теоремою Кронекера - Капеллі дослідити систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

і у випадку її сумісності знайти всі розв'язки матричним способом.

Розв’язання. Складемо матрицю системи

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ і розширену матрицю $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо ранги цих матриць способом окантування мінорів. Мінор другого порядку, розташований в лівому верхньому куту мат риці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Мінор третього порядку, що окантовує його:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

Мінорів вищого порядку матриця A не має. Тому $rangA = 3$.

Через те що для матриці B не можна скласти мінору четвертого порядку (матриця B має лише три рядки), то її ранг також дорівнює трьом.

Таким чином, $rangA=rangB=n=3$ і дорівнює числу невідомих, отже, згідно з теоремою Кронекера - Капеллі, система має єдиний розв’язок. Знайдемо його матричним способом. У матричній формі дану систему можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3x1},$$

або коротко $AX = C$, звідки $X = A^{-1}C$, де A^{-1} −матриця, обернена до матриці A.

Обернена матриця A^{-1} існує, бо $\Delta = \det A = -8 \neq 0$ (обчислення дивіться вище).

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4+1) = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2+4) = -2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=-12+5=-7,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(6-1)=-5,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}=-10+4=-6.$$

За формулою (2.8)

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо шуканий розв'язок

$$X=AC^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}_{3\times1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2+6+7\\ 2+2+5\\ 4-4+6\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/8\\ -9/8\\ -3/4\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=-11/8;$ $x_2=-9/8;$ $x_3=-3/4;$

Приклад 2 Дослідити систему

$$\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3.\end{cases}$$

за теоремою Кронекера – Капеллі і у випадку сумісності розв'язати її.

Розв'язання. Знайдемо ранги матриці системи

$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & 4\\ 7 & -4 & 1 & 3\\ 5 & 7 & -4 & -6\end{pmatrix}$ і розширеної матриці $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3\end{pmatrix}$.

Мінор $\begin{vmatrix}3 & -5\\ 7 & -4\end{vmatrix}=23\neq 0.$ Мінори третього порядку, які його окантовують, дорівнюють нулю. Дійсно, $\begin{vmatrix}3 & -5 & 4\\ 7 & -4 & 3\\ 5 & 7 & -6\end{vmatrix}=72+196-75+80-63-210=0.$ Тому *rangA=2*.

Для знаходження рангу матриці B досить обчислити лише один мінор третього порядку

$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$, який окантовує мінор $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$, бо всі інші вже знайдені і дорівнюють нулю.

Отже, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, а тому *rangB=3*.

Через те *rangA* ≠ *rangB*, завдана система несумісна.

Приклад 3 Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця системи

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, розширена матриця $B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$, знайдемо ранг матриці *A*.

Мінор другого порядку, розташований у правому верхньому кутку матриці: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Мінори третього порядку, які окантовують його, дорівнюють нулю. Справді,

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (властивість 6), $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (властивість 3),

Отже, *rang A=2.*Знайдемо тепер ранг матриці *B*. Для цього досить обчислити ще один мінор третього порядку, а саме $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, який також дорівнюй нулю за властивістю 3 визначників.

Таким чином, всі мінори третього порядку матриці , які окантовують мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнюють нулю, а мінорів вищого порядку матриця *B* не має. Тому *rang B=2.* Через те що *rangA= rangB* =2<4 (число невідомих), то згідно з теоремою Кронекера - Капеллі, система має безліч розв'язків. Знайдемо їх. Оскільки в системі лише два незалежних рівняння (ранги матриць дорівнюють двом), то одне з них можна відкинути, на приклад третє, і розв’язати одержану систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \\ x_1 - 2x_3 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Будемо вважати невідомими x_3 і x_4, бо визначник другого порядку, складений з коефіцієнтів при x_3 і x_4, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ і виразимо через них x_1 і x_2. Для цього від першого рівняння віднімемо друге, що дасть $2x_4 = 2$, звідки $x_4 = 1$.

Тепер з першого рівняння системи одержимо $x_3 = 2x_2 - x_1$.

Таким чином, шукані розв’язки системи $x_3 = 2x_2 - x_1$, $x_4 = 1$, де x_1 і x_2 — довільні числа.

Приклад 4 Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -14, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв’язання. Обчислення показують, що *rangA*= *rangB* =3 (пропонуємо перевірити це самостійно). Отже, система сумісна.

З даних чотирьох рівнянь добираємо три лінійно незалежних.
Для цього в матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

знаходимо відмінний від нуля мінор третього порядку. Таким мінором є, наприклад, визначник, який складається з другого, третього та четвер того рядків. Отже, перше рівняння системи в лінійною комбінацією інших, і його можна відкинути.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Її визначник $\Delta = -5 \neq 0$, а тому розв'язуючи систему за формулами Крамера або матричним способом знаходимо єдиний розв'язок (*1; —1;2*), який задовольняє і першому рівнянню даної системи, в чому легко упевнитися безпосередньою перевіркою.

Отже, при розв'язуванні довільної системи лінійних рівнянь треба додержуватися такого порядку.

1 Знайти значення *r(A)* і *r(B)*; встановити сумісність системи.

2 Якщо система сумісна *(r(A)=r(B) =r)*, то вибрати в матриці *A* відмінний від нуля мінор *r* -го порядку. Цей мінор визначає ви бір лінійно незалежних рівнянь і вільних невідомих. Решту рівнянь відкинути.

3 Перенести вільні невідомі у праву частину рівнянь.

4 Розв'язати одержану систему за формулами Крамера, тобто знайти загальний розв'язок системи.

5 Якщо буде потрібно, знайти частинні розв'язки системи.

Питання для самоперевірки

1 Як утворюється мінор *к* -го порядку прямокутної матриці?

2 Що називають рангом матриці?

3 Способи обчислення рангу матриці.

4 У чому полягає спосіб окантування мінорів?

5 Які перетворення матриці називають елементарними?

6 Які матриці називаються еквівалентними?

7 Що можна сказати про ранги еквівалентних матриць?

8 Напишіть систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, а та еквівалентне їй матричне рівняння.

9 Як розв'язується матричне рівняння?

10 Сформулюйте теорему Кронекера - Капеллі.

Вправи

1 Записати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$$

у вигляді одного матричного рівняння і розв'язати її за формулою (2.10).

Відповідь: $x_1=3$, $x_2=1$.

2 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

матричним способом.

Відповідь: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$.

3 Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

Відповідь: *r(A)=1.*

4 Знайти ранг матриці $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: *r(B)=3*

5 Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: *r(C)=3*

За допомогою теореми Кронекера – Капеллі дослідити системи лінійних рівнянь і у випадку їх сумісності, знайти всі розв'язки.

6 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

Відповідь: *r(A)=2*, *r(B)=3*. Система сумісна.

7 $\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - 6x_3 = -14, \\ 3x_1 - 12x_2 - 5x_3 = -4, \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

Відповідь: *r(A)=* *r(B)=3*. Система сумісна. $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

8 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -8, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -15, \end{cases}$

Відповідь: *r(A)=* *r(B)=4*. Система сумісна.
$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=5$, $x_4=-2$.

9 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

Відповідь: *r(A)=* *r(B)=3*. Система сумісна.
$x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-2$.

10 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Відповідь: $r(A)=\ r(B)=2$. Система сумісна; $x_1=5-3x_1,\ x_3=8-5x_1$.

11 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

Відповідь: $r(A)=\ r(B)=3$. Система несумісна.

12 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

Відповідь: $r(A)=\ r(B)=2$. Система сумісна. $x_1=x_3+x_4+5x_5-16$, $x_2=23-2x_3--2x_4+6x_5$.

13 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

Відповідь: $r(A)=3\ \ r(B)=4$. Система несумісна.

14 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $r(A)=r(B)=2$. Система сумісна. $x_1=8x_3-7x_4$, $x_2=-6x_3+5x_4$.

15 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Відповідь: $r(A)=\ r(B)=4$. Система сумісна. $x_1=-4,\ x_2=0,\ x_3=7,\ x_3=-13$.

16 При яких значеннях λ система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

Відповідь: $\lambda = 5$.

3 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

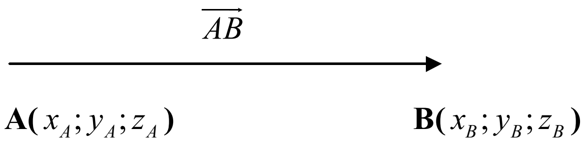
3.1 Поняття вектора лінії. Дії над векторами

Векторне числення є зручним і ефективним апаратом, придатним для розв'язування широкого класу задач.

На будь-якому відрізку AB можна вказати один з двох напрямів: від A до B або від B до A. Назвемо відрізок напрямленим, якщо на ньому обрано один з двох можливих напрямів. Множину всіх співнапрямлених конгруентних між собою відрізків називатимемо вектором. По-іншому можна сказати так: вектор - це напрямлений відрізок, але за умови, що конгруентні і співнапрямлені з ним відрізки вважаються тим самим вектором.

Якщо на відрізку AB обрано напрям від A до B, то відповідний вектор позначається $\vec{AB}$ (рис. 3.I). Точка A називається його початком, точка B кінцем.

Вектор можна позначити також і однією буквою, наприклад $\vec{a}$.



$x_A;y_A;z_A$ - координати точки А

$x_B;y_B;z_B$ - координати точки В

(рис. 3.I)

Якщо $\vec{AB}$ – даний вектор, O– дана точка, то існує й до того ж лише одна така точка P, що $\vec{AB}=\vec{OP}$. Зважаючи на це, кажуть: від будь-якої точки O можна відкласти будь-який даний вектор $\vec{AB}$.

Довжиною вектора $\vec{AB}$ називається довжина відрізка AB. Позначається довжина вектора $\vec{AB}$ так: $\left|\vec{AB}\right|$.

Вектори, паралельні будь-якій прямій, називаються колінеарними, а вектори, паралельні будь-якій площині – компланарними.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називають рівними між собою, якщо вони I)колінеарні, 2) мають однакові довжини, 3) однаково напрямлені.

Сумою векторів $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ називається такий вектор $\vec{AP}$, що $\vec{BP}=\vec{CD}$ (рис. 3.2). це правило додавання називають правилом трикутника. Щоб до вектора $\vec{a}$ додати вектор $\vec{b}$, треба відкласти:

I) від довільної точки O вектор $\vec{a}$ $(\vec{OA}=\vec{a})$,

2) від точки A- кінця вектора, що побудований, вектор $-\vec{b}$ $(\vec{AC}=\vec{b})$. Вектор $\vec{OC}=\vec{a}+\vec{b}$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які треба додати, відкласти від однієї точки

$O\left(\vec{OA}=\vec{a},\quad \vec{OB}=\vec{b}\right)$, то їхньою сумою буде такий вектор $\vec{OC}$, що $OACB$ - паралелограм (рис. 3.3).

Тому правило додавання векторів називають ще й правилом паралелограма.

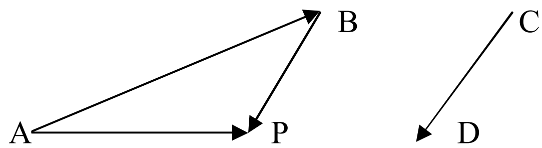


Рис. 3.2

Дія додавання векторів має такі властивості:

І) додавання векторів підпорядковуються переставному закону (тобто воно комутативне). Це означає, що для будь-яких двох векторів, $\vec{a}$ і $\vec{b}$, справджується рівність

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

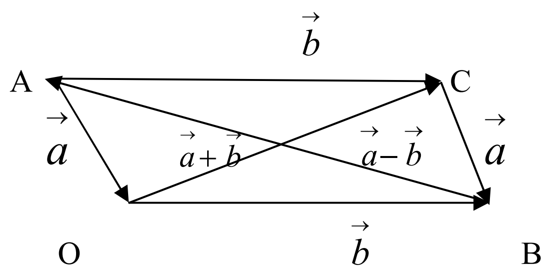


Рис. 3.3

2) додавання векторів підпорядковуються сполучному закону (інакше, додавання векторів асоціативне). Це означає, що будь-яких трьох векторів, $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$, справджується рівність (рис. 3.4)

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right);$$

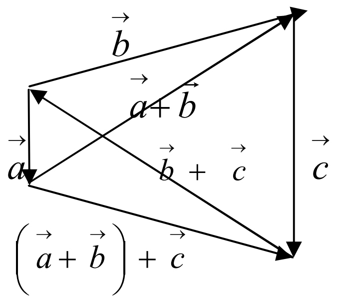


Рис. 3.4

3) вважаємо, що є вектор, початок і кінець якого збігаються. Це єдиний вектор, якого не можна зобразити стрілкою. Він називається нульовим вектором і позначається $\vec{0}$.

Для будь–якого вектора $\vec{a}$ справджується рівність:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a};$$

4) для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $\vec{b}$ такий, що:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}.$$

Справді, для вектора $\vec{AB}$ протилежним буде вектор $\vec{BA}$, бо за правилом додавання $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$. Протилежний для $\vec{a}$ вектор позначають $-\vec{a}$.

Наявність для кожного вектора протилежного дає можливість запровадити дію віднімання векторів:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}.$$

(відняти вектор – це означає долати протилежний вектор).

Щоб відняти два вектори, $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба відкласти їх від однієї точки О ($0\vec{A}=\vec{a}$, $\hat{I}\vec{A}=\vec{b}$) і з'єднати їхні кінці, при цьому вектор різниці має напрям до вектора-зменшуваного, тобто до вектора із якого віднімають. Наприклад, якщо $\vec{a}=0\vec{A}$, $\vec{b}=0\vec{B}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{BA}$ (рис. 3.5).

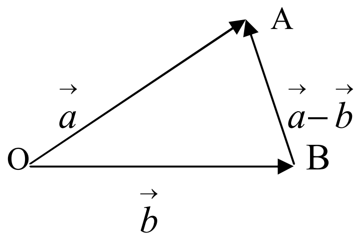


Рис. 3.5

Зазначимо, що в паралелограмі, побудованому на векторах $0\vec{A}=\vec{a}$ і $0\vec{B}=\vec{b}$ (див. рис. 3.3), одна вектор-діагональ $0\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}$, друга – $0\vec{B}=\vec{a}-\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називають новий вектор, який має довжину $\left|\vec{a}\right|$ і напрямлений однаково з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, або протилежно вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda<0$.

Добутком числа 0 на довільний вектор $\vec{a}$ називають нульовий вектор $\vec{0}$, тобто $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Для будь-яких двох чисел α і β і для довільного вектора $\vec{c}$ справджуються рівності: $\alpha\left(\beta\vec{c}\right)=(\alpha\beta)\vec{c}$; $(\alpha+\beta)\vec{c}=\alpha\vec{c}+\beta\vec{c}$.

Для будь-якого числа λ і довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність:

$$\lambda\,(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\,\vec{a}+\lambda\,\vec{b}.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь ℓ дорівнює добутку його довжини на косинус кута φ, який утворює цей вектор з доданим напрямком осі ℓ (рис. 3.6):

$$np_l\;\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi.$$

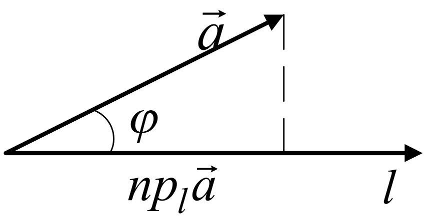


Рис.3.6

Проекція суми векторів на будь-яку вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю саму вісь:

$$np_l\,(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)=np_l\,\vec{a}_1+np_l\,\vec{a}_2+\cdots+np_l\,\vec{a}_n$$

Проекція добутку вектора на число дорівнює добутку його проекції на те саме число: $np_l(\lambda\vec{a})=\lambda\, np_l\,\vec{a}$. Проекції довільного вектора $\vec{a}$ на координатні осі $0x$, $0y$, $0z$ позначатимемо відповідно a_x, a_y, a_z. Тоді $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ означатиме, що числа a_x, a_y, a_z є проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Їх також називають координатами (декартовими) вектора $\vec{a}$.

Якщо $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$, λ - довільне число , то

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x;\ b_y+b_y;\ a_z+b_z\}; \tag{3.1}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x;\ b_y-b_y;\ a_z-b_z\}; \tag{3.2}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}.$$

Трійка векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називається координатним базисом, якщо ці вектори задовольняють таким умовам:

1) вектор $\vec{i}$ лежить на осі $0x$, вектор $\vec{j}$- на осі $0y$, вектор $\vec{k}$ - на осі $0z$ (рис.3.7);

2) кожний з векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ напрямлений в додатному напрямі своєї осі;

3) вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничні, тобто $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

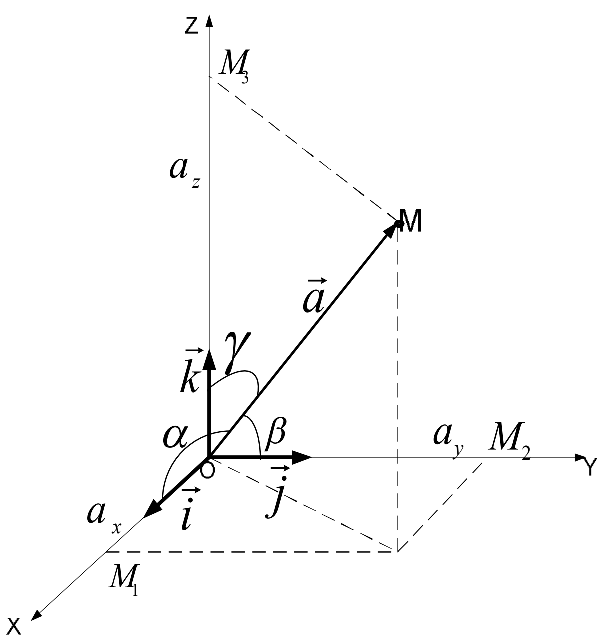


Рис. 3.7

Будь-який вектор $\vec{a}$ завжди може бути розкладений по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто може бути представлений у вигляді: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

Довжина вектора

$$\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$$

обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}, \tag{3.3}$$

а його напрям визначається напрямами конусами кутів α, β, γ, які цей вектор утворює відповідно з осями $0\tilde{O}$, $0\acute{O}$, $0Z$ (див. рис. 3.7):

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{\alpha}\right|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_{\lambda}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_{\lambda}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{3.4}$$

Очевидно, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.5}$$

Якщо точка A – початок, а точка B – кінець вектора $\vec{a} = \vec{AB}$, то координати цього вектора обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_x &= x_B - x_A; \\ a_y &= y_B - y_A; \\ a_z &= z_B - z_A. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Обчислити довжину вектора $\vec{a} = \{6;\ 3;\ -2\}$ і його напрямні косинуси.

Розв’язання. Використовуючи формули (3.3), (3.4), одержимо

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$; $\cos\alpha = \frac{6}{7}$; $\cos\beta = \frac{3}{7}$; $\cos\gamma = -\frac{2}{7}$.

Приклад 2 Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями $0x$, $0y$, кути $\alpha = 60^0$ і $\beta = 120^0$. Обчислити його координати, якщо $\left|\vec{a}\right| = 2$.

Розв’язання. За формулами (3.4): $\vec{a_x} = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha = 2\cdot\cos 60^0 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$; $\vec{a_y} = \left|\vec{a}\right|\cos\beta = 2\cdot\cos 120^0 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Використовуючи далі формулу (3.3), одержимо $4=1+1+a_z^2$; звідки $a_z = \pm\sqrt{2}$. Таким чином, $\vec{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\}$,

або $\vec{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}$.

Слід зауважити, що третю координату a_z вектора $\vec{a}$ можна було б знайти і за формулою $a_z = \left|\vec{a}\right| \cos\gamma$, бо за умовою $\left|\vec{a}\right| = 2$, а згідно з (3.5),

$\cos^2\gamma = 1-\cos^2 60^0 - \cos^2 120^0 = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; звідки $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 3 Знайти координати точки M, якщо її радіус-вектор утворює з координатними осями однакові кути, а модуль радіуса-вектора дорівнює 3.

Розв'язання. За умовою $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\vec{r}\right| = 3$ і $\alpha = \beta = \gamma$. Тому згідно з (3.5), $3\cos^2\alpha = 1$, звідки $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким чином, за формулами (3.4)

$$r_x = r_y = r_z = 3\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Отже умові задачі задовольняють дві точки: $M_1\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Приклад 4 Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a}$ ={3; -1;4}, якщо його початок збігається з точкою $M(1; 2; -3)$.

Розв'язання. Нехай точка N має координати x, y, z. Тоді за формулами (3.6) $\vec{a} = MN = \{x_N - 1;\ y_N - 2;\ z_N + 3\}$, а за умовою $\vec{a}$ ={3; -1;4 }.

Отже,

$x_N - 1 = 3;\ \ y_N - 2 = -1;\ \ z_N + 3 = 4;$

звідки

$x_N = 4;\ \ y_N = 1;\ \ z_N = 1.$

Таким чином, $N(4; 1; 1)$ - шукана точка.

Приклад 5 Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 13$, $\left|\vec{b}\right| = 19$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 24$, Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (рис. 3.8)

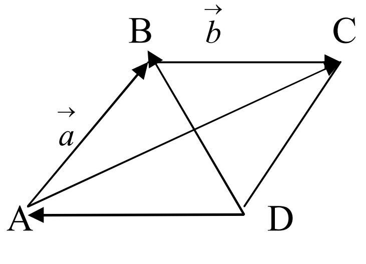


Рис.3.8

За правилом паралелограма $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{DB}$.

Тоді $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Скористаємось властивістю діагоналей паралелограма:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = 2\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2\right).$$

Враховуючи, що $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 24$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right| = 13$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\vec{b}\right| = 19$, матимемо: $$24^2+\left|\vec{DB}\right|=2\left(13^2+19\right),$$

або $$576+\left|DB=\vec{1}060\right|,$$

звідки $$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{DB}\right|=22.$$

Приклад 6 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=12$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, то паралелограм , побудований на них, вироджується в прямокутник.

На основі властивості діагоналей паралелограма, зокрема прямокутника, одержимо $2\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2\left(5^2+12\right)$.

Розв'язавши це рівняння відносно $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, дістанемо $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=13$.

Зауваження. Можна було б скористатися і тим, що діагональ у певному випадку є гіпотенузою трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приклад 7 Знайти орт вектора $\vec{a}=\{6;\,-2;\,-3\}$.

Розв'язання. Відомо, що орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ має напрям вектора $\vec{a}$ і довжину, що дорівнює одиниці. Тому $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|};\dfrac{a_y}{|\vec{a}|};\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$.

За формулою (3.3) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{49}=7$.

Отже, $\vec{a}^0=\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{a}=\{\dfrac{6}{7};\,\dfrac{2}{7};\,-\dfrac{3}{7}\}$.

Приклад 8 Обчислити модулі суми і різниці векторів $\vec{a}=\{3;\,-5;8\}$ і $\vec{b}=\{-1;\,1;-4\}$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, скориставшись формулами (3.1) і (3.2):

$\vec{a}+\vec{b}=\{3-1;\,-5+1;\,8-4\}=\{2;\,-4;\,4\}$, $\vec{a}-\vec{b}=\{3+1;\,-5-1;\,8+4\}=\{4;\,-6;\,12\}$.

Далі за формулою (3.3) матимемо:

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4}=\sqrt{36}=6$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+12}=\sqrt{196}=14$.

Таким чином, модуль суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 6, а модуль їх різниці дорівнює 14.

Питання для самоперевірки

1 Що називається вектором і довжиною вектора?

2 Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними між собою?

3 Чи можуть два вектори, які мають однакові модулі, бути рівними між собою?

4 Які дії над векторами називають лінійними? Сформулюйте їх властивості.

5 Що називається базисом на площині, у просторі?

6 Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початкової та кінцевої точок?

7 Дайте означення напрямних косинусів вектора. Сформулюйте їх властивості.

8 Чому дорівнює проекція вектора на вісь?

9 Що називають ортом вектора і як він знаходиться?

10 Як розкласти вектор по координатному базису?

11 Як виконати додавання, віднімання та множення вектора на число, якщо відомі координати векторів?

12 Як знайти модуль вектора, заданого координатами?

Вправи

1 Відомі дві координати вектора: $a_x = 4$; $a_y = -12$. Знайти його третю координату a_z, якщо $\left|\vec{a}\right| = 13$

Відповідь: $a_z = \pm 3$.

2 Знайти початок вектора $\vec{a} = \{2;\ -3;\ -1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $M\ (1;\ -1;\ 2)$.

Відповідь: $(-1; 2; 3)$.

3 Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 23$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 30$. Знайти $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

Відповідь: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 20$.

4 Знайти орт вектора $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$.

Відповідь: $\vec{a}^{\,0} = \{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\}$;

5 Вектор утворює з осями $0x$ і $0y$ кути 40 і 80°. Знайти кут, який утворює цей вектор з віссю $0x$.

Відповідь: 128°.

6 Побудувати паралелограм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ знайти його діагоналі.

Відповідь: $\vec{OC} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $OC = \sqrt{6}$; $\vec{AB} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$; $AB = 3\sqrt{2}$.

7 Відомі три послідовні вершини паралелограма $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$; $C(6; 4; 4)$. Знайти його четверту вершину.

Відповідь: $D(4, 0, 6)$.

8 Побудувати вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$; знайти його довжину і напрям.

Відповідь: $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

9 Задано точки $A(1; 2; 3)$ і $B(3; 4; 6)$. Побудувати вектор $\vec{AB}$ та його проекції на осі координат, визначити довжину і напрям вектора.

Відповідь: $\vec{AB} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$; $\left|\vec{AB}\right| = 7$; $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$; $\cos\gamma = -\frac{3}{7}$.

3.2 Скалярний і векторний добутки векторів

Відкладемо ненульові вектори від точки $O : \vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ (рис. 3.9). $A\hat{O}B$ називається кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ й позначається символом $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$. За визначенням, $0 \le \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) \le \pi$.

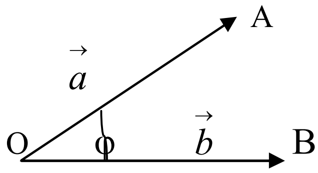


Рис. 3.9

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (співнапрямлені). Кут $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) = \pi$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені).

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначатимемо символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким чином, згідно з означенням:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Зазначимо, що коли б хоч один з векторів ($\vec{a}$ або $\vec{b}$) нульовий, то поняття кута між векторами не має сенсу. Скалярний добуток у цьому разі вважаємо таким, що дорівнює нулю.

Через те, що $np_{\vec{a}}\,\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, $np_{\vec{b}}\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|np_{\vec{a}}\,\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\,\vec{a}\ . \tag{3.7}$$

Скалярний добуток векторів має такі властивості:

I) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - переставний закон;

2) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ – дистрибутивний закон по відношенню до додавання векторів;

3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, де λ будь-яке число –сполучний закон відносно числового множника;

4) якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, і навпаки;

5) якщо $\vec{a}\,//\,\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$*;*

6) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.

Для скалярного добутку ортів маємо: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$.

Нагадаємо, що базис $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ називається ортонормованим, якщо $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$ і вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ попарно перпендикулярні. Координати вектора в ортонормованому базисі називають його прямокутними координатами.

Якщо $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ - ортонормований базис простору і $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то їх скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{3.8}$$

Косинус кута між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходять за формулою:

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|},$$

або в координатах

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (3.9)$$

Проекція довільного вектора $\vec{S}=(S_x;S_y;S_z)$ на будь-яку вісь ℓ визначається формулою:

$$np_l\vec{S}=\vec{S}\cdot\vec{e},$$

де $\vec{e}$ - одиничний вектор, напрямлений по осі ℓ.

Якщо α,β,γ - кути, які вісь ℓ утворює з координатними осями, то $\vec{e}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ і тому

$$np_l\vec{S}=S_x\cos\alpha+S_y\cos\beta+S_z\cos\gamma.$$

Робота A сили $\vec{F}$, точка прикладання якої переміщається із початку в кінець вектора $\vec{S}$, визначається формулою:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}.$$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, який:

1) має довжину, що чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (3.10);

2) перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) напрямлений так, що коли дивитися з його кінця, то найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ буде видно здійснюючим проти годинникової стрілки. З означення векторного добутку випливає, що

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right).$$

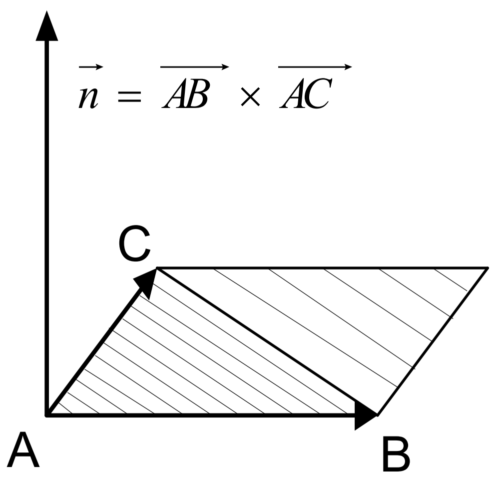


Рис. 3.10

Векторний добуток векторів має такі властивості:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ - антипереставний закон;

2) $\lambda\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$ - сполучний закон відносно числового множника;

3) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ – дистрибутивний закон відносно додавання;

4) якщо $\vec{a}\ //\ \vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$, зокрема $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

Зауважимо, що умову колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна записати ще й так :

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}, \qquad (3.10)$$

де $\lambda-$ будь-яке число.

Векторний добуток ортів $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$, а $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

Векторний добуток будь-яких двох суміжних векторів у послідовності

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad +}$$
$$\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}\,\vec{i}\,\vec{j}$$
$$\xleftarrow[-\qquad\qquad\qquad\qquad]{}$$

дав наступний вектор зі знаком "+", у зворотному порядку – зі знаком "–". Якщо $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ –ортонормований базис простору,

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$,

то векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{\gamma} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, обчислюється за формулою

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

У механіці важливе значення має поняття моменту сили відносно деякої точки. Якщо сила $\vec{F}$ прикладена до точки A(рис. 3.11), то моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, який визначається формулою

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F},$$

де $\vec{r} = \vec{OA}$ - радіус-вектор точки прикладання.

З означення векторного добутку випливає, що момент дорівнює силі, помноженій на відстань OP точки O від прямої, уздовж якої діє ця сила.

Очевидно, що момент сили , прикладеної до точки A , відносно точки B (рис.3.12) дорівнюватиме векторному добутку вектора $\vec{BA}$ на вектор $\vec{F}$, тобто

$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}. \qquad (3.11)$$

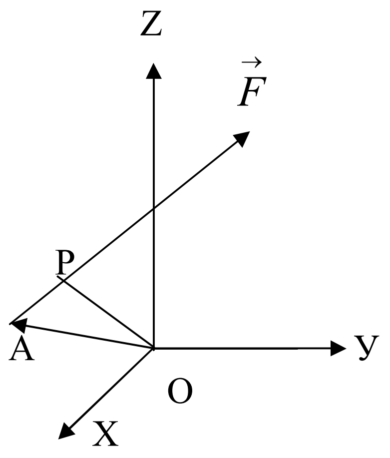


Рис. 3.11

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, взаємно перпендикулярні, вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, що дорівнюють $\frac{\pi}{3}$. Обчислити $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \left(\vec{b} + 3\vec{c}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 5,\ \left|\vec{c}\right| = 8$.

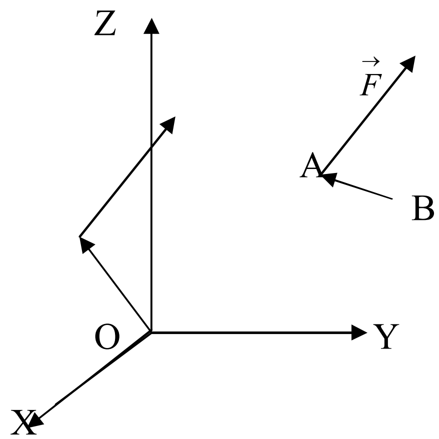


Рис. 3.12

Розв'язання. На основі властивостей скалярного добутку векторів одержимо

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \left(\vec{b} + 3\vec{c}\right) = 3\vec{b} \cdot \vec{b} + 9\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} -$$

$$-6\vec{b} \cdot \vec{c} = 3\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\frac{\pi}{2} + 9\left|\vec{a}\right| \left|\vec{c}\right| \cos\frac{\pi}{3} -$$

$$-2\left|\vec{b}\right| \left|\vec{b}\right| \cos 0 - 6\left|\vec{b}\right| \left|\vec{c}\right| \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0 +$$

$$+9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 - 6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = -62.$$

Приклад 2 Дано сили $\vec{F_1}$ { 3; -4; 2 }, $\vec{F_2}$ = { 2; 3; -5 }, $\vec{F_3}$ = { -3; -2; 4 }, що прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається із точки $M_1 = (5;\ 3;\ -7)$ в точку $M_2 = (\ 4;\ -1; -4)$.

Розв’язання. Як уже зазначалося, механічна інтерпретація скалярного добутку двох векторів полягає у тому, що робота A сталої сили $\vec{F}$ на прямолінійній ділянці шляху $\vec{S}$, дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор пересування, тобто $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

Для розв'язання задачі знайдемо спочатку рівнодійну цих сил:
$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \{\ 3+2-3;\ -4+3-2;\ 2-5+4\ \} = \{2;\ -3;\ 1\}$.

Вектор переміщення $\vec{S} = \overline{M_1 M_2} = \{4;\ -3;\ -1-3;\ -4+7\} = \{-1;\ -4;\ 3\}$.
Скориставшись формулою (3.8), одержимо:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = -2 + 12 + 3 = 13.$$

Приклад 3 Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі АС і BD взаємно перпендикулярні.

Розв’язання. Введемо в розгляд вектори діагоналей $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$. Згідно з формулами (3.6):
$\vec{AC} = \{-4;\ -1;\ 1+2;\ 1-2\ \} = \{-5;\ 3;\ -1\}$, $\vec{BD} = \{-5;\ -I;\ -5-4;\ 3-0\ \} = \{-6;\ -9;\ 3\}$,
Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$. За формулою (3.8)

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) + (-1) \cdot 3 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони взаємно перпендикулярні, отже взаємно перпендикулярні і діагоналі чотирикутника.

Приклад 4 Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;1)$, $C(3;1;1)$. Обчислити його внутрішній кут при вершині B.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{BA}$ і $\vec{BC}$ (рис.3.13).

