РОЗДІЛ 1. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

Практичне заняття 1, 2. Висловлення та операції над ними. Рівносильні висловлення

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Визначити, які з даних речень є висловленнями:

1) «Волга впадає в Чорне море.»;
2) «Волга впадає в Каспійське море.»;
3) «Який сьогодні день?»;
4) «Відстань від Землі до Сонця дорівнює 150000000 км».

Розв'язок.

Перші два речення є висловленнями, причому перше є хибним висловленням, а друге – істинним. Третє речення висловленням не є (за визначенням), оскільки воно не оповідальне. Четверте речення також не є висловленням, тому що його істинність або хибність залежить від потрібної точності.

Завдання 2. Записати у вигляді формули логіки висловлень і визначити істиннісні значення наступних висловлень:

1) «Для того щоб $2\times 2=4$, необхідно і достатньо, щоб $2+2=4$.»;

2) «$2\times 2=5$ рівносильно тому, що $3\times 3=8$.».

Розв'язок.

Введемо позначення атомарних формул: буквою A позначимо «$2\times 2=4$»; буквою B позначимо «$3\times 3=8$»; буквою C позначимо «$2+2=4$»; буквою D позначимо «$2\times 2=5$». Висловлення 1) відповідає формулі $A\sim C$. Висловлення 2) відповідає формулі $D\sim B$. Будемо вважати, що атоми A і C істинні (I), а атоми B і D – хибні (X). Визначимо істиннісні значення складних висловлень: $A\sim C=I\sim X=X$; $D\sim B=X\sim X=I$.

Завдання 3. Записати у вигляді формули логіки висловлень і визначити істиннісні значення наступних висловлень:

1) «6 ділиться на 3, і 10 більше 5»;

2) «6 ділиться на 3, і 7 більше 10».

Розв'язок.

Виділимо атоми, їх три: A – «6 ділиться на 3», B – «10 більше 5», C – «7 більше 10».

Тоді висловлення 1) буде відповідати формулі $A \wedge B$, висловлення 2) буде відповідати формулі $A \wedge C$. Будемо вважати, що висловлення A і B істинні, а висловлення C хибне. Використовуючи істиннісні значення висловлень A, B, C, визначимо значення висловлень 1) і 2): $A \wedge B = I \wedge I = I$; $A \wedge C = I \wedge X = X$.

Завдання 4. Виключити якомога більше число дужок у формулах:

а) $(\neg((A) \vee (C))) \vee (B)$; б) $(((A) \to (B)) \to (C)) \vee ((A) \to ((B) \to (C)))$.

Розв'язок.

а) $(\neg((A) \vee (C))) \vee (B) = \neg(A \vee C) \vee B$;

б) $(A \to B \to C) \vee (A \to (B \to C))$.

Завдання 5. Довести, що $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, де A, B – множини.

Розв'язок.

Доведемо рівність двох множин з використанням логіки висловлень. Нехай X_1, X_2 – висловлення: X_1=«$x \in A$», X_2=«$x \in B$»,. Тоді висловлення «$x \in A \setminus B$» можна записати у вигляді формули $X_1 \wedge \neg X_2$. Висловлення «$A \cap \overline{B}$» можна записати у вигляді формули $X_1 \wedge \neg X_2$. Довести рівність двох множин – це довести, що ці формули еквівалентні: $X_1 \wedge \neg X_2 \equiv X_1 \wedge \neg X_2$. Тому що праворуч і ліворуч та сама формула, то формули еквівалентні.

Завдання 6. Довести рівносильність у логіці висловлень: $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$.

Розв'язок.

Доведемо рівносильність, використовуючи таблицю істинності для формули $\neg(A \to B)$ і формули $A \wedge \neg B$ (табл. 8.1).

Таблиця 8.1 − Таблиця істинності для формул $\neg(A \to B)$ і $A \wedge \neg B$

A	B	$(A \to B)$	$\neg(A \to B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
X	X	I	X	I	X
X	I	I	X	X	X
I	X	X	I	I	I
I	I	I	X	X	X

Формули приймають однакові істиннісні значення, отже, вони рівносильні.

Завдання 7. Показати, що висловлення $(A \wedge B) \vee \neg C$ є логічним наслідком висловлення $A \wedge \neg C$.

Розв'язок.

Досить переконатися, що формула $(A \wedge \neg C) \to ((A \wedge B) \vee \neg C)$ є тавтологією.

