Вправи для самостійного розв'язування з курсу «Дискретна математика»

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

1. Які з наведених речень є висловленнями? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

а) « Існує найбільше ціле число ».

б) «x^2>10».

в) «Число 243 кратне 9».

г) «Чи існує дійсне число, більше за 3 і менше від $\log_2 9$?»

д) «Ця задача легка» .

е) «π=3,14».

є) «Синтаксис – це сукупність правил, які дозволяють будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів».

ж) «Чи правильна велика теорема Ферма?»

з) «Розкрийте підручник на сторінці 23!»

2. Визначити істинність чи хибність складних висловлень, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, з яких вони складаються:

а) «144 кратне 12 і не кратне 7».

б) «Якщо -2 > (-3), то $(-2)^2<(-3)^2$ ».

г) « 5=5 тоді і тільки тоді, коли 2+3=4 ».

д) «2<3 або 3>5».

е) «Якщо 1<3, то $1^2 < 3^2$».

є) «Неправильно, що число 21є простим».

3. Записати логічну структуру складних висловлень та оцінити їхню істинність:

а) «Якщо 7 > 6, то 7 = 6».

б) «Число А кратне 10001 тоді і тільки тоді, коли воно кратне 73 і 137».

в) «Якщо чотирикутник не є ромбом, то його діагоналі не взаємно перпендикулярні».

г) «Неправильно, що задане число не кратне 15 тоді і тільки тоді, коли воно не кратне 5 і не кратне 3».

4. Чи правильне твердження: «Якщо логічні структури двох складних висловлень співпадають, то вони мають одні й ті самі значення істинності»? У випадку позитивної відповіді це довести, у випадку негативної – спростувати це твердження контрприкладом.

5. Записати запропоновані твердження у вигляді формули алгебри висловлень, позначаючи прості висловлення буквами, і визначити їх істинність чи хибність:

а) «Трикутник *ABC* рівносторонній тільки тоді, коли він рівнобедрений».

б) « Якщо фігура *ABCD* – квадрат, то вона є прямокутником».

в) «Для того, щоб паралелограм *ABCD* був квадратом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі були рівні між собою».

6. Знайти значення істинності формул:

а) $A \wedge B \wedge C \vee B$ при A=B=1, C=0

б) $B \to A \wedge C \leftrightarrow D$ при A=C=0, B=D=1

в) $\overline{A} \wedge (A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (B \wedge (C \vee A))$ при A =1, B=0, C=1

7. Скласти таблиці істинності для формул алгебри висловлень:

а) $A \wedge (B \vee C)$;

б) $A \leftrightarrow B \vee A \to C$;

в) $(A \to B) \wedge ((B \vee C) \wedge (C \leftrightarrow A))$;

г) $\overline{A \to B} \vee (C \leftrightarrow \overline{B})$;

д) $\overline{A \vee B \vee C} \leftrightarrow \overline{A \vee D}$.

8. Застосовуючи таблиці істинності, довести:

а) закони дистрибутивності;

б) закони де Моргана;

в) закони асоціативності;

г) закони поглинання.

9. За допомогою побудови таблиць істинності вияснити, чи є тавтологіями формули:

а) $((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$;

б) $((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to D)) \to (C \vee D)$.

10. Скільки рядків містить таблиця істинності для формули алгебри висловлень $A \to B \vee C \vee D$? Не складаючи таблиці істинності, визначити, в скількох рядках її останнього стовпчика буде 1?

11. Довести двома способами, що формула $\overline{A \to B \vee C} \wedge \overline{A \wedge \overline{C}}$ є суперечністю а) складанням таблиці істинності ; б) еквівалентними перетвореннями.

12. Довести еквівалентність формул $\overline{A} \vee \overline{B}$ та $A \to \overline{B}$ без побудови таблиць істинності.

13. Спростити:

а) $(A \to A) \to A$;

б) $(A \wedge \overline{B}) \vee B$;

в) $\overline{(A \to B) \wedge (B \to \overline{A})}$;

г) $A \wedge (A \to B) \to B$;

д) $A \to (B \to (C \to (\overline{A} \to \overline{B})))$;

е) $\overline{A \to B \leftrightarrow \overline{A} \wedge B}$.

14.* Записати символічно твердження:

а) «Кожний студент групи відвідав Київ або Львів».

б) «Кожне натуральне число кратне 10 і кратне 5».

в) «Існує ціле число, яке більше за 5».

г) «Деякі вписані в коло чотирикутники є квадратами».

д) «В множині усіх натуральних чисел не існує найбільшого числа».

е) « Для кожного дійсного числа x, відмінного від нуля, існує таке дійсне число y, що xy =1».

