Лекція №6

Типові динамічні ланки та їх характеристики

1. Визначення структурної схеми САК

Структурна схема САК – це умовне графічне зображення системи автоматичного керування, яке служить для її математичного опису. На структурній схемі САК зображають у вигляді з’єднаних між собою динамічних ланок.

Динамічна ланка – це умовно виділена частина системи автоматичного керування, яка виконує найпростіші перетворення сигналів.

Динамічні ланки відповідають певним перетворенням сигналів у системі. Ці перетворення описують як правило засобами математики, а саме передатною функцією динамічної ланки. Зображають динамічні ланки прямокутником, всередині якого записують передатну функцію. В якості динамічних ланок виступають умовно виділені частини системи, в яких здійснюються найбільш прості перетворення сигналів. Динамічні ланки з’єднують між собою стрілками, які відповідають напрямку передачі сигналу від однієї ланки до іншої. Динамічні ланки є ланками направленої дії.

Ланка направленої дії - це ланка, яка передає сигнал тільки в одному напрямку з входу на вихід і її властивості не залежать від інших ланок, з якими вона з’єднана.

Ланка направленої дії це певна ідеалізація. Фактично немає таких ланок, щоб на них не впливали інші ланки. У випадках, коли впливом іншої ланки не можна нехтувати, реальну ланку можна подати у вигляді двох ланок направленої дії, з’єднаних зустрічно–паралельно, як це показано на рис.1.

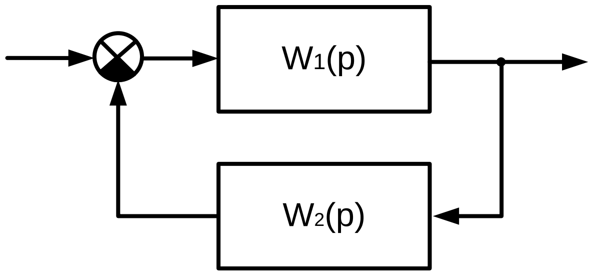


Рис. 1 – Заміна однієї реальної ланки двома ланками направленої дії

Умовні позначення, прийняті для структурних схем, показані на рис 2. Це:

- динамічна ланка – прямокутник, в середині якого записана Передатна функція;
- сигнал, що передається від однієї ланки до іншої – стрілка з вказівкою напрямку передачі сигналу;
- розгалуження сигналів – стрілка, що відгалужується від іншої стрілки;
- злиття сигналів – суматор у вигляді кружка, поділеного на сектори, причому не зафарбованому сектору відповідає сигнал зі знаком “+”, а зафарбованому – зі знаком “-”.

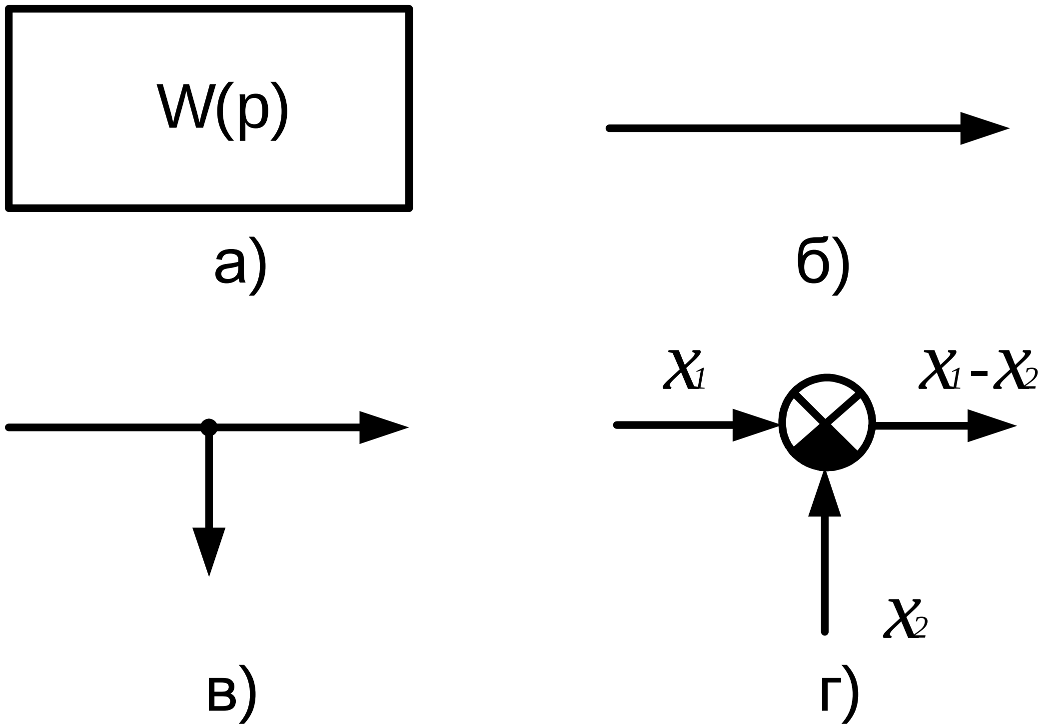


Рис. 2 – Умовні позначення для на структурних схем

а – динамічна ланка; б – сигнал, що передається від однієї ланки до іншої; в –розгалуження сигналів; г – злиття сигналів (суматор)

2. Структурна схема САК обертами двигуна

Побудуємо структурну схему САК швидкістю обертання двигуна. Ця схема показана на рис. 3.