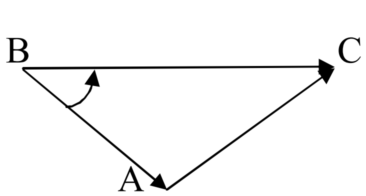


Рис. 3.13

Тоді $\hat{B} = \left(\vec{BA},\ \hat{}\ \vec{BC}\right)$. Через те що

$\vec{BA} = \{-1;+4;\ -2+2;\ 4-0\} = \{3;\ 0;\ 4\}$,

$\vec{BA} = \{-1;+4;\ -2+2;\ 4-0\} = \{3;\ 0;\ 4\}$,

$\vec{BC} = \{3;+4;\ -2+2;\ 1-0\ \} = \{7;0;\ 1\}$,

за формулою (3.9):

$$\cos \hat{B} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{21 + 4}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\hat{B} = 45^0$.

Приклад 5 Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}$ ={6; –8; –7,5}, утворює гострий кут з віссю $O\tilde{O}$. Знайти його координати, якщо $\left|\vec{x}\right| = 50$.

Розв'язання. На основі (3.10): $\vec{x} = \lambda \vec{a}$. Отже, $\vec{x} = \{6\lambda; -8\lambda; -7{,}5\lambda\}$,
Знайдемо $\left|\vec{x}\right| = \sqrt{(6\lambda)^2 + (-8\lambda)^2 + (-7{,}5\lambda)^2}$. Оскільки за умовою $\left|\vec{x}\right| = 50$, то

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{(6\lambda)^2 + (-8\lambda)^2 + (-7{,}5\lambda)^2} = 50.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно λ:

$$|\lambda|\sqrt{36 + 64 + 56{,}25} = 50;$$

$$|\lambda|\sqrt{156{,}25} = 50; \; 12{,}5|\lambda| = 50,$$

$$|\lambda| = 4,$$

звідки $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 4$. Умові задачі задовольняє лише $\lambda_1 = -4$, бо $a_z = -7{,}5$, а вектор утворює гострий кут з віссю Ox. Таким чином,

$$\vec{x} = \{6 \cdot (-4); (-8) \cdot (-4); (-7{,}5) \cdot (-4)\} = \{-24; 32; 30\}.$$

Приклад 6 Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$.

Обчислити $np_{\tilde{n}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Розв'язання. За формулою (3.7) $np_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{c} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)}{|c|}$.

Знайдемо спочатку координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$. Оскільки $\vec{a}$ ={3; –6; –1}, $\vec{b}$ ={1;4; –5}, $\vec{a} + \vec{b}$ ={3+1; –6+4; –1; –5}={4; –2; –6}.

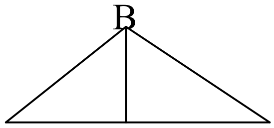
Далі, скориставшись формулами (3.8) і (3.3), одержимо

$$np_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{3 \cdot 4 + (-4) \cdot 2 + 12 \cdot (-6)}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = 4.$$

Приклад 7 Дано вершини трикутника $A(-1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.3.14).

B



A D C

Рис.3.14

З елементарної математики відомо, що $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$. Звідси шукана висота

$$BD = \frac{2S}{AC}.$$

Для знаходження величин, що входять до цієї формули скористаємося засобами векторної алгебри. Для цього введемо в розгляд вектори

$\vec{AB}=\{4;–5; 0)$ і $\vec{AC}=\{0;4; -3\}$. Тоді $AC=\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{16+9}=5$, а $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$.

Оскільки:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}=\{15;12;16\}$, то $\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\sqrt{225+144+256}=\sqrt{625}=25.$

Отже, $2S_{\Delta ABC}=25$

Таким чином, шукана висота

$$BD=\frac{25}{5}=5.$$

Приклад 8 Сила $\vec{F}=\{2;-4;5\}$ прикладена до точки $A(4;-2;3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5;-6;2)$.

Розв'язання. За формулою (3.11) $\vec{M}=\vec{BA}\times\vec{F}$. Враховуючи, що $\vec{BA}=\{4;–3; –2–2; 3+1\}=\{1; –4; 4\}, \vec{F}=\{2; –4; 5\}$, одержимо

$$\vec{M}=\vec{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -4 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=-4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається скалярним добутком двох векторів?

2 Які властивості мав скалярний добуток векторів?

3 Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?

4 Як виражається скалярний добуток двох векторів через їх координати?

5 Що називають кутом між двома векторами?

6 Чому дорівнює проекція одного вектора на напрям другого?

7 Що називається векторним добутком двох векторів? Сформулюйте його властивості.

8 Як виражається векторний добуток двох векторів через їх координати?

9 Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності векторів.

10 Як обчислюється площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

11 У чому полягає механічна інтерпретація скалярного добутку векторів?

12 У чому полягав механічна інтерпретація векторного добутку векторів.

Вправи

1 Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=\{3;-2;-5\}$, коли її точка прикладання, пересуваючись прямолінійно, переміщається із точки $A(2;-3;5)$ в точку $B(3;-2;-1)$.

Відповідь: 31.

2 Визначити, за якого значення α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $\alpha=-6$.

3 Дано вектори $\vec{a}=\{1;-3;4\}$, $\vec{b}=\{3;-4;2\}$, $\vec{c}=\{-1;1;4\}$.Обчислити $пр_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

Відповідь: 5.

4 Дано вектори $\vec{a}=\{3;-1;-2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Знайти координати вектора $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$.

Відповідь: {10; 2:14}.

5 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Обчислити $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=5$.

Відповідь: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=15$.

6 Сила $\vec{F}=\{3;4;-2\}$, прикладена до точки $C(2;-1;-2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно початку координат.

Відповідь: 15, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\varphi=\frac{11}{15}$.

7 Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A.

Відповідь: $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

8 Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$. Знайти його четверту вершину D та кут між векторами $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$.

Відповідь: $D(-1;1;1)$; $\left(\overrightarrow{AC},\hat{\ }\overrightarrow{BD}\right)=120^0$.

9 Обчислити довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Відповідь: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{5}$, $S=\sqrt{6}$.

10 Знайти вектор $\vec{c}$ якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ і задовольняє умові $\vec{c}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

Відповідь: $\vec{c}=\{-3;3;3\}$.

3.3 Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, що дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$, тобто $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$, то

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (3.12)$$

Мішаний добуток векторів має такі властивості:

І) від переставлення двох будь-яких співмножників мішаний добуток міняє знак, тобто $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$;

2) якщо два з трьох векторів рівні між собою чи паралельні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю;

3) знаки дій "точка" і "хрест" можна поміняти місцями, а саме $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Тому мішаний добуток прийнято позначати $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, тобто без знаків дій і без дужок.

Абсолютна величина мішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Необхідного і достатнього умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3-2;1;4\}$.

Розв'язання. Згідно з формулою (3.12):

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7.$$

Приклад 2 Установити, чи компланарні вектори:

1) $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;-11\}$,

2) $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$.

Розв'язання.

1) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -9 & -11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -9\end{vmatrix}=0.$$

Отже, вектори компланарні, оскільки їх мішаний добуток дорівнює нулю.

2) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-26.$$

Таким чином, вектори не компланарні, оскільки їх мішаний добуток відмінний від нуля.

Приклад 3 Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Розв'язання. Відомо, що об'єм тетраедра V дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда V. Отже, достатньо обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

Знайдемо вектори $\vec{AB}=\{3;6;3\}$, $\vec{AC}=\{1;3;-2\}$, $\vec{AD}=\{2;2;2\}$. Таким чином, їх мішаний добуток

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-18.$$

Звідки, $V_n=|-18|=18$ куб. од. Тепер знайдемо об'єм тетраедра:

$$V_{\text{òåòð.}}=\frac{1}{6}V_n=\frac{1}{6}\cdot 18=3 \text{ куб. од.}$$

Приклад 4 Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок .

Відомо , що об'єм тетраедра V обчислюється за формулою $V = \frac{1}{3} S_{осі} H$, де $S_{осн}$ - площа основи; H - висота.

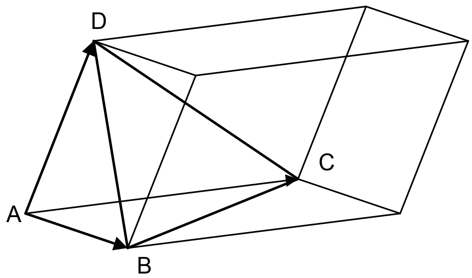


Рис.3.15

Звідси $H = \frac{3V}{S_{осі}}$. Таким чином, щоб знайти висоту тетраедра, необхідно знайти його об'єм і площу основи. Об'єм обчислюємо, як у прикладі 3. Маємо:

$\vec{AB} = \{\ 2;\ -2;\ -3\}$, $\vec{AC} = \{\ 4;\ 0;\ 6\}$, $\vec{AD} = \{\ -7;\ -7;\ 7\}$.

Отже,

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 308.$$

Таким чином,

$$V = \frac{308}{36} = \frac{154}{3} \text{ куб. од.}$$

Площа основи $S_{осі} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$ (площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$). Через те, що

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{\kappa}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{\kappa},$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

Таким чином, $S_{осі} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$ куб. од. Отже, шукана висота

$$H = \frac{3\frac{154}{3}}{14} = 11.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається мішаним добутком трьох векторів?

2 Які властивості має мішаний добуток?

3 Як знайти мішаний добуток трьох векторів, якщо відомі їхні координати?

4 У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

Вправи

1 Установити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{2;-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{3;-4;7\}$.

Відповідь: компланарні

2 Довести, що точки $A(1;\,2;\,-1)$, $B(0;\,1;\,5)$, $C(-1;\,2;\,1)$, $D(2;\,1;\,3)$ належать одній площині .

3 Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2;\,-1;\,1)$, $B(5;\,5;\,4)$, $C(3;\,2;\,-1)$, $D(4;\,1;\,3)$

Відповідь: 3 куб. од.

4 Побудувати паралелепіпед на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{\kappa}$ і обчислити його об'єм.

Відповідь: $V=51$.

4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Метод аналітичної геометрії полягає в тому, що певним геометричним об'єктам зіставляються відповідні рівняння (або системи рівнянь) і таким чином геометричні властивості фігур виражаються у властивостях їх рівнянь. Тобто геометрична фігура вивчається за її рівнянням.

Аналітична геометрія поєднала геометрію з алгеброю та математичним аналізом, що плідно вплинуло на розвиток усіх трьох розділів математики.

Завдяки універсальності підходу до розв'язання різних задач, метод аналітичної геометрії став основним методом геометричних досліджень і широко застосовується не лише в математиці, а й механіці, фізиці тощо.

4.1 Аналітична геометрія на площині

4.1.1 Система прямокутних декартових координат на площині

Щоб визначити положення на площині, побудуємо прямокутну декартову систему координат. Для цього: 1) візьмемо дві взаємно перпендикулярні напрямні прямі і назвемо їх осями координат (вісь $0x$ називається віссю абсцис, вісь $0y$ – віссю ординат; додатний напрям кожної з осей координат показується стрілкою (рис. 4.І); точка перетину осей координат O називається

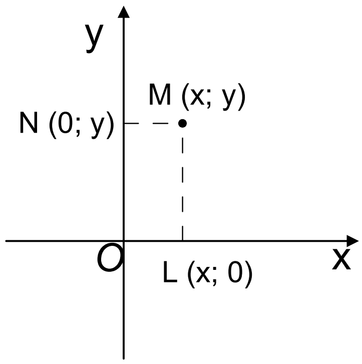


Рис. 4.I

початком системи координат); 2) виберемо будь-який відрізок за одиницю масштабу (як правило для обох осей беруть однаковий масштаб).

Положення точки $M(x, y)$ в побудованій системі координат (рис. 4.I) визначається парою чисел x і y, які називаються координатами цієї точки.

Зазначимо, що прямокутними декартовими координатами точки M на площині називаються вістані від цієї точки до координатних осей $0\acute{O}$ і $O\tilde{O}$, виміряні однією одиницею довжини і взяті з відповідними знаками. Якщо числа $x = MN$ і $y = ML$ - координати точки M, то це записується так: $M(x, y)$.

Для точок що лежать на осі $0\acute{O}, x = 0$, а для точок, що лежать на осі $O\tilde{O}$, $y = 0$. Якщо точка знаходиться в початку координат, то її обидві координати, x і y, дорівнюють нулю.

Зазначимо також, що осі координат ділять площину на чотири частини, які називаються четвертями, або квадрантами (рис. 4.2).

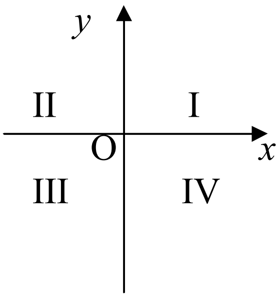


Рис. 4.2

Координати точок різних квадрантів мають різні знаки:

Квадрант	Знаки координат	
	x	y
I	+	+
II	–	+
III	+	–
IV	+	–

Відстань між двома точками

Відстань d між точками $M_1(x_{1,}; y_1)$ і $M_2(x; y_2)$ обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4.I)$$

Поділ відрізка у заданому відношенні

Координати точки $M(x; y)$, яка поділяє відрізок $M_1 M_2$, де $M_1(x_{1,}\ y_1)$, $M_2(x_{2,}; y_2)$ у відношенні $\lambda = \dfrac{M_1 M}{M M_2}$ $(\lambda \neq 1)$ (рис. 4.3) визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda}. \qquad (4.2)$$

Зокрема, якщо точка $M(x, y)$ поділяє відрізок $M_1 M_2$ навпіл, то $\lambda = 1$, і тоді

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (4.3)$$

тобто координати середини відрізка дорівнюють півсумам однойменних координат його початку і кінця.

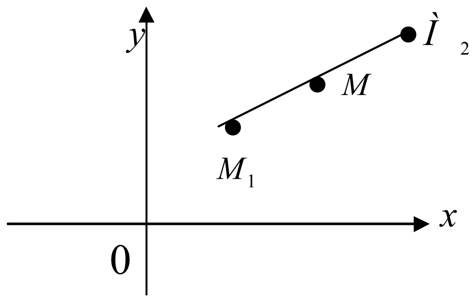


Рис. 4.3

Площа трикутника

Якщо точки $M_1(x_1, \ y_1)$, $M_2(x_2, \ y_2)$, $M_3(x_3, \ y_3)$- вершини трикутника $M_1 M_2 M_3$, то його площа обчислюється за формулами

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right],$$

або

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

або

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знак «–» треба брати тоді, коли значення визначника від'ємне, а знак «+», коли воно додатним.

4.І.2. Полярна система координат

Полярна система координат визначається заданням деякої точки *O*, яка називається полюсом , променя *OP,* який виходить з цієї точки і називається полярною віссю, і масштабу для вимірювання довжин. Крім того, при заданні полярної системи повинно бути сказано, які повороти навколо точки О вважаються додатними. Додатними будемо вважати повороти проти часової стрілки.

Полярними координатами довільної точки *M* (відносно заданої системи) називаються числа $r = OM$ і $\varphi = \angle POM$ (рис.4.4).

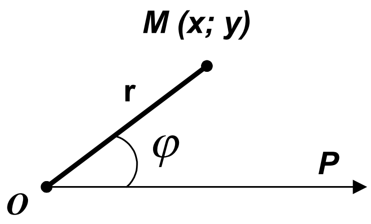


Рис.4.4

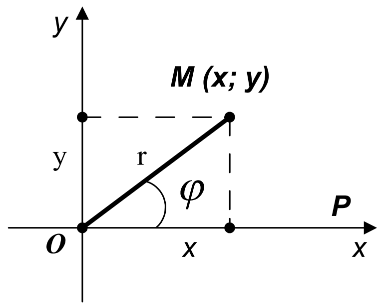


Рис.4.5

Число r називається полярним радіусом, а число φ - полярним кутом точки М . символ $\mathrm{M}(r:\varphi)$ означає, що точка М має полярні координати r і φ.

Зв'язок між прямокутними координатами (декартовими і полярними) довільної точки М площини при відповідному виборі координатних систем (рис. 4.5) визначається формулами:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (4.7)$$

4.I.3 Рівняння лінії. Побудова лінії за її рівнянням

Нагадаємо, що геометричним місцем точок називають множину точок, які мають будь – яку загальну для них геометричну властивість. При цьому точки, які не належать цій множині, такої властивості не мають.

Лінію на площині можна розглядати як геометричне місце точок. Наприклад, колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї даної точки. Яка називається центром; бісектрисою кута називають геометричне місце точок, кожна з яких знаходиться на одній відстані від його сторін; перпендикуляр, проведений через середину даного відрізка, є геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка і т.п.

Рівнянням лінії на площині називається таке рівняння між змінними x і y, якому задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить їй.

Рівняння лінії у прямокутній декартовій системі координат має такий вигляд $y = f(x)$ або $F(x, y) = 0$. Змінні x і y називаються змінними (поточними) координатами. Вони можуть набувати значень, що дорівнюють координатам будь-якої точки даної лінії.

У полярній системі координат рівняння лінії має такий вигляд: $r = f(\varphi)$ або $F(r;\varphi) = 0$.

Не слід думати, що кожне рівняння $F(x;y) = 0$ визначає будь-яку лінію. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає ніякої лінії, бо за будь-яких дійсних значень x і y ліва частина цього рівняння додана, а права дорівнює нулю, і тому координати жодної точки площини $x\hat{I}\,y$ не можуть задовольнити цьому рівнянню.

Зазначимо, що в аналітичній геометрії доводиться розв'язувати дві основні задачі: 1) дана лінія як геометричне місце точок, треба скласти її рівняння, 2) дано рівняння, треба побудувати лінію, задану цим рівнянням.

Щоб скласти рівняння лінії як геометричного місця необхідно 1) взяти довільну точку $\mathrm{M}(x:y)$ лінії зі змінними координатами x і y; 2) записати загальну властивість точок даного геометричного місця у вигляді рівності;

3) виразити величини, які входять до цієї рівності з допомогою координат; 4) спростити одержане рівняння.

Точки перетину двох ліній $F_1(x,y)=0$ і $F_2(x,y)=0$ находять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Якщо система (4.5) має дійсний розв'язок, то лінії перетинаються. Число точок перетину дорівнює числу розв'язків системи. Якщо дійсних розв'язків немає, то лінії не мають спільних точок, тобто не перетинаються.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1(3,2)$ і $M_2(2,3)$.

Розв'язання. Нехай $M(x:y)$ - довільна точка даного геометричного місця. За умовою $M_1M = M_2M$. Використовуючи (4.I) знаходимо:

$$M_1M = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}\ ;\ M_2M = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\,.$$

Підставляючи ці вирази в попередню рівність, одержимо рівняння даного геометричного місця:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\,.$$

Спростимо одержане рівняння. Підносячи до квадрату обидві частини рівняння і розкриваючи дужки в підкореневих виразах, матимемо

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9\,.$$

Переносячи всі члени рівняння в ліву частину і зводячи подібні, остаточно одержимо $x - y = 0$. Це є рівняння прямої лінії.

Таким чином, координати довільної точки даного геометричного місця задовольняють рівнянню $x - y = 0$.

Покажемо тепер, що коли точка не належить геометричному місцю, то її координати не задовольнятимуть рівнянню $x - y = 0$. Нехай $N(x:y)$ – така точка. Тоді виконується одна з двох нерівностей:

$$M_1N < M_2N \text{ чи } M_1N > M_2N,$$

або в координатах:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\ \langle\ \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\ ,$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\ \rangle\ \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\ .$$

Перша з цих нерівностей зводиться до вигляду

$$x-y<0,$$

друга – до вигляду

$$x-y>0.$$

Отже, координати точки N рівнянню $x-y=0$ не задовольняють. Таким чином, рівняння даного геометричного місця є

$$x-y=0.$$

З елементарної геометрії відомо, що геометричним місцем точок, указаних в умові задачі, буде пряма, яка проходить через середину відрізка $M_1\ M_2$ перпендикулярно до нього.

Приклад 2 Точка M рухається так, що в будь-який момент часу її відстань до точки $M_1\ (6:0)$ втричі більша за відстань до точки $M_2\ \left(\frac{2}{3};0\right)$. Знайти рівняння траєкторії руху точки M .

Розв’язання. Змінні координати точки M позначимо через x і y.

За умовою задачі $MM_1=3MM_2$. Виразимо відстань $MM_1\ i\ MM_2$ через координати точок. Тоді

$$MM_1=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}\ ;MM_2=\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}\ .$$

Підставляючи ці вирази в попередню рівність, одержимо рівняння траєкторії руху точки M :

$$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=3\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2}\ .$$

Спрощуючи це рівняння, знаходимо

$$x^2+y^2=4.$$

Одержали рівняння кола радіуса $R=2$ з центром в початку координат.

Приклад 3 Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней від яких до точок $M_1\ (-3:0)$ і $M_2\ (3:0)$ дорівнює 50.

Розв’язання. Нехай $M\ (x:y)$ - довільна точка шуканої лінії. За умовою $MM_1^2+MM_2^2=50$, або в координатній формі

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}\ \right)^2=50,$$

звідки

$$x^2+6x+9+y^2+x^2-6x+9+y^2=50,$$

або

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Одержали рівняння кола.

Приклад 4 Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-5:0)$ і до даної прямої $5x+16=0$ дорівнює $5/4$.

Розв'язання. Нехай $M(x:y)$ - довільна точка шуканої лінії. Тоді за умовою $\frac{MF}{MN}=\frac{5}{4}$, де MN - відстань від точки M до прямої $5x+16=0$ (рис. 4.6)

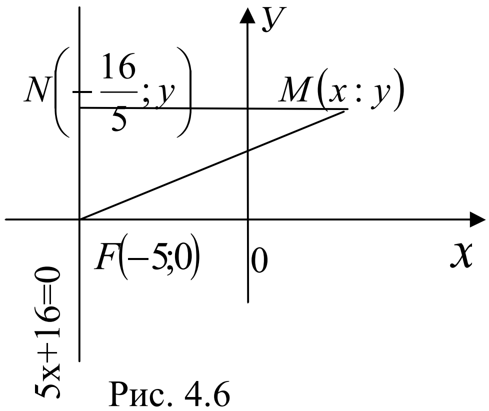


Рис. 4.6

Запишемо цю рівність в координатній формі:

$$\frac{\sqrt{(x+5)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{16}{5}\right)^2+(y+y)^2}}=\frac{5}{4},$$

або

$$4\sqrt{(x+5)^2+y^2}=5\sqrt{\left(x+\frac{16}{5}\right)^2}.$$

Виконуючи подальші перетворення, одержимо:

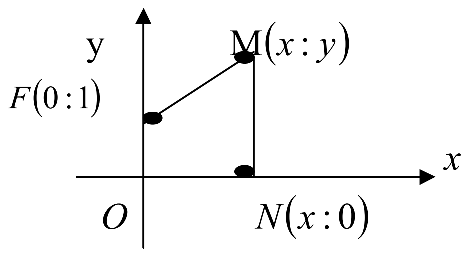
$$16\left(x^2+10x+25+y^2\right)=25\left(x^2+\frac{32}{5}x+\frac{256}{25}\right), \text{ або } 9x^2-16y^2=144.$$

Поділивши обидві частини останнього рівняння на 144, остаточно одержимо $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Це рівняння гіперболи.

Приклад 5 Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від осі Ox і від точки $F(0:1)$. Побудувати криву.

Розв'язання. Нехай $M(x:y)$ - довільна точка шуканої лінії.

За умовою задачі $MN=MF$ (рис.4.7). Через те що $MN=y$ і $MF=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, в координатній формі рівняння лінії набуде вигляду:



$$y=\sqrt{x^2+(y-1)^2},$$

звідки $y^2=x^2+(y-1)^2$.

Одержане рівняння розв'яжемо відносно y.

Тоді остаточно матимемо:

$$y=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right).$$

Це рівняння параболи. Для побудови кривої надаватимемо різні значення x і з рівняння знаходитимемо відповідні значення y. Одержимо кілька пар значень $(x:y)$. Результати обчислень запишемо в таблицю (таблиця 4.1) :

Таблиця 4.1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	2,5	1	0,5	1	2,5	5

Тепер побудуємо в прямокутній системі координат точки, відповідні парам чисел таблиці, і з'єднаємо їх плавною кривою (рис. 4.8).

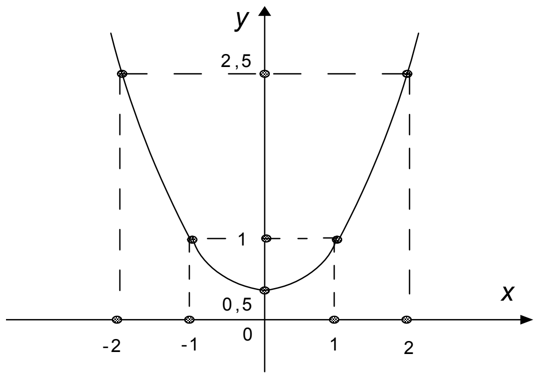


Рис. 4.8

Приклад 6 Знайти точки перетину ліній $x^2 + y^2 = 25$ і $x + 7y - 25 = 0$.

Розв'язання. Щоб знайти точки перетину треба розв'язати систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y - 25 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи $x = -7y + 25$. Підставляючи це значення в перше рівняння системи, матимемо $49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25$.

Після спрощення одержимо $y^2 - 7y - 12 = 0$, звідки $y_1 = 3$, $y_2 = 4$. Тоді $x_1 = 7 \cdot 3 + 25 = 4$, $x_2 = -7 \cdot 4 + 25 = -3$.

Отже, лінії перетинаються у двох точках: $M_1(4:3)$ і $M_2(-3:4)$.

Приклад 7 Знайти точки перетину лінії $2x - 3y - 12 = 0$ з осями координат.

Розв'язання. Щоб одержати точки перетину даної лінії з віссю Ox, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Підставляючи значення y в перше рівняння, одержимо $2x-12=0$, звідки $x=6$. Таким чином, дана лінія перетинає вісь $O\tilde{O}$ у точці $M_1\left(6:0\right)$.

Розв’язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x-3y-12=0, \\ x=0, \end{cases}$$

знаходимо: $y=-4$. Отже, точка $M_2\left(0:-4\right)$ є точкою перетину даної лінії з іссю $O\acute{O}$.

Приклад8 Побудувати точки, задані полярними координатами:

$A\left(3:\dfrac{\pi}{2}\right), B\left(2:\pi\right),\ C\left(4:-\dfrac{\pi}{4}\right),\ D\left(\dfrac{5}{2}:\dfrac{\pi}{6}\right).$

Розв’язання. Для побудови точки в полярній системі координат спочатку проводимо промінь з точки O під відповідним кутом φ , а потім на ньому від полюса O відкладаємо значення r (рис. 4.9).

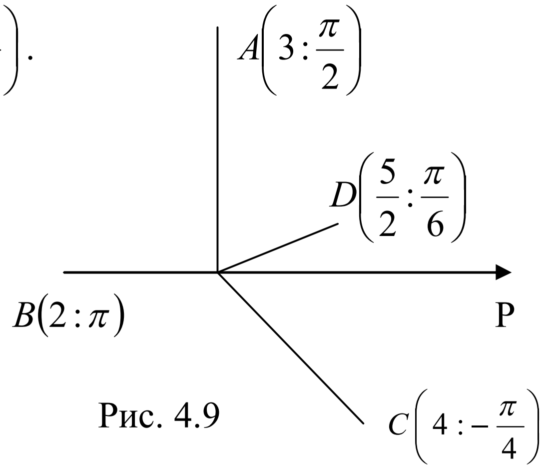


Рис. 4.9

Приклад 9 Встановити, які лінії визначаються в полярних координатах рівняннями

I) $r=3$, 2)$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, 3) $r=\dfrac{2}{\pi}\varphi$, 4) $r=\dfrac{\pi}{\varphi}$, 5) $r=4\cos\varphi$ і побудувати їх.

Розв’язання. 1) У рівнянні $r=3$ координата φ відсутня. Отже,для будь-якого φ точка лінії віддалена від полюса на 3 одиниці. Таким чином, маємо коло з центром у полюсі і радіуса 3 одиниці (рис. 4.10).

2) Рівняння $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ не залежить від r. Множина точок, координати яких задовольняють рівнянню, є промінь, що виходить з полюса під кутом $\dfrac{\pi}{3}$ до полярної осі (рис. 4.11).

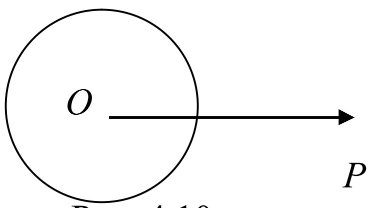


Рис. 4.10

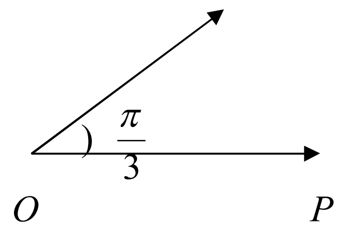


Рис. 4.11

3) Для побудови лінії, заданої рівнянням $r = \frac{2}{\pi}\varphi$, складемо таблицю значень φ і r. Для цього задаємо значення φ і обчислюємо відповідні значення r (таблиця 4.2):

Таблиця 4.2

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
r	0	1/2	1	3/2	2	$5/2$	3	$7/2$	4

За даними таблиці будуємо криву (рис. 4.12) ─ спіраль Архімеда.

4) $r = \frac{\pi}{\varphi}$. Складемо таблицю значень φ і r (таблиця 4.3):

Таблиця 4.3

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	6	3	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Зазначимо, що для $\varphi = 0$ функція не визначена, але для значень, близьких до нуля, вона необмежено зростає зі зменшенням φ.

Одержана крива (рис. 4.13) називається гіперболічною спіраллю.

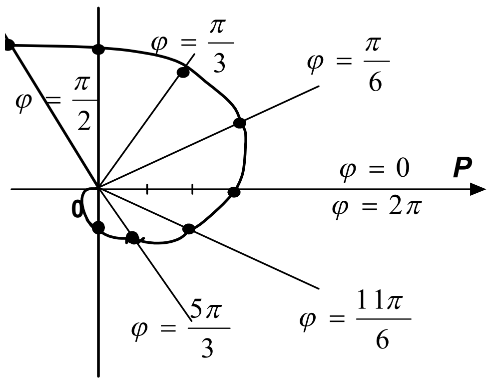


Рис. 4.12

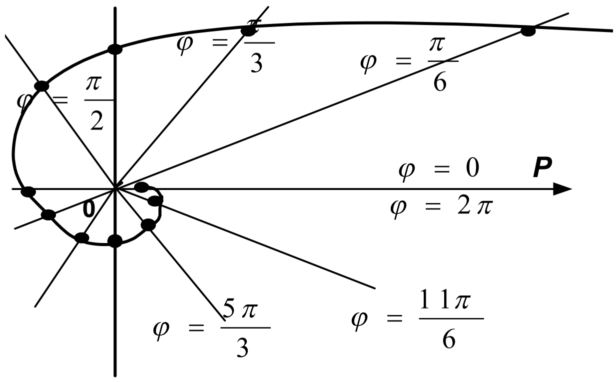


Рис. 4.13

5) Щоб побудувати криву, задану рівнянням $r = 4\cos\varphi$, складемо таблицю значень φ і r (таблиця 4.4):

Таблиця 4.4

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
r	4	$2\sqrt{3}$	2	0	—	—	—	0	2	4

За даними таблиці побудуємо криву (рис. 4.14).

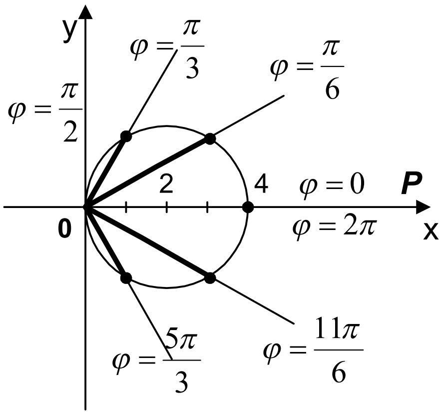


Рис. 4.14

Зазначимо, що функція $\cos\varphi$ – парна, тому крива буде симметричною відносно прямої осі. Це видно і з таблиці.

Одержана крива є коло з діаметром $2R=4$, який збігається з полярною віссю.

Щоб переконатися в цьому, переведемо рівняння $r=4\cos\varphi$ в прямокутну декартову систему координат. Для цього помножимо обидві частини рівняння на r. Тоді $r^2=4r\cos\varphi$. Враховуючи формули (4.4)

$$x^2+y^2=4x, \text{ або } (x-2)^2+y^2=4.$$

Таким чином, дійсно маємо рівняння кола з центром у точці $0_1(2:0)$ і радіуса 2 одиниці (див. рис. 4.14).

4.I.4 Параметричні рівняння лінії

Параметричними рівняннями лінії на площині називаються рівняння виду:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad (4.6)$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - функції змінної t, яку називають параметром.

Якщо з рівнянь (4.6) можна виключити параметр t, то одержимо рівняння лінії у вигляді $F(x,y)=0$.

Приклад 10 Побудувати лінію. Задану параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=t^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Спосіб І. Складемо таблицю значень x і y, надаючи параметру t довільних значень з області визначення функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$:

Таблиця 4.5

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

За даними таблиці побудуємо лінію (рис. 4.15) - параболу.

Спосіб 2. Виключимо параметр t з параметричних рівнянь даної лінії.

З першого рівняння $t = x - 1$. Тоді $y = (x-1)^2$. Одержали рівняння параболи з вершиною у точці $(1;0)$. Цю параболу можна побудувати з допомогою графіка параболи $y = x^2$ шляхом переносу всіх його точок вправо на одиницю.

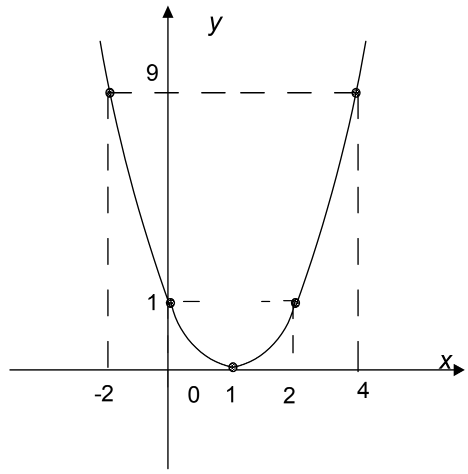


Рис. 4.15

Приклад 11 Виключити параметр t з параметричних рівнянь ліній:

а) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 2R\cos^2 t, \\ y = R\sin 2t. \end{cases}$

Розв'язання. а) З параметричних рівнянь маємо $\cos t = \dfrac{x}{a}$, $\sin t = \dfrac{y}{b}$.