15. Дано предикат P(x,y) = «$x+y=x-y$». Предметною областю кожної змінної є множина цілих чисел. Знайти значення істинності наступних висловлень:

а) P(1,1);

б) P(2,0);

в) $\exists x$ P(x,2) ;

г) $\forall x$ $\forall$ y P(x,y);

д) $\forall y$ P(1,y).

16. Дано предикат P(x)=«$x=x^2$». Предметною областю змінної x є множина цілих чисел. Знайти значення істинності наступних висловлень:

а) P(0);

б) P(1);

в) $\exists x$ P(x) ;

г) $\forall x$ P(x).

17. Записати формулу $\forall x\ (C(x) \vee (\exists y)(C(x) \wedge F(x,y)))$ реченням української мови, якщо C(x) = «x – має комп'ютер», F(x,y) = « x та y – друзі». Предметна область для x та y – множина студентів першого курсу.

18. Для речень, записаних українською мовою, знайти відповідні речення, записані за допомогою предикатів, якщо *J(x)*= « x– суддя», *L*(x)=« x – юрист», *S(x)*= « x – шахрай», *P(x)*= « x – політик»

1) Всі судді – юристи.

2) Деякі юристи шахраї.

3) Не всі юристи судді.

4) Жоден суддя не є шахраєм.

5) Деякі юристи політики.

а) $\exists x(L(x) \wedge S(x))$.

б) $\exists x(L(x) \wedge P(x))$.

в) $\overline{\forall x}(L(x) \to J(x))$.

г) $\forall x(J(x) \to L(x))$.

д) $\forall x(J(x) \to \overline{S(x)})$.

19.* Чотири студентки – Марія, Ніна, Ольга та Алла – зайняли в змаганні перші чотири місця. На запитання, хто яке місце зайняв, було дано три різні відповіді:

- Ольга- перше, Ніна – друге.
- Ольга – друге, Алла- третє.
- Марія- друге, Алла- четверте.

У кожній відповіді одна частина правильна, а друга- ні. Які місце зайняли Марія, Ніна, Ольга та Алла?

Розділ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИНИ

1. Визначити множину, яка задана характеристичною властивістю:

а) $X=\{x: x$ – цілий дільник числа $6\}$;

б) $X=\{x: x$ – літера слова «математика»$\}$;

в) $X=\{x: |x-3|>2\}$;

г) $X=\{x: |x-1|<2\}$.

2. Задати множину натуральних чисел породжуючою процедурою.

3. Які з наведених нижче співвідношень хибні і чому?

а) $x \in \{3, в, x\}$;

б) $4 \in \{3, \{4, в, x\}, x\}$;

в) $\{3, в\} \in \{\{3, в\}, в\}$.

4. Які з поданих тверджень виконуються для довільних множин *A, B* та *C*?

а) якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$;

б) якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$.

5. Знайти усі підмножини множин : $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{a, в\}$, $\{\{1,2\},\{3\}, 1\}$.

6. Чи пов'язані множини *A* та *B* відношенням включення? Якщо так, то вказати яка з них є підмножиною іншої:

а) $A=\{a,в,c\}$; $B=\{в,c,d,k\}$;

б) $A=\{a,в,c\}$; $B=\{в,c,d,a\}$;

в) $A=\{a,(в,c),d\}$; $B=\{в,(c,d),k\}$;

г) $A=\{1,3\}$, $B=\{x: x^2-4x+3=0\}$.

7. У яких відношеннях перебувають між собою множини A, B, C ?

а) $A=\{1,3\}$; $B=\{x: x$ – ціле число$\}$; $C=\{x: x^2-4x+3=0\}$;

б) $A=\{2,5\}$; $B=\{x: x$ – ціле число$\}$; $C=\{x: x^2-7x+10=0\}$?

8. Для множини перших 20 натуральних чисел записати такі її підмножини: A – парних чисел; B – непарних чисел; C – квадратів чисел; D – простих чисел. У яких відношеннях перебувають ці підмножини ?

9. Довести, що множина, яка складається з n елементів, має 2^n підмножин.

10. Побудувати круги Ейлера для множин:

а) A – множина дерев в саду;

B – множина фруктових дерев у цьому саду;

C – множина яблунь у цьому саду;

D – множина груш у цьому саду;

L – множина лип у цьому саду.

б) A – множина чотирикутників;

B – множина трапецій;

C – множина паралелограмів;

D – множина прямокутників;

E – множина ромбів;

F – множина квадратів.

11. Нехай N – універсальна множина. Показати на діаграмах Ейлера переріз простих дільників чисел 210, 1122, 2002.

12. Нехай універсальна множина U – множина цілих чисел. Із яких елементів складається множина $M=A\cap B$, якщо A складається із чисел виду $4n$, а множина B – із чисел виду $3n$, де $n\in N$?