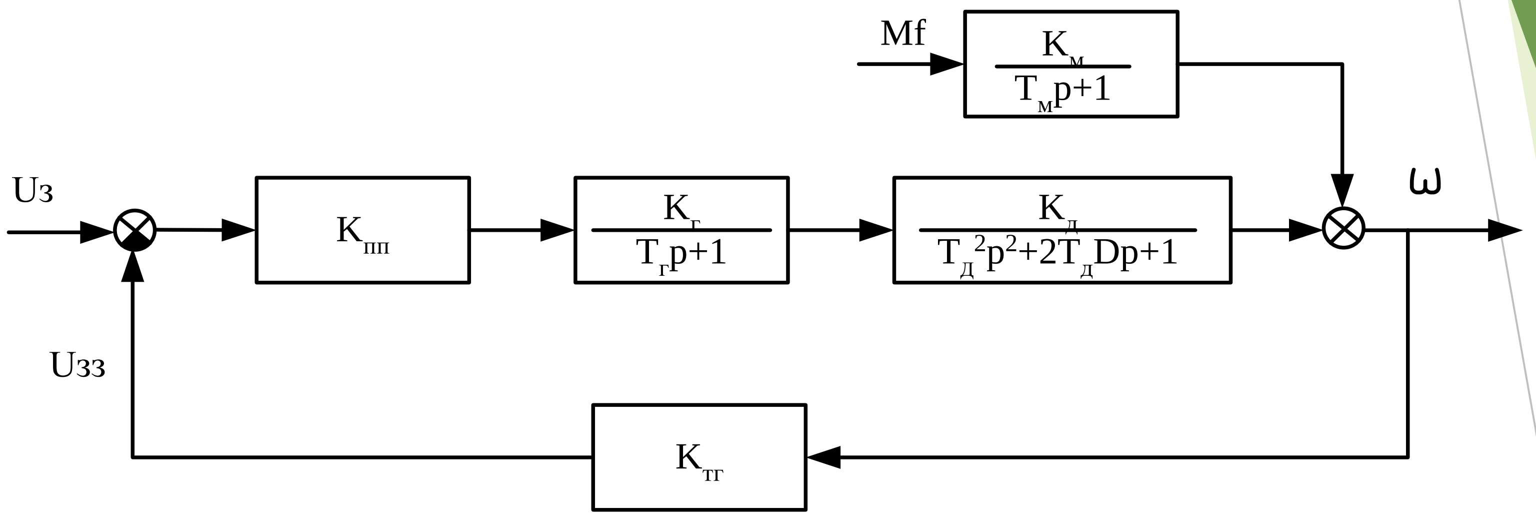


Рис. 3 – Структурна схема САК швидкістю обертання двигуна постійного струму з незалежним збудженням

У структурну схему САК входять такі блоки:

- блок суматора, на який подають сигнали задаючої дії Uз і зворотного зв’язку Uзз від тахогенератора. Нижній сектор суматора зафарбований, що свідчить про те, що сигнал зворотного зв’язку віднімається від задаючого сигналу (деколи говорять, що сигнал подається проти фазі);
- блок напівпровідникового підсилювача, його Передатна функція Кпп;
- блок генератора, його Передатна функція $\frac{К_г}{T_г p+1}$
- блок двигуна з передаточною функцією $\frac{К_д}{T_д^2 p^2+2T_д Dp+1}$
- блок тахогенератора з передатною функцією Ктг;
- додатково у схемі показано ще один суматор і блок, через який проходить сигнал збудження. Цей блок зумовлює проходження сигналу збурення. У розглянутій системі збуренням є навантаження на валу двигуна. Воно прикладається до валу двигуна.

2. Типи динамічних ланок

У системах автоматичного керування використовують цілий ряд типів динамічних ланок. Тип динамічної ланки визначається процесами перетворення інформації, які ці ланки забезпечують. Ці процеси перетворення сигналів описують певними диференційними рівняння. Різних типів динамічних ланок можна нарахувати кілька десятків. Проте найбільш важливими і вживаними є шість ланок, а саме:

- підсилювальна динамічна ланка,
- аперіодична (інерційна),
- коливальна (аперіодична ланка II порядку),
- диференційна,
- реальна диференційна,
- інтегруюча.

Підсилювальна ланка – це найпростіша динамічна ланка. Вона підсилює сигнал, або перетворює його з однієї фізичної величини в іншу. Рівняння такої ланки можна записати так: $y(t) = K\ x(t)$

Передатна функція ланки: W(p) = K.

Тут К – коефіцієнт підсилення, або коефіцієнт передачі.

Такими ланками у розглянутій нами САК швидкістю двигуна є напівпровідниковий підсилювач і тахогенератор. Вихідний сигнал підсилювача в точності дорівнює вхідному сигналу, помноженому на коефіцієнт підсилення, якщо, звичайно, підсилювач якісний. Аналогічно і для тахогенератора: вихідний сигнал відповідає швидкості обертання валу, тобто величині ω помноженій на коефіцієнт передачі.

Назва коефіцієнт підсилення чи коефіцієнт передачі відображає тільки фізичну суть процесу. Як правило, в ТАК розглядають тільки системи з інформаційної точки зору, тому абстрагуються від фізичної суті явищ і , як правило, називають величину К – **коефіцієнтом підсилення.**

У передавальній функції системи за Лапласом

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}.$$

коефіцієнти a_j та b_j визначаються параметрами цієї системи, тому вони можуть бути тільки дійсними, а значить, співмножники чисельника та знаменника можна розкласти на лінійні та квадратичні множники:

k; ks; k/s; $k/(as+b)$; $k/(as^2 + bs + c)$; $as + b$; $as^2 + bs + c$.

Тому передавальну функцію W(s) можна записати як добуток простих множників і простих дробів.

Типовою динамічною ланкою називається елемент системи, передавальна функція якого має вигляд простого множника чи простого дробу.

ПРОПОРЦІЙНА ЛАНКА

Пропорційною (підсилювальною, безінерційною, ідеальною) називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k \cdot x(t)$$

де k - коефіцієнт пропорційності (підсилення).

Використовуючи властивості перетворення Лапласа, запишемо операційне рівняння:

$$Y(s) = k \cdot X(s)$$

Звідси передавальна функція ланки за Лапласом:

W(s) = Y(s)/X(s) = k.

КПФ та частотні функції ланки мають вигляд:

$$W(j\omega) = k;\ U(\omega) = k;\ V(\omega) = 0;$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k;$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} V(\omega)/U(\omega) = 0.$$

Відповідні частотні характеристики (рис. 1).

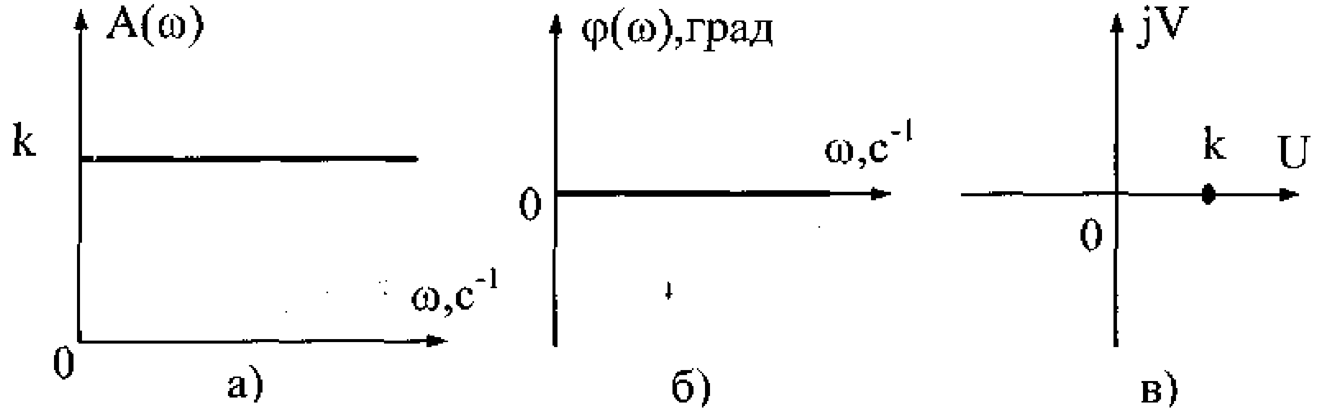


Рис. 1. Частотні характеристики пропорційної ланки:
АЧХ(а), ФЧХ (б), АФЧХ (в)

