РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

Теоретичні відомості

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)-$ одна з первісних функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)\ x\epsilon X$; C −довільна стала.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq 1$
2. $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$
3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0, a\neq 1.$
4. $\int e^x dx=e^x+C$
5. $\int \cos x dx=\sin x+C$
6. $\int \sin x dx=-\cos x+C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$
9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{\mathrm{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, a>0$
10. $\int \frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x+C$
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2\mathrm{a}}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C, a>0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C, a>0$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$

Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування невизначених інтегралів грунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\ k=const, k\neq 0.$

2. $\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$ (Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків)

3. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то для будь-яких сталих k, b $(k\neq 0)$

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної грунтується на формулі

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = F\big(\varphi(x)\big) + C,$$

де $F(x)$ – первісна $f(x)$; $\varphi'(x)$ –похідна функції $\varphi(x)$.

Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

де u, v – функції змінної x; $du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Безпосереднім інтегруванням обчислити:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{2^x}$; в) $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$

б) $\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x}dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C.$

в) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$

Приклад 2. Використовуючи властивості невизначеного інтеграла, знайти:

а) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{4-x^2}$; в) $\int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right)dx$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3\operatorname{tg} x + C.$

б) $\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

в) $\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right)dx=\int 4dx-\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{1}{2}e^x dx=4\int dx-3\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int e^x dx=$
$=4x-3\ln|x|+0{,}5e^x+C.$

Приклад 3. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Розв'язання.

а) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C.$

б) $\int\frac{dx}{x^2+4x+13}$. Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x: $x^2+4x+13=(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2)+9=(x+2)^2+9.$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$$

Приклад 4. Використовуючи заміну змінної знати:

а) $\int\sin^2\cos x\,dx$; б) $\int\frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2 x}dx$.

Розв'язання.

а) $\displaystyle\int\sin^2\cos x\,dx=\left|\begin{matrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\sin^3x+C.$

б) $\int\frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2x}dx=\left|\begin{matrix}t=tg\,x\\ dt=\frac{1}{\cos^2x}dx\end{matrix}\right|=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(tg\,x)^{\frac{3}{2}}+C.$

Приклад 5. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int x\cos x\,dx$; б) $\int(3x-1)e^x dx$.

Розв'язання.

а) Покладемо $u=x, dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=(x)'dx=dx, v=\int dv=\sin x$

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=$$
$$=x\sin x-(-\cos x)+C=x\sin x+\cos x+C.$$

б) $\int(3x-1)e^x dx=\left|\begin{matrix}u=3x-1 & du=3dx\\ dv=e^x dx & v=e^x\end{matrix}\right|=(3x-1)e^x-\int 3e^x dx=$
$$=(3x-1)e^x-3e^x+C.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають невизначеним інтегралом?
2. Записати основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Які методи інтегрування існують?

Вправа

1. Безпосереднім інтегруванням обчислити:

а) $\int \sqrt[3]{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$; б) $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}+C$; в) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\left(9x^5-\sqrt[5]{x}\right)dx$; б) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; в) $\int \text{ctg}^2 x dx$; г) $\int \frac{dx}{9-5x^2}$; д) $\int \frac{10dx}{x^2-8x-9}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}x^6-\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}+C$; б) $\frac{1}{3}x^3-x+\text{arctg}\,x+C$; в) $-\text{ctg}\,x-x+C$,

г) $-\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-3}{\sqrt{5}x+3}\right|+C$; д) $\ln\left|\frac{x-9}{x+1}\right|+C$.

3. Використовуючи заміну змінної знати:

а) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$; б) $\int \frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x+9}}dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$; г) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

Відповідь:

а) $\frac{1}{\ln 2}2^{\sin x}+C$; б) $2\sqrt{x^2+5x+9}+C$; в) $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-4}\right|+C$;

г) $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C$.

4. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int(3-4x)\cos 2x\,dx$; б) $\int x^2e^x dx$; в) $\int x\ln x dx$.

Відповідь: а) $\frac{3-4x}{2}\sin 2x-\cos 2x+C$; б) $(x^2-2x+2)e^x+C$;

в) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$.

Інтегрування дробово-раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій

Теоретичні відомості

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо інтегрування дробово-раціональних функцій вигляду

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

де $P_m(x), Q_n(x) -$ многочлени відповідно зі степенями m, n змінної x.

Нагадаємо, що степінь многочлена встановлюється найбільшим показником x. Якщо $m < n$, то дріб правильний, а якщо $m \geq n$, то дріб під інтегралом неправильний і його необхідно шляхом ділення чисельника на знаменник звести до суми двох доданків: многочлена та правильного раціонального дробу.

