Міністерство освіти і науки України

ТЕХНІЧНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ

Луцького національного технічного університету

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Курс лекцій

для здобувачів фахової передвищої освіти
освітньо-професійної програми «Електроенергетика, електротехніка
та електромеханіка»
галузь знань 14 Електрична інженерія
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка
та освітньо-професійної програми«Менеджмент»
галузь знань 07 Управління та адміністрування
спеціальності 073 Менеджмент
денної форми навчання

Луцьк 2020

УДК 51(07)
В 55

До друку
Голова навчально-методичної ради Луцького НТУ __________ О. М. Ляшенко

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій Луцького НТУ
Директор бібліотеки ________________ С. С. Бакуменко

Затверджено навчально-методичною радою Луцького НТУ,
протокол №___ від «___» ___________ 2020 року.

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою ТФК Луцького НТУ,
протокол № ___ від «___» ___________ 2020 року.
Голова навчально-методичної ради ТФК ЛНТУ ___________ Т. П. Радіщук

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії природничо-математичних дисциплін ТФК Луцького НТУ,
протокол № ___ від «___» ___________2020 року.

Голова ЦК ПМД ________________ Р. І. Аббасова

Укладач: ______________ Ю. В Боровська, викладач Технічного фахового коледжу Луцького НТУ.

Рецензент: __________ Ю. І. Харкевич, кандидат фізико-математичних наук, професор факультету інформаційних систем, фізики та математики ВНУ імені Лесі Українки.

Відповідальний за випуск: ____________ Р. І. Аббасова, голова ЦК природничо-математичних дисциплін Технічного фахового коледжу Луцького НТУ.

В 41 **Вища математика** [Текст]: курс лекцій для здобувачів фахової передвищої освіти освітньо-професійної програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 Електрична інженерія спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка та освітньо-професійної програми«Менеджмент» галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 073 Менеджмент денної форми навчання / уклад. Ю. В. Боровська. – Луцьк : Технічний фаховий коледж Луцького НТУ, 2020. – 128 с.

Курс лекцій з вищої математики для студентів спеціальностей 141 Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка та 073 Менеджмент денної форми навчання складено відповідно до діючої програми з вищої математики. Пропоноване видання можна використовувати при підготовці до практичних робіт, що дозволить студентам краще засвоїти основні поняття та методи розв’язання задач з вищої математики при самостійній підготовці. Для студентів навчальних закладів I-II рівнів акредитації.

ЗМІСТ

ВСТУП

Для підготовки висококваліфікованих спеціалістів, конкуренто-спроможних на світовому ринку праці слід забезпечити належний рівень математичної освіти студентів, оскільки математика відіграє важливу роль у формуванні таких якостей сучасного фахівця, як професіональна компетентність, творче мислення, навички до самостійної наукової роботи. Математичні методи та математичне моделювання широко використовуються для розв'язання практичних задач різних галузей науки, техніки, економіки, виробництва.

Вища математика є фундаментом математичної освіти майбутніх фахівців, в результаті вивчення якої студенти повинні оволодіти основами математичного апарату, здобути навики математичного формулювання прикладних задач та зрозуміти роль і місце математичних методів при їх розв'язуванні.

Курс лекцій містить короткі теоретичні відомості з традиційних розділів вищої математики (лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, вступу до математичного аналізу та диференціального числення функції однієї та багатьох змінних), передбачених навчальною програмою та може бути використаний в якості довідкового матеріалу з вищої математики студентами як очної, так і заочної форми навчання.

РОЗДІЛ І. Лінійна алгебра

Лекція 1. Матриці та операції над ними

План

1. Основні поняття теорії матриць. Види матриць.
2. Дії над матрицями.

1. Основні поняття теорії матриць. Види матриць

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Матриця A з елементами a_{ij} розміру $m \times n$ має m рядків та n стовпців і позначається так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця містить однакову кількість рядків і стовпців вона називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*.