Часові функції та відповідні характеристики мають вигляд (рис. 2):

$$h(t) = k \cdot 1(t); \quad w(t) = h'(t) = k \cdot \delta(t) = \delta(t).$$

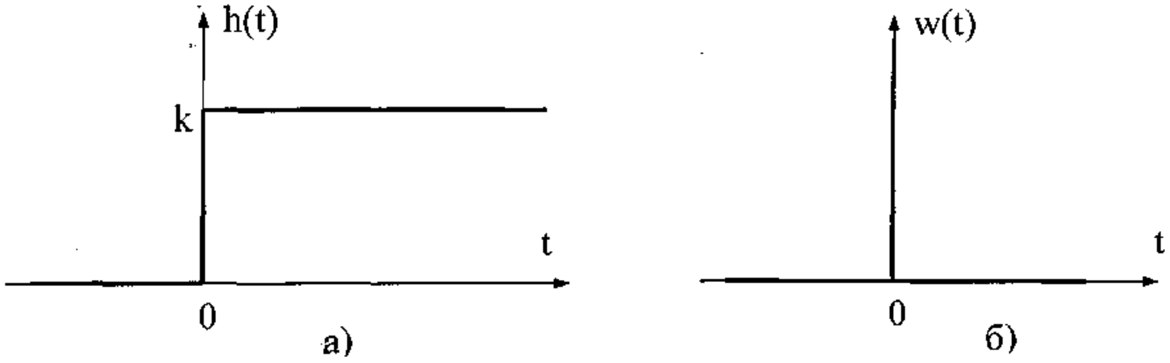


Рис. 2. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики пропорційної ланки

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ЛАНКА

Диференціальною називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt},$$

тобто вихідний сигнал пропорційний швидкості зміни вхідного сигналу. Операційне рівняння та передавальна функція ланки:

$$Y(s) = k \cdot s \cdot X(s);\ W(s) = k \cdot s.$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega) = k \cdot j\omega;\ U(\omega) = 0;\ V(\omega) = k \cdot \omega;\ A(\omega) = k \cdot \omega;\ \varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,(k \cdot \omega/0) = \mathrm{arctg}\,\infty = \pi/2$$

Зсув фази не залежить від частоти і дорівнює $2/\pi$. АФЧХ ланки співпадає з додатною уявною піввіссю.

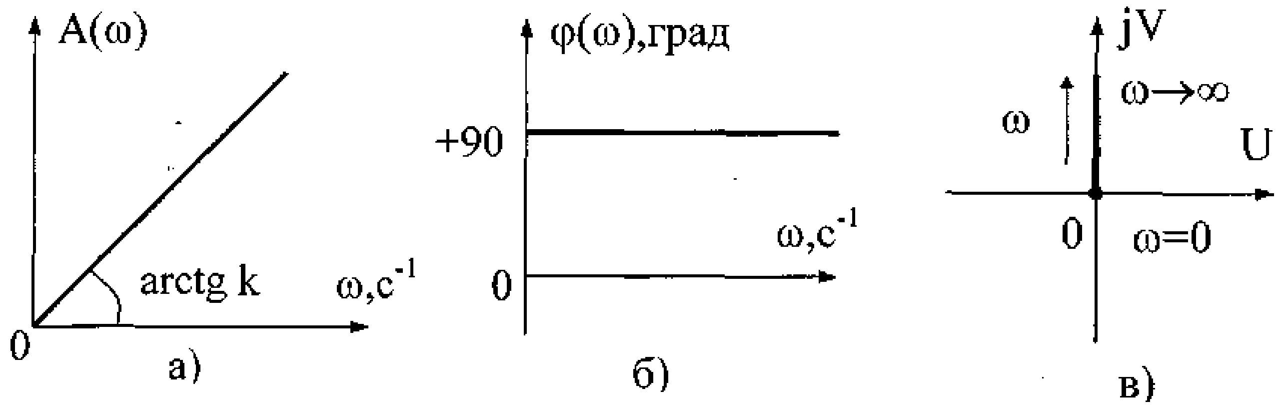


Рис. 3. Частотні характеристики диференціальної ланки: АЧХ(а), ФЧХ (б), АФЧХ (в)

Часові функції та характеристики диференціальної ланки (рис. 4):

$$h(t) = k \cdot 1(t); \quad w(t) = h'(t) = k \cdot \delta(t) = \delta(t).$$

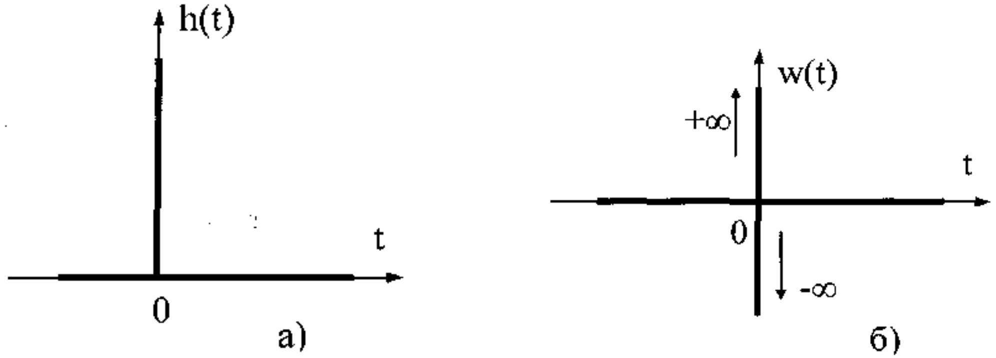


Рис. 4. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики диференціальної ланки

Реальні диференціальні ланки є інерційними і тому описуються передавальними функціями вигляду:

$$W(s) = ks/(Ts+1),$$

де T - стала часу, що враховує інерційні властивості реальної диференціальної ланки. Чим менше значення T, тим ближче властивості реальної ланки до властивостей ідеальної диференціальної ланки.

ІНТЕГРУЮЧА ЛАНКА

Інтегруючою називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k\int_0^t x(t)dt.$$

Операційне рівняння і передавальна функція ланки:

$$Y(s) = k\cdot X(s)/s; \quad W(s) = k/s.$$

КПФ та частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega)= k/j\omega = -j\cdot k/\omega; \quad U(\omega) = 0; \; V(\omega) = -k/\omega; \quad A(\omega) = k/\omega; \quad \varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\pi/2$$

Зсув фази не залежить від частоти і дорівнює $-\pi/2$. АФЧХ ланки співпадає з від'ємною уявною піввіссю.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика ланки:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k/\omega = 20\lg k - 20\lg \omega;$$

при $\omega = 1c^{-1}$ $\quad L(\omega) = 20\lg k$ (дБ);

при $\omega = 10\ c^{-1}$ $\quad L(\omega) = 20\lg k - 20$ (дБ);

при $\omega = 100\ c^{-1}$ $\quad L(\omega) = 20\lg k - 40$ (дБ);

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами $(\omega=1c^{-1}; L(\omega)=20\lg k)$ та має нахил -20дБ/дек. Вона перетинає вісь часто $\omega = k$ і (рис. 5 г).