13. Чи існують підмножини A, B, C універсальної множини U, для яких одночасно мали б місце такі співвідношення:

$C \neq \varnothing$, $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

14. Універсальна множина $U=\{1,2,3,4,5\}$. Знайти елементи множини $M=(A \setminus B) \cup (A \cap B)$, якщо

а) $A=\{1,3,5\}$, $B=\{3,4,5\}$,

б) $A=\{2,4,5\}$, $B=\{1,4\}$,

в) $A=\{1\}$, $B=\varnothing$,

г) $A=\{3,4,5\}$, $B=\{5\}$.

15. Нехай A – область визначення функції $y=3^{\sqrt{-\sin^2 x}}$, B – область визначення функції $y=\sqrt{3-x}$, C – множина розв'язків нерівності $x^2-6x+8 \geq 0$. Знайдіть $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus C$.

16. Довести або спростувати тотожності:

а) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus B)$;

г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

д) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

е) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

є) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;

ж) $A \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

17. Чи існують множини A, B, C такі, що $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ і $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

18. Нехай $A \subset C$ і $B \subset C$. Довести, що $A \cup B \subset C$ і $A \cap B \subset C$.

19. Задані множини $A=\{a, в, c\}$; $B=\{x, y\}$; $C=\{0, 1\}$. Знайти декартові добутки $A \times B \times C$; $C \times A \times B$; $C \times B \times A$; $A \times A \times A$.

20. Знайти декартовий добуток множин A і B та зобразити його у прямокутній системі координат, якщо:

а) $A=\{1,2,3\}$; $B=\{2,4\}$;

б) $A=[1,3]$; $B=[2,4)$;

в) $A=\{-1\}$; $B=(3,4)$.

21. Довести:

а) $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$.

б) $(A\backslash B)\times C=(A\times C)\backslash(B\times C)$.

в) $(\alpha\cup\beta)\circ\gamma=(\alpha\circ\gamma)\cup(\beta\circ\gamma)$;

г) $(\alpha\circ\beta)^{-1}=\beta^{-1}\circ\alpha^{-1}$;

д) $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma=\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$;

22. Дати геометричну інтерпретацію відношень:

а) $\{(x,y)\in R^2: y=x\}$;

б)$\{(x,y)\in R^2: y>x\}$;

в)$\{(x,y)\in R^2:$ $0\le x\le 1$ або $0\le y\le 1$ $\}$;

г)$\{(x,y)\in R^2:$ $0\le x\le 1$ і $0\le y\le 1$ $\}$.

23. На множині $A=\{1,2,3\}$ задано відношення α. Задати його матрицею, якщо

а) $\alpha=\{(1,1);(1,2);(1,3)\}$;

б) $\alpha=\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,2);((2,3);(3,3)\}$;

в) $\alpha=\{(1,3);(3,1)\}$.

24. Побудувати матрицю, граф і графік відповідності α, якщо

а) $A=\{1, 3, 4, 5\}$; $B=\{2, 7, 10\}$; α = *"a+b<11"*.

б) $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{1, 2, 7, 11\}$; α = *«a≤в»*.

25. Відношення задане на множині $A=\{1,2,3\}$ матрицею $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Задати це відношення парами.

26. Задати відповідність $\alpha\subset A\times B$ матрицею і графом , якщо:

а) A={Шевченко, Пушкін, Леся Українка, Лев Толстой};

B={«Анна Кареніна», «Євген Онєгін», «Сон», «Війна і мир», «Гайдамаки», «Руслан і Людмила», «Заповіт», «Лісова пісня»};

α={(a,b): $a\in A$ і $b\in B$, a – автор b};

б) A={краб, ведмідь, карась, вовк, заєць, змія};

B={ліс, річка, поле, море, степ}; α={*(a,в)*: $a\in A$ і $в\in B$; a – живе в b ;

в) A={банан, яблуко, жолудь, груша }; B={яблуня, дуб, пальма, береза, груша }; $\alpha=\{(a,в): a\in A$ *і* $в\in B; a$ – плід b }.

27. Задати на множині M={2,4,6,7, 14} відношення α=«$x \vdots y$» матрицею, графом і графіком.

28. Скільки бінарних відношень існує на множині з n елементів?

29. Навести приклади відношень, які:

а) не є ані симетричними, ані антисиметричними;

б) не є ані рефлексивними, ані антирефлексивними;

в) є симетричними і антисиметричними одночасно.

30. Чи є переріз рефлексивних (відповідно симетричних, транзитивних) відношень рефлексивним (відповідно симетричним, транзитивним) відношенням ?