Матриця, у якої всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якої всього один стовпець, – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{mn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{m1}$ – *бічну діагональ.*

Якщо в матриці A поміняти місцями рядки і стовпці, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці A* і позначається A^T.

Квадратна матриця, в якої всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею. Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею.

Прикладом одиничної матриці третього порядку є матриця:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нульовою матрицею називається матриця, всі елементи якої – нулі. Позначається θ.

Якщо A і B – матриці одного розміру, то вони вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.

2. Дії над матрицями

Сумою матриць A і *B* є матриця C з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$ Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці A на число k є матриця B з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Різниця матриць A і *B* визначається як сума A і $(-B)$.

Властивості операції додавання матриць:

1) $A+B=B+A$ – комутативна
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ – асоціативна
3) $A+\theta=A;\quad A-A=\theta$
4) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ – асоціативна відносно множення чисел
5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
6) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

Добутком матриці A розміру $m\times n$ на матрицю *B* розміру $n\times k$ є матриця *C*, розміром $m\times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij}, який стоїть в *i*-му рядку та *j*-му стовпці матриці *C*, дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці *A* дорівнює кількості рядків другої матриці *B*.

Приклад. Знайти матрицю *C*=*AB*, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв'язування.
Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тому за означенням маємо

$$C=AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1)\\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриць:

1) $A\cdot B\neq B\cdot A$
2) $(AB)C=A(BC)$
3) $(A+B)C=AC+BC$
4) $A\cdot\theta=\theta\cdot A=\theta$
5) $A\cdot E=E\cdot A=A$
6) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

Будь-якій квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається визначником цієї матриці і позначається символом $\det A$.

Лекція 2. Визначники та їх властивості. Обернена матриця. Ранг матриці.

План

1. Визначники II та III порядку. Їх обчислення.
2. Властивості визначників.
3. Обернена матриця та її побудова.
4. Ранг матриці та його знаходження.

1. Визначники II та III порядку. Їх обчислення

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.
називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (2)$$

називається *визначником третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*, причому індекс i вказує на номер рядка, а індекс j – на номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (2) складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – *бічну діагональ.*

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на бічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за *правилом трикутників* (Рис. 1.): перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться бічна діагональ.

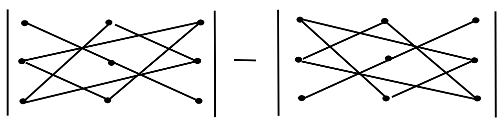


Рисунок – 1.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання i-го рядка і j-стовпця.

Розглянемо визначник третього порядку Δ, заданий формулою (2). Для кожного з дев'яти елементів цього визначника існує свій мінор. Наприклад, мінором елемента a_{12} є визначник $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Його можна дістати з елементів визначника (2), викресливши у ньому перший рядок і другий стовпчик.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Теорема. *Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розкладання визначника (2) за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\quad A_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

2. Властивості визначників

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).
2. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.
5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести множником за знак визначника.
6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.
7. Визначник, що має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.
8. Якщо у визначнику деякий (наприклад, i-й) рядок є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких усі рядки, крім i-го, будуть такі, як у даному визначнику; i-й рядок першого визначника складатиметься з перших доданків, а i-й рядок другого визначника складається з других доданків.

Приклад. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = -10 .$$

Приклад. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 .$$

3. Обернена матриця та її побудова

Нехай A – деяка квадратна матриця n-го порядку.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E ,$$

де E – одинична матриця.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ *й невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A.

Приклад. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 .$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (3). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Складемо обернену матрицю

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

4. Ранг матриці та його знаходження

Рангом матриці *A* називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, (позначається $r(A)$). Якщо всі елементи матриці $a_{ij} = 0$, то $r(A) = 0$.