Часові функції ланки:

$$h(t) = k\int_0^t 1(t)dt = kt; \qquad w(t) = \dot{h}(t) = k \cdot 1(t).$$

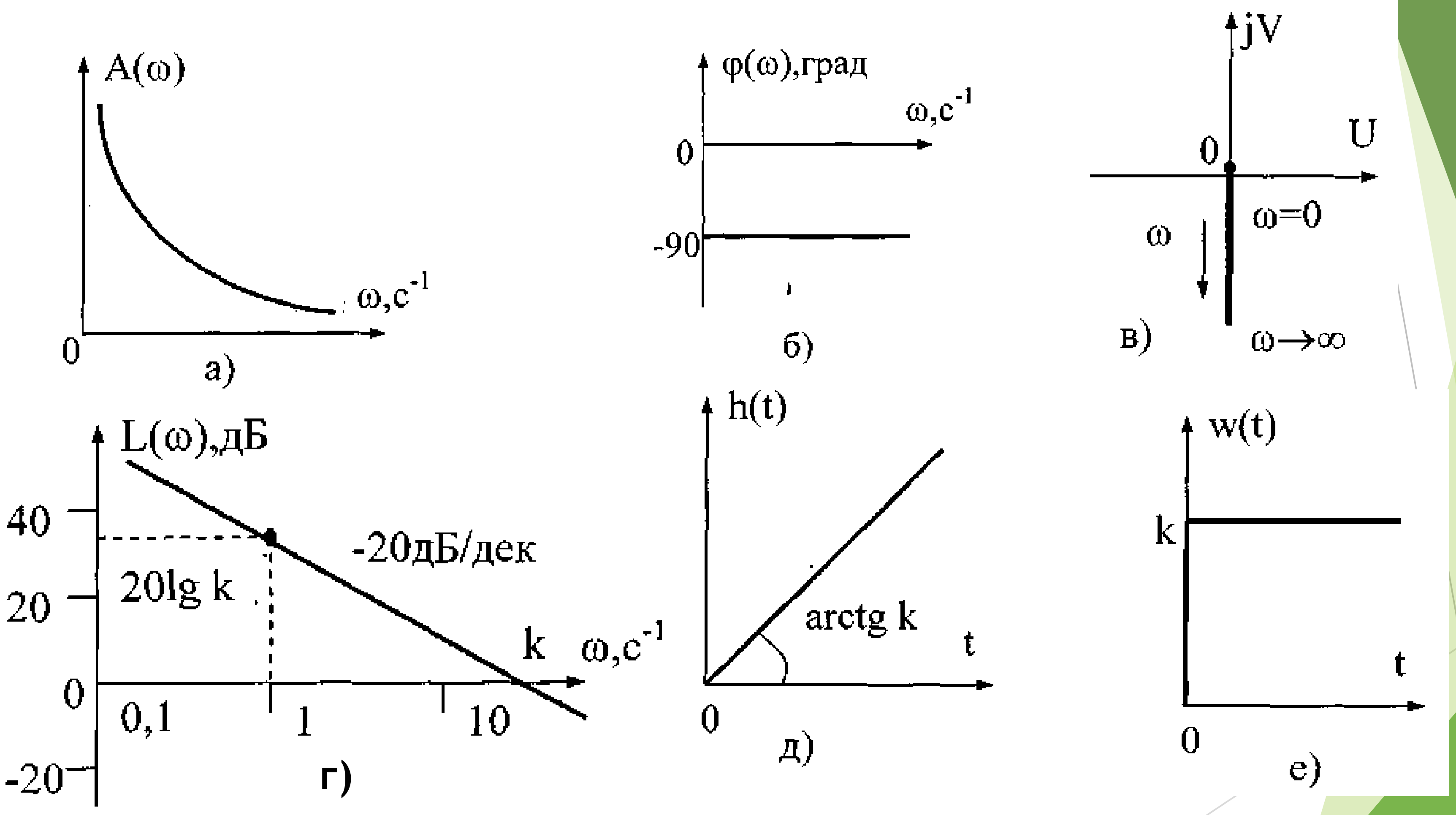


Рис. 5. Частотні та часові характеристики інтегруючої ланки: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г); перехідна (д), імпульсна перехідна (е)

Реальні елементи систем керування є інерційними, тому передавальна функція реального інтегратора має вигляд:

$$W(s) = k/[s(Ts+1)],$$

де T - стала часу, що враховує інерційні властивості реальної інтегруючої ланки.

АПЕРІОДИЧНА ЛАНКА

Аперіодичною, називається ланка, яка описується рівнянням першого порядку:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t).$$

Операційне рівняння має вигляд:

$$TsY(s) + Y(s) = kX(s); \ (Ts + 1)Y(s) = kX(s);$$

звідси передавальна функція ланки:

$$W(s) = k/(Ts + 1).$$

Частотні функції ланки мають вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \ V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}; \ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}; \ \varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(T\omega).$$

При зміні ω від 0 до ∞, $\varphi(\omega)$ змінюється від 0 до $-2/\pi$. АФЧХ ланки являє собою півколо діаметра k (рис. 6).