31. Дати відповідь на питання попередньої вправи для випадку об'єднання відношень.

32. Навести приклад рефлексивного відношення, яке не є симетричним і транзитивним.

33. Навести приклад симетричного відношення, яке не є рефлексивним і транзитивним.

34. Навести приклад транзитивного відношення, яке не є рефлексивним і симетричним.

35. Навести приклад рефлексивного і симетричного відношення, яке не є транзитивним.

36. Навести приклад рефлексивного і транзитивного відношення, яке не є симетричним.

37. Заповнити таблицю:

Відношення	Рефлексивність	Антирефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Транзитивність
1. «x проживає в одному будинку з y» на множині жителів Луцька					

2. «x батько або мати y» на множині людей					
3. «x сестра y» на множині людей					
4. «$x>y$» на множині N					
5. «$x\,\vdots\,y$» на множині N					
6. «x взаємно просте з y» на множині Z					

38. Нехай α та β відношення еквівалентності. Довести, що $\alpha \cap \beta$ теж відношення еквівалентності. Чи є відношенням еквівалентності відношення $\alpha \cup \beta$?

39. Скільки відношень еквівалентності можна побудувати на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$?

40. Які з матриць зображають відношення еквівалентності?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. Чи є перетин та об'єднання двох відношень часткового порядку, визначених на тій самій множині, знову відношенням часткового порядку?

42. Навести приклади відношень часткового порядку, які є одночасно і відношеннями еквівалентності.

43. Визначити, які з наведених відношень на множині натуральних чисел N рефлексивні, симетричні, антисиметричні, транзитивні:

а) $m+n$ — парне;

б) $m+n \le 7$;

в) $m+n$ — непарне;

г) $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб;

д) mn — непарне.

44. Довести: якщо α — відношення еквівалентності, то α^{-1} також відношення еквівалентності.

45. Дві множини A і B евклідової площини називають ізометричними, якщо існує $f{:}A \to B$, яке зберігає відстань між точками. Довести, що ізометричність є відношенням еквівалентності.

46. На множині $M=\{2,4,3,7\}$ задано відношення α=«бути меншим». Побудувати граф цього відношення і встановити, користуючись графом, властивості α .

47. На множині прямих $B=\{a,в,c\}$ задано відношення α=«бути паралельним». Відомо, що $a \| в \| c$. Побудувати граф відношення α. Встановити, користуючись графом, властивості α .

48. Відношення α={(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)} визначено на декартовому квадраті множини $A=\{1,2,3\}$. Довести, що α – відношення еквівалентності. Виписати класи еквівалентності.

49. Знайти найменше відношення на множині $M=\{1,2,3,4\}$, яке містить відношення α={(1,2), (1,4), (3,3), (4,1)}, та є відношенням еквівалентності.

50.[*] На множині пар натуральних чисел N^2 задано відношення α так що: $(m_1,n_1)\ \alpha\ (m_2,n_2) \leftrightarrow (m_1+n_2=n_1+m_2)$. Довести, що α - відношення еквівалентності.

51.[*] На множині пар дійсних чисел R^2 задано відношення α так що:
$(x,y)\ \alpha\ (u,v) \leftrightarrow xv=yu$. Перевірити, чи є α відношенням еквівалентності.

52. Довести, що кожна частково впорядкована множина містить не більше, ніж один найбільший (найменший) елемент.

53. Побудувати граф відношення α, заданого на множині M. Довести, що це відношення є відношенням еквівалентності. Знайти фактор-множину, якщо а) α ={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)}; M={1,2,3,4}.

б) α = «число x має таку ж остачу при діленні на 3, що і число y»;

$M=\{x: x \in N \wedge x \le 8\}$

54. Нехай $S=\{p,g,r,s,t,u\}$. Вказати серед наступних класів підмножин такі, які складають розбиття S:

а) $\{ \{p,s,t\}, \{g,r\}, \{t,u\} \}$;

б) $\{ \{p\}, \{g\}, \{r,u\}, \{s,t\} \}$;

в) $\{ \{r,s,t\}, \{p,g,u\}, \varnothing \}$;

г) $\{\{p,g,r,s,t,u\}\}$.

55. Побудувати усі можливі розбиття множини $M=\{1,2,3,4\}$.

56. Нехай U - множина натуральних чисел $U=\{1, 2, 3, \ldots\}=N$. Показати, що множина $\{C_1, C_2, C_3\}$, де

$C_1=\{x: x=3n, n=1,2,\ldots\}$, $C_2=\{x: x=3n-1, n=1,2,\ldots\}$, $C_3=\{x: x=3n-2, n=1,2,\ldots\}$ утворює розбиття множини U.