Підносячи до квадрату обидві частини цих рівнянь і почленно додаючи їх, одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння еліпса в прямокутних декартових координатах.

б) $\cos t = \sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}$, $\sin t = \sqrt[3]{\dfrac{y}{a}}$.

Тоді

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{a}\right)^{3/2},$$

або

$$x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}.$$

Одержали рівняння астроїди в прямокутних декартових координатах.

в) $\sin 2t = \dfrac{y}{R}$.

Через те що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos 2t = \pm\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{R^2}}$.

Тоді $x = 2R\cos^2 t = R(1 + \cos 2t) = R\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{R^2}}\right) = R \pm \sqrt{R^2 - y^2}$.

Далі маємо:

$$x - R = \pm\sqrt{R^2 - y^2}\ .$$

Тоді :

$$(x - R)^2 = R^2 - y^2, \text{ або } (x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

звідки

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0\ .$$

Одержали рівняння кола з центром у точці (R;0) і радіуса R в прямокутних декартових координатах.

Питання для самоперевірки

1 Як визначаються прямокутна і полярна системи координат?

2 Укажіть зв'язок між декартовими і полярними координатами будь-якої точки.

3 Що називається геометричним місцем точок?

4 За якою формулою знаходять відстань між двома заданими точками на площині?

5 Як знайти координати середини відрізка?

6 Як знайти точки перетину лінії з осями координат?

7 Як знайти точки перетину двох ліній ?

8 Який вигляд мають параметричні рівняння лінії?

9 Що називають параметром лінії, заданої параметричними рівняннями?

10 Які основні задачі доводиться розв'язувати в аналітичній геометрії?

Вправи

1 Скласти рівняння траєкторії точки, яка в кожний момент руху однаково віддалена від точок $A(5;-2)$ і $B(-3;-2)$.

Відповідь: $x - 1 = 0$

2 Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-4;\,0)$ і до даної прямої $4x + 25 = 0$ дорівнює $\dfrac{4}{5}$.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ - еліпс.

3 Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких різниця квадратів відстаней до точок $A(-2;\,0)$ і $B(2;0)$ дорівнює 4.

Відповідь: $2x \pm 1 = 0$.

4 Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $A(4;\,2)$ і від осі ординат.

Відповідь: $(y-2)^2 = 8(x-2)$.

5 Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвоє далі від точки $A\,(3;\,0)$, ніж від осі ординат.

Відповідь: $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

6 Скласти рівняння лінії, кожна точка якої є центром кола, що дотикається до осі абсцис і проходить через точку $A\,(0;\,3)$.

Відповідь: $x^2 = 6y - 9$.

7 Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться від точки $A\,(4;\,0)$ вдвоє далі, ніж від прямої $x = 1$.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

8 Встановити, яка лінія визначається рівнянням $r = 10\sin\varphi$ і побудувати її.

Відповідь: Коло з центром $\left(5;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ і радіуса 5.

9 Побудувати лінії, задані рівнянням

а) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; б) $r\cos\varphi = 1$; в) $r = \dfrac{\varphi}{\pi}$; г) $r = 2\varphi$.

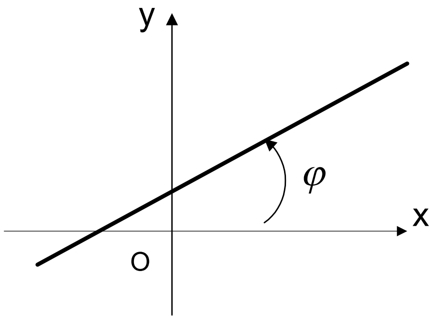
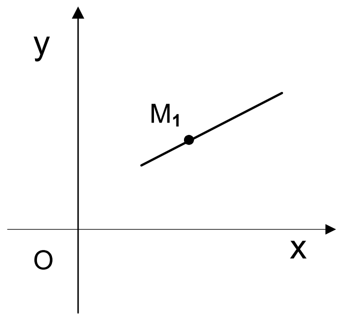
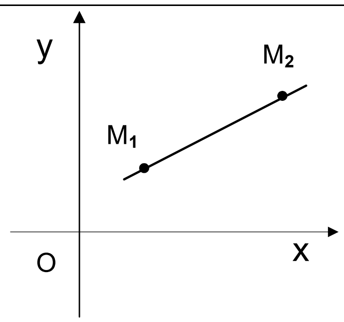
10 Виключити параметр t з параметричних рівнянь ліній:

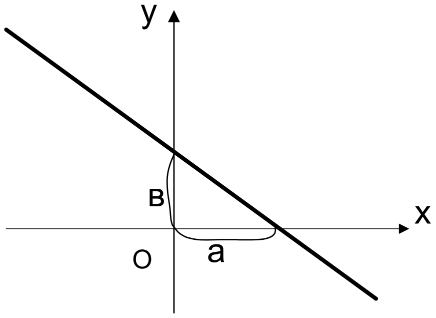
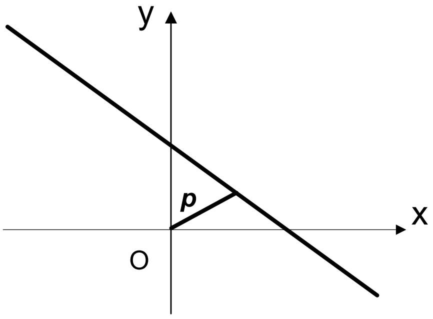
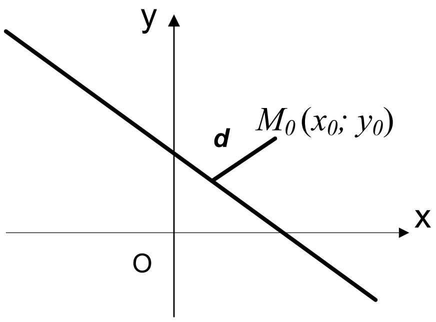
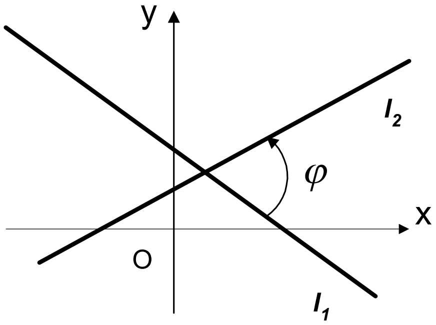
$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}, \\ y = b\,tgt; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2p\,ctg^2 t, \\ y = 2p\,ctgt. \end{cases}$$

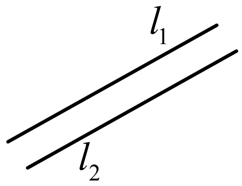
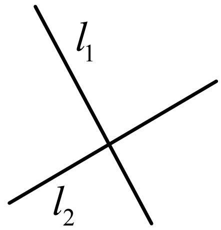
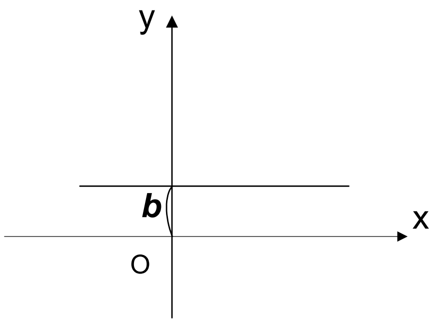
Відповідь: а) $x - y^2 = 0$; б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; в) $2px - y^2 = 0$.

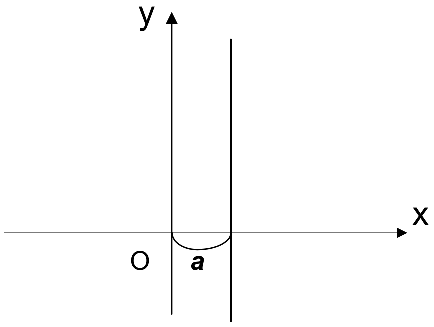
4.1.5 Пряма лінія та її рівняння

Таблиця 4.6

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	2	3	4
1	Рівняння прямої з кутовим кое-фіцієнтом	 $k = tg\varphi$ - кутовий коефіцієнт (φ - кут нахилу прямої до додатного нап-рямку вісі Ox), b - відрізок, який пряма відтинає на осі Оy.	$y = kx + b$
2	Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1;\, y_1)$ в заданому напрямі;	 $M_1(x_1;\, y_1) \in l$	$y - y_0 = k(x - x_0)$ (4.7)
3	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	 $M_1(x_1;\, y_1) \in l$ $M_2(x_2;\, y_2) \in l$ $k = tg\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (4.8)

4	Рівняння прямої у відрізках		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\qquad (4.9)$ де a і b - довжини відрізків, які пряма відтинає на осях координат;
5	Загальне рівняння прямої	$\kappa=-\frac{A}{B}$ $в=-\frac{C}{B}$	$Ax+By+C=0.\qquad (4.10)$
6	Нормальне рівняння прямої		$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ або $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$
7	Відстань від точки до прямої	 $M_0(x_0;\, y_0)$	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}.\qquad (4.11)$
8	Кут між двома прямими		$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},$ якщо рівняння прямих задані у вигляді $y=kx+b$, або $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$ якщо рівняння прямих задані у вигляді $Ax+By+C=0.\qquad (4.12)$

9	Умова паралельності двох прямих	 l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\kappa_1 = \kappa_2$, або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
10	Умова перпендикулярності двох прямих	 l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1$, або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. (4.13)
11	Умова збіжності двох прямих	l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
12	Рівняння прямої, яка проходить через початок координат		$y = kx$, або $Ax + By = 0$. (4.14)
13	Рівняння прямої, що паралельна осі абсцис		$y = \text{в}$, або $By + C = 0$.

14	Рівняння прямої, що паралельна осі ординат		$x = a$, або $Ax + C = 0$.
15	Рівняння осі абсцис		$y = 0$.
16	Рівняння осі ординат		$x = 0$.

Розв'язання задач

Задача 1 Через точку перетину прямих $3x - 4y - 29 = 0\ (l_1)$ і $2x + 5y + 19 = 0\ (l_2)$ проведено пряму паралельно прямій $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 0\ (l_3)$. Скласти її рівняння.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину прямих, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 29, \\ 2x + 5y = -19. \end{cases}$$

Обчислимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+8=23; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 29 & -4 \\ -19 & 5 \end{vmatrix} = 154 - 76 = 69;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 29 \\ 2 & -19 \end{vmatrix} = -57 - 58 = -115.$$

Тоді за формулами Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3;\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-115}{23} = -5$.

Таким чином, точка перетину прямих $M_0(3;-5)$.

Використовуючи тепер рівняння (4.7) і умову паралельності двох прямих (4.6), а також враховуючи, що $x_0 = 3$, $y_0 = -5$, $k = k_3 = -\frac{5}{4}$ матимемо:

$$y + 5 = -\frac{5}{4}(x - 3) \quad \text{або} \quad 5x + 4y + 5 = 0.$$

Отже, $5x + 4y + 5 = 0$ — рівняння шуканої прямої. Зауважимо, що рівняння цієї прямої можна знайти інакше. Для цього треба рівняння прямої l записати у загальному вигляді, тобто перейти від рівняння (4.9) до рівняння (4.10) : $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow 5x + 4y - 20 = 0$.

За умовою шукана пряма l паралельна прямій l_3, тому її рівняння можна шукати у вигляді $5x+4y+C=0$. Через те що точка $M_0(3;-5)$ належить цій прямій, її координати задовольняють рівнянню і тому $5\cdot 3+4\cdot(-5)+C=0,$ звідки $C=5$. Таким чином, рівняння прямої l буде

$$5x+4y+5=0.$$

Задача 2 Скласти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(2;1)$ перпендикулярно до даної прямої $2x+3y+4=0$ (l_1).

Розв'язання. Будемо шукати рівняння прямої l у вигляді:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Через те, що за умовою задачі $l\perp l_1$, $kk_1=-1$, звідки $k=\dfrac{3}{2}$. Враховуючи також, що $x=2$, $y=1$ остаточно матимемо:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2) \text{ або } 3x-2y-4=0 \text{ рівняння прямої } l$$

Задача 3 Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$ (l_1)

Розв'язання. Точка $P(-6;4)$ не належить прямій , бо 4(-6)-54+3 $\neq$0. Таким чином проекцією точки P на пряму буде основа перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму l_1, або інакше точка перетину прямих $P_1=PP_1\cap l_l$ (рис. 4.16).

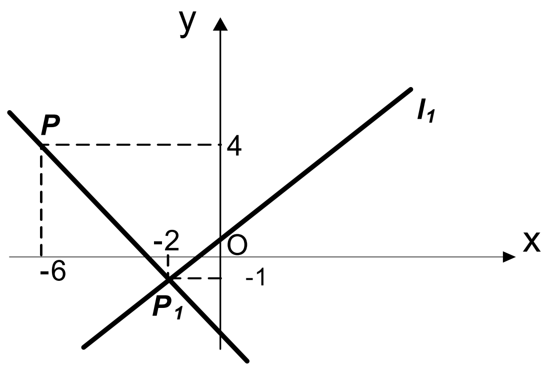


Рис. 4.16

Щоб знайти P_1, складемо спочатку рівняння PP_1: $y-y_p=k(x-x_p)$. Через те , що $PP_1\perp l_1$, $k=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{5}{4}$, бо $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}=-\dfrac{4}{-5}=\dfrac{4}{5}$. Тоді рівняння PP_1 набуде вигляду $y-4=-\dfrac{5}{4}(x+6)$, або $5x+4y+14=0$.

Розв'язуючи систему $\begin{cases}4x-5y+3=0,\\5x+4y+14=0,\end{cases}$ знаходимо P_1 (-2;-1).

Задача 4 Скласти рівняння прямих , які проходять через точку (0;1) під кутом 45^0 до прямої $y=2x+1$.

Розв'язання. Кутові коефіцієнти шуканих прямих знайдемо за формулою (4.12). Тут $tg\alpha=tg45=1$, $k_2=2$.

Отже , $1=\left|\dfrac{2-k_1}{1+2k_2}\right|$, звідки a) $\quad 1=\dfrac{2-k_1}{1+2k_1}$, $1+2k_1=2-k_1$, $\quad k_1=\dfrac{1}{3}$;

b) $\quad 1=1-\dfrac{2-k_1}{1+2k_1}$, $1+2k_1=-2+k_1$, $\quad k_1=-3$.

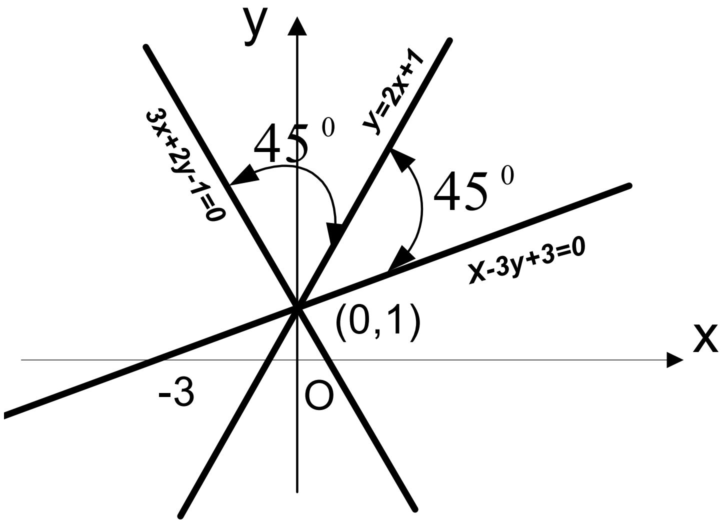


Рис. 4.17

Напишемо рівняння шуканих прямих, використовуючи рівняння (4.7):

$$\text{а)} \quad y-1=\frac{1}{3}(x-0) \qquad \text{або} \qquad x-3y+3=0$$

$$\text{б)} \quad y-1=-3(x-0) \qquad \text{або} \qquad 3x+y-1=0$$

Таким чином, $x-3y+3=0$ і $3x+y-1=0$ – рівняння шуканих прямих (див. рис. 4.17). Зауважимо, що знайдені прямі перпендикулярні.

Задача 5 Знайти координати вершин ромба $ABCD$, якщо задані рівняння двох його сторін, $BC-x+2y-4=0$, $AD-x+2y-10=0$ і рівняння діагоналі $AC-y=x+2$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 4.18). Знайдемо координати вершин A,C:

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}, x=0, y=2, \quad C(0;2); \quad \begin{cases} x+2y-10=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}, x=2, y=4, \quad A(2;4).$$

Знайдемо координати точки M перетину діагоналей за формулою (4.2):

$$x=\frac{2+0}{2}=1, \quad y=\frac{4+2}{2}=3; \quad M(1;3).$$

Кутовий коефіцієнт прямої AC $\quad k_{AC}=1$, отже, враховуючи (4.13):

$$k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}=-1.$$

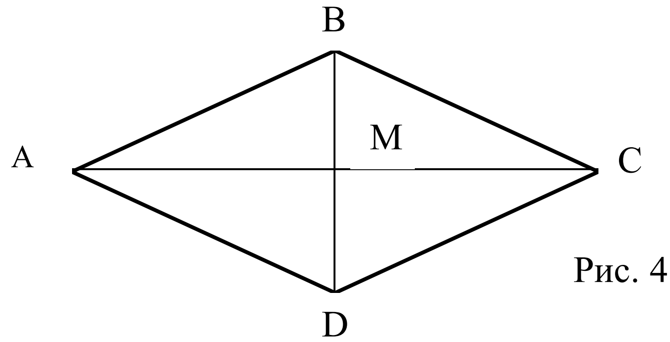


Рис. 4.18

Рівняння BD знайдемо із співвідношення(4.7):

$$y-3=-1(x-1) \quad \text{або} \quad x+y-4=0.$$

Тепер знайдемо координати вершин B, D :

$$\begin{cases} x+2y-4=0, \\ x+y-4=0 \end{cases} \quad x=4, \quad y=0, \quad B(4;2);$$

$$\begin{cases} x+2y-10=0, \\ x+y-4=0 \end{cases} \quad x=-2, \quad y=6, \quad D(-2;6).$$

Задача 6 Визначити за яких значень $m,\ n$ прямі $mx+8y+n=0$ і $2x+my-1=0$ 1) паралельні , 2) збігаються , 3) перпендикулярні?

Розв'язання. Згідно з умовою паралельності прямих:

$$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}.$$

Розв’язуючи рівняння $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}$, одержимо $m=\pm 4$. Тоді при $m=4$ з нерівності $\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}$ маємо $n\neq -2$, а при $m=-4$ $n\neq -2$. Таким чином, задані прямі паралельні, якщо $m=4, \quad n\neq -2$ або $m=-4, \quad n\neq 2$.

Якщо прямі збігаються, то :

$$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}=\frac{n}{-1},$$

звідки одержуємо, що $m=4, \quad n=-2$ або $m=-4, \quad n=2$. Прямі перпендикулярні , якщо виконується умова (4.13), тобто $2m+8m=0$, звідки $m=0$. При цьому n може набувати довільних значень.

Задача 7 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи кожний відрізок від початку координат.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

За умовою $|a|=|b|$. Тоді , якщо $ab>0$, то рівняння прямої $x+y=a$, якщо $ab<0$, то рівняння набуде вигляду $x-y=a$. Точка $M(2;3)$ належить кожній з цих прямих, тому її координати задовольняють кожному рівнянню. Підставляючи в рівняння $x+y=a$, замість змінних координат , координати точки M, одержимо 2+3=a, звідки a=5. Отже, рівняння шуканої прямої в цьому випадку буде $x+y=5$ або $x+y-5=0$. При x=2 і y=3 з рівняння $x-y=a$ маємо $2-3=a$, звідки $a=-1$. Таким чином, у цьому випадку рівняння шуканої прямої буде $x-y+1=0$.

Зазначимо, що коли $a=b=0$, записати рівняння шуканої прямої у вигляді $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=1$ не можна, бо це рівняння втрачає значення. У цьому випадку рівняння прямої треба шукати у вигляді $y=kx$ або $Ax+By=0$, бо умова $a=b=0$ означає, що пряма проходить через початок координат. Отже застосовуючи рівняння (4.14) і враховуючи , що точка M належить цій прямій, матимемо ще одне рівняння шуканої прямої:
$y=kx,\quad 3=2k,\quad k=\frac{3}{2},\quad y=\frac{3}{2}x,\quad 3x-2y=0$.

Таким чином умові задачі задовольняють три прямі:
$x+y-5=0,\quad x-y+1=0,\quad 3x-2y=0$ (див. рис. 4.19).

Задача 8 Задані координати вершин трикутника ABC: A(3;-2), B(1;4), C(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони AB;
2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C;
3) обчислити довжину висоти CD;
4) знайти площу трикутника;
5) знайти внутрішній кут трикутника при вершині А (рис. 4.19).

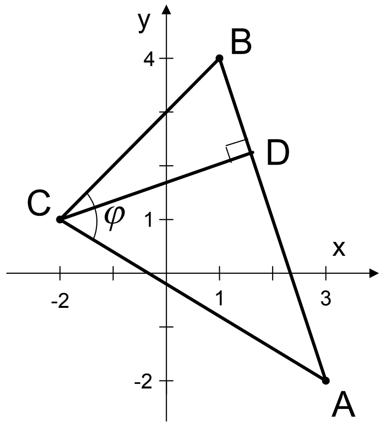


Рис. 4.19

Розв‘язання. 1) Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для $A(3;-2), B(1;4)$ маємо: $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)}$; $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}$;

$-3(x-3)=y+2$; $3x+y-7=0$ - загальне рівняння прямої AB;

$y=-3x+7$ - рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом , $k_{AB}=-3$.

2) Складемо рівняння прямої $CD \perp AB$. З умови перпендикулярності прямих $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} \Rightarrow k_{CD} = \dfrac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку $C(x_0;y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для $C(-2;1)$ маємо: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x+2)$, тобто $x - 3y + 5 = 0$ - загальне рівняння прямої *CD*.

3) Довжину висоти *CD* знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої *AB* за формулою: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де $Ax + By + C = 0$ - рівняння прямої *AB*. $d = \dfrac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{10}} = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ (од.).

4) Площа трикутника дорівнює половині добутку довжини сторони на довжину висоти, яка опущена на цю сторону: $S_\Delta = \frac{1}{2}a\cdot h_a$, тобто $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD$.

Довжину сторони *AB* знайдемо за формулою

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Тоді

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\dfrac{6\sqrt{10}}{5} = 12$ (кв. од.)

5) Тангенс кута φ - кута між прямими *AC* і *BC* знайдемо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC}\cdot k_{AC}}$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5};\quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \;\Rightarrow\; tg\varphi = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-1\cdot\frac{3}{5}} = 4,$$

$\varphi = arctg4 \approx 76^\circ$.

Задача 9 Дано три вершини трикутника : $A(-10;-13), B(-2;3), C(2;1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, що проведена з вершини C. (рис. 4.20).

Розв'язання. Задача зводиться до обчислення відстані від точки B до прямої CD. Напишемо рівняння цієї прямої. Для цього спочатку знайдемо координати точки D, яка поділяє сторону AB навпіл. За формулами (4.3) маємо : $x_D = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $x_D = \dfrac{-10-2}{2}$=-6; $y_D = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, $y_D = \dfrac{-13+3}{2} = -5$. Таким чином, координати точки $D(-6;-5)$. Згідно з рівнянням (4.8):

$\frac{x+6}{2+6}=\frac{y+5}{1+5};\frac{x+6}{8}=\frac{y+5}{6};\frac{x+6}{4}=\frac{y+5}{3};3x-4y-2=0$, отже рівняння прямої $CD: 3x-4y-2=0$. Застосовуючи формулу (4.11) і враховуючи, що $A=3, B=-4, x_0=-2, y_0=3$, остаточно матимемо : $BN=d=\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot 3-2|}{\sqrt{9+16}}=4$.

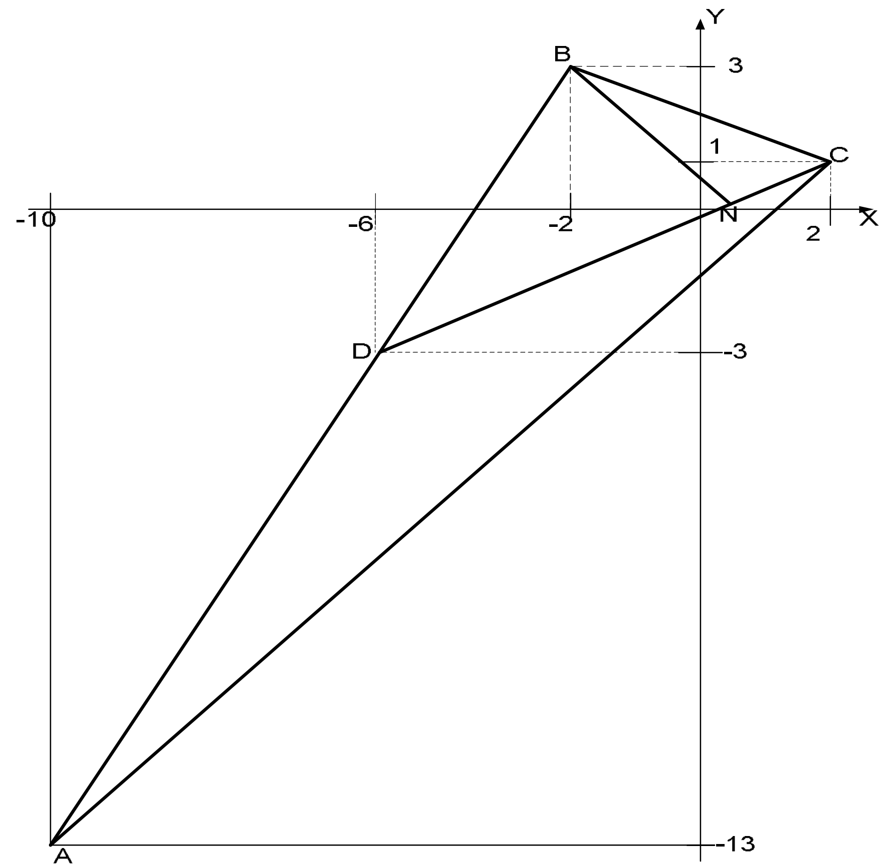


Рис. 4.20

Задача 9 Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x-12y-65=0$ і $5x-12y+26=0$. Обчислити його площу.

Розв'язання. Для обчислення площі квадрата треба знайти довжину його сторони. Для цього досить знайти відстань між паралельними прямими $5x-12y-65=0, 5x-12y+26=0$, на яких розташовані дві сторони квадрату. (умову паралельності цих прямих перевіряти самостійно). Знайдемо на одній з цих прямих, наприклад на прямій $5x-12y-65=0$, координати будь-якої точки. Для цього покладемо $y=0$. Тоді $5x-65=0$, звідки $x=13$. Таким чином, точка $M(13;0)$ належить прямій $5x-12y-65=0$. Тепер задача зводиться до знаходження відстані від точки M до прямої $5x-12y+26=0$. За формулою (4.11) маємо $d=\frac{|5\cdot 13-12\cdot 0+26|}{\sqrt{25+144}}=7$. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 7 , а його площа $S=7^2=49$ кв. од.

Зауваження. Для знаходження точки, що належить прямій $Ax+By+C=0$, досить одній із змінних x або y надати будь-якого дійсного значення і , підставивши його в рівняння прямої, знайти значення іншої змінної.

Питання для самоперевірки

1 Що називають кутовим коефіцієнтом прямої ?

2 Що називають початковою ординатою?

3 Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

4 Запишіть рівняння прямої , яка проходить через задану точку у заданому напрямі.

5 Який вигляд має рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки? Як знайти її кутовий коефіцієнт?

6 Який вигляд має загальне рівняння прямої?

7 Як знайти кутовий коефіцієнт прямої , заданої загальним рівнянням?

8 Рівняння прямої у відрізках.

9 Сформулюйте умову паралельності та перпендикулярності двох прямих , заданих рівняннями $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$.

10 За яких умов прямі $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ а) паралельні, б) перпендикулярні, в) збігаються.

11 Як записати рівняння прямої , яка проходить через початок координат?

12 Як записати рівняння прямої, що паралельна а) осі $0x$, б) осі Oy?

13 Рівняння осі абсцис?

14 Рівняння осі ординат?

15 За якою формулою обчисляється відстань від точки до прямої?

Вправи

1 Дано середини сторін трикутника: $M_1(2;1), M_2(5;3), M_3(3;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

Відповідь : $7x - 2y - 12 = 0; 5x + y - 28 = 0; 2x - 3y - 18 = 0$.

2 Скласти рівняння прямої якщо точка $P(2;3)$ є основою перпендикуляра, опущеного із початку координат на цю пряму.

Відповідь : $2x + 3y - 13 = 0$

3 Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x + 3y + 1 = 0, 2x + y - 1 = 0$, і рівняння однієї з його діагоналей , $3x + 2y + 3 = 0$. Знайти координати вершин цього паралелограма.

Відповідь: (1;-3), (-2;5), (5;-9), (8;-17).

4 Знайти точку Q, яка симетрична точці P відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

Відповідь : $Q(11;-11)$.

5 Дано вершини трикутника: $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного із вершини А на медіану, що проведена із вершини В .

Відповідь: $4x + y - 3 = 0$

6 Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

Відповідь. Рівняння сторін квадрата:
$4x + 3y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 32 = 0, \quad 4x + 3y - 24 = 0, 3x - 4y + 7 = 0.$.

Рівняння діагоналі: $x + 7y - 31 = 0.$

7 Визначити, за яких значень m, n прямі $mx - 2y - 1 = 0, \quad 6x - 4y - n = 0$ 1) мають одну спільну точку; 2) паралельні; 3)збігаються.

Відповідь: 1) $m \neq 3;$ 2) $m = 3, n \neq 2;$ 3)$m = 3, n = 2.$

8 Пряма $3x - 4y - 12 = 0$ відтинає від координатного кута трикутник. Обчислити його площу.

Відповідь: 6 кв. од.

9 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(3;-4)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини кожний відрізок вважається напрямленим від початку координат.

Відповідь: $x + y + 4 = 0$.

10 Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна сторона якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0.$ Обчислити площу цього квадрату.

Відповідь: 5кв. од.

11 Обчислити відстань між паралельними прямими $4x - 3y + 15 = 0$ і $8x - 6y + 25 = 0$

Відповідь: 0,5.

12 Знайти кут між двома прямими: а) $y = -2x; \quad 3x - y + 5 = 0;$

б) $4x + 2y - 5 = 0; 6x + 3y + 1 = 0$

Відповідь: а) $\alpha = 135^0$ б) $\alpha = 0$. Дані прямі паралельні.

13 Дано точки $A(-4;-3)$ і $B(1;2)$. Скласти рівняння прямої, проведеної перпендикулярно до прямої AB через точку C, яка поділяє відрізок AB у відношенні $AC:CB$= 1:2.

Відповідь: $3x + 3y + 11 = 0.$

14 Через точку перетину прямих $x - y + 4 = 0$ і $4x + 2y - 19 = 0$ проведено пряму паралельно до прямої $2x - 3y + 6 = 0.$ Скласти її рівняння.

Відповідь: $12x - 18y + 83 = 0.$

15 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку (2;-3) і утворює з віссю OX кут, вдвоє більший за кут, що утворює з тією самою віссю пряма $y = \dfrac{1}{2}x + 3.$

Відповідь: $4x - 3y - 17 = 0.$

4.1.6 Криві другого порядку

Коло

Колом називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (центра) (рис. 4.21).

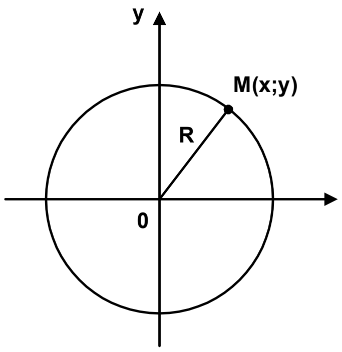


Рис. 4.21 а)

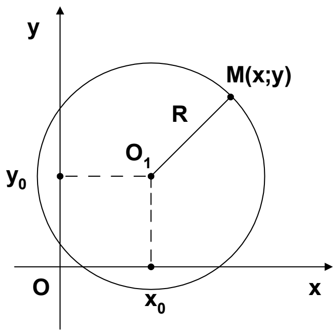


Рис. 4.21 б)

Якщо центр кола точка $O\,(0;0)$, а радіус R, то його рівняння

$$x^2+y^2=R^2 \quad \text{(рис. 4.21 а).}$$

Рівняння кола з центром в точці $O_1(x_0;y_0)$ і радіуса R:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad \text{(рис. 4.21 б).}$$

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок на площині, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала.

Канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ (4.15)

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ - вершини еліпса, $MF_1=r_1$, $MF_2=r_2$ - фокальні радіуси (рис. 4.22).

а) $r_1+r_2=2a$;

$A_1A_2=2a$ – велика вісь;

$B_1B_2=2b$ – мала вісь;

$OA_1=a$ – велика піввісь;

$OB_1=b$ – мала піввісь;

$F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$;

$c^2=a^2-b^2$; $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ - ексцентриситет ($\varepsilon<1$, бо $c<a$).

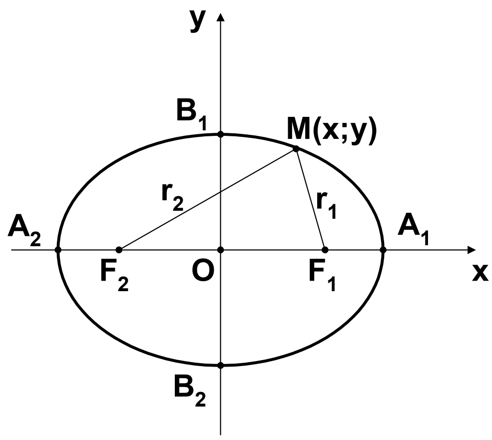


Рис. 4.22 а)

б) $r_1 + r_2 = 2b$;

$A_1A_2 = 2a$ – мала вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – велика вісь;

$OA_1 = a$ – мала піввісь;

$OB_1 = b$ – велика піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$;

$c^2 = b^2 - a^2$; $\quad \varepsilon = \dfrac{c}{b}$ - ексцентриситет ($\varepsilon < 1$, бо $c < b$).