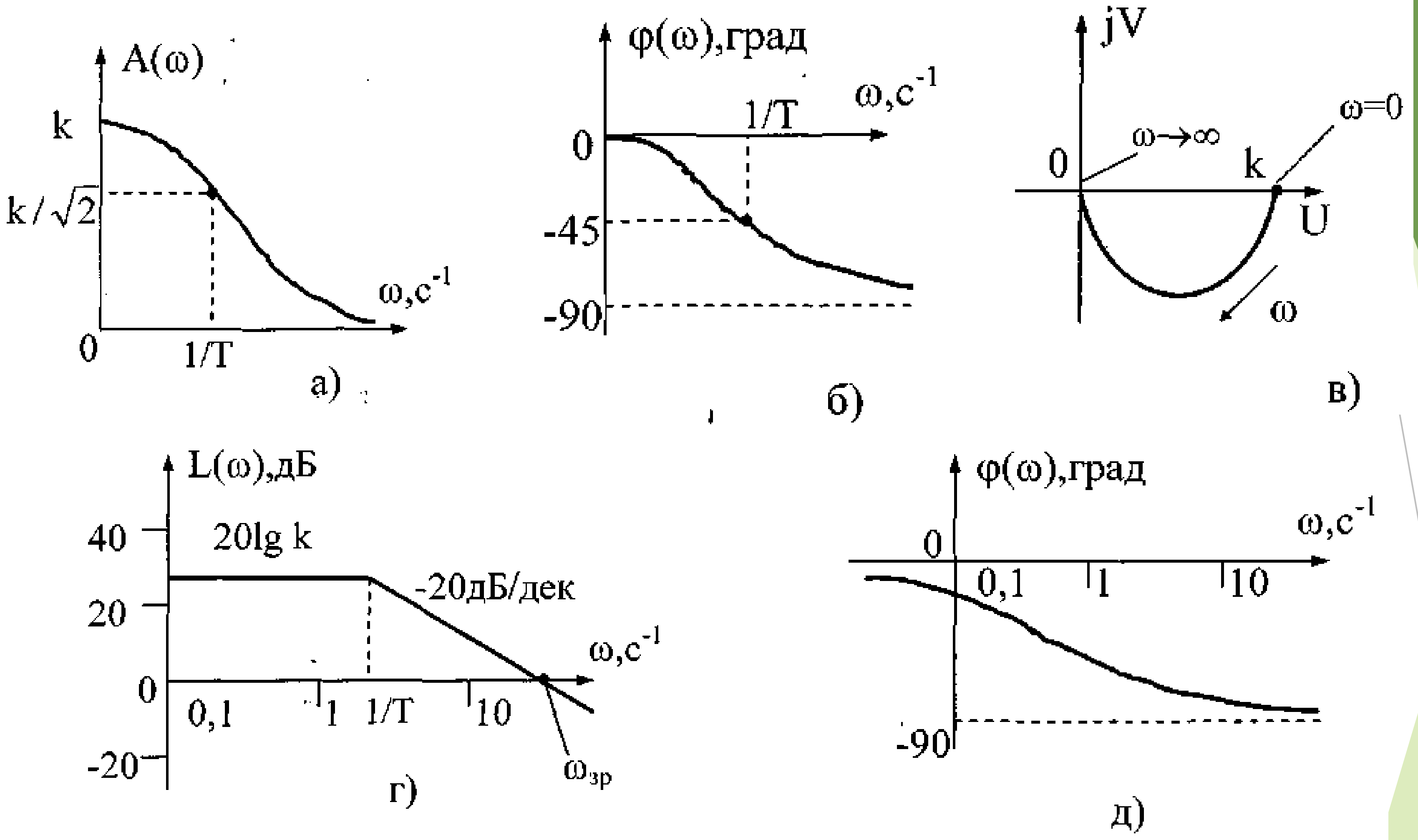
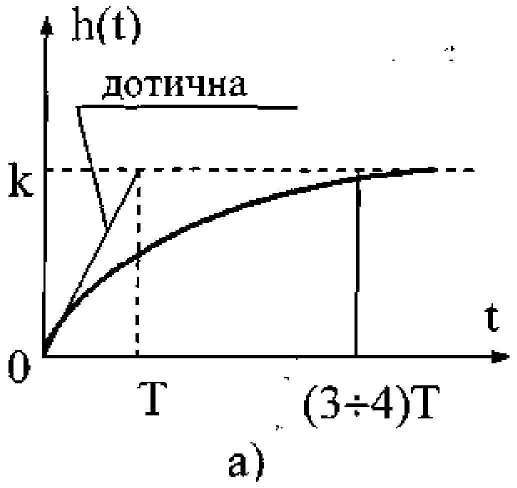


Рис. 6. Частотні характеристики аперіодичної ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г); ЛФЧХ (д)

Перехідні функції ланки:

$$h(t) = k\left(1 - e^{-t/T}\right); \quad w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T}e^{-t/T}.$$



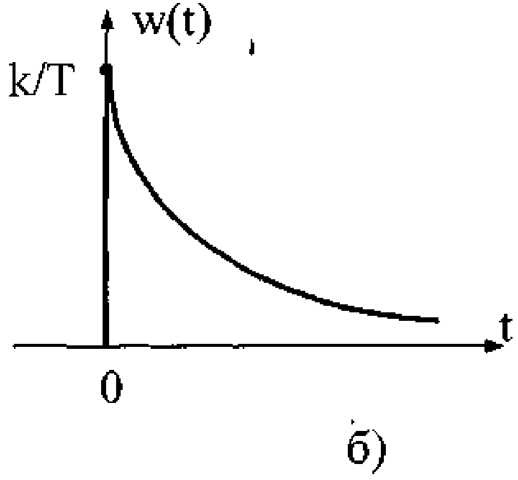


Рис. 7. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики аперіодичної ланки

КОЛИВАЛЬНА ЛАНКА

Коливальною називається ланка, яка описується рівнянням другого порядку

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t), \qquad (1)$$

де ξ (ксі) – коефіцієнт затухання або демпфування $(0<\xi<1)$

Операційне рівняння:

$$Y(s)(T^2s^2+2\xi Ts+1)=kX(s).$$

Передавальна функція ланки:

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}.$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2+2\xi Tj\omega};\ A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}}.$$

При $\omega=1/T$ амплітуд $A(\omega)=k/(2\xi)$, тобто для різних значень коефіцієнта ξ затухання $\omega=1/T$ частоті , яку називають резонансною, амплітуда набуває значен $\xi_1<\xi_2<\xi_3$ до ∞ (рис. 8, а:).

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}, \text{ при } \omega \le 1/T,\\ -\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}, \text{ при } \omega > 1/T,\end{cases}$$

тобто при $\omega \to \infty \quad \varphi(\omega) = -\pi.$

Частотні характеристики наведені на рис. 8.