57. Довести, що відношення α=«$x \vdots y$» на множині натуральних чисел є відношенням нестрогого порядку.

58. Побудувати приклад частково впорядкованої множини, що не має найменшого елемента, але має єдиний мінімальний елемент.

59. Чи є відношення α ={(1,a), (1,$в$), (2,a)}, яке визначене на декартовому добутку множин A={1,2} та B={$a,в$}, функцією?

60. Знайти образ відрізка $[1;10]$ при відображені $y=lgx$.

61. Знайти прообраз відрізка $[-1;1]$ при відображені $y=sinx$.

62. Чи є функція $y=x^2$ ін'єктивною ?

63. Чи є відношення α $=\{(a_1,в_1), (a_2,в_2), (a_3,в_2)\}$, яке визначене на декартовому добутку множин $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ та $B=\{в_1, в_2, в_3\}$, функцією?

64. Чи є відношення α ={(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}, яке визначене на декартовому квадраті множини A={ 1,2,3,4}, бієктивним відображенням?

65. Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2, і множиною натуральних чисел.

66. Довести, що відрізки [0;1] та [0;2] рівнопотужні.

67. Довести, що інтервал (0;1) та промінь (0;1] рівнопотужні.

68.[*] Довести: якщо множина *A* нескінченна, а множина *B* скінченна або зліченна, то об'єднання $A \cup B$ рівнопотужне множині *A*.

69.[*] Довести, що множина $N \times N = N^2$ - зліченна

70. Довести, що кожний сегмент $[a,b]$, кожний інтервал (a,b) і кожний напівсегмент $(a,b]$ або $[a,b)$ мають потужність континуум.

71. Довести, що на множині невироджених матриць *n*–го порядку ($n \geq 1$), множення матриць є бінарною операцією, а додавання матриць не є бінарною операцією.

72. Довести, що операція «$*$», задана на множині раціональних чисел правилом $a * b = ax + by$, де *a, b* – фіксовані раціональні числа, неасоціативна.

73. Довести, що операція, яка задана формулою $ab = \frac{a+b}{2}$ на множині дійсних чисел *R* є: 1) бінарна; 2) комутативна; 3) неасоціативна.

74. Довести, що на множині раціональних чисел *Q* операція, яка виконується за правилом $ab = \frac{ab}{2}$, є: 1) бінарна; 2) комутативна; 3) асоціативна.

Знайти нейтральний елемент Θ. Для елемента a=8 знайти симетричний.

75. Довести, що адитивна група цілих чисел ізоморфна адитивній групі парних чисел.

76.[*] На множині *G* пар раціональних чисел (a,b), де $a \neq 0$, визначено операцію «$*$» так: $(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$. Довести, що *G* група.

77. Нехай для всіх $x \in (-1,1), y \in (-1,1)$: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Довести, що операція «$*$» задовольняє аксіоми групи.

КОМБІНАТОРИКА

1. Скільки існує варіантів триколірного прапора, на якому зображено три вертикальні смуги різних кольорів, якщо є вибір із тканин п’яти різних кольорів?

2. Скількома способами можна виготовити чотириколірний прапорець з горизонтальних смуг однакової ширини, маючи чотири смужки різного кольору?

3. * Із колоди, яка має 52 карти, вийняли 10 карт. Скількома різними способами це можна зробити? У скількох випадках серед цих карт опиниться хоча б один туз? Лише один туз? Рівно чотири тузи?

4. Скільки можна написати трицифрових чисел з різними цифрами, не використовуючи цифри 0?

5. На п’ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами можна розподілити ці путівки, якщо:

а) усі путівки різні;

б) усі путівки однакові ?

6. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох студентів із групи для чергування, якщо:

а) один із них повинен бути старшим;

б) старшого не повинно бути ?

7. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3 так, щоб жодна з них в числі не повторювалася?

8. На зборах мають виступати чотири особи: А, В, С, Д. Скількома способами їх можна записати у списку ораторів, якщо В може виступати тільки перед А ?

9. У розіграші першості країни з футболу у вищій лізі класу “А” бере участь 15 команд. Команди, які займуть перше, друге та третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною та бронзовою медалями, а команди, які займуть останні два місця, залишать вищу лігу. Скільки різних варіантів розподілу призових місць?

10. Скількома способами можуть розміститися в аудиторії 10 студентів на 25 стільцях?

11. В одного студента є 10 книг із математики, а в іншого - 9 книг. Скількома способами вони можуть обміняти 2 книги одного на дві книги іншого?

12. Виготовлено 10 виробів. Для вибіркового контролю потрібно взяти 2 із цих 10 виробів. Скількома способами це можна зробити?

13. Кожний із 10 присутніх має привітатися з іншими за руку. Скільки буде всіх рукостискань?