Використовуємо тотожності логіки висловлень для еквівалентних перетворень, тобто $x \to y = \bar{x} \vee y$. Тоді

$$(A \wedge \neg C) \to ((A \wedge B \vee \neg C)) = \neg(A \wedge \neg C) \vee ((A \wedge B) \vee \neg C) = \neg A \vee C \vee (A \wedge B) \vee \neg C =$$

$$= \neg A \vee (A \wedge B) \vee \neg C \vee C = \neg A \vee (A \wedge B) \vee I = I .$$

Таким чином доведено, що формула є тавтологією.

Завдання 8. Перевірити правильність наступного міркування. Якщо Джонс не зустрічав у цю ніч Сміта, то або Сміт був убивцею, або Джонс бреше. Якщо Сміт не був убивцею, то Джонс не зустрічав Сміта в цю ніч, і вбивство мало місце після опівночі. Якщо вбивство було здійснено після опівночі, то або Сміт був убивцею, або Джонс бреше. Отже, Сміт був убивцею.

Розв’язок.

Введемо наступні висловлювальні змінні: A: «Джонс зустрічав у цю ніч Сміта»; B: «Сміт − убивця»; E: «Джонс бреше»; F: «Убивство було після опівночі». Позначимо складні висловлення відповідно P_1, P_2, P_3. Ці висловлення можна записати у вигляді формул: $P_1 = \neg A \to (B \wedge \neg E \vee E \wedge \neg B)$, $P_2 = \neg B \to (\neg A \wedge F)$, $P_3 = F \to (B \wedge \neg E \vee E \wedge \neg B)$.

Необхідно перевірити правильність міркування: $\dfrac{P_1, P_2, P_3}{B}$, тобто перевірити тотожну істинність формули $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \to B$.

Ця формула буде мати вигляд:

$$F^* = (\neg A \to (B \wedge \neg E \vee E \wedge \neg B)) \wedge (\neg B \to (\neg A \wedge F)) \wedge F \to (B \wedge \neg E \vee E \wedge \neg B) \to B$$

Можна перевірити, що F^* на интерпретації (X, X, I, I) для змінних (A, B, E, F) має значення X (хибність), тобто формула спростовна, і міркування невірно.

Завдання 9. Визначити тип правила дедуктивного висновку, який було використано в наступному міркуванні: «Температура повітря $+1^0 C$, і йде дощ. Отже, температура повітря $+1^0 C$».

Розв’язок.

Введемо атоми: A − «Температура повітря $+1^0 C$»; B − «Йде дощ». Висловлення «Температура повітря $+1^0 C$, і йде дощ» можна представити у вигляді формули $A \wedge B$, а отриманий за правилом видалення кон’юнкції висновок «Температура повітря $+1^0 C$» є висловлення A. Очевидно, що висновок зроблений відповідно до правила $\dfrac{A \wedge B}{A}$.

Завдання 10. Визначити, чи є правильним міркування за схемою
$$\frac{A \to B,\ A}{B}$$

Розв'язок.

Міркування за цією схемою правильне, тому що $((A \to B) \wedge A) \to B$ є тотожно істинною формулою.

Наприклад, «Якщо Петро займається спортом, то він не хворіє» і «Петро займається спортом», отже «Петро не хворіє».

Завдання 11. Нехай дане істинне висловлення «Якщо n ділиться на 9, то n ділиться на 3» і нехай відомо, що «n ділиться на 9». Який висновок можна зробити, виходячи із цих двох висловлень?

Розв'язок.

Введемо атомарні висловлення: A – «n ділиться на 9»; B – «n ділиться на 3». Висловлення «Якщо n ділиться на 9, то n ділиться на 3» можна представити у вигляді формули $A \to B$. З одночасного виконання посилань $A \to B$ і A можемо зробити висновок B за правилом відділення: «n ділиться на 3».

Вправи для самостійного розв'язання

Завдання 1.

У які дні тижня є істинними висловлення: «Якщо сьогодні вівторок, то завтра понеділок», «Якщо сьогодні понеділок, то завтра вівторок»?

Завдання 2.

Знайти висловлення серед зазначених нижче речень. Указати істинністні значення висловлень:

а) «Котра година?»;

б) «Ціле число 1 є найменшим позитивним цілим числом.»;

в) «Якщо $x = 3$, то $x^2 = 6$.»;

г) «Бережися автомобіля!»;

д) «Південна Дакота – південний штат.».

Завдання 3.

Визначити, які з даних речень є висловленнями. Указати істинністні значення висловлень:

а) «Всі парні числа діляться на 2.»;

б) «Завантажте пакети в машину.»;

в) «Це твердження не може бути істинним.»;

г) «Юпітер – найближча до Сонця планета.»;

д) «Не слід зберігати компакт-диски в мікрохвильовій печі.».

