РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Лекція 9. Основні поняття теорії графів

План

1. Виникнення теорії графів

2. Основні поняття теорії графів

3. Різновиди графів

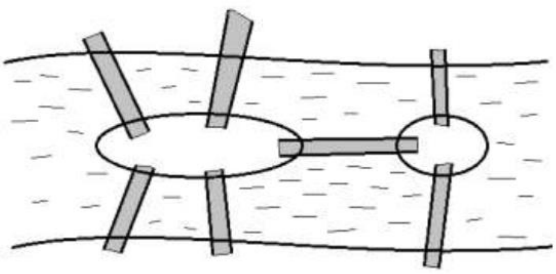
4. Маршрути, ланцюги і цикли у графах

5. Орієнтовані графи (орграфи)

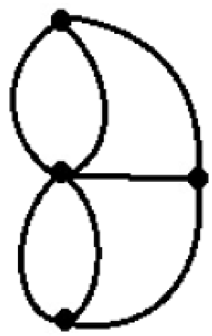
1. Виникнення теорії графів

Теорія графів – молода область дискретної математики, яка бере свій початок з праць видатного математика Леонарда Ейлера, який у 1736 році розв'язав знамениту задачу про Кенігзберські мости.

Задача. Місто Кенігзберг розташоване на обох берегах річки і двох островах. Сім мостів сполучають острови і береги між собою. Чи можна вийшовши з будь-якого місця Кенігзберга пройти кожен міст рівно по одному разу і знову повернутися в те саме місце? (Рис 1.)



(Мал.1)



(Мал.2)

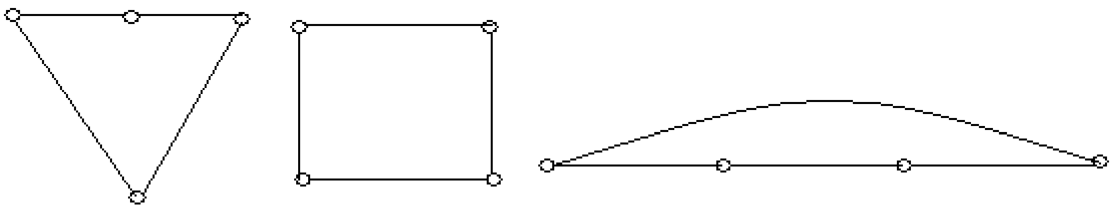
Схему сполучення частин міста можна зобразити за допомогою системи точок і ліній на площині. Позначимо частини міста точками, а мости, що їх сполучають лініями. Для малюнку 2 задача формулюється так: «Чи можна починаючи з будь-якої точки пройти через кожну лінію рівно 1 раз і повернутися в цю саму точку?»

Ейлер довів, що маршруту, який би відповідав умові задачі не існує. Він розробив теорію розв’язання задач такого типу. Довгий час дослідження Ейлера залишалися єдиним результатом теорії графів. Лише в середині 19 століття зусиллями вчених Келлі і Кірхгофа були отримані нові результати теорії графів. Сам термін граф був введений у 1936 році венгерським математиком Кенігом.

2. Основні поняття теорії графів

Означення. **Графом** називається система, яка складається з непорожньої множини V і множини U деяких невпорядкованих пар елементів з V. Елементи з множини V називаються **вершинами,** елементи з $U -$ **ребрами.** Позначається граф $G(U,V)$.

Вершини графа будемо зображати маленькими кружечками на площині, а ребра – лініями. Малюнок, який при цьому утворився також називається графом. При зображені графів довжини ребер, розміщення вершин є довільним.



а) б) в)

(Мал.3)

На малюнку 3 зображено один і той самий граф. Вершини графа позначають великими літерами або числами, ребра – малими літерами.

Означення. Число вершин графа називають **порядком графа.** Позначається $|G|$.

Означення. Вершини A і B називаються **суміжними,** якщо існує ребро кінцями якого є ці вершини. Говорять, що вершини A і B **інцидентні** ребру (AB).

Цілком аналогічно дається означення **суміжних ребер**. Кожне ребро суміжне саме собі.

Означення. **Степенем вершини** називається кількість ребер інцидентних цій вершині. Позначається $\rho(A)$. Вершина називається **парною,** якщо її степінь число парне, **непарною** – число непарне.

Нехай граф G має n вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$, степені яких відповідно $\rho(A_1), \rho(A_2), \dots, \rho(A_n)$. Число ребер графа дорівнює

$$N = \frac{1}{2}\left(\rho(A_1) + \rho(A_2), + \dots + \rho(A_n)\right).$$

Лема (про рукостискання). Сума степенів усіх вершин графа є число парне.

Наслідок. У будь-якому графі число вершин непарного степеня є парним.

Граф може мати декілька однакових ребер. Такі ребра називаються **кратними.**

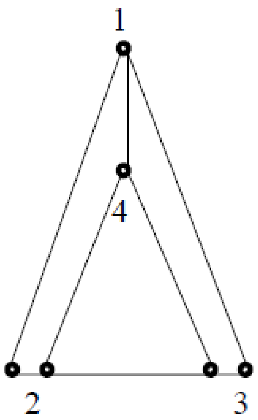
Означення. Граф, який має кратні ребра називається **мультиграфом.**

Ребра виду (A, A) називаються **петлями.** Граф, який містить кратні ребра і петлі називається **псевдографом.**

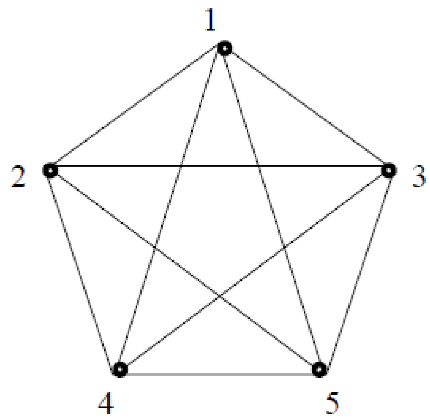
3. Різновиди графів

1. Повні графи

Означення. Граф називається **повним,** якщо кожні дві його вершини сполучені одним і лише одним ребром. Повні графи з n вершинами позначають K_n.