14. Наукове товариство складається з 35 членів. Треба обрати голову, заступника голови та секретаря товариства. Скількома способами це можна зробити, якщо кожний член товариства може займати лише одну з цих посад?

15. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких є цілим числом від 1 до 10?

16. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок?

17. У кімнаті гуртожитку проживають 3 студенти. Вони мають 4 чашки, 5 блюдець, 6 чайних ложок (усі предмети відрізняються один від одного). Скількома способами студенти можуть накрити стіл на три особи для чаювання?

18. В Англії прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен 300 і дитині не дають більше трьох імен?

19. Дресирувальник хоче вивести на арену 5 левів та 4 тигри. При цьому не можна, щоб два тигри йшли один за одним. Скількома способами він може розмістити звірів?

20. Абонент забув шифр сейфу. Проте він пам’ятає, що шифр починається з букви **А** і містить три четвірки і дві п’ятірки. Скільки спроб повинен зробити абонент, щоб набрати потрібний номер?

21. У кондитерському кафе, до якого зайшли Сергій та Оксана, є тістечка чотирьох видів: «Наполеон», «Еклер», пісочні та листкові. Скільки існує варіантів такої покупки:

а) Сергій і Оксана купують по одному тістечку;

б) Сергій і Оксана купують по одному тістечку й не хочуть, щоб вони були одного сорту;

в) Сергій купує 2 тістечка Оксані ;

г) Сергій купує 2 тістечка Оксані, й вона не хоче, щоб вони були одного сорту?

22. У студентській групі, яка складається із 25 осіб, при виборі старости за висунуту кандидатуру проголосували 12 осіб, проти – 10, утрималися – 3. Скількома способами могло бути проведене таке голосування?

23. У вазі стоять 10 червоних і 4 рожеві гвоздики. Скількома способами можна вибрати букет із трьох гвоздик?

24. У класі 25 учнів. Щодня призначається один черговий. Скількома способами можна скласти розклад чергувань на 5 днів так, щоб ніхто не чергував більше одного разу?

25. Кожений учень ліцею вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчає 250 учнів, французьку –270 учнів, обидві мови вивчають 180 учнів. Скільки учнів у ліцеї?

26. У групі студентів кожний студент або блондин, або брюнет. Серед студентів 10 блондинів, решта брюнети. 12 студентів люблять читати детективи. Серед 12-и студентів, які люблять читати детективи, 5 блондинів і 7 брюнетів. Скільки чоловік налічує група, якщо два брюнети не люблять читати детективи?

27. Скільки чисел серед перших 100 натуральних не діляться ані на 2, ані на 3, ані на 5?

28. В одній з областей України 85% жителів розмовляє лише українською мовою, 65% лише російською, частина жителів розмовляє як українською так і російською мовами. Який відсоток жителів даної області розмовляє як українською так і російською мовами?

29. На заміську прогулянку поїхали 92 студенти. Бутерброди з ковбасою взяли 47 студентів, із сиром – 38 студентів, із шинкою – 42 студенти, із сиром і ковбасою – 28 студентів, із ковбасою і шинкою – 31 студент, із сиром і шинкою – 26 студентів. Всі три види бутербродів взяли 25 студентів, а декілька студентів замість бутербродів захватили з собою пиріжки. Скільки студентів взяли з собою пиріжки?

30. Скільки шестицифрових чисел, які кратні числу 5, можна скласти з цифр 0,1,2,3,4,5 при умові, що в числі немає однакових цифр?

31. 20 карток для гри в лото роздають чотирьом гравцям по 5 карток кожному. Скількома способами це можна зробити?

32. Скільки потрібно років, щоб, обідаючи щодня, одні й ті самі 7 чоловік вичерпали всі можливості їх розміщення за столом?

33. Скільки можна утворити різних трицифрових чисел з допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5?

34. Скількома способами можна посадити за круглий стіл 5 юнаків і 5 дівчат так, щоб ніякі дві особи однієї статі не сиділи поруч?

35. У деякій державі не було двох жителів з однаковим набором зубів. Яка може бути найбільша кількість жителів країни (найбільша кількість зубів у людини – 32)?

36. Група з 7 юнаків і 10 дівчат танцює.

а) Якщо у деякому танці беруть участь усі юнаки, то скільки є варіантів участі дівчат у цьому танці?

б) Скільки є варіантів, якщо враховувати лише те, які дівчата залишаться незапрошеними?

в) Дайте відповіді на ті ж запитання, якщо відносно двох дівчат можна впевнено сказати, що вони будуть запрошені на танець.