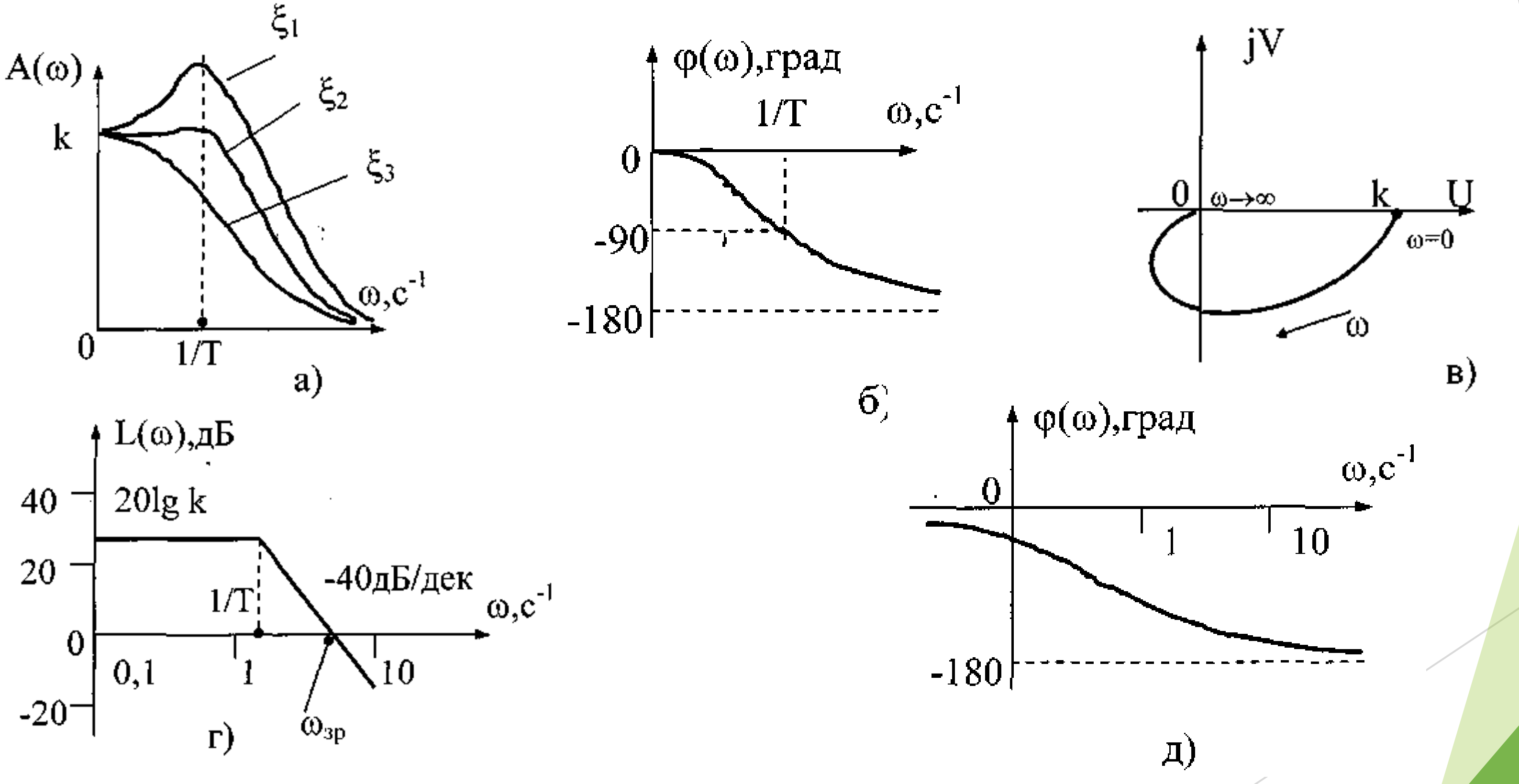


Рис.8. Частотні характеристики коливальної ланки: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в);
ЛАЧХ (г), ЛФЧХ (д)

Розв'язуючи рівняння (1) ланки при x(t)=1(t) та за нульових початкових умов (y(0)=0; y'(0)=0), отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0)\right),$$

де $\alpha = \xi / T; \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ $\quad \varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$.

Імпульсна перехідна функція ланки:

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t.$$

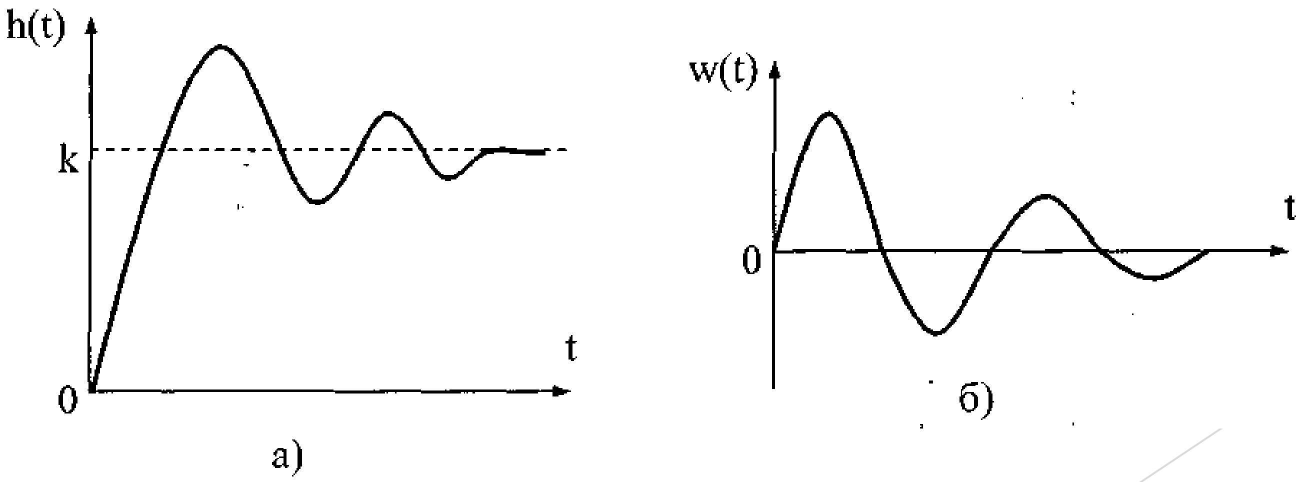


Рис. 9. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики коливальної ланки

КОНСЕРВАТИВНА ЛАНКА

Якщо опір каналу обміну енергії дорівнює нулю, тобто $\xi = 0$ (не втрачається енергія), то коливальна ланка вироджується в консервативну (резонансну) ланку, рівняння якої має вигляд:

$$T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = k \cdot x(t). \qquad (2)$$

Цьому рівнянню відповідає передавальна функція

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}; \quad U(\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = 0; \quad A(\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}.$$

$$\varphi(\omega) = 0, \text{ при } \omega \le 1/T;$$

$$\varphi(\omega) = -\pi, \text{ при } \omega > 1/T$$

Із цих виразів видно, що АЧХ на частоті $\omega = 1/T$ має розрив, а ФЧХ - східчасто змінює своє значення з 0 на $-\pi$ (рис. 10)

