Лекція 4. Ізоморфізм множин. Незчисленні множини
План

1. ***Ізоморфізм скінченних та зчисленних лінійно впорядкованих множин***
2. ***Незчисленні множини***

1. *Ізоморфізм скінченних та зчисленних лінійно впорядкованих множин*

Означення. Якщо у множині будь-які два елементи є порівнювані між собою, то множина називається **лінійно впорядкована**.

Теорема 1. Скінченні лінійно впорядковані множини, які мають однакову кількість елементів ізоморфні.

Доведення. 1) Покажемо, що скінченна лінійно впорядкована множина має найменший (найбільший) елемент.

Нехай $|A| = m.$ Покажемо, що у A є найменший елемент. Нехай $a_1 \in A$, якщо a_1 не є найменшим, то за означенням існує a_2 такий, що $a_2 \leq a_1$. Якщо a_2 не є найменшим, то існує a_3 такий, що $a_3 \leq a_2$ і т. д. Не більше як через m кроків знайдеться найменший елемент. Аналогічні міркуванні для найбільшого елемента.

2) Нехай множини $A,\ B -$ лінійно впорядковані, $|A| = |B|$. Виберемо в кожній із множин найменший єдиний елемент $a_1 \in A,\ b_1 \in B$. У множинах, які залишились, знову виберемо найменший елемент $a_2 \in A,\ b_2 \in B,$ і т. д. Через m кроків отримаємо $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_m;$ $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots \leq b_m$. Встановимо взаємно однозначну відповідність між виділеними елементами

$$a_1 \leftrightarrow b_1, a_2 \leftrightarrow b_2, \dots , a_m \leftrightarrow b_m.$$

Ця відповідність зберігає відношення порядку, тому $A,\ B -$ ізоморфні.

Означення. Елементи x, y лінійно впорядкованої множини A називаються **сусідніми**, якщо $x \leq y$ (або $y \leq x$) і не існує такого елемента z, що $x \leq z$ і $z \leq y$ ($y \leq z$ і $z \leq x$).

Наприклад, у множині натуральних чисел будь-які два послідовні числа є сусідніми. У множині раціональних чисел немає сусідніх елементів.

Означення. Лінійно впорядкована множина A називається **щільною**, якщо вона не містить сусідніх елементів.

Теорема 2. Будь-які дві зчисленні лінійно впорядковані щільні множини без найбільших та найменших елементів є ізоморфними.

2. *Незчисленні множини*

Існування незчисленних множин було доведено у 1874 року Георгом Кантором за допомогою запропонованого ним діагонального методу.

Теорема 1 (Кантора) Множина усіх дійсних чисел інтервалу $(0;1)$ числової осі не є зчисленною.

Доведення. Припустимо від супротивного. Нехай множина дійсних чисел інтервалу $(0;1)$ зчисленна, тобто їх елементи можна розмістити у деяку послідовність $x_1, x_2, \dots$. Відомо, що кожне дійсне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Отже, послідовність матиме вигляд

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots$$
$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots$$

……………………

Утворимо дріб $y = 0, b_{11}b_{22}b_{33} \dots$, так, щоб $b_{11} \neq a_{11}$; $b_{22} \neq a_{22}$, і т. д. Побудований десятковий дріб відрізняється від кожного з дробів $x_1, x_2, x_3, \dots$, а отже він і не входить у послідовність $x_1, x_2, x_3, \dots$, тобто не пронумерований. Отже, наше припущення не правильне.

Теорема 2. Потужність інтервалу $(0;1)$ дійсних чисел дорівнює потужності сегменту $[0;1]$.

Доведення. 1) Спочатку доведемо, що у інтервалі $(0;1)$, а отже і у сегменті $[0;1]$ містяться зчисленні підмножини. Це дійсно так, наприклад, $\{0,1; 0{,}11; 0{,}111, \dots\}$.

2) Виберемо довільну нескінченну послідовність точок відрізка $[0;1]$: $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, так, що $s_0 = 1, s_1 = 1$, а $s_2, s_3, \dots -$ довільні числа з інтервалу $(0;1)$.

Точки послідовності S належать сегменту $[0;1]$, а точки послідовності $S' = \{s_2, s_3, \dots\}$ належать, як відрізку $[0;1]$, так і інтервалу $(0;1)$.

Множини S і S' – зчисленні, тому між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність $S_i = S_{i+2}$.

Якщо із відрізка $[0;1]$ видалити усі точки, які входять в S, а з інтервалу $(0;1)$ усі, які входять в S', то отримаємо рівні множини між якими можна встановити взаємно однозначну відповідність. З цього випливає, що між елементами сегменту $[0;1]$ і інтервалу $(0;1)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. А, отже, вони рівно потужні.

Теорему доведено.

В 1977 році Георг Кант довів, що множина точок одиничного квадрата рівно потужна множині точок сегмента $[0;1]$.

Означення. Множина, яка еквівалентна множині дійсних чисел називається множиною **потужності континуума**.