37.[*] У чоловіка є 12 знайомих – 5 жінок і 7 чоловіків, а у його дружини інших 12 знайомих – 7 жінок і 5 чоловіків. Скількома способами можна скласти компанію із 6 чоловіків і 6 жінок так, щоб 6 гостей запросив чоловік, а 6 його дружина?

38. Скількома способами можна вибрати 12 студентів із 17, якщо певні 2 студенти із цих 17 не можуть бути вибрані разом?

39. Хор складається з 10 учасників. Скількома способами можна протягом трьох днів вибирати по 6 учасників із них так, щоб кожен день був різний склад хору?

40. Людина має 6 друзів і протягом 20 днів запрошує до себе 3 із них так, щоб компанія жодного разу не повторилася. Скількома способами вона зможе це зробити?

41. Скількома способами можна переставляти букви слів «кавоварка», «самовар» так, щоб голосні і приголосні чергувалися?

42. Скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 30 три числа так, щоб їх сума була парною?

43.[*] Кожна сторона квадрата розбита на n частин. Скільки можна побудувати трикутників, вершинами яких є точки поділу?

44.[*] У сейфі зберігаються документи, над якими працює комісія у складі 5 чоловік. Яку найменшу кількість замків повинен мати сейф і скільки ключів потрібно видати кожному члену комісії, щоб доступ до документів був можливий лише тоді, коли збираються будь-які три члени комісії?

45. Обчислити : $\dfrac{A_{20}^{6}+A_{20}^{5}}{A_{20}^{4}}$

46. Електронні документи передаються по семи каналах зв’язку з пункту A в пункт B. У пункті B документи редагують і передають назад у пункт A.

а) Скількома способами можна передати документ із пункту A в пункт B і назад?

б) Дати відповідь на те ж саме питання, якщо документ не може повернутися в пункт A по тому ж каналу, по якому він був переданий в пункт B.

47. У боротьбі за призові місця на студентській олімпіаді з інформаційних технологій беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені перше і друге місця?

48. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо :

а) ні одна з цифр не повторюється більше одного разу ;

б) цифри можуть повторюватись ;

в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватись)?

49. Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться на п'ять?

50.* На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на іншій $-$ m точок. Кожна із вершин при основі трикутника з'єднана прямими з точками, взятими на протилежній стороні :

а) скільки точок перетину цих прямих утвориться всередині трикутника?

б) на скільки частин ділять трикутник ці прямі?

51. Скільки існує двоцифрових чисел, у яких обидві цифри парні?

52. Скільки існує п'ятицифрових чисел, у яких усі цифри непарні?

53.* У прямокутній таблиці з m рядків і n стовпців записані числа +1 і -1 так, що добуток чисел у кожному рядку й кожному стовпці дорівнює рівно 1 . Скількома способами можна таким чином заповнити таблицю?

54. В електронній бібліотеці є 10 статей із заданої тематики. Скількома способами можна скопіювати три статті на диск на локальному комп'ютері?

55. В електронній папці міститься 5 документів. Вибраний навмання документ копіюється в іншу папку, після чого іще один вибраний навмання документ копіюється на дискету. Скількома способами можна проробити ці операції?

56. Скількома способами можна розмістити на полиці 5 книг?

57. Скількома способами можна розмістити елементи множини $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

58. Скільки можна скласти перестановок із n книг, у яких дані 2 книги не стоять поряд?

59. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну?

60. Скількома способами можна розмістити 4 документи на 25 місцях?

61. Студентові необхідно скласти 4 іспити протягом 8 днів. Скількома способами це можна зробити?

62. Є 10 електронних документів, три з яких потрібно помістити в чергу на друк на лазерному принтері. Скількома способами це можна зробити?

63. Є 5 комп’ютерів і 4 користувачі. Скількома способами можна розподілити користувачів за комп’ютерами, якщо кожному користувачеві повинен дістатися комп’ютер і не дозволяється працювати двом користувачам за одним і тим же комп’ютером?

64. Є 10 символів, які можна використовувати для створення дволітерного коду електронного документа. Скільки кодів можна скласти з цих символів?

65. У бібліотеці є 5 книг із інформаційних технологій. Скількома способами можна вибрати з них 3 книги?

66. Скількома способами з 7 документів можна вибрати 3?

67. У комп’ютерній сітці працюють n користувачів, при чому кожен з них зв’язувався з іншими по E-mail упродовж однієї години один раз. Скільки сеансів зв’язку користувачів один з одним відбулось впродовж цієї години?

68.* У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці?

69. Дано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести, з’єднавши точки попарно?

70.* На площині проведено n прямих так, що жодні 2 з них не паралельні й жодні 3 не перетинаються в одній точці :

а) знайти кількість точок перетину цих прямих ;

б) скільки трикутників створюють ці прямі?