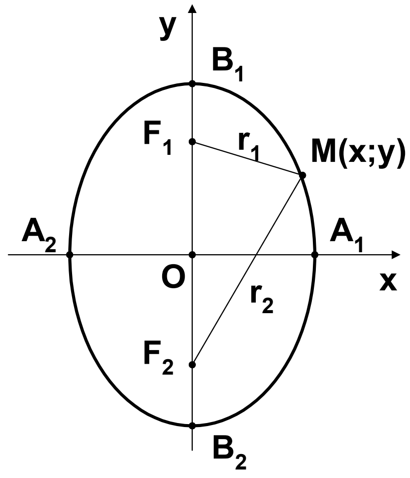


Рис. 4.22 б)

Зазначимо, що фокуси еліпса завжди знаходяться на його великій осі. При $a = b$ одержимо $x^2 + y^2 = a^2$ - рівняння кола.

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала (рис. 4.23).

Канонічне рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ або $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

а) для гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$r_1 - r_2 = \pm 2a$;

Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$ - вершини;

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь;

$OA_1 = a$ – дійсна піввісь;

$OB_1 = b$ – уявна піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(c; 0)$ і $F_2(-c; 0)$;

$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - ексцентриситет ($\varepsilon > 1$, бо $c > a$).

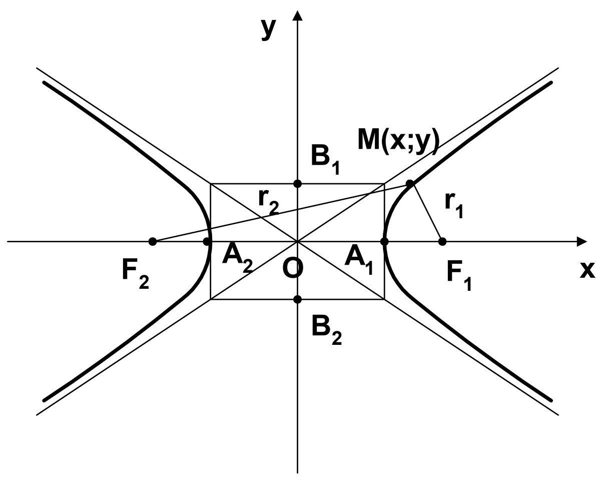


Рис. 4.23 а)

($\varepsilon > 1$, бо $c > b$).

б) для гіперболи $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

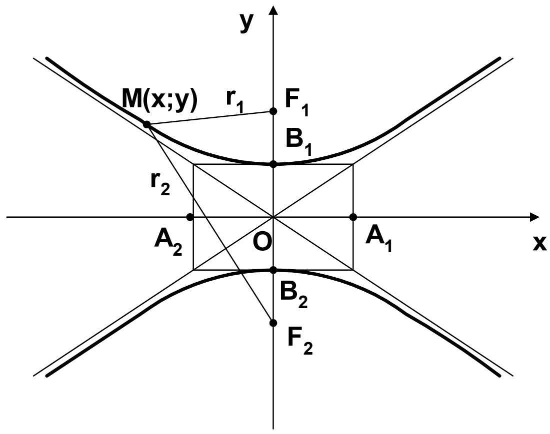


Рис. 4.23 б)

$r_1 - r_2 = \pm 2b$;
Точки $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ - вершини;
$B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь; $A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь;
$OB_1 = b$ – дійсна піввісь;
$OA_1 = a$ – уявна піввісь;
$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$;
$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$ - ексцентриситет

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Слід зазначити, що фокуси гіперболи завжди знаходяться на її дійсній осі. Гіперболу, в якої $a = b$, називають рівнобічною і її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$ або $y^2 - x^2 = a^2$.

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи $y^2 = \pm 2px$ або $x^2 = \pm 2py$,
де p – відстань від фокуса до директриси.

Точка $O(0; 0)$ - вершина параболи, $MF = r$ - фокальний радіус, d - відстань від точки $M(x; y)$ до директриси (рис. 4.24).
За означенням параболи $r = d$.

Для парабол $y^2 = \pm 2px$ рівняння директрис $x = \mp\dfrac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(\pm\dfrac{p}{2}; 0\right)$ (рис. 4.24 а), б)).

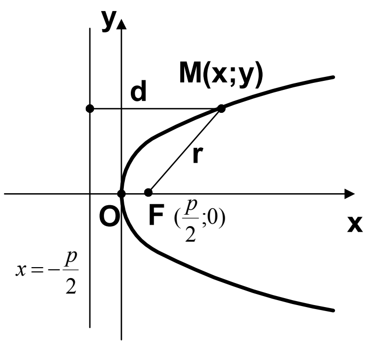


Рис. 4.12 а)

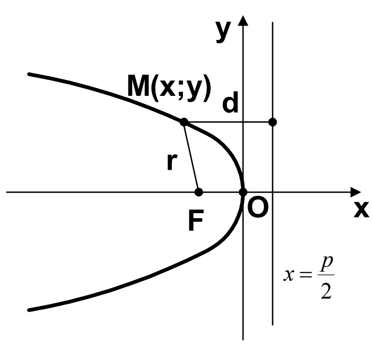


Рис. 4.24 б)

Для парабол $x^2 = \pm 2py$ рівняння директрис $y = \mp\frac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(0; \pm\frac{p}{2}\right)$ (рис.4.24 в), г)).

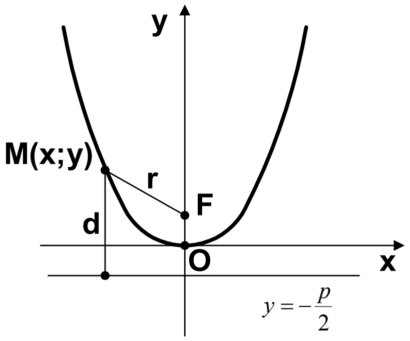


Рис. 4.24 в)

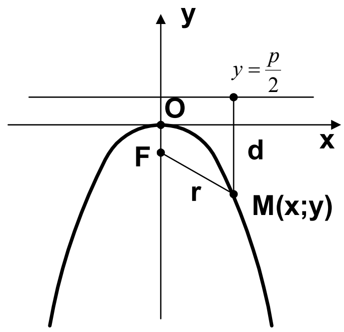


Рис. 4.24 г)

Фокус параболи завжди знаходиться на її осі симетрії.

Розв'язання задач

Задача 1 Скласти рівняння кола, якщо точки $A(3;2)$ і $B(-1;6)$ є кінцями одного з його діаметрів.

Розв'язання. За умовою AB – діаметр кола. це означає, що його центр знаходиться на середині відрізка AB. За формулами (4.3):

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1;$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Тобто $C(1;4)$ - центр кола. Тепер ясно, що рівняння кола треба шукати у вигляді $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат координати точки A або B (кожна з них належить колу) і враховуючи, що $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, матимемо: $(3-1)^2 + (2-4)^2 = R^2$, звідки $R^2 = 8$.

Отже, рівняння шуканого кола $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$.

Зауважимо, що, оскільки радіус кола $R = AC = BC$, то його можна було б знайти і за формулою (4.1).

Задача 2 Скласти рівняння кола, якщо його центр знаходиться в початку координат і пряма $3x - 4y + 20 = 0$ є дотичною до кола.

Розв'язання. Точка $O(0;0)$ - центр кола, тому його рівняння слід шукати у вигляді $x^2 + y^2 = R^2$. З елементарної геометрії відомо, що радіус, проведений в точку дотику кола і дотичної, перпендикулярний до дотичної, отже, його довжину можна знайти як відстань від точки $O(0;0)$ до прямої $3x - 4y + 20 = 0$ (рис. 4.25).

За формулою (4.11)

$$R = \frac{|\ 3\cdot 0 - 4\cdot 0 + 20\ |}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4.$$

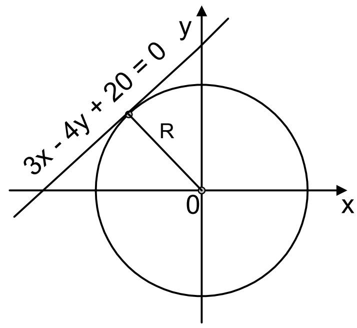


Рис. 4.25

Таким чином, рівняння шуканого кола

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Задача 3 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою $2a = 20$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$. Тоді $a = 10$, а згідно з формулою $\varepsilon = \frac{c}{a}$: $c = a\cdot\varepsilon = 10\cdot\frac{3}{5} = 6$. Тепер із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ знаходимо: $b^2 = 100 - 36 = 64$. Підставляючи значення $a^2 = 100$ і $b^2 = 64$ в рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, одержимо $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. Це і є рівняння шуканого еліпса.

Задача 4 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на вісі ординат симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою фокуси еліпса лежать на вісі ординат, тому його мала вісь $2a = 16$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$. Отже, $a = 8$, $c = \frac{3}{5}b$.

Із співвідношення $a^2 = b^2 - c^2$ маємо: $64 = b^2 - \frac{9}{25}b^2$ або $64 = \frac{16}{25}b^2$, звідки $b^2 = 100$. Таким чином, рівняння шуканого еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

Задача 5 Скласти найпростіше рівняння еліпса, в якого відстані одного з фокусів від кінців великої осі дорівнюють 5 і 1.

Розв'язання. Нехай $A_1A_2 = 2a$ - велика вісь еліпса, F_1 - один з його фокусів (рис. 4.26).
За умовою $A_2F_1 = 5$, $F_1A_1 = 1$. Тоді $A_2A_1 = A_2F_1 + F_1A_1 = 5 + 1 = 6$. Отже, $2a = 6$, звідки $a = OA_1 = 3$, $OF_1 = OA_1 - F_1A_1 = 3 - 1 = 2$, тобто $c = 2$.

Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ маємо: $b^2 = 9 - 4 = 5$.

Підставляючи значення $b^2 = 5$ і $a^2 = 9$ в рівняння (4.15), одержуємо:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Це і є рівняння шуканого еліпса.

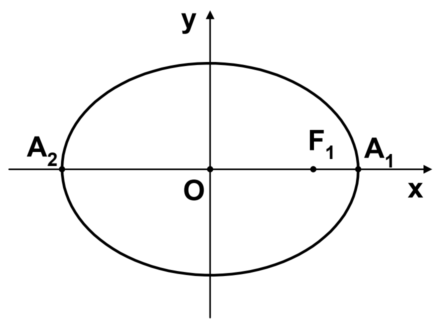


Рис. 4.26

Задача 6 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння гіперболи у вигляді $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметри a і b знайдемо із системи: $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$

З першого рівняння системи: $b = \frac{4}{3}a$. Підставляючи цей вираз в друге рівняння системи, одержуємо: $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 100$, звідки $a^2 = 36$. Тоді $b^2 = 100 - 36 = 64$ і шукане рівняння гіперболи $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Задача 7 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси гіперболи розташовані на вісі ординат, тому її рівняння буде мати вигляд: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Параметри a и b визначаються із системи: $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$

Враховуючи, що $c = 5$, маємо: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ \frac{5}{b} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3. \end{cases}$

Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

Задача 8 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо вона проходить через точку $M_1(-5;3)$ і її ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Підставляючи в це рівняння замість змінних координат x і y координати точки M_1 (бо вона належить гіперболі), одержуємо: $\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$. За умовою $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$, звідки $c=a\sqrt{2}$. Тоді із співвідношення $b^2=c^2-a^2$ матимемо $b^2=2a^2-a^2=a^2$.

Таким чином, для знаходження невідомих параметрів a і b гіперболи маємо систему: $\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\ b^2=a^2.\end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $a^2=b^2=16$.

Отже, шукане рівняння гіперболи $x^2-y^2=16$.

Задача 9 Скласти найпростіше рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей, якщо вона перетинає вісь Oy і проходить через точки $M_1\left(24;5\sqrt{5}\right)$ і $M_2(0;5)$. Знайти фокуси цієї гіперболи.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Через те, що точки M_1 і M_2 належать гіперболі, їх координати задовольняють рівнянню гіперболи. Підставляючи координати даних точок в це рівняння, одержуємо: $\begin{cases}\frac{125}{b^2}-\frac{576}{a^2}=1,\\ \frac{25}{b^2}=1.\end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $b^2=25,\ a^2=144$.

Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$.

Із співвідношення $c^2=a^2+b^2$ знаходимо c: $c=\sqrt{25+144}=13$.

Фокуси гіперболи розташовані на осі Oy, тому $F_1(0;13)$, $F_2(0;-13)$.

Задача 10 Скласти найпростіше рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться у вершинах, а вершини – у фокусах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ (рис. 4.27).

Розв‘язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, бо її вершини і фокуси знаходяться на осі абсцис.

Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ маємо: $b^2=9-4=5$.

За умовою $c_Г=a_E=5$, $a_Г=c_E$. Із співвідношення $c_E{}^2=a_E{}^2-b_E{}^2$: $c_E=\sqrt{25-16}=3$. Отже, $a_Г=c_E=3$.

Із співвідношення $b_Г{}^2=c_Г{}^2-a_Г{}^2$ знаходимо $b_Г{}^2=25-9=16$.

Таким чином, шукане рівняння гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

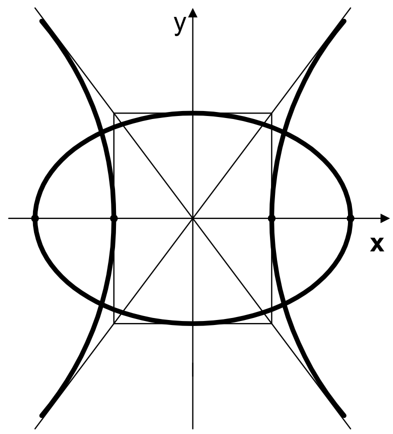


Рис. 4.27

Задача 11 Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходяться в початку координат, якщо вона симетрично розташована відносно осі *Ox* і проходить через точку $M_1(-1;3)$.

Розв’язання. Через те, що вершина параболи знаходиться в точці $O(0;0)$, а вісь *Ox* є віссю симетрії, то рівняння параболи треба шукати у вигляді $y^2=2px$.

Параметр p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку $M_1(-5;3)$. Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо $3^2=2p(-1)$, звідки $2p=-9$.

Отже, шукане рівняння параболи $y^2=-9x$.

Задача 12 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Oy*, якщо вона проходить через точки перетину прямої $x+y=0$ і кола $x^2+y^2+8y=0$.

Розв’язання. Знайдемо точки перетину прямої і кола, для чого розв‘яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+y=0,\\x^2+y^2+8y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-y,\\(-y)^2+y^2+8y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0,\\2y^2+8y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0,\\\left[\begin{array}{l}y_1=0,\\y_2=-4;\end{array}\right.\end{cases}\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=0,\\y_1=0,\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x_2=4,\\y_2=-4.\end{array}\right.\end{cases}$$

Отже, $O(0;0)$ і $M(4;-4)$ - шукані точки перетину.

Рівняння параболи, яка симетрична відносно осі *Oy* і проходить через початок координат, має вигляд $x^2=2py$.

Параметр p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку $M(4;-4)$. Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо $4^2 = 2p(-4)$, звідки $2p = -4$.

Таким чином, шукане рівняння параболі набуде вигляду $x^2 = -4y$.

Задача 13 Скласти канонічне рівняння параболи, якщо рівняння її директриси $y - 3 = 0$.

Розв‘язання. Директриса параболи $y - 3 = 0$ перпендикулярна до осі *Oy*, а це означає, що *Oy* – вісь симетрії параболи і рівняння її треба шукати у вигляді $x^2 = 2py$, де p – відстань від фокуса до директриси.

Відомо, що фокус параболи знаходиться на такій відстані від початку координат, як і директриса, тому p = 6, бо відстань від початку координат до директриси дорівнює 3 (рис. 4.28).

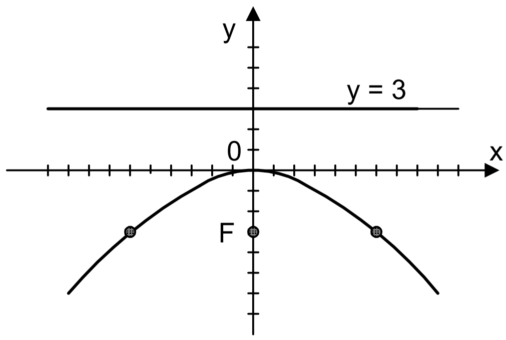


Рис.4.28

Таким чином, шукане рівняння параболи $x^2 = -12y$.

Питання для самоперевірки

1 Що називається колом?

2 Яке рівняння має коло радіуса R з центром у точці $(x_0; y_0)$?

3 Який вигляд має канонічне рівняння кола?

4 Що називається еліпсом? Напишіть канонічне рівняння еліпса, його характерні точки і величини.

5 Що називають ексцентриситетом еліпса?

6 Укажіть співвідношення між величинами a, b, c для еліпса.

7 Де знаходяться фокуси еліпса?

8 Що називають гіперболою?

9 Яку гіперболу називають рівнобічною?

10 Запишіть канонічні рівняння гіперболи та співвідношення між величинами a, b, c .

11 Що називають ексцентриситетом гіперболи?

12 Напишіть рівняння асимптот гіперболи.

13 Де знаходяться фокуси гіперболи?

14 Що називають параболою?

15 Запишіть канонічні рівняння параболи.

16 Що називають параметром параболи?

17 Чому дорівнює ексцентриситет параболи?

18 Напишіть рівняння директриси і укажіть координати фокуса параболи $y^2 = 2px$.

Вправи

1 Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $M_1(2;6)$, а його центр знаходиться у точці $C(-1;2)$.

Відповідь: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

2 Коло дотикається до осі Ox в початку координат і проходить через точку $A(0;-4)$. Скласти його рівняння.

Відповідь: $x^2+y^2+4y=0$.

3 Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$.

Відповідь: $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

4 Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, а його центр знаходиться у точці $C(6;-8)$.

Відповідь: $(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

5 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ і його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

6 Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершин малої осі під прямим кутом.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7 Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси знаходяться у точках $(\pm 12;0)$.

Відповідь: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

8 Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2+5y^2=20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

Відповідь: 16 кв.од.

9 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі ординат симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$, а відстань між вершинами дорівнює 48.

Відповідь: $-\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{576}=1$.

10 Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот гіперболи $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Відповідь: $a = 3$, $b = 4$, $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, $y = \pm\frac{4}{3}x$.

11 Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

Відповідь: 12 кв.од.

12 Обчислити ексцентриситет рівносторонньої гіперболи.

Відповідь: $\sqrt{2}$.

13 Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 5, а ексцентриситет $\varepsilon = 1{,}4$.

Відповідь: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$.

14 Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $9x^2 + 25y^2 - 225 - 0$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

15 Фокус параболи має координати $F(-6;0)$, а рівняння директриси $x - 6 = 0$. Скласти рівняння параболи.

Відповідь: $y^2 = -24x$.

16 Скласти найпростіше рівняння параболи, фокус якої знаходиться у точці перетину прямої $2x - 5y - 8 = 0$ з віссю абсцис. Побудувати цю параболу.

Відповідь: $y^2 = 16x$.

17 Скласти рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі абсцис і проходить через точки $O(0;0)$ і $M(5;3)$.

Відповідь: $y^2 = 1{,}8x$.

18 Парабола, симетрична відносно осі *Oy*, проходить через точку $M(6;3)$ і початок координат. Скласти її рівняння.

Відповідь: $x^2 = 12y$.

19 На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.

Відповідь: $M_1(1;4)$, $M_2(1;-4)$.

20 Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y - x = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8x - 0$ і симетрична відносно осі абсцис.

Відповідь: $y^2 = -4x$, $x = 1$.

4.1.7 Загальне рівняння лінії другого порядку

Лінія, яка в деякій декартовій системі координат визначається рівнянням другого степеня, називається лінією другого порядку. Загальне рівняння другого степеня (з двома змінними) прийнято записувати у вигляді

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.16)$$

Залежно від значень коефіцієнтів рівняння (4.16) може визначати коло, еліпс, гіперболу, параболу, пару прямих, які перетинаються, пару паралельних прямих, пару прямих, які збігаються, точку, і, нарешті, може не визначати ніякого геометричного образу.

Щоб визначити, яку лінію визначає рівняння (4.16), складаємо два визначника:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ називають дискримінантом рівняння (4.16), а δ - дискримінантом старших його членів. Залежно від значень Δ і δ (табл. 4.7) рівняння (4.16) визначає такий геометричний образ:

Таблиця 4.7

Залежність	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Еліпс (дійсний або уявний)	Точка
$\delta < 0$	Гіпербола	Пара прямих, які перетинаються
$\delta = 0$	Парабола	Пара паралельних прямих (дійсних або уявних)

З іншого боку, щоб визначити, яку лінію визначає рівняння (4.16) при заданих числових значеннях коефіцієнтів, використовують перетворення повороту і паралельного переносу осей координат. З допомогою перетворення повороту осей завжди можна від рівняння (4.16) перейти до рівняння другого степеня, яке не містить члена з добутком координат. А потім, з допомогою перетворення паралельного переносу осей завжди можна одержати найпростіше рівняння кривої другого порядку і за ним визначити вид кривої. Покажемо на прикладах, як це робиться.

Зауважимо насамперед, що далі розглядатимемо лише такі рівняння другого порядку, в яких $B = 0$, тобто рівняння виду

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Кожне з рівнянь

1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 54y + 145 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;

3) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;

4) $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$;

5) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$;

6) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$;

7) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;

8) $x^2 + 6x + 2y + 5 = 0$;

9) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$;

10) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

шляхом паралельного переносу осей координат привести до найпростішого вигляду; установити, які геометричні образи вони визначають і побудувати ці образи.

Розв‘язання. 1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 54y + 145 = 0$.

Для спрощення даного рівняння об‘єднаємо в одну групу доданки зі змінною *x*, а в другу – зі змінною y:

$$\left(4x^2 - 40x\right) + \left(9y^2 + 54y\right) + 145 = 0;$$

винесемо за дужки коефіцієнти при квадратах x і y:

$$4\left(x^2 - 10x\right) + 9\left(y^2 + 6y\right) + 145 = 0;$$

вирази в дужках доповнимо до повних квадратів:

$$4\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5\right) + 9\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot 3\right) + 145 = 0;$$

$$4\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 5^2\right) + 9\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 3^2\right) + 145 = 0;$$

$$4\left(\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2\right) - 5^2\right) + 9\left(\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2\right) - 3^2\right) + 145 = 0;$$

$$4\left((x-5)^2 - 25\right) + 9\left((y+3)^2 - 9\right) + 145 = 0;$$

$$4(x-5)^2 - 100 + 9(y+3)^2 - 81 + 145 = 0;$$

$$4(x-5)^2 + 9(y+3)^2 = 36;$$

Розділимо обидві частини рівняння на 36:

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$$

Виконаємо перетворення паралельного переносу осей з новим початком координат $O_1(5; -3)$: $x - 5 = X$, $y + 3 = Y$.

Після виконаних перетворень рівняння набуде вигляду $\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$.

Тепер можна зробити висновок, що це рівняння еліпса, півосі якого $a = 3$ і $b = 2$.

Побудуємо цю криву в системі координат XO_1Y (рис. 4.29). Її також можна віднести до і до вихідної системи координат XOY (рис. 4.29).

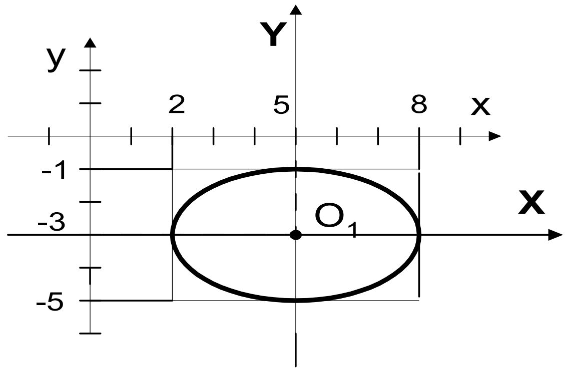


Рис. 4.29

2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Виконуючи такі самі перетворення, як і в попередньому прикладі, одержимо:

$$\left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 4y\right) - 20 = 0;$$

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 - 20 = 0;$$

$$\left(x^2 - 1\right)^2 + \left(y + 2\right)^2 = 25.$$

Це рівняння кола з центром у точці $O_1\left(1; -2\right)$ і радіуса $R = 5$ (рис. 4.30).

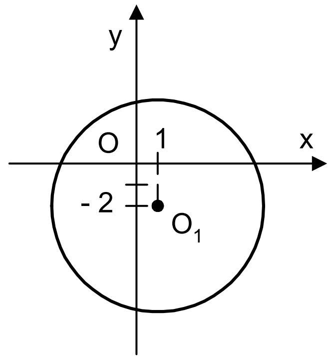


Рис. 4.30

3) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;

$$\left(9x^2 - 54x\right) - \left(16y^2 + 64y\right) - 127 = 0;$$

$$9\left(x^2 - 6x\right) - 16\left(y^2 + 4y\right) - 127 = 0;$$

$$9\left(x^2 - 6x + 9\right) - 81 - 16\left(y^2 + 4y + 4\right) + 64 - 127 = 0;$$

$$9\left(x - 3\right)^2 - 16\left(y + 2\right)^2 = 144;$$

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{16} - \frac{\left(y+2\right)^2}{9} = 1;$$

$$x - 3 = X, \quad y + 2 = Y;$$

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

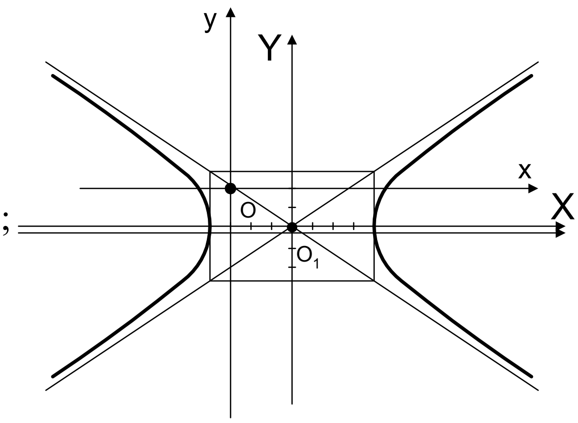


Рис. 4.31

Це рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої $a = 4$, уявна $b = 3$. Точка $O_1\left(3; -2\right)$ - новий початок координат (центр гіперболи) (рис. 4.31).

4) $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$;

$$\left(y^2 + 4y\right) - 4x + 16 = 0;$$

$$\left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 - 4x + 16 = 0;$$

$$\left(y + 2\right)^2 = 4x - 12;$$

$$\left(y + 2\right)^2 = 4\left(x - 3\right);$$

$$x - 3 = X; \quad y + 2 = Y;$$

$$Y^2 = 4X.$$

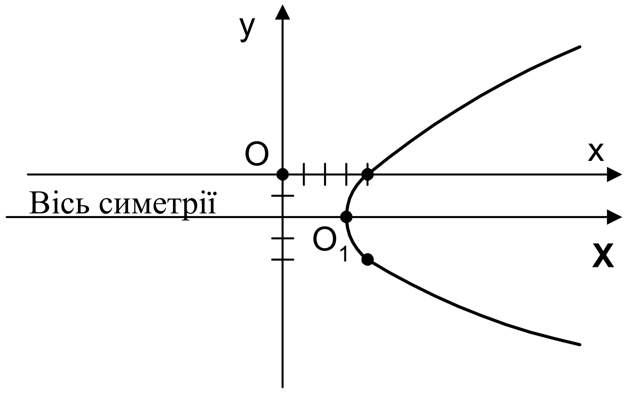


Рис. 4.32

Це рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $O_1(3;-2)$, а вісь симетрії осі Ox (рис. 4.32).

Зазначимо, що для побудови параболи треба мати принаймні три точки. Однією з них є точка O_1 - вершина параболи. Дві інші знаходимо так: покладемо $y=0$ у рівнянні $y^2-4x+4y+16=0$. Тоді $x=4$. Отже, друга точка має координати $(4;0)$ і належить параболі. Далі, використовуючи властивість симетрії параболи, знаходимо третю точку. Її координати у системі XOY $(4;-4)$.

5) $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$;

$$9\left(x^2+2x\right)+4\left(y^2-2y\right)+49=0;$$

$$9\left(x^2+2x+1\right)-9+4\left(y^2-2y+1\right)-4+49=0;$$

$$9(x+1)^2+4(y-1)^2=-36;$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=-1.$$

Зазначимо, що ліва частина одержаного рівняння є число додатне за будь-яких x і y й тому у площині XOY немає жодної точки, координати якої б задовольняли даному рівнянню.
Таким чином, дане рівняння не визначає ніякого геометричного образу (є рівнянням «уявного еліпса»).

6) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$;

$$4\left(x^2+2x\right)-\left(y^2+2y\right)+3=0;$$

$$4\left(x^2+2x+1\right)-4-\left(y^2+2y+1\right)+1+3=0;$$

$$4(x+1)^2-(y+1)^2=0;$$

$$x+1=X,\ \ y+1=Y;$$

$$4X^2-Y^2=0.$$

Це рівняння визначає вироджену гіперболу – пару прямих, які перетинаються в точці $O_1(-1;-1)$ (новий початок координат) (рис. 4.33).

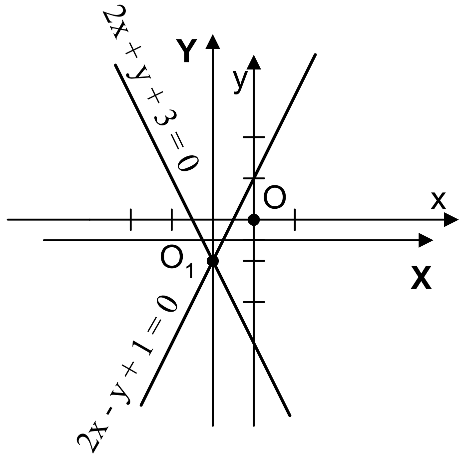


Рис. 4.33

Зазначимо, що рівняння прямих у системі XO_1Y $Y=-2X$ і $Y=2X$, а в системі XOY $y+1=-2(x+1)$, або $2x+y+3=0$, і $y+1=2(x+1)$, або

$$2x-y+1=0.$$

7) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$;

$$\left(x^2+4x\right)+\left(y^2-2y\right)+5=0;$$

$$\left(x^2+4x+4\right)-4+\left(y^2-2y+1\right)-1+5=0;$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=0.$$

Це рівняння визначає єдину точку, координати якої $(-2;1)$.

8) $x^2+6x+2y+5=0;$

$$\left(x^2+6x+9\right)-9+2y+5=0;$$

$$(x+3)^2=-2y+4;$$

$$(x+3)^2=-2(y-2);$$

$$x+3=X,\quad y-2=Y;$$

$$X^2=-2Y.$$

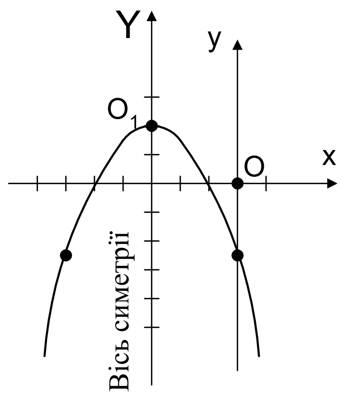


Рис. 4.34

Це рівняння параболи, вершина якої знаходиться у точці $O_1(-3;2)$, а вісь симетрії паралельна осі Oy (рис. 4.34).

Зазначимо, що при $x=0$ $y=-2{,}5$.

9) $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$;

$$2\left(x^2+4x\right)+3\left(y^2-2y\right)+11=0;$$

$$2\left(x^2+4x+4\right)-8+3\left(y^2-2y+1\right)-3+11=0;$$
$$2\left(x+2\right)^2+3\left(y-1\right)^2=0;$$
$$x+2=X;\quad y-1=Y;$$
$$2X^2+3Y^2=0.$$

Це рівняння визначає вироджений еліпс (єдину точку $O_1\left(-2;1\right)$, координати якої задовольняють вихідне рівняння).

10) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$;
$$\left(x^2+6x+9\right)-9+\left(y^2-4y+4\right)-4+14=0;$$
$$\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2=-1.$$

Це рівняння не визначає ніякого геометричного образу на площині, оскільки немає жодної точки на площині XOY, координати якої б задовольняли йому. Дійсно, за будь-яких значень x і y ліва частина рівняння є число додатне і тому не може дорівнювати -1.

Вправи

Спростити наведені далі рівняння, установити, які геометричні образи вони визначають і побудувати ці образи.

1 $x^2-2y^2+2x+12y-33=0$.

Відповідь: Рівняння визначає гіперболу $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{8}=1$. $O_1\left(-1;3\right)$ - новий початок координат.

2 $2x^2-8x-y+11=0$.

Відповідь: Рівняння визначає параболу $Y=2X^2$. $O_1\left(2;3\right)$ - новий початок координат (вершина параболи).

3 $x^2+4y^2-6x+8y-3=0$.

Відповідь: Рівняння визначає еліпс $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}=1$. $O_1\left(3;-1\right)$ - новий початок координат.

4 $x^2+y^2-10x+4y+29=0$.

Відповідь: Рівняння визначає одну точку $\left(5;-2\right)$.

5 $4x^2-5y^2+24x+10y+51=0$.

Відповідь: Рівняння визначає гіперболу $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{5}=1$. $O_1\left(-3;1\right)$ - новий початок координат.

6 $y^2+4x-4y=0$.

Відповідь: Рівняння визначає параболу $Y^2 = -4X$. $O_1(1; 2)$ - новий початок координат (вершина параболи).

7 $x^2 - 3y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

Відповідь: Рівняння визначає пару прямих, які перетинаються в точці $O_1(2; -1)$ - новий початок координат.

8 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$.

Відповідь: Рівняння не визначає ніякого геометричного образу.

9 $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Відповідь: Рівняння визначає коло з центром в точці $O_1(2; -3)$ і радіуса $R = \sqrt{13}$.

10 $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 99 = 0$.

Відповідь: Рівняння не визначає ніякого геометричного образу.

4.2 Аналітична геометрія у просторі

Рівняння $F(x; y; z) = 0$ визначає у просторі деяку поверхню, тобто геометричне місце точок, координати яких задовольняють цьому рівнянню. Рівняння $F(x; y; z) = 0$ називають рівнянням поверхні, а x, y, z - змінними координатами.

Найпростішою поверхнею у просторі є площина.