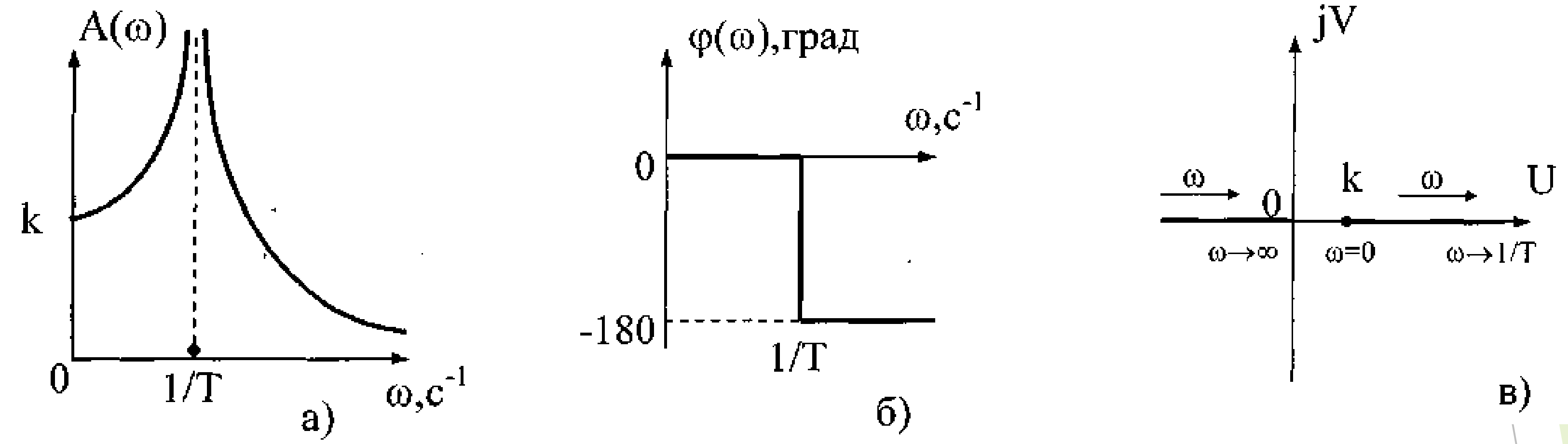


Рис.10. Частотні характеристики консервативної ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в)

Перехідна функція ланки: $h(t) = k(1 - \cos\omega_1 t);\ \omega_1 = 1/T.$

Імпульсна перехідна функція $w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T}\sin\frac{t}{T}.$

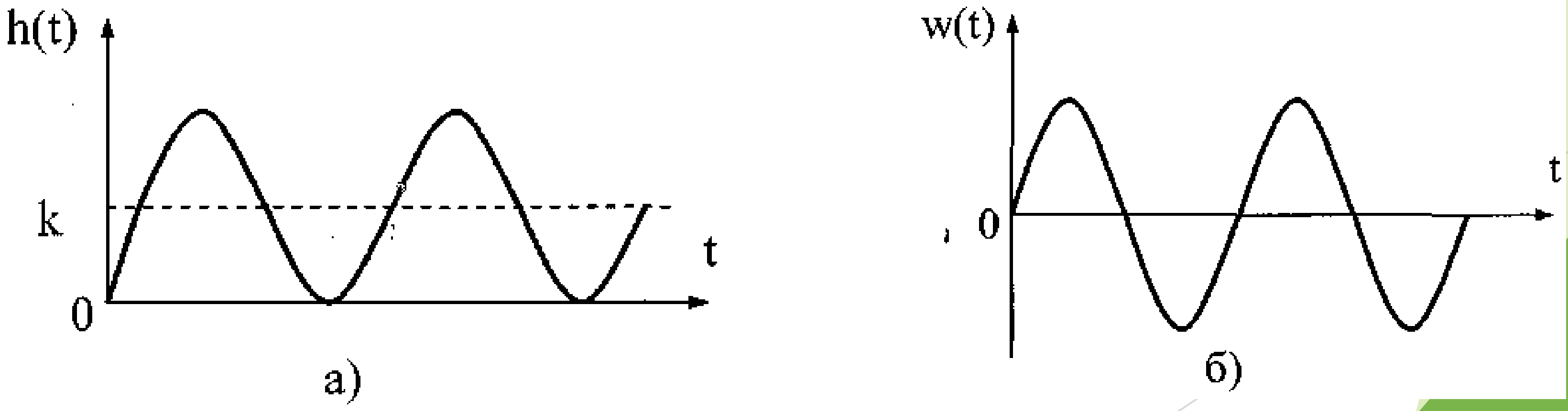


Рис. 11. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики консервативної ланки

АПЕРІОДИЧНА ЛАНКА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Якщо коефіцієнт затуха $\xi \geq 1$, то передавальну функцію коливальної ланки можна привести до вигляду:

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \qquad (3)$$

де $T_{1,2} = \dfrac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$.

Цю ланку можна уявити як послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок першого порядку, тому вона не належить до числа елементарних ланок.

ФОРСУЮЧА ЛАНКА

Форсуючою називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k\left(T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right). \qquad (4)$$

Операційне рівняння і передавальна функція:

$$Y(s) = k(TsX(s) + X(s)); \quad W(s) = k(Ts + 1).$$

Частотні функції: $W(j\omega) = k(Tj\omega + 1);\quad U(\omega) = k;\quad V(\omega) = kT\omega;\quad A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1};$

$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(T\omega)$; при $\omega \to \infty$ $\varphi(\omega) \to \pi/2$. $\quad L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2};$

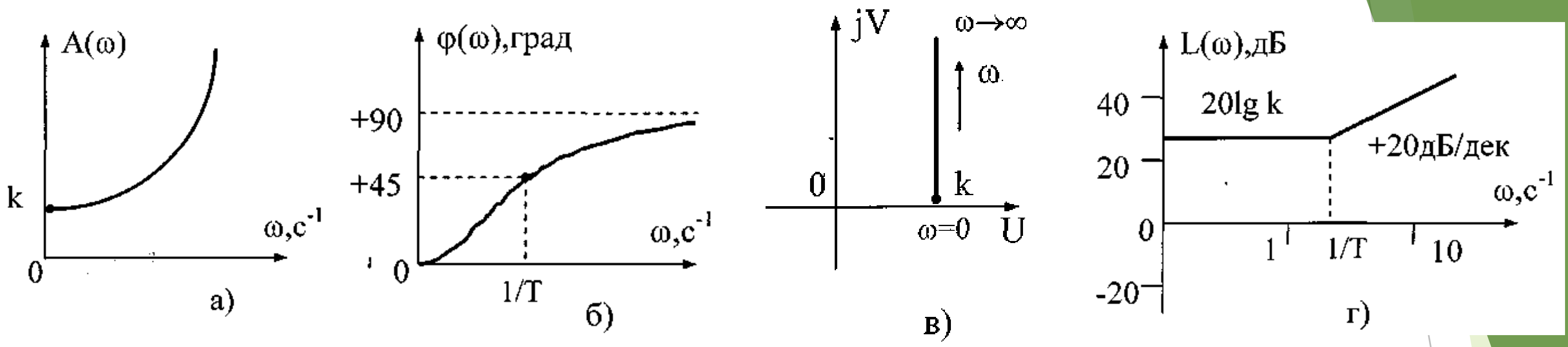


Рис.12. Частотні характеристики форсуючої ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г)

Часові функції форсуючої ланки:

$$h(t) = k(T\delta(t) + 1(t)); \quad w(t) = k(T\dot{\delta}(t) + \delta(t)).$$

ФОРСУЮЧА ЛАНКА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ланка описується рівнянням:

$$y(t) = k\left(T^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right), \quad (5)$$