в) на скільки частин ділять площину ці прямі?

71. Скільки є чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра більша попередньої?

72. Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра менша попередньої?

73.[*] В опуклому n-кутнику проведені всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці всередині n-кутника. На скільки частин розділиться при цьому многокутник?

74. У комп'ютерному класі є 6 комп'ютерів. Для наукового експерименту потрібно відібрати 4 комп'ютери. Скількома способами можна це зробити?

75. Знайти сьомий член розкладу бінома $(a^2\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}/a)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена дорівнює 36.

76. Знайти номер члена розкладу бінома $(\sqrt[3]{x}+1/x)^{16}$, що не містить x.

77. Знайти суму біноміальних коефіцієнтів членів, що стоять на непарних місцях в розкладі бінома $(x + y)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена на 9 більший біноміального коефіцієнта другого члена .

78. Скільки членів розкладу бінома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$ є цілими числами, указати їх номери.

79. Обчислити суму $C_5^0+2\,C_5^1+2^2\,C_5^2+2^3\,C_5^3+2^4\,C_5^4+2^5\,C_5^5$.

80. Знайти алгебраїчну суму коефіцієнтів многочлена відносно x, одержаного в розкладі бінома $(3x - 4)^{17}$.

81. Знайти член розкладу бінома $(x\sqrt{x}+1/\sqrt[3]{x})^n$, який містить x^5 , якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 128.

82. У розкладі бінома $(x^2y + y^2x)^8$ знайти доданок, що містить а) $x^{11}y^{13}$, б) $x^{16}y^9$.

83. У розкладі $\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt[10]{\frac{x^7}{y^3}}\right)^n$ є доданок, який містить xy. Знайти його.

84. До якого натурального степеня потрібно піднести біном $\frac{1}{\sqrt{2}}+3$, щоб відношення четвертого доданка розкладу до третього дорівнювало $3\sqrt{2}$?

85. Знайти показник степеня бінома $(a + b)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт четвертого члена розкладу дорівнює 120.

86. Знайти значення показника n в розкладі бінома $(x + y)^n$, якщо коефіцієнт п'ятого і дев'ятого членів рівні між собою.

87.[*] Знайти T_m – m-ий член розкладу $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n$, якщо відомо, що

$$T_{m+2} : T_{m+1} : T_m = 28:8\sqrt{6}:9.$$

88. Знайти m і n, якщо в розкладі $(\sqrt{2}+1/\sqrt{2})^n$ відомо, що

$$T_{m+2} : T_{m+1} : T_m = 2:5:8.$$

89. Знайти раціональні члени в розкладі $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$.

90. Знайти раціональні члени в розкладі $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{8})^{15}$.

91. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів міститься в цьому розкладі? Знайти серед них член з найбільшим біноміальним коефіцієнтом.

92. Розв'язати рівняння : $A_x^4 - A_{x+1}^3 = \frac{5}{4} \times A_x^3$.

93. Спростити : $\frac{C_{m+1}^{k+1} - C_m^k}{C_{m-1}^k}$.

94. У розкладі бінома $(x\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x})^{10}$ знайти п'ятий член розкладу.

95. У розкладі $(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4})^n$ коефіцієнт третього члена на 44 більший від коефіцієнта другого члена. Знайти вільний член, тобто член розкладу, що не залежить від x.

96. У розкладі бінома $(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3})^{14}$ знайти член, який містить після спрощення x^2.

97. Розв'язати рекурентні рівняння із заданими початковими умовами:

а) $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n)=0$, якщо $f(1)=1, f(2)= -7$,

б) $f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n)=0$, якщо $f(1)=2, f(2)= 4$,

в) $f(n+2) +2f(n+1) + f(n)=0$, якщо $f(1)=3, f(2)= -5$,

г) $f(n+2) - f(n+1) - f(n)=0$, якщо $f(1)=1, f(2)=1$,

д) $f(n+4) - 5f(n+2) + 4f(n)=0$, якщо $f(1)=3, f(2)=2, f(3)=6, f(4)=8$.

98. Знайти загальний розв'язок рекурентного співвідношення:

а) $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n)= 0$,

б) $f(n+3) - 3f(n+2) + f(n+1) + f(n)= 0$,

в) $f(n+3) - 2f(n+2) - f(n+1) - 6f(n)= 0$,

г) $f(n+4) - 5f(n+3) +6f(n+2) + 4f(n+1) - 8f(n)= 0$, д) $f\,(n+3) - 3f\,(n+2) + f(n+1) + f(n) = 0$,

е) $f\,(n+3) - 9f\,(n+2) + 26f(n+1) - 24\,f(n) = 0$.