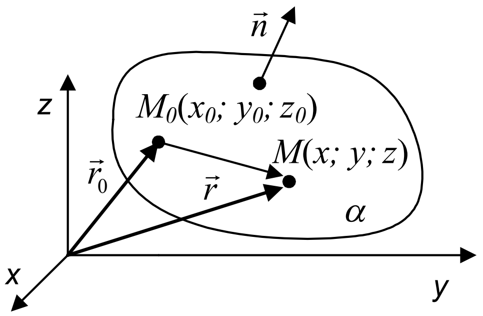
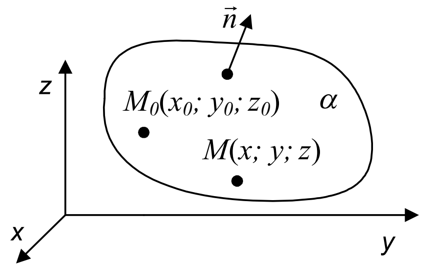
4.2.1 Площина в просторі

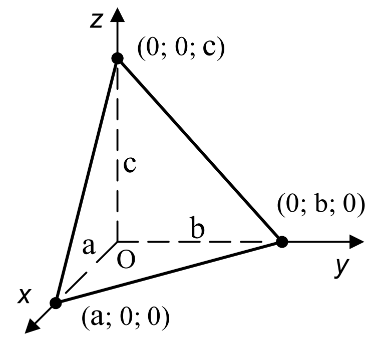
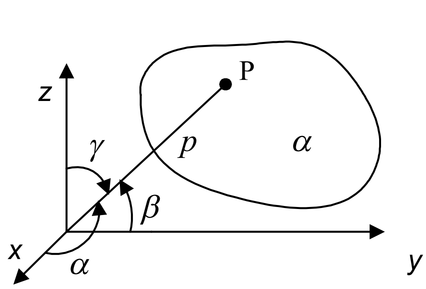
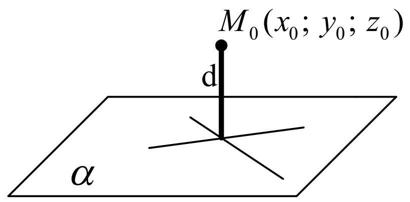
Всяке рівняння першого степеня відносно змінних координат визначає площину, і навпаки, всяка площина визначається рівнянням першого степеня відносно змінних x і y.

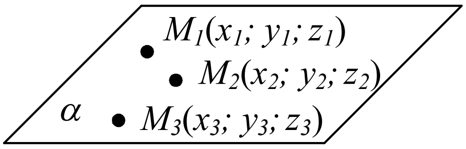
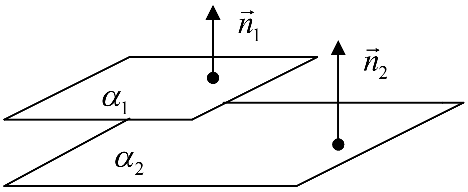
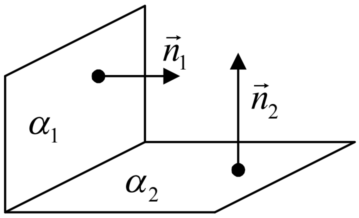
Площина у просторі відносно прямокутної системи координат може бути задана різними способами наприклад, одночасно визначається точкою і вектором, перпендикулярним до неї (будь-який, що не дорівнює нулю вектор, перпендикулярний до площини, називають нормальним і позначають $\vec{n}$); трьома точками, які не належать одній прямій; відрізками, які площина відтинає на осях координат і т. ін.

Залежно від способу завдання площини розглядають різні види її рівняння (табл. 4.8).

Таблиця 4.8

№ п/п	Назва	Спосіб задання	Рівняння
1	2	3	4
1	Векторне рівняння площини	 $\vec{n} = \{A; B; C\} \perp \alpha$ $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ $\vec{r} = \{x; y; z\}$	$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$
2	Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі (в‘язка площин)	 $M_0\,(x_0;\, y_0;\, z_0) \in \alpha$ $\vec{n} = \{A; B; C\} \perp \alpha$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (4.17)
3	Загальне рівняння площини	$A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$
4	Рівняння площини, яка проходить через початок координат	$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$
5	Рівняння площини, яка паралельна а) осі Ox б) осі Oy в) осі Oz	$A = 0,\ D \neq 0$ $B = 0,\ D \neq 0$ $C = 0,\ D \neq 0$	$By + Cz + D = 0$ $Ax + Cz + D = 0$ $Ax + By + D = 0$

6	Рівняння площини, яка проходить через а) вісь Ox б) вісь Oy в) вісь Oz	$A=0,\ D=0$ $B=0,\ D=0$ $C=0,\ D=0$	$By+Cz=0$ $Ax+Cz=0$ $Ax+By=0$
7	Рівняння площини, яка паралельна а) площині yOz б) площині xOz в) площині xOy	$B=0,\ C=0,\ D\neq 0$ $A=0,\ C=0,\ D\neq 0$ $A=0,\ B=0,\ D\neq 0$	$Ax+D=0$ $By+D=0$ $Cz+D=0$
8	Рівняння координатних площин: а) площини yOz б) площини xOz в) площини xOy	$B=0,\ C=0,\ D=0$ $A=0,\ C=0,\ D=0$ $A=0,\ B=0,\ D=0$	$x=0$ $y=0$ $z=0$
9	Рівняння площини у відрізках		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
10	Нормальне рівняння площини	 $OP\perp\alpha$, $\lvert OP\rvert=p$	$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+$ $+z\cdot\cos\gamma-p=0$ або $\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$
11	Відстань від точки до площини		$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (4.18)

		$Ax + By + Cz = 0 \quad (\alpha)$	
12	Рівняння площини, яка проходить через три задані точки		$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ (4.19)
13	Кут між двома площинами	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\phi = \pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
14	Умова паралельності двох площин	 $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (4.20)
15	Умова перпендику-лярності двох площин	 $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (4.21)
16	Рівняння жмутка (в‘язки) площин, які проходять через лінію перетину двох даних площин	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+$ $+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (4.22)

Розв'язання задач

Задача 1 Точка P (2; -1; -1) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини .

Розв'язання. За умовою точка P належить шуканій площині, тому її рівняння шукатимемо у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Відомо також, що $OP \perp \alpha$. Отже, вектор $\overrightarrow{OP}$ можна вважати нормальним вектором $\vec{n} = \{A; B; C\}$ площини α. Через те, що $\overrightarrow{OP} = \vec{n} = \{2; -1; -1\}$, бо координати точки О (0; 0; 0), підставляючи його координати і координати точки P в рівняння площини, одержимо $2(x-2)-(y+1)-(z+1)=0$ або $2x-y-z-6=0$. Це і є шукане рівняння.

Задача 2 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 (3; -2; -7) паралельно до площини $2x-3z+5=0$ (α_1).

Розв'язання. Точка M_1 належить шуканій площині α, тому її рівняння, згідно з (4.17), матиме вигляд $A(x-3)+B(y+2)+C(z+7)=0$ (α).

За умовою $\alpha \parallel \alpha_1$, отже, $\vec{n}=\{A;B;C\} \parallel \vec{n}_1=\{2;0;-3\}$ і, згідно з умовою паралельності векторів, $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{0}=\dfrac{C}{-3}$. А це означає, що вектор $\vec{n}_1=\{2;0;-3\}$ можна вважати нормальним вектором площини α. Таким чином, рівняння цієї площини $2(x-3)+0(y+2)-3(z+7)=0$ або $2x-3z-27=0$.

Цю задачу можна розв‘язати інакше: якщо площини паралельні, то їх рівняння можна перетворити так, що вони відрізнятимуться лише вільними членами. Тоді рівняння площин, паралельних даній площині, матиме вигляд: $2x-3z+D=0$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат х і y координати точки M_1 (3; –2; –7), через яку проходить площина, одержуємо рівняння $2\cdot 3-3\cdot(-7)+D=0$, звідки $D=-27$. Таким чином, рівняння шуканої площини набуде вигляду $2x-3z-27=0$.

Задача 3 Визначити, за яких значень l і m площини $2x+ly+3z-5=0$ (α_1) і $mx-6y-6z+2=0$ (α_2) будуть паралельні.

Розв'язання. За умовою (4.20) паралельності двох площин маємо: $\dfrac{2}{m}=\dfrac{l}{-6}=\dfrac{3}{-6}$, бо $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}=\{2;l;3\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}=\{m;-6;-6\}$.

Розв‘язуючи рівняння $\dfrac{2}{m}=\dfrac{3}{-6}$, одержуємо $m=\dfrac{2\cdot(-6)}{3}=-4$. З рівняння $\dfrac{l}{-6}=\dfrac{3}{-6}$ матимемо $l=3$.

Таким чином, при $l=3$ і $m=-4$ площини (α_1) і (α_2) будуть паралельні.

Задача 4 Визначити, за яких значень l площини $5x+y-3z-2=0$ (α_1) і $2x+ly-3z+1=0$ (α_2) будуть перпендикулярні.

Розв'язання. $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}=\{5;1;-3\}$ - нормальний вектор площини (α_1), $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}=\{2;l;-3\}$ - нормальний вектор площини (α_2).

Згідно з умовою (4.21) перпендикулярності двох площин, маємо $5\cdot 2+1\cdot l+(-3)\cdot(-3)=0$, звідки $l=-19$.

Отже, при $l=-19$ площини (α_1) і (α_2) будуть перпендикулярні.

Задача 5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3;4;-5)$ паралельно векторам $\overrightarrow{a_1}=\{3;1;-1\}$ і $\overrightarrow{a_2}=\{1;-2;1\}$.

Розв'язання. За умовою $\overrightarrow{a_1}\parallel\alpha$ і $\overrightarrow{a_2}\parallel\alpha$ (рис. 4.35), а це означає, що $\vec{n}\perp\overrightarrow{a_1}$ і $\vec{n}\perp\overrightarrow{a_2}$, а тому $\vec{n}=\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$.

Отже, $\vec{n}=\{A;B;C\}=\{-1;-4;-7\}$. Використовуючи тепер рівняння (4.17) і враховуючи, що точка $M_1(3;4;-5)$ належіть α, а вектор $\vec{n}=\{-1;-4;-7\}$ є нормальним вектором цієї площини, матимемо $-1(x-3)-4(y-4)-7(z+5)=0$ або $x+4y+7z+16=0$. Це і є шукане рівняння.

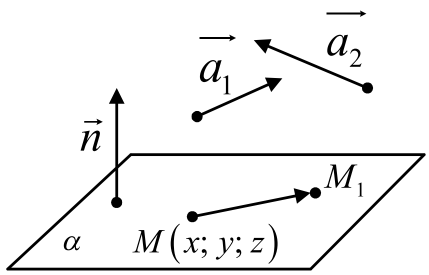


Рис. 4.35

Зазначимо, що нормальним вектором площини α можна було б вважати і інший вектор, наприклад вектор $\vec{n}_1=\{1;4;7\}$, а також те, що і рівняння площини α можна було б знайти інакше.

Для цього треба на площині α взяти довільну точку $M(x;y;z)$ і ввести в розгляд вектор $\overrightarrow{M_1M}=\{x-3;y-4;z+5\}$. Через те, що вектори $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ паралельні α, а вектор $\overrightarrow{M_1M}$ належить α, то ці три вектори можна вважати колінеарними і тому їх мішаний добуток дорівнюватиме нулю, тобто $\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{a_2}=0$, або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z+5\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи визначник по елементам першого рядка, одержимо $-(x-3)-4(y-4)-7(z+5)=0$, або $x+4y+7z+16=0$.

Як бачимо, ми одержали таке саме рівняння α.

Задача 6 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-3;3)$ паралельно до площини xOy.

Розв‘язання. Шукана площина паралельна площині xOy, а тому її рівняння $Cz+D=0$. Підставляючи в це рівняння координати точки M_1(бо вона належить їй), одержимо $C\cdot 3+D=0$, звідки $D=-3C$. Тепер рівняння шуканої площини набуде вигляду $Cz-3C=0$ або $C(z-3)=3$. Через те, що $C\neq 0$, $z-3=0$. Це і є шукане рівняння.

Задача 7 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M_1(1;4;-3)$.

Розв'язання. Рівняння площини, яка проходить через вісь Oy**,** має вигляд $Ax+Cz=0$. Через те, що точка M_1 належить цій площині, її координати задовольняють цьому рівнянню і тому $A\cdot 1+C\cdot(-3)=0$, звідки $A=3C$. Таким чином, рівняння шуканої площини набуває вигляду $3Cx+Cz=0$, або $C(3x+z)=0$. Оскільки $C\neq 0$, то $3x+z=0$ – шукане рівняння.

Задача 8 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3;-2;5)$ і $M_2(2;3;1)$ паралельно осі Oz.

Розв'язання. Оскільки шукана площина паралельна площині Oz, то її рівняння $Ax+By+D=0$.

Точки M_1 *і* M_2 належать цій площині, а це означає, що їх координати задовольняють рівняння площини. Отже, підставляючи координати точок M_1 *і* M_2 в рівняння площини, одержуємо: $\begin{cases} 3A-2B+D=0, \\ 2A+3B+D=0. \end{cases}$

Для знаходження коефіцієнтів A,B,D маємо систему двох однорідних рівнянь з трьома невідомими. Складемо матрицю коефіцієнтів цих рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді $A=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot t=-5t$, $B=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot t=-t$, $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot t=13t$.

Підставляючи значення $A=-5t$, $B=-t$, $D=13t$ в рівняння площини, одержуємо $-5tx-ty+13t=0$, або $5x+y-13=0$. Це і є рівняння шуканої площини.. Пропонуємо перевірити правильність розв'язку самостійно. Для цього підставте в одержане рівняння спочатку координати точки M_1, а потім координати точки M_2. Ви одержите тотожність.

Задача 9 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $y=0$ (α_1) і $2x-z+1=0$ (α_2).

Розв'язання. Точка M_1 належіть шуканій площині α, а тому згідно з (4.17), маємо: $A(x-2)-B(y+1)+C(z-1)=0$.

За умовою $\alpha\perp\alpha_1 \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}=\{0;1;0\}$, $\alpha\perp\alpha_2 \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}=\{2;0;-1\}$, а це означає, що $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{k}$.

Оскільки $\vec{n}=\{A;B;C\}=\{-1;0;-2\}$, то рівняння шуканої площини $-(x-2)-2(z-1)=0$, або $x+2z-4=0$.

Задача 10 Обчислити відстань d від точки $M_0(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через три точки : $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

Розв‘язання. Згідно з (4.19) складаємо рівняння площини, яка проходить через три точки: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$ або $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$.

Розкривши визначник по елементам першого рядка, одержимо: $2(x-1)-3(y+1)+6(z-1)=0$ або $2x-3y+6z-11=0$.

Тепер за формулою (4.18), враховуючи, що $x_0=-1$, $y_0=1$, $z_0=-2$, $A=2$, $B=-3$, $C=6$, $D=-11$, матимемо:

$$d = \frac{\left|2\cdot(-1)-3\cdot 1+6\cdot(-2)-11\right|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{28}{7} = 4.$$

Задача 11 Обчислити відстань між паралельними площинами $2x-3y+6z-14=0$ (α_1) і $4x-6y+12z+21=0$ (α_2).

Розв‘язання. Знайдемо на одній з площин, наприклад на площині α_1 довільну точку. Для цього в рівнянні α_1 покладемо $y=z=0$. Тоді $2x-14=0$, звідки $x=7$. Отже, знайдено точку $M_0(7;0;0)$, яка належить площині α_1. Тепер задача зводиться до знаходження відстані від точки *M₀* до площини α_2. За формулою (4.18), враховуючи, що $A=4$, $B=-6$, $C=12$, $D=21$, $x_0=7$, $y_0=0$, $z_0=0$, матимемо: $d = \dfrac{\left|4\cdot 7-6\cdot 0+12\cdot 0+21\right|}{\sqrt{16+36+144}} = \dfrac{49}{14} = 3{,}5$.

Задача 12 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-3;-4)$ і відтинає на координатних осях від нуля відрізки однакової величини (вважати кожний відрізок напрямленим з початку координат).

Розв‘язання. Шукатимемо рівняння площини у відрізках, тобто у вигляді $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Через те, що за умовою $a=b=c$, рівняння площини набуде вигляду $x+y+z=a$. Точка M_1 належить площині, тому її координати задовольняють рівнянню $x+y+z=a$. Підставляючи в це рівняння координати мочки M_1, одержуємо $2-3-4=a$, звідки $a=-5$. Отже, рівняння шуканої площини $x+y+z+5=0$.

Питання для самоперевірки

1 Який вигляд має рівняння площини, що проходить через задану точку в заданому напрямку?

2 Який вектор називають нормальним вектором площини? Назвіть його координати.

3 Запишіть нормальне рівняння площини.

4 Який вигляд має рівняння площини, яка проходить через початок координат?

5 Назвіть рівняння площини, що

а) паралельні одній з осей координат;

б) паралельні одній з координатних площин;

в) проходить через одну з осей координат.

6 Запишіть рівняння координатних площин.

7 Який вигляд має рівняння площини, яка проходить через три точки, що не лежать на одній прямій?

8 Запишіть рівняння площини у відрізках і з‘ясуйте суть параметрів.

9 Що називають кутом між двома площинами і за якою формулою він знаходиться?

10 Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності двох площин.

11 запишіть формулу, за якою знаходять відстань від точки до площини.

Вправи

1 Скласти рівняння площини, що відтинає на осі Oy відрізок $b=5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=\{3;-2;4\}$.

Відповідь: $3x-2y+4z+10=0$.

2 Дано точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, проведеної через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Відповідь: $2x-y-4z+7=0$.

3 Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $x-2y+z-3=0$.

Відповідь: $x-2y+z=0$.

4 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-1;2)$ паралельно площині $2x-3y+z-5=0$.

Відповідь: $2x-3y+z-7=0$.

5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;0;1)$ і $M_2(1;2;-3)$ перпендикулярно до площини $x-y+z-1=0$.

Відповідь: $x+2y+z-2=0$.

6 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-1;1)$ і перпендикулярно до площин $2x-y+z-1=0$ і $x+2y-z+1=0$.

Відповідь: $x-3y-5z+1=0$.

7 Знайти відстань між паралельними площинами $x-y+z-1=0$ і $2x-2y+2z-5=0$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8 Знайти гострий кут між площинами $11x-8y-7z+5=0$ і $7x+2y-8z-3=0$.

Відповідь: $\varphi=45^{\circ}$.

9 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{3;-1;-4\}$.

Відповідь: $9x-y+7z-40=0$.

10 Показати, що площини $x-y+z-1=0$ і $2x-2y+2z+3=0$ паралельні.

11 Показати, що площини $x+2y-5z+1=0$ і $3x-4y-z-2=0$ перпендикулярні.

12 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-5;2;-1)$ паралельно до площини *YOZ*.

Відповідь: $x+5=0$.

13 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_1(4;-1;2)$.

Відповідь: $2y+z=0$.

14 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;1)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно до осі Oy.

Відповідь: $x-z-1=0$.

15 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-2;3)$ перпендикулярно до осі Oz.

Відповідь: $z-3=0$.

16 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-2;6)$ і $M_2(5;-4;-2)$ і відтинає на осях Ox і Oy відмінні від нуля відрізки однакової величини.

Відповідь: $4x+4y+z-2=0$.

17 Скласти рівняння площин, які проходять через точку $M_1(4;3;2)$ і відтинають на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

Відповідь: $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$.

18 Знайти відстань від точки $M_1(2;3;-1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.

Відповідь: $d=4$.

19 Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+6z-14=0$ і $2x-3y+6z+28=0$.

Відповідь: $d=6$.

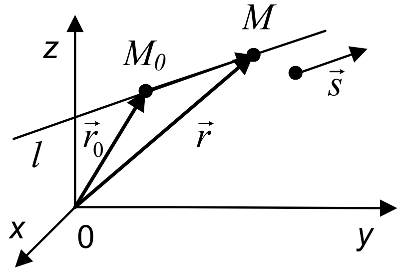
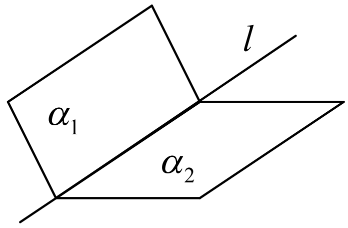
20 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-2;4;1)$, $M_2(0;2;-1)$, $M_3(2;0;-1)$

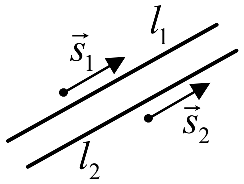
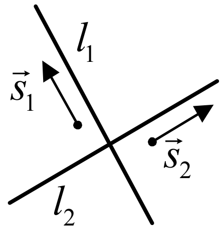
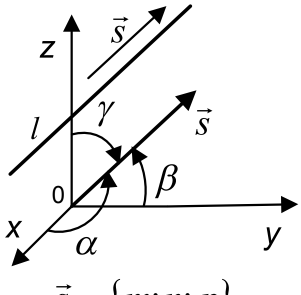
Відповідь: $x+y-2=0$.

4.2.2 Пряма у просторі

Пряма, як і площина, у просторі відносно прямокутної системи координат може бути задана різними способами. Наприклад, пряма однозначно визначається точкою і вектором, паралельним їй (будь-який відмінний від нуля вектор, паралельний прямій, називають напрямним і позначають $\vec{s}$); двома точками, перетином двох непаралельних прямих і т. ін. Залежно від способу завдання прямої розглядають різні види її рівняння (табл. 4.9).

Таблиця 4.9

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	2	3	4
1	Векторне рівняння прямої	 $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in l$ $\vec{s}=\{m;n;p\}\parallel l$	$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}$
2	Параметричні рівняння прямої	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in l$ $\vec{s}=\{m;n;p\}\parallel l$ $t-$ параметр	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$ (4.23)
3	Канонічні рівняння прямої	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in l$ $\vec{s}=\{m;n;p\}\parallel l$	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ (4.24)
4	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)\in l$ $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)\in l$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (4.25)
5	Загальні рівняння прямої		$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

6	Кут між двома прямими	$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\cos\varphi=\pm\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$ (4.26)
7	Умова паралельності двох прямих	 $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ $\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$	$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
8	Умова перпендикулярності двох прямих	 $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ $\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
9	Напрямні косинуси прямої	 $\vec{s}=\{m;n;p\}$	$\cos\alpha=\dfrac{s_x}{\lvert\vec{s}\rvert}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\cos\beta=\dfrac{s_y}{\lvert\vec{s}\rvert}=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\cos\gamma=\dfrac{s_y}{\lvert\vec{s}\rvert}=\dfrac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ (4.27)

Розв’язання задач

Задача 1 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;0;-3)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{2;-3;5\}$.

Розв’язання. Використовуючи рівняння (4.24) і враховуючи, що $x_0=2$, $y_0=0$, $z_0=-3$, $m=2$, $n=-3$, $p=5$, одержуємо $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$.

Це і є шукане рівняння.

Задача 2 Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1; -1; -3) паралельно до прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{0}$.

Розв'язання. Використовуючи рівняння (4.23) і враховуючи, що напрямний вектор $\vec{s}=\{2;5;0\}$ даної прямої є також і напрямним вектором шуканої прямої, матимемо: $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-1+5t, \\ z=-3. \end{cases}$

Задача 3 Дано вершини трикутника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;-7;-2)$. Скласти параметричне рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.4.36). Точка D поділяє відрізок AB навпіл, тому за формулами (4.3) маємо:

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-5}{2}=-1;$$
$$y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6+2}{2}=4;$$
$$z_D=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-7+3}{2}=-2.$$

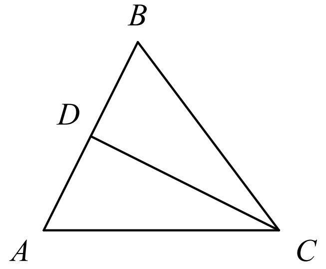


Рис. 4.36

Одержали точку $D(-1;4;-2)$. Вектор $\overrightarrow{CD}=\{-1-4;4+7;-2+2\}=\{-5;11;0\}$ є напрямним вектором шуканої медіани, яка проходить через точку $C(4;-7;-2)$. Її параметричні рівняння $\begin{cases} x=4-5t, \\ y=-7+11t, \\ z=-2. \end{cases}$

Задача 4 Дано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.4.37). введемо в розгляд вектори $\overrightarrow{BA}=\{3-1;-1-2;-1+7\}=\{2;-3;6\}$, $\overrightarrow{BC}=\{-5-1;14-2;-3+7\}=\{-6;12;4\}$, а також відповідні їм одиничні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$.

Через те, що $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{4+9+36}=7$ і

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{36+144+16}=14,$$

$$\vec{e}_1=\frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\left\{\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right\},$$

$$\vec{e}_2=\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\left\{-\frac{6}{14};\frac{12}{14};\frac{4}{14}\right\}=\left\{-\frac{3}{7};\frac{6}{7};\frac{2}{7}\right\}.$$

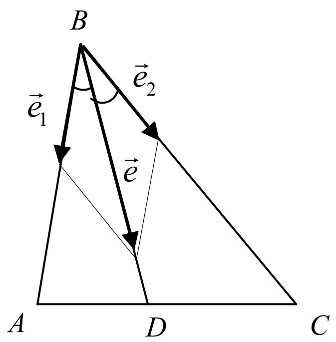


Рис. 4.37

Вектор $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left\{ \frac{2}{7} - \frac{3}{7}; -\frac{3}{7} + \frac{6}{7}; \frac{6}{7} + \frac{2}{7} \right\} = \left\{ -\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{8}{7} \right\}$, або паралельний йому вектор $\vec{s} = \{-1; 3; 8\}$, можна вважати напрямним вектором бісектриси *BD*. Отже, використовуючи рівняння (4.24) і враховуючи, що шукана бісектриса проходить через точку *B* і має напрямний вектор $\vec{s} = \{-1; 3; 8\}$, остаточно матимемо $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}$.

Задача 5 Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо одну з точок, через яку проходить дана пряма. Для цього покладемо, наприклад, $z = 0$. Тоді для знаходження x і y цієї точки матимемо систему $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + y - 8 = 0. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, одержимо $x = 3$ і $y = 2$. Таким чином, маємо точку з координатами $(3; 2; 0)$, яка належить даній прямій. Напрямним вектором цієї прямої можна вважати вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_1 = \{1; 2; 1\}$.

Тепер, використовуючи рівняння (4.24), складемо канонічні рівняння даної прямої: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$.

Задача 6 Довести, що прямі $(l_1)\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases}$ і $(l_2)\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$ паралельні.

Розв'язання. Маємо $\vec{s}_1 = \{2; 3; -6\}$ - напрямний вектор прямої l_1 і

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_2 = \{3; 2; 2\}$ - напрямний вектор прямої l_2.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$: $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 0$. Через те, що $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$. Звідси випливає, що $l_1 \perp l_2$. Таким чином доведено, що дані прямі перпендикулярні.

Задача 7 Знайти косинус кута між прямими

$$(l_1)\ \begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad (l_2)\ \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямним вектором прямої l_1 можна вважати вектор $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_1 = \{2; -2; 1\}$.

Напрямним вектором прямої l_2 можна вважати вектор

$\vec{s} = \overrightarrow{n_3} \times \overrightarrow{n_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -6 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -42\vec{i} - 21\vec{j} + 14\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_2 = \{6; 3; -2\}$.

Тепер за формулою (4.26) знаходимо:

$$\cos\varphi = \pm \frac{2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{36+9+4}} = \pm \frac{4}{3 \cdot 7} = \pm \frac{4}{21}.$$

Задача 8 Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} x = 4 + 2t, \\ y = -3 - t, \\ z = 5 - 2t. \end{cases}$

Розв'язання. Напрямним вектором даної прямої є вектор $\vec{s} = \{2; -1; -2\}$. Використовуючи формули (4.27), одержимо:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}; \ \cos\beta = -\frac{1}{3}; \ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Задача 9 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3; 5)$ перпендикулярно до двох даних прямих:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}\ (l_1) \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}\ (l_2).$$

Розв'язання. Рівняння прямої l шукатимемо у вигляді $\dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y+3}{n} = \dfrac{z-5}{p}$.

Через те, що $l \perp l_1$ і $l \perp l_2$,$\vec{s} \perp \vec{s}_1 = \{-1; 2; 2\}$ і $\vec{s} \perp \vec{s}_2 = \{6; 3; -2\}$, звідки випливає, що напрямним вектором шуканої прямої можна вважати вектор

$\vec{s} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 15\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_3 = \{2; -2; 3\}$.

Отже, вважаючи, що $m = 2,\ n = -2.\ p = 3$, рівняння шуканої прямої набуде вигляду $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-5}{3}$.

Задача 10 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;-1;-3)$, $M_2(3;1;-5)$. Знайти її напрямні косинуси.

Розв'язання. Використовуючи рівняння (4.25), одержимо $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z+3}{-5+3}$ або $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-2}$. Напрямний вектор цієї прямої $\vec{s}=\{m;n;p\}=\{1;2;-2\}$. Тепер за формулами (4.27), знаходимо:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{3};\ \cos\beta=\frac{2}{3};\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Питання для самоперевірки

1 Як можна задати пряму в просторі?

2 Який вектор називають напрямним вектором прямої?

3 Запишіть канонічні рівняння прямої.

4 Який вигляд мають параметричні рівняння прямої?

5 Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві дані точки?

6 Як знайти напрямний вектор прямої, що задана загальним рівнянням?

7 За якою формулою обчислюється кут між двома прямими?

8 Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

9 Що називають напрямними косинусами прямої і як їх знаходять?

Вправи

1 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;3;0)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$.

2 Знайти кут між прямою $\begin{cases} x=2z-1, \\ y=-2z+1 \end{cases}$ і прямою, яка проходить через початок координат і через точку з координатами $(1;-1;-1)$.

Відповідь: $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3 Показати, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x=z+1, \\ y=1-z. \end{cases}$

4 Дано вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$, $C(-7;11;6)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.

Відповідь: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$.

5 Довести паралельність прямих $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

6 Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;0;2)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ і $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$.

Відповідь: $\frac{x+4}{-2}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{-5}$.

7 Скласти канонічні рівняння діагоналей паралелограма, три вершини якого знаходяться в точках $A(2;4;6)$, $B(-3;5;4)$, $C(8;-6;2)$.

Відповідь: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-6}{-2}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-4}{0}$.

8 Написати параметричні рівняння прямої $\begin{cases} 3x-4y+5z-10=0, \\ 6x-5y+z-17=0. \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x=2+7t, \\ y=-1+9t,. \\ z=3t. \end{cases}$

9 Знайти кути між координатними осями і прямою, що проходить через точки $M_1\left(3;-4;\sqrt{2}\right)$ і $M_2\left(4;-5;2\sqrt{2}\right)$.

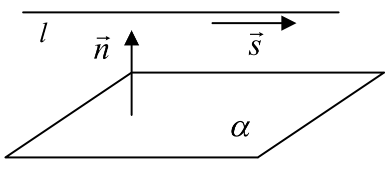
Відповідь: $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$ $\gamma=45^\circ$.

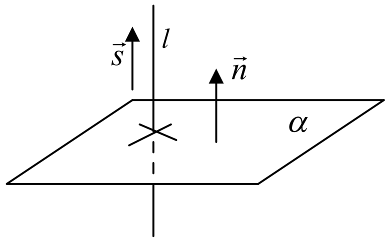
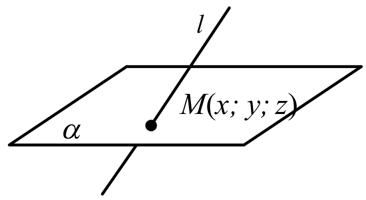
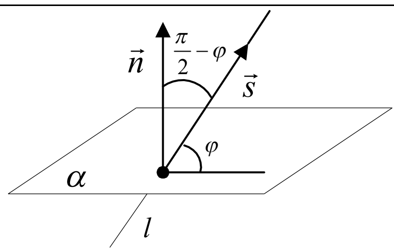
10 Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} 2x-2z+3=0, \\ 10x-12y+4z-5=0. \end{cases}$

Відповідь: $\cos\alpha=\frac{6}{11}$; $\cos\beta=\frac{7}{11}$; $\cos\gamma=\frac{6}{11}$.

4.2.3 Площина і пряма у просторі

Таблиця 4.10

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	2	3	4
1	Умова паралельності прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ (l) $Ax+By+Cz+D=0$ (α) $\vec{s}=\{m;n;p\}$	$Am+Bn+Cp=0$ (4.28)

		$\vec{n}=\{A;B;C\}$ $\alpha \parallel l \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{s}$	
2	Умова перпендикулярності прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$ $\alpha \perp l \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{s}$	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ (4.29)
3	Точка перетину прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $l \cap \alpha = M(x;y;z)$	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$
4	Кут між прямою і площиною	 $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{s}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{s}\rvert}$ $\sin\varphi=\frac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ (4.30)

Розв’язання задач

Задача 1 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

Розв’язання. Запишемо канонічні рівняння прямої , яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z+5}{p}.$$

Невідомі параметри *m, n,* знайдемо з умови перпендикулярності прямої і площини. Через те, що $l \perp \alpha$ (рис.4.38), $\vec{s} \parallel \vec{n}$, а це означає, що нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(6;-3;-5)$ можна вважати і напрямним вектором шуканої прямої. Отже, $\vec{s}=(m;n;p)=(6;-3;-5)$. Підставляючи координати вектора $\vec{s}=(m;n;p)=(6;-3;-5)$ у рівняння прямої, одержуємо:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}.$$

Це і є рівняння шуканої прямої.

Задача 2 За якого значення n пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна площині *x-3y-6z+2=0?*

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(3;n;-2)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(1;-3;6)$. За умовою (4.28) паралельності прямої і площини: $3\cdot 1+n\cdot(-3)+(-2)\cdot 6=0$, звідки *n=-3*. Таким чином, при *n=-3* пряма і площина будуть паралельні.

Задача 3 За яких значень m і С пряма $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини 3*x-2y+Cz+1=0?*

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(m;4;-3)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}=(3;-2;C)$. За умовою (4.29) перпендикулярності прямої і площини: $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}$. Розв'язуючи рівняння $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}$, одержуємо *m*= –6. З рівняння $\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}$ знаходимо, що С=1,5. Таким чином, при *m*= –6 і С=1,5 пряма і площина будуть перпендикулярні.

Задача 4 Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини 2*x+3y+z-1=0.*

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої в параметричній формі

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t.$$

Звідси $x=t+1$, $y=-2t-1$, $z=6t$.

Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t, \\ 2x+3y+z-1=0. \end{cases}$

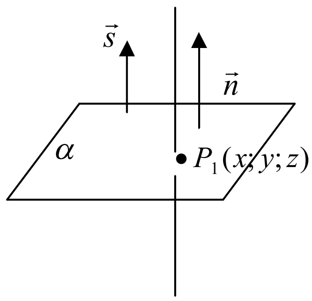
Підставляючи вирази для *x, y, z* в останнє рівняння системи, одержуємо $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$, або $2t-2=0$, звідки $t=1$.