Граф K_4



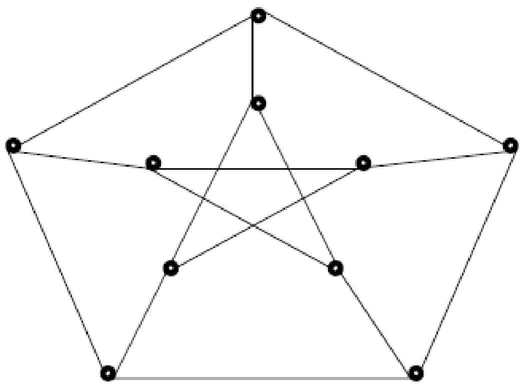
Граф K_5

(Мал.4)

Граф, який не є повним можна перетворити на повний з тими ж вершинами. Для цього потрібно добавити ребра, яких не вистачає. Вершини графа і ребра, які добавлені, також утворюють граф. Він називається **доповненням графа** G. Доповнення позначається $\bar{G}$.

2. Регулярні (однорідні) графи

Означення. Граф називається **регулярним,** якщо всі його вершини мають один і той же степінь. Якщо степінь кожної вершини k, то граф називають **регулярним графом степеня** $\boldsymbol{k}$.



Граф Петерсона

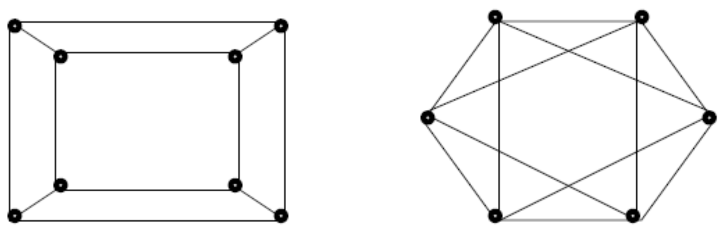
(Мал.5)

3. Порожні (нуль) графи

Означення. Граф називається **порожнім,** якщо в нього є лише вершини, а ребер немає. Позначається N_n.

4. Платонові графи

Означення. **Платоновими** графами називаються графи, утворені вершинами і ребрами п'яти правильних многогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра та ікосаедра. Графи, зображені на малюнку 6, відповідають кубу і октаедру.



(Мал.6)

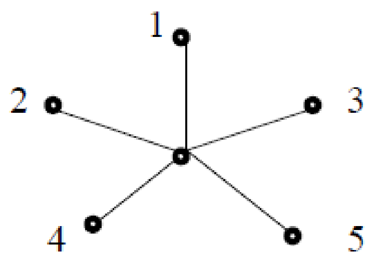
4. Двочастинні графи

Означення. Граф називається **двочастинним,** якщо існує таке розбиття множин його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра лежать у різних класах.

Означення двочастинного графа можна подати іншим чином – в термінах розфарбування його вершин двома кольорами, наприклад червоним і синім. При цьому граф називається **двочастинним,** якщо його вершину можна пофарбувати синім або червоним кольором, так щоб кожне його ребро мало один кінець червоний, а другий – синій.

Якщо в двочастинному графі будь-які дві вершини з різних класів суміжні, то такий граф називається **повним двочастинним** графом. Повний двочастинний граф, в якого один клас має m вершин, а другий – n вершин, позначається K_{mn}.

Повний двочастинний граф (малюнок 7) K_{1n} називається зірковим графом.



Повний двочастинний граф K_5

(Мал. 7)

4. Маршрути, ланцюги і цикли у графах

Означення. Скінченна послідовність суміжних ребер графа називається **маршрутом.** Кожне ребро маршрут.

Означення. Число ребер у маршруті називається **довжиною** цього маршруту.

Означення. Маршрут, у якого всі ребра різні, називається **ланцюгом.**

Означення. Ланцюг, у якого кінцеві вершини співпадають, називається **циклом.**

Означення. Ланцюг, у якого усі вершини різні, називається **простим.**

Аналогічно дається означення простого циклу.

Означення. Довжина найкоротшого ланцюга, який сполучає вершини A та B називається **відстанню.**

5. Орієнтовані графи (орграфи)

Означення. Орієнтованим графом називається система, яка складається з непорожньої V і непорожньої множини U впорядкованих пар елементів з V. Позначається оргграф $G'(U, V)$.

Поняття і терміни, які вводились для графів, переносяться на орграфи.

Направні ребра будемо називати **дугами.**

Означення. **Степенем виходу** вершини A називається кількість дуг, які виходять з цієї вершини. Позначають $\rho^+(A)$.

Степенем входу вершини A називається кількість дуг, які входять в цю вершину. Позначають $\rho^-(A)$.

Означення.

Якщо $\rho^+(A) = 0, \rho^-(A) > 0,$ то вершина A називається **стоком.**

Якщо $\rho^+(A) > 0, \rho^-(A) = 0,$ то вершина A називається **джерелом.**

Якщо $\rho^+(A) = 0, \rho^-(A) = 0,$ то вершина A називається **ізольованою вершиною.**