Крім безпосереднього обчислення мінорів, ранг матриці можна знайти простішим методом, який ґрунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати так звані *елементарні перетворення*, а саме:

- замінити рядки стовпцями (при цьому стовпці заміняються відповідними рядками);
- переставити місцями два рядки (стовпці);
- помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
- викреслити рядок (стовпець), всі елементи якого дорівнюють нулеві;
- додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

В результаті ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Лекція 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

План

1. Основні означення.
2. Правило Крамера розв'язування системи трьох лінійних рівнянь.
3. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.
4. Розв'язування систем лінійних рівнянь за методом Гаусса.
5. Однорідна система лінійних рівнянь.

1. Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{ij} – коефіцієнти, b_i – вільні члени, x_i – невідомі, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається впорядкована сукупність n чисел (x_1, x_2, ... , x_n), які при підстановці в систему (1) як невідомі, перетворюють усі рівняння в тотожності.

Система рівнянь (1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків.

2. Правило Крамера розв'язування системи трьох лінійних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

(коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, і вільні члени b_1, b_2 і b_3 вважаються заданими).

Коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3 в системі (2) позначаються однією буквою a з двома індексами, де перший відповідає номеру рівняння, а другий – номеру невідомого.

Щоб розв'язати систему (2), із коефіцієнтів при невідомих і вільних складаються визначники третього порядку Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Визначник Δ, який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Визначники Δ_1, Δ_2, і Δ_3, утворюються з визначника (3) відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв'язуванні системи рівнянь (2) можуть бути такі три випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система (2) має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{4}$$

Формули (4) називають *формулами Крамера*.

2. Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 не дорівнює нулю, то система (2) розв'язків не має.
3. Якщо $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, то система (2) має безліч розв'язків.

3. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему (1), яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими.

Введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицю A, складену з коефіцієнтів системи (1), називають основною матрицею системи, матрицю-стовпець X – матрицею невідомих, а матрицю-стовпець B – матрицею вільних членів.

Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$AX = B. \tag{5}$$

Припустимо, що матриця A має обернену матрицю A^{-1}. Помножимо обидві частини рівності (5) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{6}$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (1), досить знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

Формулу (6) називають *матричним записом розв'язку системи* (1).

Зауважимо, що розв'язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи квадратна і невироджена.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ -x+y+2z=5. \\ 3x+z=-2 \end{cases}$$

Розв'язування.

Маємо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

За формулою (6) знаходимо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x=-1$, $y=2$, $z=1$.

4. Розв'язування систем лінійних рівнянь за методом Гаусса

Метод послідовного виключення невідомих, запропонований Гауссом, розглянемо на прикладі системи m рівнянь з n невідомими (1).

Над системами лінійних рівнянь можна виконувати такі елементарні перетворення:

- множення деякого рівняння на відмінне від нуля число;
- додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння, помноженого на деяке число;
- перестановку рівнянь.

За допомогою елементарних перетворень система рівнянь перетворюється на рівносильну їй систему, але простішого вигляду, з якої розв'язки визначаються безпосередньо. Наприклад, система (1) із визначником $\Delta \neq 0$ за допомогою елементарних перетворень завжди може бути перетворена на рівносильну їй систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1r}x_r + ... + c_{1n}x_n = h_1, \\ \qquad c_{12}x_2 + ... + c_{1r}x_r + ... + c_{1n}x_n = h_2, \\ \qquad \qquad ...., \\ \qquad \qquad c_{rr}x_r + ... + c_{1n}x_n = h_r, \\ \qquad \qquad \qquad ...., \\ \qquad \qquad \qquad c_{nn}x_n = h_n. \end{cases} \qquad (7)$$

Система (7) має єдиний розв'язок і розв'язується, починаючи з останнього рівняння.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручніше приводити до трикутного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю з коефіцієнтів при невідомих системи та вільних членів. Помножимо перший рядок на -1 і додамо до другого, помножимо перший рядок на –2 і додамо до третього. У першому стовпчику утворились нулі, крім першого рядка. Потім помножимо другий рядок на 5 і додамо до третього.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матриця звелась до трикутного вигляду, отже система сумісна і визначена.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \qquad x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad -2x_3 = -4 \end{cases}$$

З третього рівняння визначаємо x_3, з другого – x_2 і з першого – x_1.