Із рівняння прямої при $t=1$ знаходимо координати точок перетину:
$x=1+1=2, \quad y=-2\cdot 1-1=-3, \quad z=6\cdot 1=6.$

Таким чином, шуканою точкою перетину прямої і площини є точка *M(2; –3;6).*

Задача 5 Знайти проекцію точки Р*(5;2; –1)* на площину 2*x–y+3z+23=0.*

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що точка Р не належить площині (пропонуємо переконатися в цьому самостійно). І, тому задача зводиться до знаходження перпендикуляра, опущеного з точки Р на задану площину (рис.4.39). Використовуючи рівняння (4.23) і враховуючи, що нормальний вектор площини $\vec{n} = (2;-1;3)$ є і одночасно нормальним вектором прямої PP_1:



$$\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$$

Рис. 4.39

Тепер знайдемо точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ і площини

$2x+3y+z-1=0,$ розв'язуючи систему $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t, \\ 2x - y + 3z + 23 = 0. \end{cases}$

Підставляючи вирази для x, y, z в останнє рівняння системи, одержуємо $2(5+2t) - (2-t) + 3(-1+3t) + 23 = 0$. Або $2t - 2 = 0$, звідки $t = -2$.

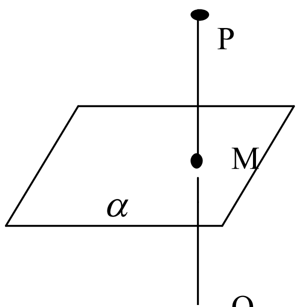


Рис 4.40

При $t = -2$ одержимо:

$x = 5 - 4 = 1, \quad y = 2 - (-2) = 4, \quad z = -1 + 3 \cdot (-2) = -7.$

Отже, проекцією точки Р на площину є точка $P_1(1;4;-7)$.

Задача 6 Знайти точку, симетричну точці $P_1(2;7;1)$ відносно площини $x - 4y + z + 7 = 0$.

Розв'язання. Координати точки *P* не задовольняють рівнянню площини, а тому вона знаходиться поза площиною. Отже, шукана точка *Q* буде другим кінцем відрізка *PQ*, для якого серединою є точка *M* – проекція точки Р на дану площину (рис.4.40). Знайдемо точку *M*. Для цього спочатку складемо рівняння перпендикуляра до площини, проведеного через точку *P*. Враховуючи, що нормальний вектор площини $\vec{n} = (2;-4;1)$ є і одночасно нормальним вектором перпендикуляра, а тому його рівняння матиме вигляд: $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 7 - 4t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 7 - 4t, \\ z = 1 + t, \\ x - 4y + z + 7 = 0, \end{cases}$$

Одержуємо $(2+t) - 4(7-4t) + (1+t) + 7 = 0$, або $18t - 18 = 0$, звідки $t = 1$. При $t = 1$ матимемо $x = 2 + 1 = 3, \quad y = 7 - 4 \cdot 1 = 3, \quad z = 1 + 1 = 2.$

Отже, M(3;3;3) – точка перетину перпендикуляра і площини. Тепер за формулами (4.3)

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, \quad y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}, \quad z_M = \frac{z_P + z_Q}{2},$$

які в даному випадку доцільно подати у вигляді

$$x_Q = 2x_M - x_{P,} \quad y_Q = 2y_M - y_{P,} \quad z_Q = 2z_M - z_{P,}$$

Знаходимо: $x_Q = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \quad y_Q = 2 \cdot 3 - 7 = -1, \quad z_Q = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$

Таким чином, Q(4;-1;3) – шукана точка.

Задача 7 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0(4;-1;1) і пряму $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 7 = 0, \\ 4x + 2y - 6z - 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо рівняння в'язки площин, які проходять через цю пряму. Відповідно до рівняння (4.22) одержимо

$$(2x - 3y + 5z - 7) + \lambda(4\tilde{o} + 2y - 6z - 5) = 0.$$

Підставляючи в це рівняння координати точи Р, матимемо

$$\left(2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 7\right) + \lambda\left(4 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 5\right) = 0,$$

або 9+3λ=0, звідки $\lambda = -3$. З рівняння в'язки при $\lambda = -3$ знаходимо рівняння шуканої площини:

$$10x + 9y - 23z - 8 = 0.$$

Задача 8 За яких значень B і D пряма $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{7}$ лежить у площині 4*x*+*By*-2*z*+*D*=0?

Розв'язання: Задана пряма проходить через точку M_0(1;-2;4) і має напрямний вектор $\vec{s}$=(5;-3;7). Нормальний вектор площини $\vec{n} = (4; B; -2)$. Якщо пряма $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{4} = \frac{z - z_0}{-3}$ лежить у площині $Ax + By + Cz + D = 0$, то виконуються умови $Am + Bn + Cp + D = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, бо $\vec{n} \perp \vec{s}$, а точка M_0(1;-2;4) одночасно належить прямій і площині.

Використовуючи ці умови, матимемо систему $\begin{cases} 4 \cdot 5 + B \cdot (-3) + (-2) \cdot 7 = 0, \\ 4 \cdot 1 + B \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + D = 0, \end{cases}$ з якої знаходимо: *B=2, D=8*.

Отже, при : *B=2, D=8* задана пряма лежатиме у заданій площині.

Задача 9 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;4)$ паралельно прямим $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{8}$ і $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+5}{2}$.

Розв'язання Зробимо схематичний рисунок (рис.4.41). Згідно з (4.17), рівняння площини запишемо у вигляді $A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0$.

Через те, що $\vec{n}=(A;B;C)\perp\vec{s}_1=(1;2;8)$ і $\vec{n}=(A;B;C)\perp\vec{s}_2=(4;0;2)$, то

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k},$$

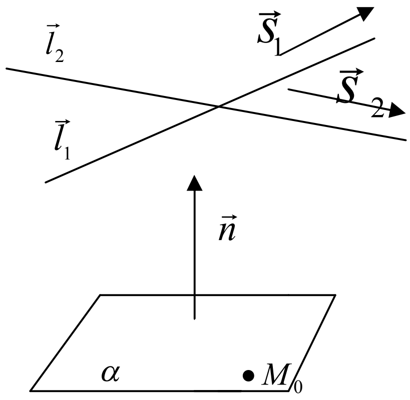


Рис. 4.41

і тому рівняння шуканої площини набуде вигляду

$4(x-2)+30(y+3)+8(z-4)=0$, або

$$2x+15y-4z+57=0.$$

Зауважимо, що нормальним вектором шуканої прямої можна було б вважати і вектор $\vec{n}_1=(2;15;-4)$, який є паралельний вектору $\vec{n}=(4;30;-8)$.

Задача 10 Знайти кут між прямою $\begin{cases}x-y-8=0,\\ 2x+z-14=0\end{cases}$ і площиною $4x-2y-2z+7=0$.

Розв'язання. За формулою (4.30)

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Через те, що нормальний вектор площини $\vec{n}=(\grave{A};\hat{A};\tilde{N})=(4;-2;-2)$ і

напрямний вектор прямої $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}$,

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot(-1)-2\cdot(-1)-2\cdot 2|}{\sqrt{16+4+4}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi=30^\circ$.

Задача 11 Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму (l_1) $\begin{cases}3x-y+z-5=0,\\ x+2y-z+2=0.\end{cases}$ паралельно прямій (l_2) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Рівняння в'язки площин, які проходять через дану пряму (l_1) має вигляд:

$$(3x-y+z-5)+\lambda(x+2y-z+2)=0,$$

або
$$\left(3+\lambda\right)x+\left(2+\lambda\right)y+\left(1-\lambda\right)=0.$$
З цієї в'язки площин треба відібрати площину, яка паралельна прямій $\left(l_2\right)$. Повинна виконуватись умова (4.28) паралельності прямої і площини. З рівняння в'язки площин випливає, що $A=3+\lambda,\ B=2\lambda-1,\ C=1-\lambda,$ а з рівняння прямої $\left(l_2\right)$ випливає, що $m=-1,\ n=2,\ p=2$. Тоді умова паралельності прямої та площини запишеться у вигляді $(3+\lambda)\cdot(-1)+(2\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot 2=0$, звідки $\lambda=3$.

Підставляючи значення λ в рівняння в'язки площин одержуємо рівняння шуканої площини:
$$6x+5y-2z=0.$$
Задача 12 Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{\tilde{o}-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ (l_1) перпендикулярно до площини $3x-y+2z-2=0\,(\alpha_1)$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис 4.43).З рівняння прямої (l_1) випливає, що вона проходить через точку $M_0(1;\,-2;0)$ і має напрямний вектор $\vec{s}=(1;1;2)$. Через те, що $l_1\in\alpha$,то і $M_0\in\alpha$, і тому рівняння шуканої площини α можна шукати у вигляді
$$A(x-1)+B(y+2)+Cz=0.$$
Нормальний вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ площини α перпендикулярний до

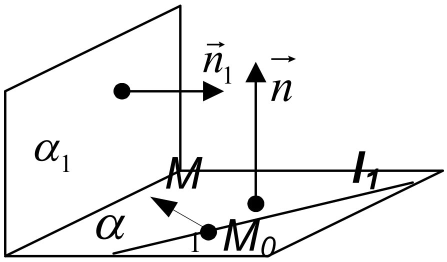


Рис 4.43

векторів $\vec{s}_1$ і $\overrightarrow{n_1}=(3;-1;2)$,тому $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&2\\3&-1&2\end{vmatrix}=4\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$.

Підставляючи координати цього вектора, або паралельного йому вектора $\vec{n}=(1;1;-1)$ в рівняння площини α, одержуємо $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot z=0$, або $x+y-z+1=0$.

Це і є шукане рівняння. Його можна було б одержати і інакше. Для цього треба взяти на площині α довільну точку М$(x;y;z)$ і ввести в розгляд вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-1;y+2;z)$. Через те, що вектори $\overrightarrow{M_0M},\vec{s}_1,\vec{n}_1$ компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто
$$\begin{vmatrix}x-1&y+2&z\\1&1&2\\3&-1&2\end{vmatrix}=0.$$

Це і є рівняння площини α.

Розкриваючи визначник по елементам першого рядка, одержимо $4(x-1)+4(y+2)-4z=0$, або після спрощення $x+y-z+1=0$.

Цю задачу можна було б розв'язати ще й так. Рівняння прямої l_1 запишемо у вигляді $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}, \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z}{2}, \end{cases}$ або після спрощення $\begin{cases} x-y-3=0, \\ 2x-z-2=0. \end{cases}$

Тоді рівняння в'язки площин, які проходять через цю пряму, матимуть вигляд

$$x-y-3+\lambda(2x-z-2)=0,$$

або

$$(1-2\lambda)x-y-\lambda z-3-2\lambda=0.$$

З цієї в'язки виберемо ту площину, яка перпендикулярна до α_1. За умовою (4.21) перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

У нашому випадку $A_1=3$, $B_1=-1$, $C_1=2$, $A_2=1+2\lambda$, $B_2=-1$, $C_2=-\lambda$, тому $3(1+2\lambda)+(-1)\cdot(-1)+2\cdot(-\lambda)=0$. Розкриваючи дужки, одержимо

$$3+6\lambda+1-2\lambda=0,$$

звідки $\lambda=-1$.

Підставивши це значення λ в рівняння в'язки площин, одержуємо рівняння шуканої площини $x+y-z+1=0$.

Питання для самоперевірки

1 Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

2 Що називають кутом між прямою і площиною і за якою формулою його обчислюють?

3 Як знаходиться точка перетину прямої і площини?

Вправи

1 Довести, що пряма $\begin{cases} x=2-3t, \\ y=1-4t, \\ z=-5+4t \end{cases}$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0$.

2 Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $\quad x+y-z+2=0$;

б) $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$, $\quad x-2y+z-15=0$;

в) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$, $\quad x+2y-2z+6=0$.

Відповідь: а) M(4;-5;1); б) пряма паралельна площині; в) пряма лежить на площині.

3 Скласти рівняння площини ,яка проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Відповідь: $x+2y+3z=0.$

4 За якого значення C пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z-2=0. \end{cases}$ паралельна площині $2x-y+Cz-2=0$?

Відповідь: C=-2.

5 Скласти рівняння площини ,яка проходить через точку $M_0(2;-2;1)$ і пряму $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+2, \\ z=3t-3. \end{cases}$

Відповідь: $4x+6y+5z-1=0.$

6 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;1;-2)$ і точку перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ і площини $2x-3y-5z-3=0.$

Відповідь: $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}.$

7 Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки (2;3;-1) на площину $4x+5y-2z+3=0.$

Відповідь: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-2}.$

8 Скласти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+1}{4}$; $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{4}.$

Відповідь: $7x+y-4z-9=0.$

9 Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ перпендикулярно до площини $2x+3y-z-4=0.$

Відповідь: $8x-5y-z-4=0.$

10 Знайти проекцію точки $M(3;-1;1)$ на площину $x+2y+3z-30=0.$

Відповідь: $M_1(5;5;5)$.

11 Знайти проекцію точки $P(5;-6;7)$ на пряму $x=7-2t;\ y=-1+3t;$ $z=4+t.$

Відповідь: $P_1(9;-2;3)$.

12 За яких значень n і A пряма $x=3+2t;\ \ y=-5;\ \ z=-5+nt;$ перпендикулярна до площини $Ax-2y+3z-5=0.$

Відповідь: A=1, $n=-4$.

13 Знайти кут між прямою $x = 8 - 2t;\ y = 7 - 2t;\ z = 9 + 4t;$ і площиною $6x - 3y - 3z + 1 = 0.$

Відповідь: $\varphi = 30^\circ$.

14 Знайти точку, симетричну точці P (2;-4;5) відносно прямої $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$

Відповідь: P_1(-12; 2;-15).

15 Знайти синус кута між прямою $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ і площиною $x+y+3z-1=0.$

Відповідь: $\sin\varphi = \dfrac{6}{\sqrt{418}}$.

5 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

5.1 Поняття функції

Під множиною дійсних чисел розуміють сукупність раціональних та ірраціональних чисел. Дійсні числа зображують точками на числовій прямій (осі).

Абсолютна величина, або модуль, дійсного числа є невід'ємне дійсне число визначене рівностями :

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Якщо кожному значенню змінної величини x, яке належить множині дійсних чисел, за певним законом поставлене у відповідність цілком певне дійсне значення змінної величини у, то кажуть, що на множині дійсних чисел задана (визначена) функція, і записують $y = f(x)$. Для позначення функції вживають і інші букви, наприклад $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, тощо. При цьому x називають незалежною змінною величиною, або аргументом, а y – залежною змінною величиною, або функцією.

Сукупність усіх тих значень, яких може набувати аргумент x функції $y = f(x)$, називають областю визначення, або областю існування цієї функції і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Сукупність усіх тих значень, яких може набувати сама функція $y = f(x)$, називають областю зміни цієї функції, і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Значення, якого набуває функція $y = f(x)$ при $x = x_0$ позначають $f(x_0)$ і називають частинним значенням функції.

Під графіком функції $y = f(x)$ розуміють геометричне місце точок площини $XOУ$, координати яких задовольняють рівнянню $y = f(x)$.

Найчастіше зустрічаються три способи завдання функції: аналітичний, табличний і графічний.

При аналітичному способі функцію задають за допомогою однієї або декількох формул, які пов'язують залежну змінну величину (функцію) з незалежною змінною величиною(аргументом). Наприклад:

$$y=\sqrt{1-x^2}\ ,\ y=\lg\left(1+\cos^2 x\right),\ y=\begin{cases} x+1, \textit{якщо } -1\le x<0, \\ 1, \textit{якщо } 0\le x\le 1, \\ \sin\dfrac{\pi}{2}x, \textit{якщо } 1<x\le 2. \end{cases}$$

Зауважимо , що в останньому прикладі маємо одну функцію, яка для різних проміжків в області її визначення задана різними формулами.

Зазначимо також, що серед функцій, заданих аналітично, основну роль відіграватимуть елементарні функції, тобто основні елементарні функції (степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні, обернені тригонометричні, стала), а також функції, задані за допомогою формул, що містять лише скінчене число арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозиції основних елементарних функцій. Наприклад: $y=\cos^2\left(x^2+1\right)+\dfrac{2\sin\frac{1}{x}-3}{\sqrt{x}}+arctg\,2x-5.$

Табличний спосіб задання функції полягає в тому, що задається таблиця, в якій вказується ряд значень аргументу і відповідних їм значень функції. Наприклад, широко відомі таблиці тригонометричних функцій та інші.

При графічному способі задання функції дається графік. З допомогою якого знаходяться значення функції для відповідних значень аргументів.

Графічний спосіб задання функції дуже часто використовується в математиці для ілюстрування тих чи інших властивостей функції.

5.2 Основні елементарні функції та їх графіки

1 Стала функція $y=C$, де C- дійсне число(рис.5.1).
Область визначення – вся числова вісь *D(y)=R*.

Рис.5.1

2 Степенева функція $y = x^{\alpha}$, де α - дійсне число, відмінне від 0.

При $\alpha = 1,\ \alpha = 3,\ \alpha = 5$ функція визначена на всій числовій осі: *D(y)=R*. Область зміни функції *E(y)=R*. (рис.5.2).

При $\alpha = 2,\ \alpha = 4,$ функція визначена на всій числовій осі: . Область зміни функції $E(y) = [0; +\infty)$. (рис.5.3).

При $\alpha = -1$ область визначення *D(y)=R*. Область зміни функції $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. (рис.5.4).

При $\alpha = \dfrac{1}{2}$ область визначення $D(y) = [0; +\infty)$. Область зміни функції $E(y) = [0; +\infty)$. (рис.5.5).

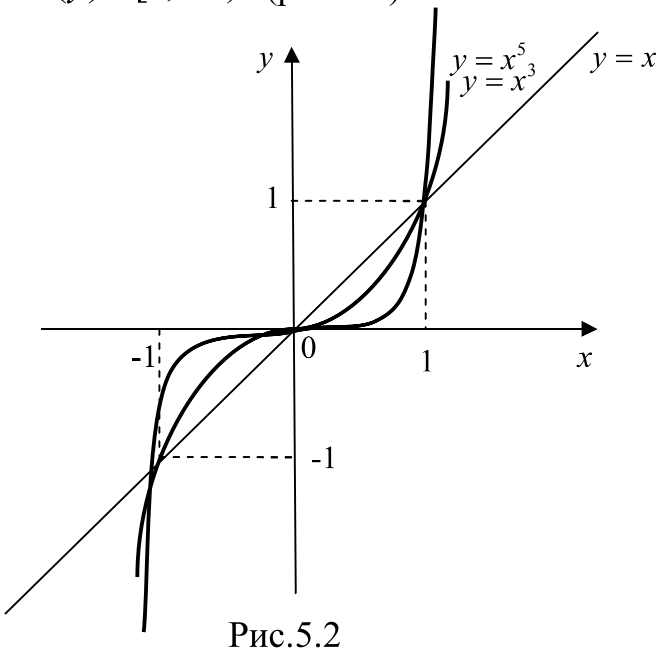


Рис.5.2

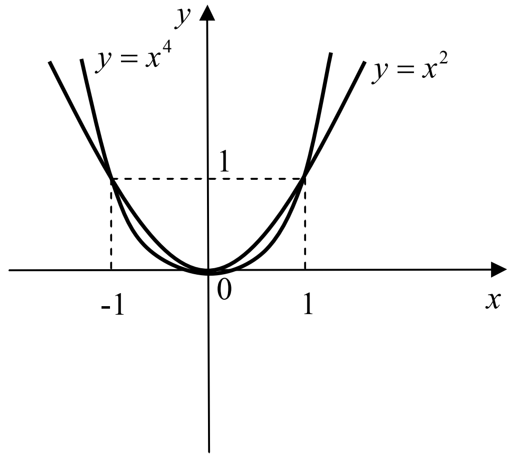


Рис.5.3

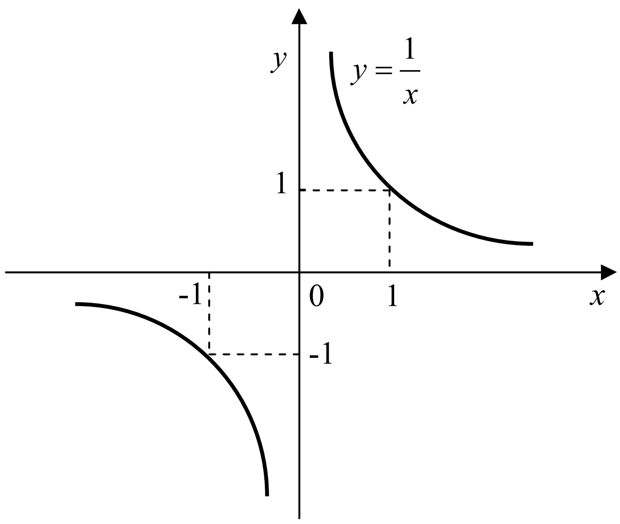


Рис.5.5

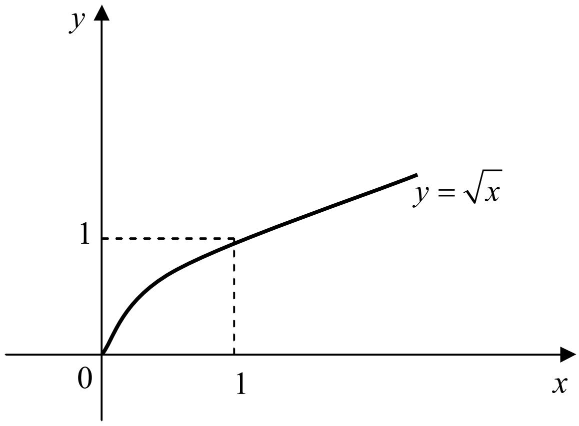
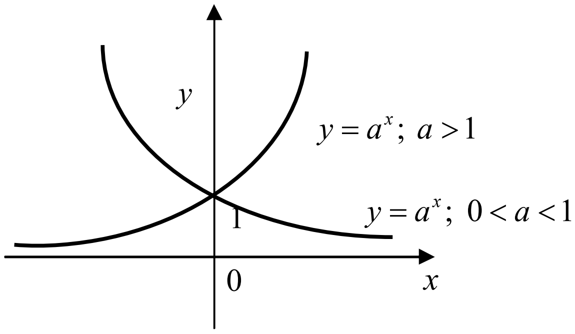


Рис.5.4



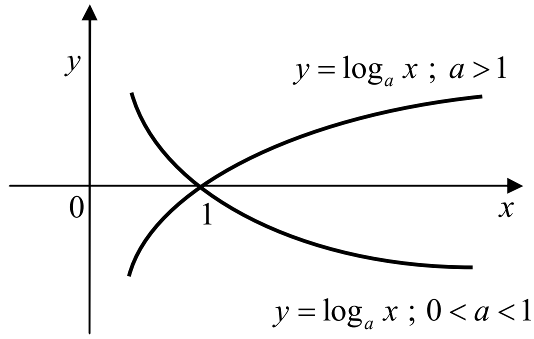


Рис.5.6

Рис.5.7

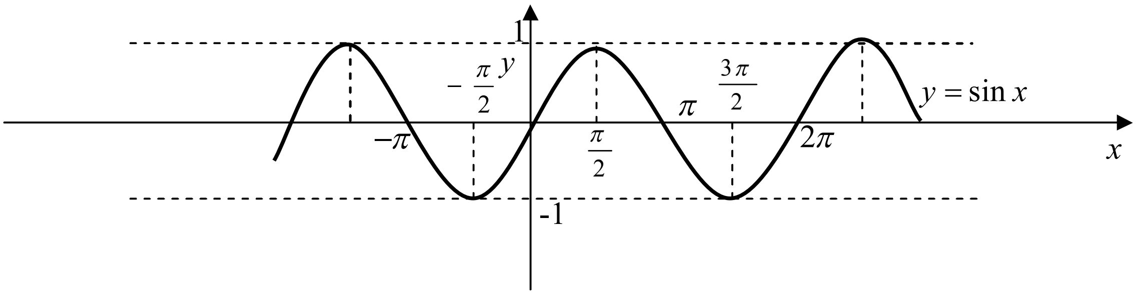


Рис.5.8

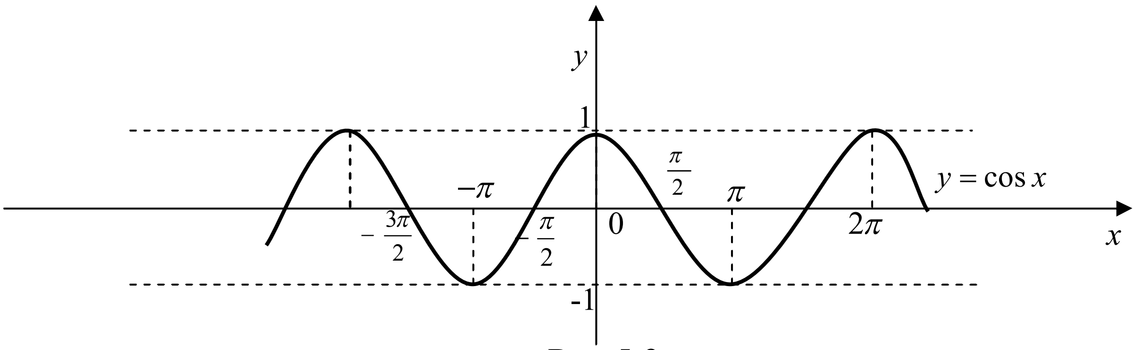


Рис.5.9

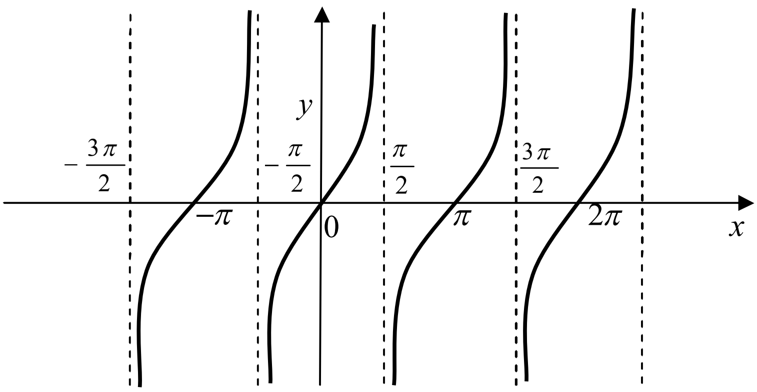


Рис.5.10

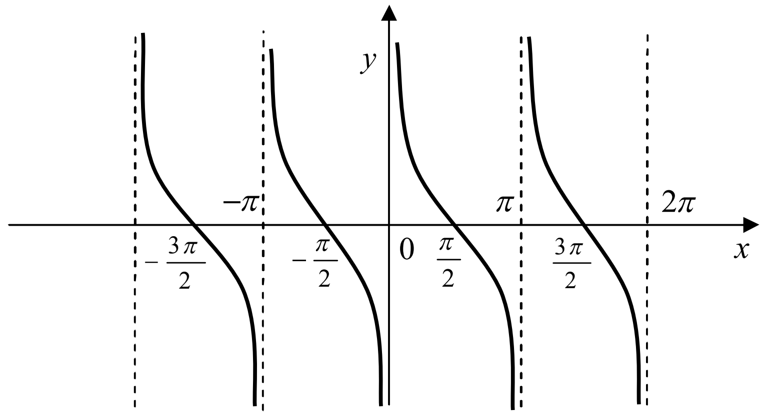


Рис.5.11

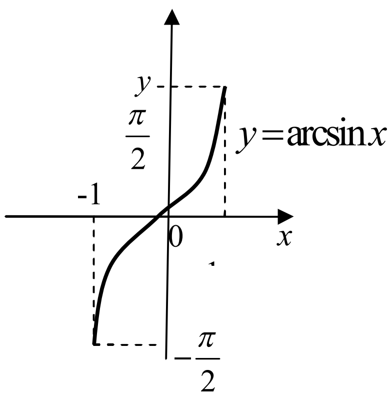


Рис.5.12

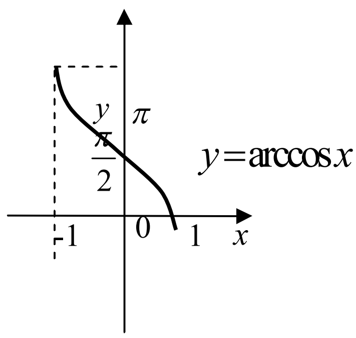


Рис.5.13

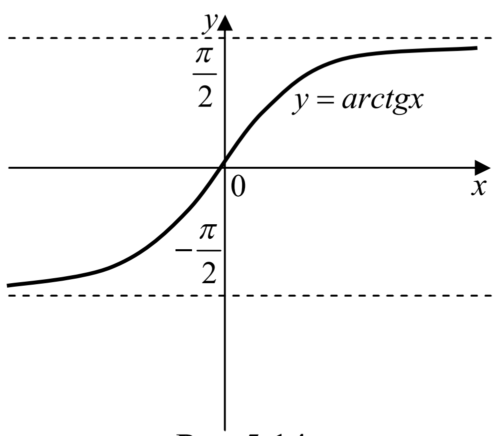


Рис.5.14

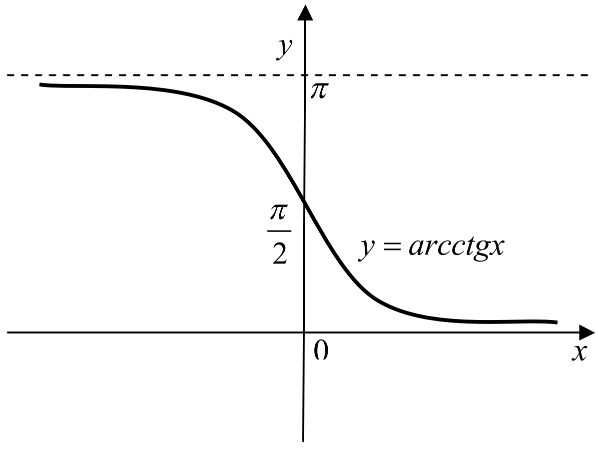


Рис.5.15

3 Показникова функція $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ визначена для всіх дійсних значень *x*. Область зміни функції $E(y) = (0; +\infty)$. (рис.5.6).

4 Логарифмічна функція $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ визначена для $x > 0$. Область зміни функції $E(y) = (-\infty; +\infty)$. (рис.5.7).

5 Тригонометричні функції $y=\sin x$ (Рис.5.8) та $y=\cos x$ (рис.5.9) визначені на всій числовій осі, а їх область зміни функції $E(y)=[-1;1]$; $y=tgx$ (рис.5.10) визначена для всіх x, крім точок $x=\frac{\pi}{2}(2k+1), k\epsilon Z$; $y=tgx$ (рис.5.11) визначена для всіх x, крім точок $x=\pi к, k\epsilon Z$. Область зміни цих функцій *E(tgx)=E(ctgx)=R.*

6 Обернені тригонометричні функції: $y=\arcsin x$(рис.5.12) визначена на відрізку $[-1;1]$ і набуває значень, які належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $y=\arccos x$ (рис.5.13) визначена на відрізку $[-1;1]$ і набуває значень, які належать відрізку $[0;\pi]$; $y=arctgx$ (рис.5.14) і $y=arcctgx$ (рис.5.15) визначені для всіх значень x, а їх області значень відповідно

$$-\frac{\pi}{2}<arctgx<\frac{\pi}{2} \text{ та } 0<arcctgx<\pi .$$

Слід зазначити, що в тих випадках, коли область визначення функції заздалегідь не вказана, важливо вміти знаходити її, тобто знаходити множину тих значень x, для яких існує аналітичний вираз $f(x)$.

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Дано функцію $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$. Знайти $f(0), f(-2)$. Чи існує $f(-1)$?

Розв’язання. У даному прикладі треба знайти частинні значення функції $f(x)$ при $x=0, x=-2, x=-1$. Підставимо ці значення аргументу в аналітичний вираз функції. Тоді:

$$f(0)=\frac{0-2}{0+1}=-2, f(0)=\frac{-2-2}{-2+1}=4, f(-1)=\frac{-1-2}{-1+1}=\frac{-3}{0},$$

Одержані результати показують, що при $x=0, x=-2$ задана функція існує, бо приймає цілком певні значення, що дорівнюють відповідно $-2; 4$. При $x=-1$ задана функція не існує, оскільки ділення на 0 неможливе.

Приклад 2 Дано функцію $f(x)=x^2-2x+3$. Знайти всі корені рівняння $f(x)=-1$.

Розв’язання. Обчислимо значення функції $f(x)$ при $x=-1$: $f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+3=6$. Згідно з умовою $x^2-2x+3=6$, звідки $x^2-2x-3=0$. Розв’язуючи це рівняння знаходимо $x_1=-1, x_2=3$. Це і є шукані корені.

Приклад 3 Знайти область визначення функцій :

а) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$, б) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$, в) $y=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$.

Розв'язання.

а) Функція визначена для всіх значень x, крім тих, за яких знаменник x^2-3x+2 дробу $\dfrac{2}{x^2-3x+2}$ перетворюється на 0. Розв'язавши рівняння $x^2-3x+2=0$ знаходимо $x_1=1, x_2=2$. Тому областю визначення даної функції є сукупність усіх дійсних чисел, крім 1 та 2, тобто

$$D(y)=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$$

б) Корені парного степеня існують лише для невід'ємних чисел. Тому область визначення даної функції можна розглядати як сукупність всіх значень x, що задовольняють нерівності $x^2-4x+3\geq 0$.

Розв'яжемо сказану нерівність методом інтервалів. Для цього знайдемо корені рівняння $x^2-4x+3=0$. За теоремою Вієта $x_1=1, x_2=3$. Ці точки поділяють всю числову вісь на інтервали: $(-\infty;1)$, $(1;3)$, $(3;+\infty)$.