Знаменник правильного раціонального дробу $Q_n(x)$ розкладають на лінійні множники типу $(x-\alpha)^k$ (де $k -$ кратність множника $(x-\alpha)$) або на квадратні тричлени типу (x^2+px+q) з від'ємним дискримінантом. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, тобто

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^k \dots (x^2+px+q)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + \dots + \dots,$$

де $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, B, C, \dots -$ невизначені коефіцієнти

Для знаходження невизначених коефіцієнтів необхідно скласти і розв'язати алгебраїчну систему, яка утворюється шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях на основі рівності чисельників початкового та кінцевого дробів. Отримані простіші доданки інтегруються за допомогою попередніх методів інтегрування.

Інтегрування ірраціональних функцій

В інтегралах вигляду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$$

доцільно скористатись підстановкою виду $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де $k-$ спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\frac{r}{s}$.

Інтегрування тригонометричних функцій

1. В інтегралах вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$

а) якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тоді використовується підстановка $t=cosx$;

б) якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тоді $t=\sin x$;

в) якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тоді $t=\operatorname{tg}x$ або $t=c\operatorname{tg}x$;

г) якщо $R-$ довільна функція, тоді застосовують універсальну тригонометричну підстановку

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\qquad\frac{2dt}{1+t^2}.$$

2. В інтегралах вигляду

$$\int \sin^m x\cos^n x dx$$

а) якщо показники парні, тобто $m=2p,n=2q,p>0,q>0$, то

$$\sin^m x=(\sin^2 x)^p=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p,$$

$$\cos^n x=(\cos^2 x)^q=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q.$$

б) якщо хоча б один з показників непарний, наприклад, $m=2p+1,$ то

$$\sin^m x dx=\sin^{2p}x\sin x\,dx=-(1-\cos^2 x)^p d\cos x,$$

тобто використовується заміна $t=\cos x$.

в) перетворення добутку тригонометричних функцій в суму з використанням тригонометричних співвідношень:

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x);$$

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$

Розв'язання

Розкладемо дріб на суму найпростіших:

$$\frac{6x^2-13x+4}{x(x^2-3x^1+2)} = \frac{6x^2-13x+4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2},$$

$$6x^2-13x+4 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1),$$

$$6x^2-13x+4 = Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-2Bx+Cx^2-Cx,$$

$$\begin{cases} 6 = A+B+C \\ -13 = -3A-2B-C, \\ 4 = 2A \end{cases} \begin{cases} B = 3 \\ C = 1 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= 2\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x-2| + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin 2xdx}{3+4\cos^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin 2xdx}{3+4\cos^2 x} = \int \frac{2\sin x\cos x\,dx}{3+4\cos^2 x} = J.$$

Функція пвд інтегралом непарна по $\sin x$, тому використовуємо підстановку $t = \cos x$, маємо

$$J = -\int \frac{2tdt}{3+4t^2} = \left|\begin{matrix} z = 3+4t^2 \\ dz = 8tdt \\ 2tdt = \dfrac{dz}{4} \end{matrix}\right| = -\int \frac{dz}{4z} = -\frac{1}{4}\ln|3+4t^2| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|3 + 4\cos^2 x| + C.$$

Приклад 3. Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку, обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{t^2 + 2t - 1} dt = \int \frac{2dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

Питання для самоперевірки

1. Який раціональний дріб називається правильним? Як можна представити неправильний раціональний дріб?
2. Як розкладаються правильні раціональні дроби на найпростіші?
3. Як інтегруються найпростіші дроби?
4. Яка підстановка називається універсальною? Які інтеграли беруться за допомогою цієї підстановки?
5. Як проводиться інтегрування ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок?

Вправи

1. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

а) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$; б) $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14} dx$; в) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12} dx$; г) $\int \frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3} dx$.

Відповідь: а) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$; б) $\frac{3}{2} \ln|x^2 + 7x + 14| - \frac{13}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+7}{\sqrt{7}} + C$;

в) $\frac{x^2}{2} + 7x - 32\ln|x - 3| + 70\ln|x - 4| + C$; г) $\frac{5}{32} \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| - \frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2}$.

2. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

а) $\int \sin 2x \cos 3x dx$; б) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$; в) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$; б) $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$;

в) $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

3. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

а) $\int\frac{dx}{1+8\cos^2 x}$; б) $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Відповідь: а) $\frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{tg\,x}{3}\right)+C$; б) $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$.

4. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

а) $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x}\sqrt{x})}$; б) $\int\frac{\sqrt{x-5}}{x}$.

Відповідь: а) $6\left(\sqrt[6]{x}-\text{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$; б) $2\sqrt{x-5}-\frac{10}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5}}+C$.