$x_3 = \dfrac{-4}{-2};\ x_3 = 2;$

$x_2 = 1 - x_3 = 1 - 2 = -1;$

$x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 = 5 + 2 - 6 = 1$

Відповідь: $(1; -1; 2)$.

5. Однорідна система лінійних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0; \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0; \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ завжди існує. Розглянемо матрицю A, складену з коефіцієнтів при невідомих. Нехай її ранг дорівнює r. Якщо $r = n$, то система (8) має єдиний розв'язок, і він тривіальний. Якщо $r < n$, то система (8) має також розв'язки, відмінні від тривіальних.

Фундаментальною системою розв'язків системи однорідних лінійних рівнянь називається така лінійно незалежна сукупність її розв'язків, що всякий розв'язок даної системи є якоюсь лінійною комбінацією розв'язків з цієї сукупності.

Для довільної системи однорідних лінійних рівнянь з рангом $r < n$ існує фундаментальна система розв'язків. Число розв'язків цієї системи дорівнює $n - r$.

РОЗДІЛ ІІ. Елементи векторної алгебри
Лекція 4. Лінійні векторні простори

План

1. Системи координат.
2. Основні означення та лінійні операції над векторами.
3. Проекція вектора на вісь.
4. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом.

1. Системи координат

Три взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy, Oz*, які мають спільний початок точку *O* і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі (Рис. 1). Якщо таких осей дві: *Ox* і *Oy*, то маємо систему координат на площині (Рис. 2).

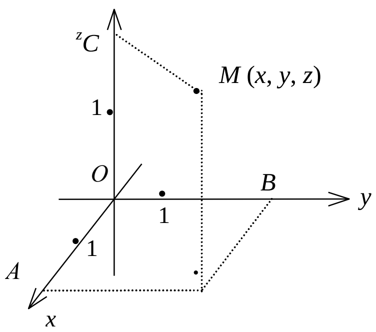


Рисунок – 1.

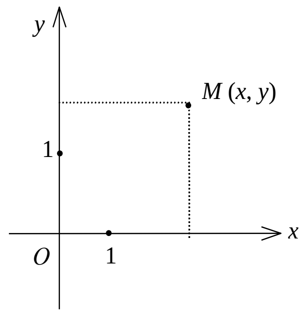


Рисунок – 2.

Осі *Ox, Oy, Oz* називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка *O* — *початок системи координат*. Нехай *M* — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими координатами *x, y, z* точки *M* називатимемо відповідно довжини *OA, OB, OC* напрямлених відрізків $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$.

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел (*x*, *y*, *z*), а на площині — впорядкована пара чисел (*x*, *y*), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел. Ця відповідність дає можливість використовувати рівняння для відображення геометричних образів, таких як лінія, площина тощо, та застосовувати алгебраїчні методи для розв’язування геометричних задач.

Полярна система координат складається з деякої точки площини *O*, яка називається *полюсом*, променя *OA,* що виходить з цієї точки і називається *полярною віссю* (Рис. 3.). Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.

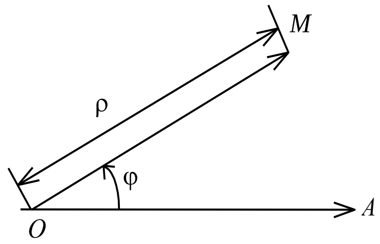


Рисунок – 3.

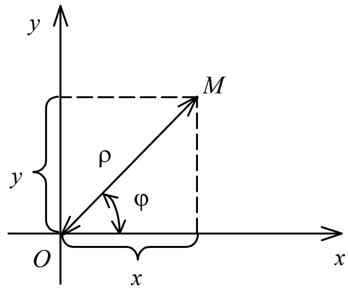


Рисунок – 4.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ — відстань від полюса *O* до точки *M* і φ — кут, на який треба повернути полярну вісь *OA* до її збігу з *OM,* проти годинникової стрілки.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки (Рис. 4.) встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

Приклад. Знайти полярні координати точки *M* (2, 2).