Для зручності позначимо ліву частину нерівності через y і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.16):

$$y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3);\ y(0)=3>0;\ y(2)=-1<0;\ y(4)=3>0.$$

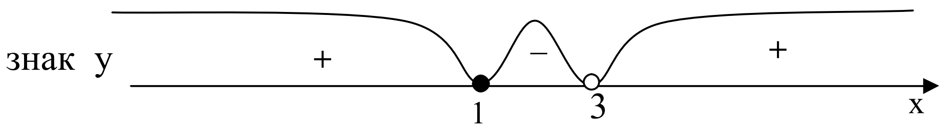


Рис.5.16

Таким чином, область визначення даної функції:

$$D(y)=(-\infty;1]\cup[3;+\infty).$$

в) Позначимо $\dfrac{1-2x}{4}=t$. Відомо, що функція $y=\arccos t$ визначена при $-1\leq t\leq 1$ (див. рис.5.13). Отже, задана буде визначена для всіх значень x, що задовольняють нерівності: $-1\leq\dfrac{1-2x}{4}\leq 1$. Розв'язуючи цю нерівність, одержимо: $-4\leq 1-2x\leq 4$, або $-5\leq -2x\leq 5$, звідки $\dfrac{5}{2}\geq x\geq -\dfrac{3}{2}$. Отже, область визначення даної функції $D(y)=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Приклад 4 Знайти область визначення функцій:

а) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; б) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$; в) $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції будуть ті значення x, за яких обидва доданки набувають дійсних значень. Для цього повинні виконуватись такі умови:

$$\begin{cases} \lg(1-x) \neq 0, \\ 1-x > 0, \\ x+2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему і зображаючи її розв'язки графічно (рис.5.17), знаходимо:

$$\begin{cases} 1-x \neq 1, \\ x < 1, \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x < 1, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

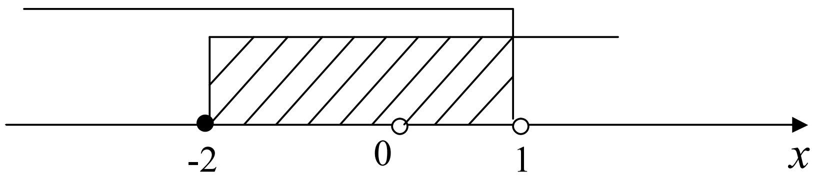


Рис.5.17

Таким чином, $D(y) = [-2;0) \cup (0;1)$.

б) Переший доданок набуває дійсних значень при $-1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1$, а другий – при $4-x>0$. Отже, для знаходження області визначення даної функції необхідно розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1, \\ 4-x > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему і зображаючи її графічно (рис.5.18), одержимо

$$\begin{cases} -2 \leq x-3 \leq 2, \\ x < 4 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 5, \\ x < 4. \end{cases}$$

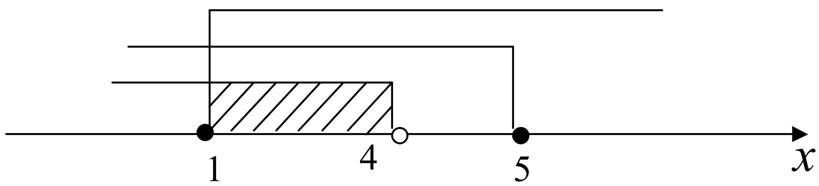


Рис.5.18

Таким чином, $D(y) = [1;4)$.

в) Задана функція набуватиме дійсних значень, якщо $4-x^2\neq 0$ і $x^3-x>0$.

Розв'язуючи першу нерівність, одержимо $x\neq\pm 2$. Другу нерівність розв'яжемо методом інтервалів. Позначимо для цього ліву частину нерівності через z. Тоді $z=x^3-x=x(x^2-1)(x+1)$.

Функція z дорівнює нулю при $x=0$, $x=1$, $x=-1$. Ці точки поділяють числову вісь на чотири інтервали: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ (рис.5.19). Визначимо знак z на кожному інтервалі: $z(-3)<0,\ z(-0{,}5)>0,\ z(0{,}5)<0,\ z(3)>0.$

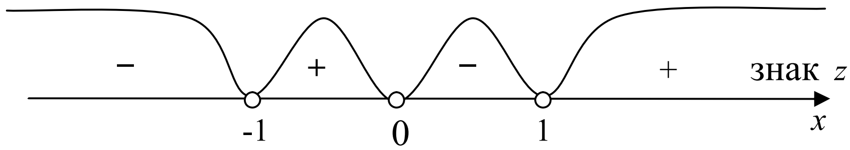


Рис.5.19

Отже, функція $z=x^3-x>0$ для $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$, а це означає, що задана функція y визначена для $x\in(-1;0)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Приклад 5 Довести, що $\Phi(-z)=-\Phi(z)$, якщо $\Phi(-z)=x^3-5z$.

Розв'язання. Знайдемо значення $\Phi(-z)=(-z)^3-5(-z)=-z^3+5z=-(z^3-5z)$. Отже, маємо $\Phi(-z)=-\Phi(z)$, що й треба було довести.

Нагадаємо, що коли для всіх значень x з області визначення функції $y=f(x)$ виконується умова $f(-x)=-f(x)$, то вона називається непарною. Графік такої функції розташований симетрично початку координат. Якщо виконується умова $f(-x)=f(x)$, то функція $y=f(x)$ - парна. Графік парної функції розташований симетрично вісі Oy. Якщо ж $f(-x)\neq -f(x)$ і $f(-x)\neq f(x)$, то функція $y=f(x)$ не є ні парною, ні непарною. Така функція не має ні центра симетрії, ні вісі симетрії.

Зазначимо, що говорити про парність або непарність функції $y=f(x)$ можна лише в тому випадку, коли область визначення цієї функції симетрична відносно початку координат.

У розглянутому прикладі доведено, що $\Phi(z)$ - непарна функція.

Приклад 6 Визначити, які із заданих функцій парні, непарні, а які не є ні парними, ні непарними ?

а) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, б) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$, в) $y=\dfrac{x}{a^x-1}$.

Розв’язання. а) Через те, що для $y(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $y(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}$, тобто $y(-x)=y(x)$, а це означає,що $y(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ – парна функція.

б) Тут $y(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$. Тоді $y(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=y(-x)$.

Отже $y(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ – непарна функція.

в) Маємо $y(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$. Тому $y(-x)=\dfrac{-x}{a^{-x}-1}=\dfrac{-x}{\frac{1}{a^x}-1}=-\dfrac{xa^x}{1-a^x}=\dfrac{xa^x}{a^x-1}$. Таким чином, функція $y(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$ не є ні парною, ні непарною, бо $y(-x)\neq y(x)$ і $y(-x)\neq -y(x)$.

Приклад 7 Знайти корені функції та інтервали знакосталості, якщо:

а) $y=3x-6$, б) $y=2^{x-1}$, в) $y=x^3-3x^2+2x$.

Розв’язання.

а) Враховуючи, що корінь або нуль функції це є значення аргументу, за якого вона дорівнює нулю, маємо: $y=0$, якщо $3x-6=0$, звідки $x=2$ – корінь функції. Відкладемо корінь на числовій вісі і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.20), підставивши в аналітичний вираз функції значення $x<2$(наприклад, $x=0$) і $x>2$ (наприклад, $x=3$). Тоді $y(0)=-6<0$, $y(3)=3>0$.

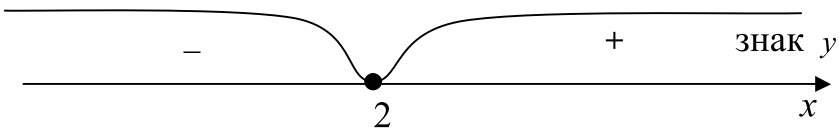


Рис.5.20

Отже, для $x\in(-\infty;2)$ $y<0$, а це означає, що для $x\in(-\infty;2)$ графік функції розташований під віссю Ox . Для $x\in(2;+\infty)$ $y>0$, а це означає, що для $x\in(2;+\infty)$ графік функції розташований вище вісі Ox .

б) Через те, що $y=2^{x-1}>0$ для будь – яких дійсних значень x , нулів функція не має. Її значення завжди додатні та графік розташований над віссю Ox .

в) $y=0$, якщо $x^3-3x^2+2x=0$, звідки $x=0$, $x=1$, $x=2$ – корені функції. Відкладемо корені на числовій вісі і визначимо знак функції на кожному інтервалі (рис.5.21). Для визначення знака y подамо його у вигляді :

$y(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$. Тоді $y(-1) < 0$, $y(0{,}5) > 0$, $y(1{,}5) < 0$, $y(3) > 0$.

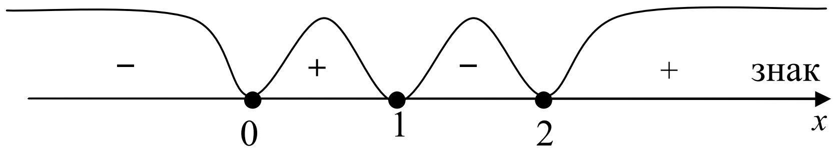


Рис.5.21

Таким чином, $y < 0$ для $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$ і $y > 0$ для $x \in (0;1) \cup (2;+\infty)$.

Зауваження. При знаходженні інтервалів знакосталості функції на числовій вісі слід помічати не лише її нулі, але й ті значення аргументу, за яких функція не існує.

Приклад 8 Знайти інтервали знакосталості функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

Розв'язання. Задана функція не існує в точках, де $x^2 - 3x + 2 = 0$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Функція дорівнює нулю при $x = 0$. Відкладемо одержані значення x на числовій прямій і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.22):

$$y(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)};\ y(-1) < 0,\ y(0{,}5) > 0,\ y(1{,}5) < 0,\ y(3) > 0.$$

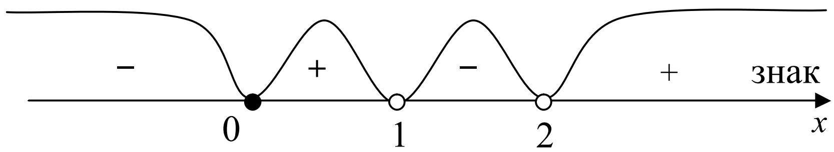


Рис.5.22

Отже, $y < 0$ для $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$ і $y > 0$ для $x \in (0;1) \cup (2;+\infty)$.

Питання для самоперевірки

1 Які числа утворюють множину дійсних чисел ?

2 Що називається абсолютною величиною, або модулем дійсного числа ?

3 Що розуміють під функцією однієї незалежної змінної ?

4 Що таке область визначення функції ?

5 Що таке область зміни функції ?

6 Що називають графіком функції в декартовій системі координат ?

7 Способи задання функції. Зазначити особливості, переваги і недоліки кожного з цих способів.

8 Що розуміють під частинними значеннями функції ? Як вони знаходяться ?

9 Перерахуйте основні елементарні функції.

10 Яка функція називається елементарною ?

11 Що називається нулем функції ?

12 Яка функція називається парною, непарною ? Чи існують функції, які не належать ні до парних, ні до непарних ?

13 Особливості розташування графіків парних і непарних функцій в системі xOy .

14 Накресліть графіки степеневих функцій за різних показників та опишіть поведінку цих функцій.

15 Накресліть графіки показникових і логарифмічних функцій за різних основ та опишіть їх властивості.

16 Накресліть графіки тригонометричних функцій. Для кожної з них укажіть область визначення і зміни.

17 Накресліть графіки обернених тригонометричних функцій. Для кожної з них укажіть область визначення і зміни.

18 Що називають інтервалами знакосталості функції ? Як їх знаходять ?

Вправи

1 Дана функція $\varphi(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$. Знайти $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. Чи існує $\varphi(-1)$?

Відповідь: $\varphi(0)=2$; $\varphi(1)=0{,}5$; $\varphi(-2)=-4$; $\varphi(4)$ не існує.

2 $F(x)=x^2-2x^2+5$. Довести, що $F(a)=F(-a)$.

3 Дано $f(x)=2x^3-5x^2-23x$. Знайти всі корені рівняння $f(x)=f(-2)$.

Відповідь: $x_1=-2, x_2=5, x_3=-0{,}5$. Вказівка. Через те що x= –2 – корінь рівняння $2x^3-5x^2-23x-10=0$, $2x^3-5x^2-23x$ ділиться на $x-(-2)=x+2$ (за теоремою Безу). Знайдемо частку від ділення:

$$
\begin{array}{l|l}
-2x^3-5x^2-23x-10 & x+2 \\
\quad 2x^3-4x^2 & 2x^2-9x-5 \\
\quad\quad -9x^2-23x & \\
\quad\quad -9x^2-18x & \\
\quad\quad\quad -5x-10 & \\
\quad\quad\quad 5x-10 & \\
\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Тому $2x^3-5x^2-23x-10=(x+2)(2x^2-9x-5)$.

4 Знайти область визначення функцій:

а) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. Відповідь: вся числова вісь .

б) $y=1-\sqrt{1-x^2}$. Відповідь: [–1;1].

в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$. Відповідь: $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

г) $y = \arcsin\frac{x}{2}$. Відповідь: $[-4\,;\,4\ ]$.

5 Знайти корені функцій і інтервали знакосталості, якщо

а) $y = x^2 - 5x + 6$, б) $y = |x|$.

Відповідь: а) $y=0$ при $x=2$ *і* $x=3$; y>0 при $x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(2;3)$, б) $y=0$ при x=0; $y>0$ при $x\neq 0$.

6 Знайди область визначення функцій.

а) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$. Відповідь: $[-1;3\ ]$.

б) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$. Відповідь: $(3/2;\,2)\bigcup(2;+\infty)$.

в) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$. Відповідь: x=1.

7 Визначити, які з наведених функцій парні, непарні, а які не є ні парними, ні непарними: а) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, б) $y = sinx - cosx$, в) $y = 1 - x^2$

Відповідь: а) непарна; б) не є ні парною, ні непарною; в) парна.

5.3 Обчислення границь

Число А називається границею функції $f(x)$ при x, що прямує до $x_0\,(x\to x_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого $E>0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < E$.

Той факт, що границя функції $f(\tilde{o})$ при x, що прямує до $\tilde{o}_0$, дорівнює A, символічно записується так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathrm{A} \quad .$$

Аналогічно $\lim\limits_{X\to\infty} f(x) = \mathrm{A}$, якщо $|f(x) - \mathrm{A} \angle \mathrm{E}|$ при $|x| > N$.

Вживається також умовний запис $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, який означає, що $|f(\tilde{o})| > M$ при $|x - x_0| < \delta$, де M – довільне додатне число.

Для існування границі $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно й достатньо, щоб мала місце рівність $f(x_0 - 0) = f(x_0 - 0)$, де $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – ліва границя функції і $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ - права границя функції $f(x)$ у точці $x = x_0$. Запис $x \to x_0 - 0$ $(x \to x_0 + 0)$ означає , що точка x наближається до точки x_0 зліва (справа).

Права й ліва границі функції у точці називаються односторонніми границями цієї функції в цій точці.

Зауважимо, що визначення границі функції у точці $x = x_0$ зовсім не вимагає її існування в цій точці.

На практиці обчислення границь ґрунтується на таких теоремах.

Якщо існують скінченні $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, то

Т.1 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$;

Т.2 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$;

Т.3 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; де $c = const$;

Т.4 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$, де n – ціле додатне число;

Т.5 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$;

Т.6 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}$; якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) \neq 0$;

Т.7 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, де $c = const$;

Т.8 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c}{x} = \infty$, де $c = const$;

Т.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x} = 0$, де $c = const$.

Якщо для всіх значень x з деякого околу точки x_0 (крім, можливо, самої точки x_0) функції $f(x)$ і $y(x)$ співпадають, і одна з них має границю при $x \to x_0$, то й друга має таку саму границю.

Зауважимо, що для всіх елементарних функцій в будь-якій точці з області визначення має місце рівність

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\left(4x^2 - 6x + 3\right)$.

Розв'язання. Застосовуючи послідовно теореми I, 3, 4, 7 одержимо

$$\lim_{x\to 2}\left(4x^2 - 6x + 3\right) = \lim_{x\to 2}\left(4x^2\right) - \lim_{x\to 2}(6x) + \lim_{x\to 2} 3 = 4\lim_{x\to 2} x^2 - 6\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 4\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 6\lim_{x\to 2} x + 3 =$$
$$= 16 - 12 + 3 = 7.$$

Зазначимо, що застосування теорем та їх наслідків можна робити в умі, а це дає змогу докладний запис розв'язання опускати.

Враховуючи сказане, розв'язання попереднього прикладу коротко можна записати так;

$$\lim_{x\to 2}\left(4x^2 - 6x + 3\right) = 4\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 3 = 7.$$

Приклад 2 Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 3}$.

Розв'язання. Щоб перевірити можливість використання теореми 6, треба переконатися в тому, що при граничному значенні аргументу знаменник не дорівнює нулю. При $x=2$ знаменник $x-3$ дорівнює $2-3=-1\neq 0$, а це означає, що теорему про границю частки можна застосувати.

Отже, використавши теорему 6, а також теореми I, 4 і 7 одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}=$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x^2\right)-2+1}{2-3}=\frac{4-2+1}{-1}=-3.$$

При безпосередній підстановці граничного значення аргументу $x=2$ у вираз функції матимемо такий самий результат:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x=1}{x-3}=\frac{4-2+1}{2-3}=-3.$$

Отже, якщо до даної функції, границю якої треба знайти при прямуванні аргументу до деякого граничного значення, можна застосувати теореми, при границі, то обчислення границі зводиться до підстановки цього граничного значення у вираз функції.

Зазначимо, що границя елементарної функції $f(x)$ при $x\to x_{0,}$ де x_0 належить області її визначення, дорівнює значенню функції при $x=x_{0,}$ тобто

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Приклад 3 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

Розв'язання. Функція, границю якої треба знайти, елементарна, тому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{0^3-3\cdot 0+1}{0-4}+1=\frac{3}{4}.$$

Приклад 4 Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

Розв'язання. Для визначення границі елементарної функції досить у вираз цієї функції підставити граничне значення її аргументу. Тоді

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x^4+x^2=1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-3}{\left(\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{0}{9+3+1}=\frac{0}{13}=0.$$

Приклад 5 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$.

Розв'язання. Границя знаменника дорівнює нулю, тому теорему 6 безпосередньо застосувати не можна, тому що ділення на нуль неможливе. Якщо $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$, то $1-x$ є величина нескінченно мала, а обернена до неї $\dfrac{1}{1-x}$ – нескінченно велика. Отже, умовно можна записати, що $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$.

У цьому випадку кажуть, що границя функції нескінченна.
Обчислити границю функції підстановкою замість аргументу його граничного значення не завжди можливо, але з цього не випливає, що границя функції не може бути обчислена. У таких випадках слід провести над функцією такі перетворення, щоб можна було застосувати теореми про границі.

Досить часто у результаті підстановки граничного значення аргументу у вираз функції одержують вирази виду $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}$, які називають невизначеностями. Покажемо, як обчислюється границя функції у кожному з цих випадків.

5.3.1 Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$.

Для розкриття цієї невизначеності користуються такими методами:

а) розкладають чисельник і знаменник на множники, після чого скорочують дріб на нескінченно малий співмножник і потім переходять до границі;

б) переносять ірраціональність з чисельника у знаменник або із знаменника в чисельник, а іноді за необхідністю – і те і друге, після чого одержаний дріб скорочують і переходять до границі;

в) використовують першу чудову границю

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \ell im_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1;$$

г) використовують властивість еквівалентності нескінченно малих величин.

Нагадаємо, що коли $\ell im_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то α $^3\beta-$ еквівалентні нескінченно малі величини при $x \to x_{0,}$ тобто $\alpha \sim \beta.$

При $x \to 0$ $\sin x \sim x,$ $tg\, x \sim x,$ $arsin\, x \sim x,$ $arctg\, x \sim x,$ $\ell n(1+x) \sim x,$ $\ell^x - 1 \sim x.$
Зауважимо, що в таких випадках, коли чисельник або знаменник (або і чисельник, і знаменник) являє собою суму (або різницю) нескінченно малих функцій, то при обчисленні границі, взагалі кажучи, не можна заміняти окремі додатки еквівалентними функціями. Така заміна може призвести до неправильного результату.

Приклад 6 Знайти $\ell im_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$

Розв'язання. При $x \to 1$ чисельник і знаменник даного дробу прямують до нуля. Тому безпосередньо застосування теореми про границю частки тут неможливе. Розкладаючи чисельник і знаменник даного дробу на множники, одержуємо:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2, \quad x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1).$$

Тоді

$$\ell im_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \ell im_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \ell im_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Слід зазначити, скорочення дробу на $x-1$ було законним тому, що при знаходженні границі в точці $x=1$ значення цієї функції у точці $x=1$ не беремо до уваги, тобто x, прямуючи до одиниці і, отже, на нуль ми не скорочували.

Приклад 7 Знайти $\ell im_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, матимемо:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

$$6x^2-5x+1=0, \qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12}, \qquad x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\ell im_{x\to 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \ell im_{x\to 1/2} \frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)} = \ell im_{x\to 1/2} \frac{4x^2+2x+1}{3x-1} = \frac{1+1+1}{3/2-1} = 6.$$

Приклад 8 Знайти $\ell im_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо визначеність виду $\frac{0}{0}$. Звільнимося від ірраціональності у чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник $\sqrt{x-1}+2$. Після скороченого дробу на нескінченно малий множник і використання теорем про границі, одержимо:

$$\ell im_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \ell im_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \ell im_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} =$$

$$= \ell im_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 9 Знайти $\ell im_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник у точці $x=0$ мають границю, яка дорівнює нулю. Застосувати теорему про границю частки не можна. Тому помножимо чисельник і знаменник дробу на добуток $\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 10 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Цей приклад можна було б розв'язати ще й так. При $x\to 0$ $\sin 3x\sim 3x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0}3=3.$$

Приклад 11 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{tg 5x}$.

Розв'язання. Через те що при $x\to 0$ $tg 5x\sim 5x$ *і* $tg 2x\sim 2x$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{tg 5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Приклад 12 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ і при $x\to 0$

$\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$, матимемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Приклад 13 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник цього дробу при $x=0$ перетворюється на нуль. Тому застосувати теорему про границю дробу не можна. Перетворимо дріб, додавши чисельник у вигляді добутку:

$$\frac{tg\ x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^{3\cdot}\cdot\cos x}=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x}.$$

Тепер дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=2\cdot \ell im_{x\to 0} \frac{x^2/4}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$\ell im_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \ell im_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1, a \sin\frac{2x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$ при $x\to 0$. Таким чином, $\ell im_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

Слід зауважити, що в цьому прикладі при заміні tgx *íà* x, $\sin x$ *íà* x одержали б $\frac{0}{x^3}$, а це означало б, що границя функції дорівнює нулю, а це не вірно.

5.3.2 Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$

Для розкриття цієї невизначеності заданої відношенням многочленів, чисельник і знаменник ділять на найвищу, що входить до них степінь x, і потім переходять до границі.

Приклад 14 Знайти $\ell im_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Розв'язання. Ні чисельник , ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Дістанемо

$$-\ell im_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ell im_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x\to\infty$:

$$1/x\to 0,\quad 1/x^3\to 0,\quad 3/x^2\to 0,\quad 1/x^4\to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – I. За теоремою про границю частки маємо:

$$\ell im_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\frac{0}{1}=0.$$

Приклад 15 Знайти $\ell im_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник необмежено збільшується (одержуємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$). Поділивши чисельник і знаменник на x^4, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо

$$\ell im_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ell im_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\frac{1-0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty,$$

а це означає, що границя функції не існує.

Слід зауважити, що запис $\frac{1}{0}=\infty$ є чисто умовним. Його треба розуміти так: $\frac{I}{н.м.в.}=н.в.в.$, тобто величина, обернена до нескінченно малої є нескінченно великою.

Приклад 16 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на x^2, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^2}{2+1/x^2}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Далі при обчисленні границь можна користуватись таким правилом: якщо чисельник і знаменник дробу - многочлени і $x\to\infty$, то границя дробу дорівнює:

I) відношенню коефіцієнтів при старшій степені змінної, якщо многочлени однакової степені;

2) нулю, якщо степінь многочленна чисельника нижча за степінь многочленна знаменника;

3) нескінченності, якщо степінь многочленна чисельника вища за степінь многочленна знаменника.

Приклад 17 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}$.

Розв'язання. Через те що степені многочленів чисельника і знаменника однакові і $x\to\infty$, шукана границя дорівнює відношення коефіцієнтів при старшій степені x, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{-3}{3}=-1.$$

5.3.3 Розкриття невизначеності виду $\infty-\infty$

Невизначеність такого виду розкривається одним з двох шляхів:

I) зведенням дробів до спільного знаменника, в результаті чого приходимо або до невизначеності $\frac{o}{o}$, або до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$;

2) перенесенням ірраціональності з чисельника в знаменник.

Приклад 18 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Розв'язання. При $x\to 1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\ell im_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\ell im_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\left(\frac{o}{o}\right)=$$

$$=\ell im_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\ell im_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

Приклад 19 Знайти $\ell im_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Помноживши і поділивши дану функцію на $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$, одержимо

$$\ell im_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)=(\infty-\infty)=\ell im_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=$$

$$=\ell im_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6x-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\ell im_{x\to+\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\ell im_{x\to+\infty}\frac{-5+6/x}{\sqrt{1-5/x+6/x^2}+1}=-5/2.$$

5.3.4 Розкриття невизначеності виду $0\cdot\infty$

Шляхом заміни змінної або з допомогою алгебраїчних перетворень функції невизначеність $0\cdot\infty$ зводиться або до невизначеності $\frac{0}{0}$, або до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$.

Слід зауважити, що множення можна замінити діленням на обернену величину і тому $0\cdot\infty$ можна розглядати як $\frac{0}{\infty^{-1}}=\frac{0}{0}$ або як $\frac{\infty}{0^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}$ (як уже зазначалося, ці записи чисто умовні).

Приклад 20 Знайти $\ell im_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\frac{x}{3}\right)$.

Розв'язання. При $x\to 0$ одержуємо невизначеність виду $0\cdot\infty$ Записавши в іншому вигляді дану функцію і використавши теореми про границі, матимемо:

$$\ell im_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\frac{x}{3}\right)=(0\cdot\infty)=\ell im_{x\to 0}\frac{x}{tg\,x/3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 0}\frac{x}{x/3}=3.$$

При розв'язанні цього прикладу прийнято до уваги, що при $x\to 0$ $tg\frac{x}{3}\sim\frac{x}{3}$.

Приклад 21 Знайти $\ell im_{x\to 1}\left[(1-x)tg\frac{\pi x}{2}\right]$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$.

Покладемо $1-x=z$. Звідси випливає, що $z\to 0$, оскільки $x\to 1$.

Тоді, виконуючи відповідні перетворення функції і переходячи до границі, знаходимо

$$\lim_{x\to1}\left[(1-x)tg\frac{\pi x}{2}\right]=(0\cdot\infty)=\lim_{z\to0}\left[z\cdot tg\frac{\pi(1-z)}{2}\right]=$$

$$\lim_{z\to0}\left[ztg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right)\right]=\lim_{z\to0}\left(z\cdot ctg\frac{\pi z}{2}\right)=\lim_{z\to0}\frac{z}{tg\frac{\pi z}{2}}==\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to0}\frac{z}{\frac{\pi z}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

5.3.5 Розкриття невизначеності виду 1^{∞}

Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу чудову границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to\infty}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e=2{,}71828\ldots.$$

Зазначимо, що число e ірраціональне. Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом і позначають $\ell n\,x\equiv\ell og_e x$.

Приклад 22 Знайти $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{m\,x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність 1^{∞}. Виконуючи елементарні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, одержуємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}\cdot mx}=e^{km}.$$

Приклад 23 Знайти $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^{∞}. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Приклад 24 Знайти $\lim_{x\to0}\left(1+tg^{2}\sqrt{x}\right)^{1/2x}$.

Розв'язання. Маємо

$$\ell im_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}=\left(1^{\infty}\right)=\ell im_{x\to 0}\left[\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=$$

$$=\ell im_{x\to 0}\ e^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\ell im_{x\to 0}\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\ell im_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{1/2}.$$

При розв'язуванні прикладу прийнято до уваги, що при $x\to 0$ $tg^2\sqrt{x}\sim\left(\sqrt{x}\right)^2=x$.

Приклад 25 Знайти $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\ell n(a+x)-\ell na}{x}$.

Розв'язання. У результаті підстановки граничного значення x маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Використавши формули потенціювання (див. дод.4) і другу чудову границю, одержимо

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\ell n(a+x)-\ell na}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 0}\frac{\ell n\frac{a+x}{a}}{x}=\ell im_{x\to 0}\ \ell n\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}=$$

$$=\ell n\ \ell im_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/x}=\ell n\ \ell im_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\ell ne^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

Розглянемо різні приклади на знаходження границь.

Використовуючи теореми про границі, а також правила розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, обчислити границі:

1 $\ell im_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{4-x^2}$;

2 $\ell im_{x\to 0}\left(\dfrac{x+7}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+tgx\right)$;

3 $\ell im_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x-arctgx}$;

4 $\ell im_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

5 $\ell im_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

6 $\ell im_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

7 $\ell im_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$;

9 $\ell im_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

10 $\ell im_{x\to 0}\dfrac{(x+1)(x+2)}{2x^2+x+7}$;

11 $\ell im_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{\sin x}}$;

12 $\ell im_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$;

13 $\ell im_{x\to 5}\dfrac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$;

14 $\ell im_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin^3 x}$;

15 $\ell im_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)$;

8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{1/x}-1\right)\right];$

16 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2+\ldots+x}{x^2}.$

Розв'язання.

1 $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{4-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}-2\right)}{\left(4-x^2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-4}{\left(4-x^2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{2(x-2)}{(2-x)(2+x)\left(\sqrt{2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{-2}{(2+x)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\frac{-2}{4\cdot4}=-\frac{1}{8}.$

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x+7}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+tgx\right)=\frac{7}{1+1}+0=\frac{7}{2}.$

3 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+arctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\frac{\arcsin x}{x}}{2+\frac{arctgx}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\frac{x}{x}}{2+\frac{x}{x}}=\frac{1}{3}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^6.$

5 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3}{x\sin2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2x\right)}{x\sin2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{2x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2x\right)}{x\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\frac{x^2}{4}\left(1+\cos x+\cos^2x\right)}{x\cdot2x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\left(1+\cos x+\cos^2x\right)=\frac{3}{4}.$

6 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}=\frac{\sqrt{x}\left(x^{3/2}-1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)\right]=3.$

7 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x^3+27}=\left(\frac{0}{0}\right)\lim\limits_{x\to-3}\frac{2(x+3)(x-1/2)}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x-1}{x^2-3x+9}=\frac{-6-1}{9+9+9}=-\frac{7}{27}$

8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{1/x}-1\right)\right]=(\infty\cdot0)=\left|\begin{matrix}1/x=z\\ x\to\infty\quad z\to0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{z\to0}\frac{z}{z}=1.$

Тут враховано, що при $z\to0 \qquad e^{\lambda}-1\sim z$.

9 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=(\infty-\infty)\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{0}{0}=$

$$=\lim_{x\to 2}\ \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\ \frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{2x^2+x+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+3/x+2/x^2}{2+1/x+7/x^2}=\frac{1+0+0}{2+0+0}=1/2.$

11 $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{\sin x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right]^{\frac{tgx}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{tgx}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\cos x}}=e.$

12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+3x}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{2}.$$

13 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}=\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x-1}\right)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{9-2x+1}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{2(5-x)}=\lim_{x\to 5}\frac{3+\sqrt{2x-1}}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

14 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{1/x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}}\right]^{\frac{\sin\ 3x}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\ e^{\frac{\sin 3x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}}=e^3.$$

15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{4\sin^2 x\ \cos^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{4}.$$

16 Ні чисельник, ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Зобразимо вираз, який стоїть під знаком границі, у вигляді суми:

$$\frac{1+2+\cdots+x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\cdots+\frac{x}{x^2}.$$

Кожний доданок цієї суми при $x\to\infty$ має границю, яка дорівнює нулю. Однак застосувати тут теорему про границю суми не можна, тому що кількість доданків разом з n росте необмежено. Треба шукати інший шлях розв'язання.

Зазнавши, що чисельник є сумою членів арифметичної прогресії, за відомою формулою (див. дод. 4) знайдемо

$$1+2+\ldots+x=\frac{(1+x)x}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+\ldots+x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)x}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається границею функції $f(x)$ при $x\to x_0$?

2 Навести приклад функції $y=f(x)$, яка має границі при $x\to x_0$; не має границі при $x\to x_0$.

3 Що називається границею функції при $x\to+\infty$, при $x\to-\infty$?

4 Навести приклад функції $y=f(x)$, яка має границю при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$; не має границі при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

5 Яка функція $y=f(x)$, називається нескінченно великою величиною при $x\to x_0$, при $x\to\pm\infty$? Навести приклади.

6 Яка функція $y=f(x)$ називається нескінченно малою величиною при $x\to x_0$, при $x\to\pm\infty$? Навести приклади.

7 Який найпростіший зв'язок існує між нескінченно великими і нескінченно малими величинами?

8 Яка функція називається обмеженою в інтервалі? при $x\to x_0$? При $x\to\pm\infty$?

9 Сформулювати правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.

10 Чому дорівнює границя сталої величини?

11 Чому дорівнює границя нескінченно малої величини?

12 Сформулювати ознаку існування границі функції, яка міститься між двома функціями, які мають одну і ту саму границю.

13 У чому суть першої чудової границі?

14 Що являє собою друга чудова границя?

15 Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними?

16 Указати способи розкриття невизначеностей виду

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty}.$

Вправи

Знайти границі

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. Відповідь: 9.

2 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. Відповідь: $-\frac{2}{5}$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. Відповідь: 0.

5 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{56}$.

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$. Відповідь: 0.

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$. Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$. Відповідь: 0.

9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$. Відповідь: $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

Вказівка. Перетворити різницю косинусів на добуток (див. дод. 4).

10 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tg\,x\right]$. Відповідь: 1.

Вказівка. Покласти $\dfrac{\pi}{2}-x=z$. Тоді при $x\to\dfrac{\pi}{2}$ $\quad z\to 0$.

11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{2x-1}$. Відповідь: e^6.

12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2}$. Відповідь: e^2.

13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+kx)}{x}$. Відповідь: k.

14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$ Відповідь:-2.

15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

Відповідь: - 9.

16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$. Відповідь: 5.

17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$. Відповідь: e^2.

18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$. Відповідь: 0,5.

19 $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$. Відповідь: - $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

20 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$. Відповідь: -2,5.

21 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$. Відповідь: -2.

22 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{1/x} \right)$. Відповідь: -4.

23 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}$. Відповідь: 1.

24 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x} \right)$. Відповідь: -2.

25 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x + tg^2 x}{x \sin x}$. Відповідь: 3.