і має передавальну функцію:

$$W(s) = k(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1); \; 0 < \xi < 1.$$

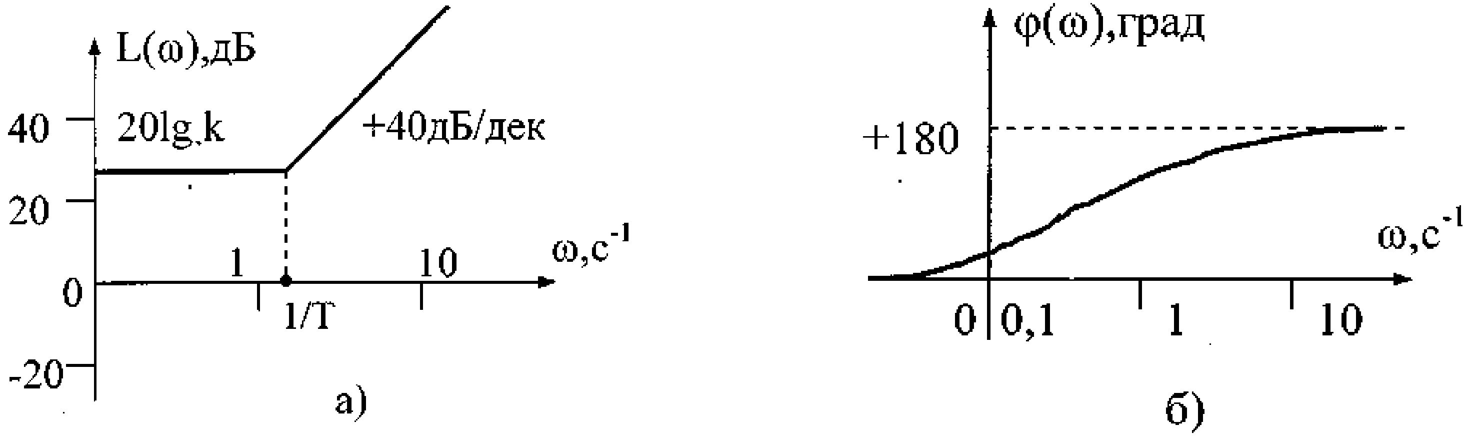


Рис. 13. ЛАЧХ (а) та ЛФЧХ (б) форсуючої ланки другого порядку

Форсуючі ланки першого та другого порядку не можна реалізувати практично, а реальні форсуючі ланки обов'язково містять аперіодичні або коливальні. Наприклад, ланка, яку називають ланкою швидкого реагування, має передавальну функцію при $T_1 > T_2$.

$$W(s) = k\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}.$$

ЛАНКА ЗАПІЗНЕННЯ

Ланка запізнення описується рівнянням

$$y(t) = kx(t - \tau),$$

де k - коефіцієнт передачі. τ - час запізнення.

Передавальна функція ланки:

$$Y(s) = ke^{-\tau s}X(s); \quad W(s) = ke^{-\tau s}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = ke^{-\tau j\omega}; \quad A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

Часові функції мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau); \quad w(t) = k \cdot \delta(t - \tau) = \delta(t - \tau)$$

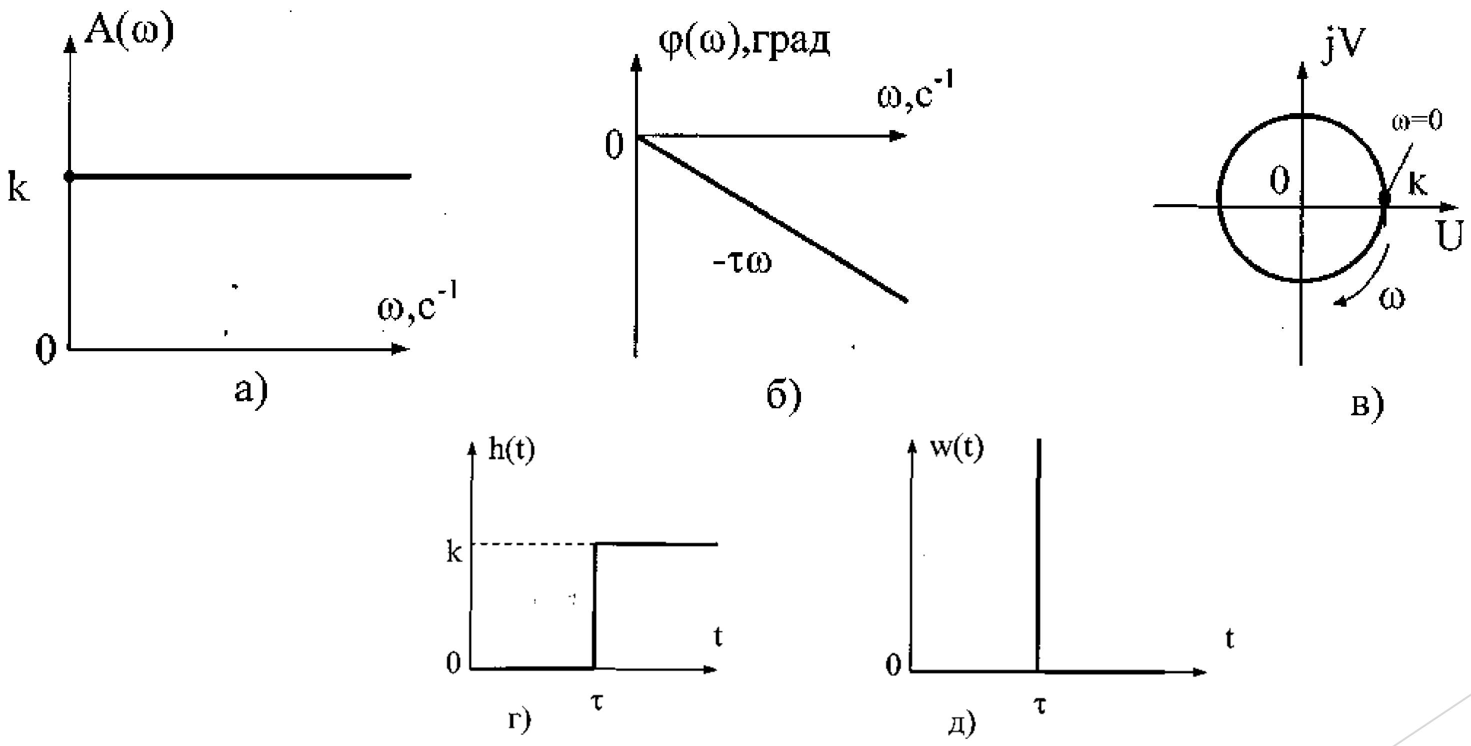


Рис. 14. Характеристики ланки запізнення: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); перехідна (г); імпульсна перехідна (д)