З формули (1) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $tg\varphi = 1$. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Основні означення та лінійні операції над векторами

Вектором називається напрямлений відрізок. Позначати вектори будемо $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... Якщо, скажімо, точка *A* — початок вектора, а точка *B* — його кінець, то маємо $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називають *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{e}$.

Вектор вважається заданим, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній або в паралельних площинах.

Базисом у просторі називають упорядковану трійку некомпланарних векторів, що виходять з однієї точки.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними,* коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

До лінійних операцій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1. *Додавання векторів*. Вектори додаються геометрично за правилом паралелограма або за правилом трикутника.

За *правилом паралелограма* сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який виходить з їхнього спільного початку і є діагоналлю паралелограма, сторонами якого є ці самі вектори (Рис. 5.). Позначають це так: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Два вектори можна додавати один до другого також за *правилом трикутника*: сума двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, направлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (мал. 6.).

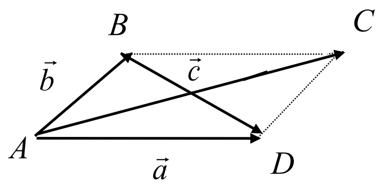


Рисунок – 5.

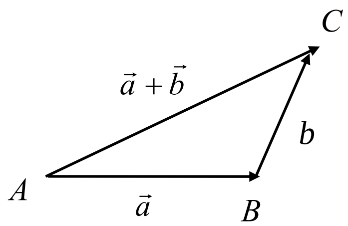


Рисунок – 6.

2. *Віднімання векторів.* Віднімання двох векторів визначається як дія, обернена додаванню.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який будучи додатний до вектора $\vec{b}$, дає вектор $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}, \quad \text{якщо} \quad \vec{c}+\vec{b}=\vec{a}.$$

Протилежними називаються два вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OA_1}$, які мають однакові довжини, але протилежні напрями. Якщо вектор $\overrightarrow{OA_1}$ протилежний вектору $\overrightarrow{OA}$, то можна записати: $\overrightarrow{OA_1}=-\overrightarrow{OA}$.

Тоді різницю $\vec{a}-\vec{b}$ можна тлумачити ще й так: відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, це все одно, що до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

3. *Множення вектора на число*. При множенні вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ отримаємо вектор $\vec{b}$, колінеарний до вектора $\vec{a}$, такий, що має довжину в $|\lambda|$ разів більшу, ніж $|\vec{a}|$: $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Цей новий вектор $\vec{b}$ має однаковий напрям з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний до нього напрям, якщо $\lambda < 0$.

Дії з векторами виконуються за правилами:

1. Додавання:

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. Множення вектора на число $\alpha \in R$:

$$\alpha\,\vec{a} = \left(\alpha\,a_x,\,\alpha\,a_y,\,\alpha\,a_z\right).$$

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – комутативність відносно додавання векторів;
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ – асоціативність відносно додавання векторів;
3. $\alpha\left(\beta\,\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$ – асоціативність відносно множення чисел;
4. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{a}$ – дистрибутивність відносно додавання чисел;
5. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\,\vec{a}+\alpha\,\vec{b}$ – дистрибутивність відносно додавання векторів.

3. Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі задано деяку вісь *l* і вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки *A* і *B* площини, перпендикулярно до осі *l* (Рис. 7.). Позначимо точки перетину цих площин з віссю *l* відповідно A' і B'.