26 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1}$. Відповідь: $\dfrac{5}{3}$.

27 $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{12}{x^3 + 8} \right)$. Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

28 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$. Відповідь: 4.

29 $\lim\limits_{x\to 0} (\sin 3x \cdot ctg 5x)$. Відповідь: $\dfrac{3}{5}$.

30 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 5} - x \right)$. Відповідь: 0.

31 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x \cdot \sin 3x}{x^2 + x^3}$. Відповідь: 24.

32 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + tg^2 x\right)^{3 ctg^2 x}$. Відповідь: e^3.

33 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x^2 - \cos 2x}{\sin^2 x}$. Відповідь: 3.

34 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + 3}{5x + \sqrt{x^2 + 1}}$. Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

35 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2}$. Відповідь: $\dfrac{12}{5}$.

5.4 Неперервність функції

Згідно з означенням, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0 .$$

Це означення рівносильне такому: функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0) \text{ , де}$$

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ - ліва границя функції;

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ - права границя функції;

$f(x_0)$- значення функції $f(x)$ в точці x_0.

При цьому припускається, що функція $f(x)$ визначена в околі точки $\tilde{o}_0$ (у тому числі і в самій точці точки x_0).

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області (інтервала, сегмента і т. п.), то вона неперервна в цій області.

Слід пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Якщо в точці порушується умова неперервності, така точка називається точкою розриву функції.

Зазначимо, що точки розриву функції можуть належати області визначення функції або знаходитися на границі цієї області.

Класифікація точок розриву:

1 Якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то x_0- точка усувного розриву (x_0 - точка розриву першого роду).

2 Якщо $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то x_0 - точка неусувного розриву, а різниця $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ - стрибок функції $f(x)$ в точці x_0 (x_0 - точка розриву першого роду).

3 Якщо хоча б одна з границь $f(x_0+0)\, i\ f(x_0-0)$ не існує або нескінченна, то x_0 – точка розриву другого роду.

При знаходженні точок розриву функції необхідно керуватися такими положеннями:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці, де вона не визначена;
2) якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів зміни аргументу, вона може мати розриви лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз.

Розв'язання прикладів і задач

Приклад 1 Дослідити на неперервність функцію $y = 3x^2 - 2x$.

Розв'язання. Функція визначена в інтервалі $(-\infty : \infty)$. Покажемо, що в цьому інтервалі вона неперервана. Для цього знайдемо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$.

Через те що, $y = 3x^2 - 2x$, $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)$.

Тоді $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (3x^2 - 2x) = 3\left(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) -$

$$- 2x - 2 \cdot \Delta x - 3x^2 + 2x = 6x \cdot \Delta x - 2 \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, одержимо:

$$\ell im_{\Delta x \to 0} \Delta y = \ell im_{\Delta x \to 0} \left(6x \cdot \Delta x - 2 \cdot \Delta x + 3\left(\Delta x\right)^2\right) = 6x \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, $\ell im_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а це означає, що функція $y = 3x^2 - 2x$ неперервна при будь-якому скінченому значенні x.

Приклад 2 Знайти односторонні границі функції $y = e^{\frac{1}{1-x}}$ при $x \to 1$.

Розв'язання. Символічно всі міркування коротко можна записати так:

$$\ell im_{x \to 1-0} y = \ell im_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-(1-0)}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

$$\ell im_{x \to 1+0} y = \ell im_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-(1+0)}} = e^{\frac{1}{1-1-0}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0.$$

Отже, $f(1+0) = 0$, $\quad f(1-0) = +\infty$.

Приклад 3 Установити, чи функція $y = 2^{1/x}$ неперервною або розривною для $x = 3$ і $x = 0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x = 3$ маємо:

$$y(3) = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2};$$

$$\ell im_{x \to 3+0} y = \ell im_{x \to 3+0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}; \quad \ell im_{x \to 3-0} y = \lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x = 3$ виконується, отже, в точці $x = 3$ функція неперервна. Проведемо аналогічні міркування при $x \to 0 : y(0) = 2^{1/0}$ не існує, бо ділення на нуль не має значення.

$$\ell im_{x \to +0} y = \ell im_{x \to +0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty,$$

$$\ell im_{x \to -0} y = \ell im_{x \to -0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Умова неперервності при $x = 0$ не виконується, отже, в точці $x = 0$ функція розривна (має нескінчений розрив).

Приклад 4 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{якщо} \quad 1 \le x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y=-1$, $y=x^2-2$, з $y=1$ є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1$ з $x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо :

$$\left.\begin{array}{l} y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1+0} y = \lim\limits_{x\to -1+0}\left(x^2-2\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1-0} y = \lim\limits_{x\to -1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{array}\right\} \text{Задана функція неперервна в точці } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=1^2-2=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{array}\right\} \text{Задана функція розривна в точці } x=1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки x=1. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty:-1)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $[-1:1]$ — парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $(1:+\infty)$ — пряма $y=1$ (рис. 5.23).

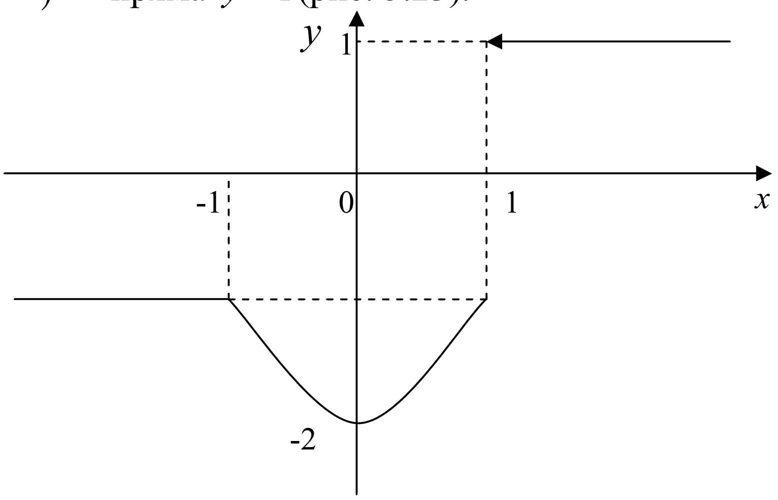


Рис. 5.23

Приклад 5. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ і дослідити характер розриву.

Розв'язання. Відомо, що частка від ділення двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю. Через те, що $x^2-4=0$ при $x=\pm 2$, задана функція має дві точки розриву: $x=-2$ і $x=2$. Досліджуємо характер розриву функції в цих точках. Для цього обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -2+0} y = \lim_{x\to -2+0}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2+0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2+0}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{-2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2-0} y = \lim_{x\to -2-0}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2-0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2-0}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{-2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} y = \lim_{x\to 2+0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2+0}{(2+0-2)(2+0+2)}=\frac{2}{+0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0} y = \lim_{x\to 2-0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2-0}{(2-0-2)(2-0+2)}=\frac{2}{-0}=-\infty.$$

Таким чином, в точках $x=-2$ і $x=2$ функція має нескінченний розрив або розрив другого роду (рис.5.24).

Слід зазначити, що функція $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ непарна, а тому достатньо було б дослідити характер розриву лише в точці $x=2$.

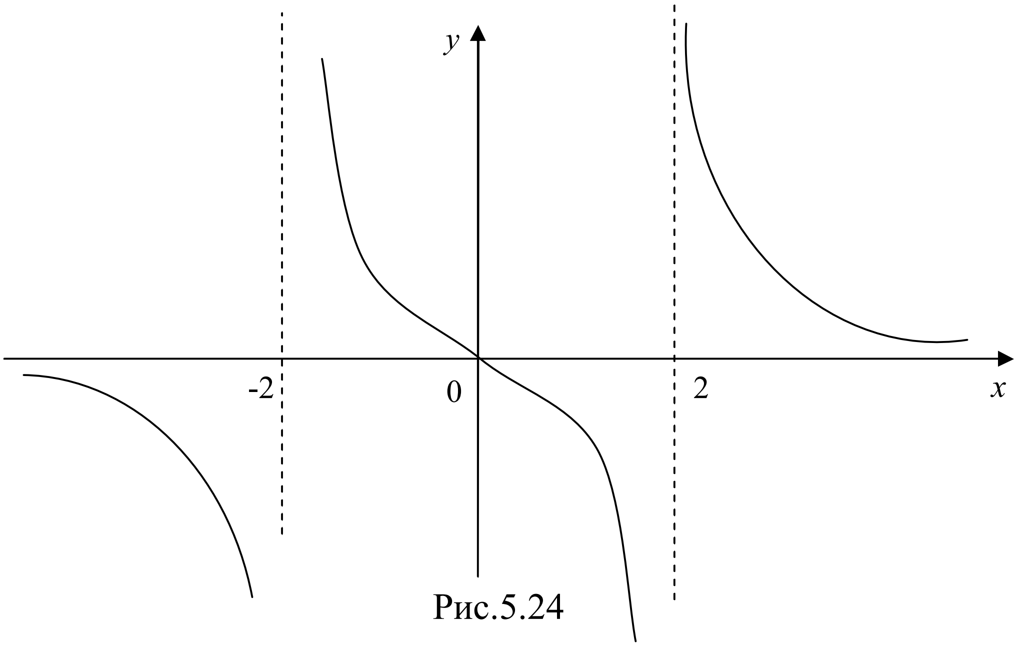


Рис.5.24

Питання для самоперевірки

1 Дати означення неперервності функції $y=f(x)$ в точці x_0 і на інтервалі.

2 Які точки називають точками розриву функції?

3 Навести приклади розривних функцій різного характеру.

4 У чому полягає правило граничного переходу для неперервної функції?

5 Сформулюйте теореми про арифметичні дії над неперервними функціями.

6 Яка умова є необхідною і достатньою для неперервності функції $f(x)$ в точці x_0?

7 Що являють собою односторонні границі функції?

8 Які точки можуть бути точками розриву елементарної функції?

9 Які точки можуть бути точкою розриву неелементарної функції?

10 Яка точка називається точкою розриву першого роду функції $f(x)$?

11 Яка точка називається точкою розриву другого роду функції $f(x)$?

Вправи

1 Знайти односторонні границі функції $f(x) = \dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$ при $x \to 0$.

Відповідь: $f(+0) = 0$; $f(-0) = 1/5$.

2 Знайти $f(3+0)$ і $f(3-0)$, якщо $y = \begin{cases} x^2, \textit{якщо } x < 3, \\ x+6, \textit{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

Відповідь: $f(3+0) = f(3-0) = 9$.

3 Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна в усій області визначення.

4 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} e^x, \textit{якщо } x < 0, \\ x, \textit{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 0$ – точка розриву першого роду.

5 Знайти точки розриву функції $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x + 3}$ і установити характер розриву.

Відповідь: $x = 3$ – точка розриву другого роду; $x = -1$ – точка усувного розриву.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Завдання 1 Розв'язати за допомогою метода Крамера та матричним методом систему **1** лінійних рівнянь. Зробити перевірку.

Завдання 2 Дослідити систему **2** з допомогою теореми Кронекера – Капеллі й у випадку її сумісності знайти всі розв'язки.

Варіант 1

1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 14, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

Варіант 2

1 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

Варіант 3

1 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_3 = -2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

Варіант 4

1 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_2 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 21, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

Варіант 5

1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

Варіант 6

1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

Варіант 7

1 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 14x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 8

1 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 20, \\ x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

Варіант 9

1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Варіант 10

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 = 3, \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 11

1 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 15, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 10, \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 12

1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 13

1 $\begin{cases} 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 14

1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Варіант 15

1 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 16

1 $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 23, \\ x_2 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

Варіант 17

1 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14, \\ x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 18

1 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

2 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

Варіант 19

1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 14, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

Варіант 20

1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7, \\ x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

Варіант 21

1 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12, \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5. \end{cases}$

Варіант 22

1 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_3 = 9, \\ x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 14x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 23

1 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

Варіант 24

1 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

Варіант 25

1 $$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант 26

1 $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + -5x_3 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - +x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Варіант 27

1 $$\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Варіант 28

1 $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 14, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

Варіант 29

1 $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 30

1 $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Додаток 2

Завдання 1 Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Засобами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди;
6) рівняння прямої A_1A_2;
7) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
8) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
9) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Зробити рисунок.

Номер варіанта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(2; 0; 0)	(-2; 0; 1)	(1; 4; 2)	(3; 0; 6)
2	(-2; 0; 2)	(0; 0; 4)	(3; 2; 5)	(-1; 3; 2)
3	(1; 2; 3)	(2; 0; 0)	(3; 2; 5)	(4; 0; 0)
4	(3; 0; 6)	(1; -3; 2)	(3; 2; 5)	(2; 2; 5)
5	(-2; 0; -1)	(0; 0; 4)	(1; 3; 2)	(3; 2; 7)
6	(1; -2; 1)	(0; 0; 4)	(1; 4; 2)	(2; 0; 0)
7	(-2; 1; 0)	(3; 2; 7)	(2; 2; 5)	(6; 1; 5)
8	(-1; 3; 0)	(2; 0; 0)	(4; -1; 2)	(3; 2; 7)
9	(6; 1; 5)	(5; 1; 0)	(-4; 1; -2)	(-6; 0; 5)
10	(1; -1; 6)	(-5; -1; 0)	(4; 0; 0)	(2; 2; 5)
11	(3; 1; 4)	(-1; 6; 1)	(-1; 1; 6)	(0; 4; -1)
12	(3; 3; 9)	(6; 9; 1)	(1; 7; 3)	(8; 5; 8)
13	(3; 5; 4)	(5; 8; 3)	(1; 9; 9)	(6; 4; 8)
14	(2; 4; 3)	(7; 6; 3)	(4; 9; 3)	(3; 6; 7)
15	(9; 5; 5)	(-3; 7; 1)	(5; 7; 8)	(6; 9; 2)
16	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5; 5; 4)	(3; 8; 4)	(3; 5; 10)	(5; 8; 2)
18	(6; 1; 1)	(4; 6; 6)	(4; 2; 0)	(1; 2; 6)
19	(7; 5; 3)	(9; 4; 4)	(4; 5; 7)	(7; 9; 6)
20	(6; 6; 2)	(5; 4; 7)	(2; 4; 7)	(7; 3; 0)
21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4; 4; 10)	(7; 10 ;2)	(2; 8; 4)	(9; 6; 9)
23	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(1; 10; 10)	(7; 5; 9)
24	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(5; 10; 4)	(4; 7; 8)
25	(10; 6; 6)	(-2; 8; 2)	(6; 8; 9)	(7; 10; 3)

26	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)	(4; 10; 9)
27	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)	(6; 9; 3)
28	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 1)	(2; 3; 7)
29	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)	(8; 10; 7)
30	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 8)	(8; 4; 1)

Завдання 2 Дано координати вершин трикутника ABC.
Засобами аналітичної геометрії
1) скласти рівняння сторони AB;
2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C;
3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B;
4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні AC;
5) знайти площу трикутника;
6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині A.

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
1	(-6; -3)	(-4; 3)	(9; 2)	16	(2; -1)	(8; 7)	(-10; 4)
2	(-3; 1)	(-1; 7)	(12; 6)	17	(5; -3)	(1; 0)	(7;2)
3	(-1; 3)	(1; 9)	(4; 7)	18	(4; -6)	(2; 2)	(-2; -1)
4	(0; 0)	(2; 6)	(7; 2)	19	(3; 4)	(-1; 7)	(-4; 0)
5	(-2; -6)	(0; 0)	(3; -2)	20	(1; -2)	(7; 6)	(0; 2)
6	(-2; -5)	(6; 2)	(0; 0)	21	(2; -1)	(-2; -3)	(-6; 4)
7	(-2; -5)	(-4;-7)	(5; 5)	22	(5; -8)	(3; -2)	(-3; -6)
8	(1; 2)	(3; 8)	(-4; -1)	23	(8; -2)	(-6; -5)	(0; 4)
9	(4; 4)	(1; -3)	(9; 0)	24	(7; 5)	(3; 2)	(4; 0)
10	(5; 6)	(7; 2)	(-6; 0)	25	(3; -7)	(6; 0)	(1; 1)
11	(-6; -4)	(-1; 2)	(-6; -3)	26	(5; 3)	(-1; -2)	(-3; 7)
12	(2; 0)	(7; 2)	(0;5)	27	(3; 1)	(-2; 8)	(-5; 3)
13	(-2; -6)	(-6; -3)	(10; -1)	28	(9; 2)	(-5; 7)	(0; -3)
14	(8; 2)	(-2; -1)	(-4;7)	29	(-6; -3)	(3; 1)	(-1; 4)
15	(-6; -4)	(-2; -1)	(4; 1)	30	(7; 9)	(-2; 0)	(-3; 2)

Завдання 3 Привести рівняння лінії до канонічного вигляду, побудувати цю лінію і знайти залежно від одержаного результату:

а) координати центра кола та його радіус;

б) координати фокусів, довжини осей і ексцентрисистет еліпса;

в) координати фокусів, довжини осей, ексцентрисистет гіперболи і записати рівняння її асимптот;

г) координати вершини та фокуса параболи, величину параметра, а також записати рівняння її директриси.

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
1	$x^2-6x-4y+29=0$	16	$2y^2+x-4y-8=0$
2	$x^2+y^2+2x-6y+1=0$	17	$y^2-3x^2-4y-6x-11=0$
3	$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$	18	$9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$
4	$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$	19	$x^2-4y^2-8y+12=0$
5	$y^2-2x+8y+10=0$	20	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$
6	$7x^2-2y^2+28x+14=0$	21	$x^2-y^2-4x+2y+2=0$
7	$2y^2+x+4y+6=0$	22	$16x^2+25y^2+64x-50y-311=0$
8	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$	23	$2x^2-8x+y+5=0$
9	$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$	24	$9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
10	$x^2-10x-4y-3=0$	25	$x^2+y^2-2x+6y-6=0$
11	$3y^2-x^2+6x-12y=0$	26	$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$
12	$x^2+y^2-6x-8y+9=0$	27	$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$
13	$2y^2+x-8y+3=0$	28	$x^2+y^2+4y-5=0$
14	$x^2-4y^2-2x-8y+13=0$	29	$4x^2-y^2-8x-6y-25=0$
15	$x^2+y^2-14x-8y+40=0$	30	$4x^2-8x+y+7=0$

Завдання 4 Дана функція $r=f(\varphi)$ на відрізку $0\le\varphi\le 2$.

Необхідно:

1) побудувати графік функції в полярній системі координат по точках, даючи φ значення через проміжок $\frac{\pi}{8}$, починаючи від $\varphi=0$;

2) знайти рівняння одержаної лінії в прямокутній декартовій системі координат, початок якої збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис – з полярною віссю, і за рівнянням визначити, яка це буде лінія.

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
1	$r=2\cos\varphi-5\sin\varphi$	10	$r=\dfrac{6}{1-2\cos\varphi}$
2	$r=\dfrac{21}{5-2\cos\varphi}$	11	$r=\dfrac{5}{1+\sin\varphi}$
3	$r=\dfrac{2}{1-\sin\varphi}$	12	$r=\dfrac{4}{2+3\cos\varphi}$
4	$r=-\dfrac{3}{\cos\varphi}$	13	$r=4\cos\varphi$
5	$r=\dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$	14	$r=\dfrac{15}{3-4\sin\varphi}$

6	$r=-5\sin\varphi$	15	$r=\dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$
7	$r=\dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$	16	$r=-6\cos\varphi$
8	$r=\dfrac{12}{2-\cos\varphi}$	17	$r=\dfrac{2}{\sin\varphi}$
9	$r=\dfrac{3}{2+\cos\varphi}$	18	$r=\dfrac{6}{3+2\cos\varphi}$
19	$r=\sin\varphi-3\cos\varphi$	25	$r=\dfrac{4}{1+\cos\varphi}$
20	$r=\dfrac{1}{2+2\sin\varphi}$	26	$r=2\sin\varphi$
21	$r=\dfrac{2}{1-\cos\varphi}$	27	$r=\dfrac{18}{5-4\sin\varphi}$
22	$r=-\dfrac{4}{\sin\varphi}$	28	$r=\dfrac{3}{2\cos\varphi}$
23	$r=\dfrac{5}{4+3\cos\varphi}$	29	$r=\dfrac{3}{5+6\sin\varphi}$
24	$r=-4\cos\varphi-3\sin\varphi$	30	$r=3\cos\varphi+2\sin\varphi$

Додаток 3

Знайти границі функцій

Варіант I

1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3-7x-2x^2}$.

3 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{\sqrt[3]{x+4}-1}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin 3x\cdot ctg2x\right)$.

5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$.

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sec x-1}$.

7 $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{16-x^2}\right)$.

8 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-8x}\right)$.

9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$.

10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+4x+1}$.

Варіант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sin x}{1-\cos 2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2+5x-6}{x^3+2x^2+3x+7}$.

3 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{16-x^2}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-x-5}{x^2+2x}\right)^{x-3}$.

5 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin^2(x-2)}{2x^2-8x+8}$.

6 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$.

7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

8 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+tg^2x\right)^{2ctg^2x}$.

9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

10 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right)$.

Варіант 3

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

5 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$.

6 $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{3^x-3^{-x}}{tg 2x}$.

7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)}{x}$.

8 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$.

9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^6+4x^3+7}-3\sqrt{x^6+x+5}$.

10 $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\cdot ctg\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

Варіант 4

1 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x+5}{x^2+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-7}{5-2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{arctg^2\, 2x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{7x+2}{7x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{2x+9}-3}$.

8 $\lim\limits_{x\to 3} (2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

9 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$.

Варіант 5

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-x+7}{3x+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8-5x^2+x^3}{x^2+4x+10}$.

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left[(x+2)\,\ell n\dfrac{2x-3}{2x+1}\right]$.

5 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-ctg^2 x\right)$.

6 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$.

8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\sin 2x}{tg3x}$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-3x}$.

10 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{4-x^2}$.

Варіант 6

1 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$.

2 $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{tg\,\frac{x}{2}}{\sin x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+4x^2+8}{5x^4+2x^3-9}$.

4 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{3x-11}}$.

5 $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 5x}$.

7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$.

8 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$.

10 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}$.

Варіант 7

1 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$.

3 $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

4 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{2x}$.

6 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

8 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$.

9 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin 5x\cdot ctg\dfrac{x}{2}\right)$.

10 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{3x+4}-2}$.

Варіант 8

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9x^2-6x-3}{x^3-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^3 3x}{x^2\,tg2x}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)$

4 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{tg^2x-1}$.

5 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-5x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

6 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^4+3}{1-2x^2-4x^5}$.

8 $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{5x+1}$.

10 $\lim\limits_{x\to0}\arccos\dfrac{\sqrt{3}-x}{3x+2}$.

Варіант 9

1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-3x+2}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 3x}{tg^2\dfrac{x}{2}}$.

3 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{8x}}$.

4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5x+2}}{\sin 3x}$.

5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7x+2x^2}{6-5x+3x^2}$.

6 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}}\dfrac{16x^2-24x+9}{4x^2+7x+3}$.

7 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-x}\right)$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x-3}\right)^{2x-3}$.

10 $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$.

Варіант 10

1 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{tg^2\,6x}$.

3 $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$.

4 $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{49-x^2}$.

5 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{0}}\dfrac{\cos\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}}{\cos 3x}$.

6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x+2}{3}}$.

8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-x}\right)$.

9 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

10 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,arctg6x}{\sin^2 3x}$.

Варіант 11

1 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{27-x^3}{x^2-5x+6}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\frac{x}{2}}{tg^2\, 3x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

6 $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{10}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)$.

7 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{2x^2}$.

9 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{8x-3}$.

10 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2-8x}\right)$.

Варіант 12

1 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin 2x}$.

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

5 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+8x+1}{2+3x^2+4x^3}$.

6 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\ell\eta\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

7 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

9 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}$.

10 $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin\dfrac{3x-1}{3x+1}$.

Варіант 13

1 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3-2x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{3-\sqrt{2x+3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x^3-8}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5\sin^2 2x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{8}{16-x^2}-\dfrac{1}{4-x}\right)$.

6 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$.

7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 5x}$.

8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

$9\ \ell im_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}.$

$10\ \ell im_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}-3\right)\quad .$

Варіант 14

$1\ \ell im_{x\to 2}\ \dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}.$

$2\ \ell im_{x\to 3}\ \dfrac{6}{x_2-9}-\dfrac{1}{x-3}.$

$3.\ \ell im_{x\to 0}\ \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}.$

$4\ \ell im_{x\to 0}(1+4\sin x)^{\frac{3}{5x}}$

$5\ \ell im_{x\to +\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}+\dfrac{2x^5}{1-3x^5}\right).$

$6\ \ell im_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 4x}}{1-\cos\sqrt{x}}\quad .$

$7\ \ell im_{x\to\infty}\ \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+2}{3}}.$

$8\ \ell im_{x\to 1}\dfrac{9x^2-6x-3}{x^3-1}\quad .$

$9\ \ell im_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 3x}{x\ tg\dfrac{x}{2}}.$

$10\ \ell im_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+2ctgx}{(\pi-x)\sin\dfrac{x}{2}}\quad .$

Варіант 15

$1\ \ell im_{x\to 8}\ \dfrac{4-\sqrt{2x}}{x-8}.$

$2\ \ell im_{x\to\frac{\pi}{4}}\ \dfrac{\sin x-\cos x}{tgx-1}\quad .$

$3\ \ell im_{x\to\infty}\ \dfrac{(x+1)(x+2)}{2x^2+x+7}.$

$4\ \ell im_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

$5\ \ell im_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11+2}.$

$6\ \ell im_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{12}{x^2-1}\right)\quad .$

$7\ \ell im_{x\to 0}\ \left(\dfrac{4\sin 2x}{x}-\dfrac{\sin 3x}{2x}\right).$

$8\ \ell im_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}\quad .$

$9\ \ell im_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3x}{2}\right)^{\frac{5}{x}}.$

$10\ \ell im_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}\quad .$

Варіант 16

$1\ \ell im_{x\to -1}\ \dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}.$

$2\ \ell im_{x\to 2}\ (5x-9)^{\frac{3x}{2-x}}\quad .$

$3\ \ell im_{x\to 5}\ \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{5x-9}}{x^2-5x}.$

$4\ \ell im_{x\to 0}\ \dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 3x}.$

$5\ \ell im_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right).$

$6\ \ell im_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+3x}{3x+2}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\quad .$

$7\ \ell im_{x\to 0}\ \dfrac{\sin^2 3x}{\cos x-\cos^3 x}.$

$8\ \ell im_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{5x+x^2}\quad .$

9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

10 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{3x+6}$.

Варіант 17

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^2-x-1}{15x^3-3x+7}$.

2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tg^2x}{\cos x-\sin x}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x\sin 6x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$.

5 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$.

6 $\lim\limits_{x\to 1} (5x-4)^{\frac{x}{x^2-1}}$

7 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

8 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

9 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$.

10 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sin 3x\cdot ctg\dfrac{x}{5}\right)$.

Варіант 18

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-3x^2+2x-2}{(x-1)^3}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} 5^{\frac{2x}{x+3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{tg^2 3x}$.

5 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$.

6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$

7 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}\right)$.

8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)$.

9 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)$.

10 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+tg^2\sqrt{3x}\right)\dfrac{2}{\sin 3x}$.

Варіант 19

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$.

2 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{tgx-tg\alpha}{x-\alpha}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0} (1+tg5x)^{\frac{2}{x}}$.

6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

7 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5+3x}{3x-2}\right)^{4x-1}$.

9 $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$.

10 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

Варіант 20

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\cos 2x\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{3x^2-x-4}$.

4 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

5 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

6 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{8x^3-1}{x^2+5x^3}$

7 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{-2x}$.

8 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{5x-3}{4+5x}\right)^{x-2}$.

9 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

10 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-3x}\right)$.

Варіант 21

1 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+3x-9}{27+x^3}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(x+1)}{x}$.

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 7x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{tg\,(x-4)}{3-\sqrt{2x}+1}$.

6 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{\frac{x+4}{2}}$

7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin - tgx}{x^3}$.

9 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}\right]$.

10 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-ctg^2 x\right)$.

Варіант 22

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3x^2}{x^{5^3}+x^3+2x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{\cos 7x-\cos 3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3+x+1}{3x^3-5}\right)^{2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin\,(1-2x)}{4x^2-1}$.

5 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+4}{x-6}\right)^{\frac{x}{2}}$.

6 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin 3x-1}{tg 6x}$.

7 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$.

8 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$.

9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+9}-\sqrt{x^3-1}\right).$

10 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Варіант 23

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}.$

2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-2}{2\sin^2x-3\sin x}.$

3 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5+6}{x^2-7x+10}.$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}\right).$

5 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-tg^2x}.$

6 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

7 $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{5x}{3-x}}.$

8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(3x+7)}{(x+1)(x^2+1)}$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{7+2x}\right)^{\frac{x-1}{4}}.$

10 $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin 3x\cdot ctg^2 5x\right)$.

Варіант 24

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+4}{\sqrt[3]{27x^3-5x^2+1}}.$

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sqrt{x+4}-2}.$

3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x-tg^2x}{x\sin x}.$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6-3^x}{2+3^{x+1}}.$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+8x}\right)$.

6 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos 4x}{1+\sin 2x}$.

7 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{3x^2-2x-1}.$

8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{3+4x}\right)^{\frac{3x-2}{2}}$.

9 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ell n^3-\ell n\,(x+3)}{5x}$.

10 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Варіант 25

1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}.$

2 $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+14x-5}.$

3 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x+7}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}-tgx\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{\sqrt{4+\cos x}-\sqrt{5}}.$

5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{x+2}$.

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-5}\right)$

7 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 3x}{1-\cos 4x}.$

8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2^x}{3+2^{x+1}}$.

9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{2x}$.

10 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sin(3-x)}$.

Варіант 26

1 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+8}-3\sqrt{x^2+4x}\right).$

2 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}.$

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}.$

4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}.$

5 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-5x+3}{\log_2(x^2+1)}.$

6 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$

7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg(x^2+3x)}{\arcsin 2x}.$

8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+1)}$.

9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2}{\cos 7x-\cos 9x}$.

10 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{5x^2-4}-\dfrac{x^2}{5x+2}\right)$.

Варіант 27

1 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x^2+1}{4x^2-1}\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}.$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin\frac{x}{2}}-\sqrt{1-\sin\frac{x}{2}}}.$

4 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$

5 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{12}{x^3-8}-\dfrac{1}{2-x}\right)$.

6 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right].$

7 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)}{x^5+7}$.

8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin^2 3x}.$

9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{\sin 6x}$.

10 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{\frac{4x+3}{5}}$.

Варіант 28

1 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}.$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt{4+tg^2x}-2}.$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{(1-2x)^3}.$

4 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-5x^2+6}{x^2-3x}.$

5 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right).$

6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xtg3x}{\cos^5 x-\cos^3 x}$

7 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$.

8 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-2}}{9-x^2}$.

9 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-1-\cos}{\cos x-\sin x}$.

10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Варіант 29

1 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$.

2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}-4tg^2x\right)$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x}{7x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$.

4 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x-2}$.

6 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}+5\right)$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$.

8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 5x}$.

9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{2-\sin 2x}$.

10 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot tg3x\cdot ctg^2\dfrac{x}{5}\right)$.

Варіант 30

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x^2-6x^3}{\sqrt{x^2+1}-2x^3}$.

2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{3x^2-7x+2}$.

3 $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

6 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$

7 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-7x}\right)$

8 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sin(x+2)}$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x-4}\right)^{1-6x}$

10 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-14x-8}{x^2-x-2}$

Додаток 4

Довідковий матеріал з елементарної математики

1 Формули скороченого множення

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$$
$$a^2+b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2 Квадратне рівняння . Загальний вигляд

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0;\ b, c \text{ - довільні числа})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Зведений вигляд

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Зв'язок між коренями і коефіцієнтами *(*теорема Вієта*)*

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q.$$

Розклад квадратного тричлена на лінійні множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax_2 + bx + c = 0$.

3 Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого кута

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

4 Симетрія тригонометричних функцій

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$
$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

5 Тригонометричні функції подвійного кута

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

6 Тригонометричні функції половинного кута

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

7 Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій на добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta = -2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

8 Формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

9 Тригонометричні функції суми та різниці двох кутів

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\; tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\; tg\beta}$$

10 Формули зведення

Аргумент / Функція	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

11 Значення тригонометричних функцій й деяких кутів

Аргумент / Функція	0^0	$30^0=\frac{\pi}{6}$	$45^0=\frac{\pi}{4}$	$60^0=\frac{\pi}{3}$	$90^0=\frac{\pi}{2}$	$180^0=\pi$	$270^0=\frac{3\pi}{2}$	$360^0=2\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*Не існує*	0	*Не існує*	0
$ctg\alpha$	*Не існує*	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	*Не існує*	0	*Не існує*

12 Формули потенціювання.

$$\ell n\, a+\ell n\, b=\ell n(ab),$$

$$\ell n\, a-\ell n\, b=\ell n\frac{a}{b},$$

$$n\ell n\, a=\ell n\left(a^n\right).$$

13 Сума n членів арифметичної прогресії

$$Sn=\frac{a_1+a_n}{2}n.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1954.

2 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1987.

3 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

4 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов: В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т. І.

5 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

6 Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – Ч.І. – К.: Вища шк., 1990.

7 Самойленко А.М., Вишенський В.А., Перестюк М.О. Збірник задач з математики. . – К.: Вища шк., 1982.

8 Овчинников П.Ф., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф. Овчинникова. . – К.: Вища шк., 1987.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ХАРЧЕНКО Анатолій Петрович
ГАЄВСЬКА Вікторія Олексіївна
ЛИСЯНСЬКА Ганна Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАХ І ЗАДАЧАХ
Частина І

Навчальний посібник

Роботу до видання рекомендував Іохвідович Н.Ю.

Комп'ютерне верстання Гаєвська В.О.

Підп. до друку 27.11.13 Формат А5 297х420 .
Умов. друк. арк. 11
Тираж 300 прим.

Видавництво "НТМТ"
Свідоцтво про Державну реєстрацію ДК № 1748 від 15.04.2004 р.
61072, м. Харків, пр. Леніна, 58 к. 106.
Тел. 763-03-80, 763-03-72

Віддруковано в друкарні ТОВ «Цифра принт»
на цифровому лазерному комплексі Xerox DocuTech 6135.
Свідоцтво про Державну реєстрацію А01 №432705 від 3.08.2009р.
Адреса: м. Харків, вул. Данилевського, 30. Телефон: (057) 7861860.