Завдання 4.

Нехай A, B, C позначають такі висловлення: A: «Мій комп'ютер – швидкодіючий.»; B: «Я закінчу проект вчасно.»; C: «Я здам іспит.».

Записати в символічній формі такі висловлення:

а) «У мене не швидкодіючий комп'ютер або я закінчу проект вчасно.»;

б) «Невірно, що я закінчу проект вчасно і складу іспит.»;

в) «У мене швидкодіючий комп'ютер або я не закінчу проект вчасно і складу іспит.».

Завдання 5.

Записати складні висловлення у вигляді формул, використовуючи висловлювальні змінні для простих висловлень (атомів):

а) «Для того, щоб x було непарним, достатньо, щоб x було простим.»;

б) «Якщо на небі хмари, то йде дощ.»;

в) «Якщо йде дощ, то на небі хмари.»;

г) «Дощ йде тоді й тільки тоді, коли на небі хмари.»;

д) «Невірно, що дощ йде тоді й тільки тоді, коли на небі немає хмар.».

Завдання 6.

Розставити всілякими способами дужки в наступних формулах:

а) $\neg A \vee \neg B \wedge C$; б) $A \to B \to C \to D$.

Завдання 7.

Виключити якомога більше число дужок у формулах:

а) $((B) \sim (\neg(C))) \vee (((A) \to (A)) \to ((B) \vee (D)))$;

б) $((\neg((A) \to (B))) \vee (\neg((C) \vee (D))) \wedge \neg(F))$.

Завдання 8.

Побудувати складні висловлення з використанням тільки зазначених операцій: а) еквівалентність; б) імплікація і кон'юнкція; в) заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція.

Завдання 9.

Чи є наступні формули загальнозначущими, суперечливими або несуперечливими: а) $\neg(\neg A) \to A$; б) $(A \to B) \to (B \to A)$; в) $(A \wedge (B \to A)) \to A$; г) $(A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B)$.

Завдання 10.

Довести, використовуючи логіку висловлень, що $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, де A, B, C − множини.

Завдання 11.

Довести рівносильності:

а) $A\vee(\neg A\wedge B)\equiv A\vee B$;

б) $A\wedge(A\wedge B)\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$;

в) $A\to B\equiv(A\wedge\neg B)\to(C\wedge\neg C)$;

г) $A\to B\equiv(A\wedge\neg B)\to\neg A\equiv(A\wedge\neg B)\to B$.

Завдання 12.

Побудувати таблиці істинності для формул: а) $\neg A\to(B\vee C)$; б) $\neg(A\to B)\vee(A\to C)$; в) $((A\wedge B)\to(\neg A\vee B))\wedge A$.

Завдання 13.

Довести, що $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$ − тавтологія.

Завдання 14.

Записати у вигляді диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) і кон'юнктивної нормальної форми (КНФ) такі формули:

а) $(X_1\wedge X_2)\to(\neg X_2\wedge X_3)$; б) $\neg(\neg(X_1\wedge\neg X_2)\to(X_2\wedge\neg X_1))$; в) $((X_1\to X_2)\to(X_3\wedge\neg X_1))\to(\neg X_2\wedge\neg X_3)$.

Завдання 15.

Записати у вигляді досконалої ДНФ і досконалой КНФ наступні формули: а) $(X_1\wedge X_2)\to(\neg X_1\wedge X_3)$; б) $(X_1\to X_2)\wedge(X_1\vee X_2)$; в) $((X_1\vee X_2\vee X_3)\to(X_1\wedge X_2))\to X_3$; г) $(X_1\to X_2)\wedge(X_2\to X_1)$.

Завдання 16.

Перевірити правильність наступних висновків: а) $\dfrac{A\to B,\neg A\to B}{B}$;

в) $\dfrac{A\to B, C\to\neg B}{A\to\neg C}$; б) $\dfrac{A\to B,\neg B\to\neg C}{C\to A}$; г) $\dfrac{A\to B,\neg A\to C}{B\to C}$.

Завдання 17.

Перевірити правильність наступного міркування. Якщо Таня не приходила додому до Валі, то або Валя розбила вазу, або Таня бреше. Якщо Валя не розбила вазу, то Таня приходила додому до Валі, або вазу розбили ще ранком. Якщо вазу розбили ще ранком, то або Валя її розбила, або Таня бреше. Отже, вазу розбила Валя.

Завдання 18.

Довести наступне твердження: «З тотожно хибної формули логічно виходить будь-яка формула».