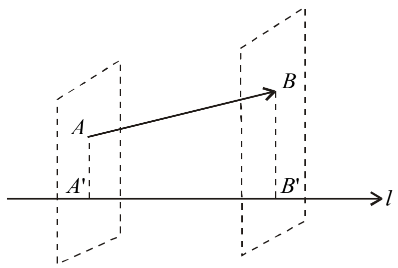


Рисунок – 7.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ *на вісь l* називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі *l*. Слід зазначити, що $A'B'=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ збігається з напрямом *l* і $A'B'=-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ протилежний напряму *l*.

Позначається проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь *l* — $Пр_l\overrightarrow{AB}$. З Рис. 7. випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$Пр_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

4. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі дійсні числа λ_1, λ_2...., λ_n одночасно не рівні нулю, що

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+.....+\lambda_n\vec{a}_n=0 \qquad (2)$$

Ці самі вектори називаються *лінійно незалежними*, якщо (2) справедливо лише за умови $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

Вектор $\vec{b}$ називається *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ якщо існують одночасно ненульові λ_i, такі що

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n .$$

Теорема. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ лінійно залежні, то принаймі один з них можна подати у вигляді лінійної комбінації інших (і навпаки).

Упорядкована трійка одиничних попарноортогональних векторів називається *ортонормованим базисом*. Позначають ортонормований базис через вектори $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, що за напрямом збігаються відповідно з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* і $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$. Такі вектори надалі називатимемо *одиничними* векторами осей системи координат. Тоді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (3)$$

є розкладом вектора за базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$, а числа $a_x,\ a_y,\ a_z$ – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі.

Координати вектора в системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат:

$$a_x = Пр_{Ox}\vec{a},\ a_y = Пр_{Oy}\vec{a},\ a_z = Пр_{Oz}\vec{a} .$$

Довжина вектора дорівнює:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (4)$$

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ міститься в точці *A* (x_1, y_1, z_1), а кінець – в точці *B* (x_2, y_2, z_2), то координати вектора шукаємо з формул:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1,$$

тобто $\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\right)$.

Тоді з формули (4) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} .$$

Цією формулою користуються для знаходження відстані між точками *A* і *B*.

Умовою колінеарності двох векторів є пропорційність однойменних координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Якщо позначити $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}, \qquad (5)$$

де $\alpha = \left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right),\ \beta = \left(\widehat{\vec{a},\vec{j}}\right),\ \gamma = \left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right),\ 0 \le \alpha,\ \beta,\ \gamma \le \pi$.

У подальшому називатимемо їх *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул (5) до квадрата і скориставшись (4), дістанемо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Лекція 5. Добутки векторів

План

1. Скалярний добуток векторів.
2. Векторний добуток двох векторів.
3. Мішаний добуток векторів.

1. Скалярний добуток векторів

Означення. *Скалярним добутком двох ненульових векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами. Використовуючи формулу проекції вектора, можна також записати:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.
4. $(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2$; $\sqrt{(\vec{a})^2}=|\vec{a}|$.
5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, і навпаки, $\vec{a}\perp\vec{b}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$.

Нехай дано вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ та $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ тоді, використовуючи властивості скалярного добутку та умову $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$, маємо:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(\vec{a}_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}\tag{1}$$

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

З рівності (1) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

2. Векторний добуток двох векторів

Означення. *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) довжина вектора $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки (Рис. 1).

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах.

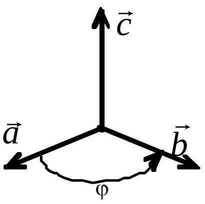


Рисунок – 1.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
3. $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:
$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\;\; \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\;\; \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$

Знайдемо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

або

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

3. Мішаний добуток векторів

Означення. *Мішаним добутком векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Розглянемо геометричний зміст мішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (Рис. 2).

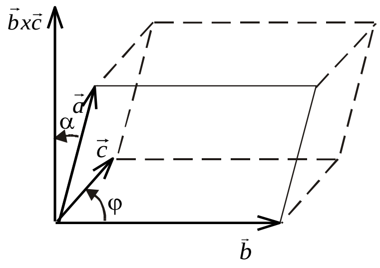


Рисунок – 2.

Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, тобто

$$V = \left|\vec{a}\left(\vec{b}\times c\right)\right|. \qquad (2)$$

З рівності (2) маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0.$$

Враховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

РОЗДІЛ ІІІ. Аналітична геометрія
Лекція 6. Пряма на площині

План

1. Різні види рівнянь прямої на площині.
2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої.

1. Різні види рівнянь прямої на площині

Нехай пряма на площині проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s} = \{m; n\}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Тоді *канонічне рівняння прямої*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{1}$$

де x, y – координати довільної точки прямої.

З (1) легко дістати *параметричне рівняння прямої:*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \tag{2}$$

де t – параметр, який може набувати довільних дійсних значень.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ *і має заданий кутовий коефіцієнт* k*:*

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ *та* $M_2(x_2; y_2)$*:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

Рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \tag{5}$$

де $k = tg\alpha$, α – кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі Ox; b – відрізок, що відтинається прямою на осі Oy (Рис. 1).

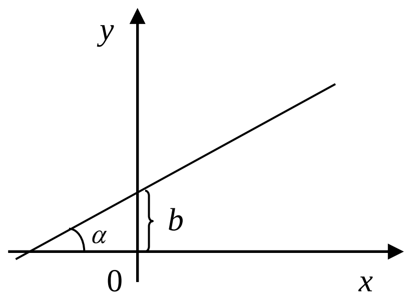


Рисунок – 1.

Загальне рівняння прямої на площині:

$$Ax + By + C = 0, \; A^2 + B^2 \neq 0, \tag{6}$$

де A, B – координати вектора $\vec{n} = \{A; B\}$, перпендикулярного (нормального) до даної прямої.

Рівняння прямої у відрізках на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{7}$$

де точки $M(a;0)$ $N(0;b)$ – відповідно точки перетину прямої з осями координат.

Нормальне рівняння має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (8)$$

де x, y – координати довільної точки M даної прямої, p– довжина перпендикуляра (нормалі), проведеного з початку координат на пряму; α– кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ox.

Щоб звести загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду, треба всі його члени помножити на множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, який береться зі знаком, протилежним знаку вільного члена C.

2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої

Кут між двома прямими. Нехай дві прямі задані рівняннями:

$$l_1: \ y = k_1 x + b_1,$$

$$l_2: \ y = k_2 x + b_2.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 не перпендикулярні, то

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \qquad (9)$$

Рівняння (9) дозволяє обчислити кут між прямими l_1 і l_2.

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_1}{n_2},$$

то кут між ними визначається як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1\}$ і $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (10)$$

Якщо дві прямі задані своїми загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2 x + B_2 y + C_2,$$

то кут між ними визначається, як кут між відповідними нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (11)$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом, тоді з (10) встановлюємо умову паралельності прямих:

$$k_1 = k_2$$

і умову перпендикулярності:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями, тоді з (10) випливає, що пропорція

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

– це умова паралельності даних прямих, а рівність

$$m_1m_2+n_1n_2=0$$

– умова перпендикулярності цих самих прямих.

Якщо прямі задані загальними рівняннями, тоді з (11) випливає, що пропорція

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

– це умова паралельності даних прямих, а рівність

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

– умова перпендикулярності цих прямих.

*Відстань від точки до прямої***.** Відстань d від заданої точки $A(x_0;y_0)$ до прямої, що задана загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приклад. Знайти кут між прямими $3x-4y+1=0$ і $5x-12y+3=0$.

Розв'язування. За формулою (11) маємо

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot5+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{15+48}{5\cdot13}=\frac{63}{65}\approx0.96.$$

$$\varphi=\arccos0,96.$$

Приклад . Знайти відстань від точки $N(-1;-1)$ до прямої $10x-24y-1=0$.

Розв'язування. Маємо

$$d=\frac{|10\cdot(-1)-24\cdot(-1)-1|}{\sqrt{10^2+24^2}}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}.$$

Лекція 7. Пряма і площина в просторі

План

1. Рівняння площини
2. Кут між площинами, відстань від точки до площини.
3. Рівняння прямої в просторі.
4. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі.

1. Рівняння площини

Нехай задано прямокутну систему координат *Oxyz,* площину α, вектор $\vec{N} \perp \alpha$, який має координати $\vec{N} = (A, B, C)$, і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить площині (Рис. 1.).

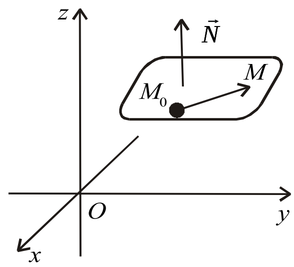


Рисунок – 1.

Точка *M* (*x*, *y*, *z*) — довільна точка площини. Ця точка належить площині лише в тому разі, коли вектори $\overrightarrow{MM_0}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні. Умова перпендикулярності векторів

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{N} = 0. \qquad (1)$$

Записавши вираз (1) у розгорнутому вигляді, дістанемо рівняння площини, що проходить через задану точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

Розкривши дужки в (2) і позначивши $D = -Ax_0 + By_0 + Cz_0$, дістанемо *загальне рівняння площини*:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

Рівняння площини у відрізках на осях координат має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де за параметри, які визначають площину, обрані відрізки *a, b* і *c*, що відтинаються цією площиною на осях координат.

*Канонічне рівняння площини***.** Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямні вектори $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

*Рівняння площини, яка проходить через три дані точки***.** Рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо тепер, як розміщена площина α відносно системи координат *Oxyz* залежно від значень коефіцієнтів у рівнянні (3).

1. Нехай $D=0$. У цьому випадку рівняння набирає вигляду $Ax+By+Cz=0$. Точка $O(0,0,0)$ задовольняє це рівняння, тобто належить площині. Це означає, що площина проходить через початок системи координат.

2. Нехай один із коефіцієнтів при змінних дорівнює нулю. Припустимо $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді рівняння набирає вигляду $Ax+By+D=0$. Нормальний вектор $\vec{N}$ перпендикулярний до осі *Oz*, оскільки його проекція на цю вісь дорівнює нулю. Отже, площина α паралельна цій осі. Якщо ще і $D = 0$, то площина $Ax+By=0$ містить вісь *Oz*, тому що паралельна їй і проходить через початок системи координат. Аналогічно можна розглянути випадки $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ і $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$.

3. Розглянемо тепер випадок, коли два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю. Нехай $A = B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді площина $Cz+D=0$ згідно з попереднім паралельна відразу осям *Ox* і *Oy*, а це означає, що вона паралельна площині *Oxy* і, як наслідок, перпендикулярна до осі *Oz*. Якщо додатково і $D=0$, то $z=0$ — рівняння координатної площини *Oxy*. Аналогічно можна розглянути випадки $A \neq 0$, $B = C = 0$ і $B \neq 0$, $A = C = 0$.

2. Кут між площинами,
відстань від точки до площини

Кут між двома площинами, які задані загальними рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Приклад. Знайти кут між площинами $3x-4y-z-1=0$ і $2x+3y-6z-2=0$.

Розв'язування. Маємо

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = \frac{3\cdot 2+(-4)\cdot 3+(-1)(-6)}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}\,\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{6-12+6}{\sqrt{26}\,\sqrt{49}} = 0.$$

Оскільки $\cos\varphi=0$, то площини будуть перпендикулярними одна до одної, тобто $\varphi=90^\circ$.

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин. Умова паралельності двох площин:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad i \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

виражається рівностями

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Відстань від точки до площини.

Відстань d від точки $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. Рівняння прямої у просторі

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{4}$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ — не колінеарні. Система (4) називається *загальним рівнянням прямої*. Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

Канонічне рівняння прямої. Нехай у системі координат *Oxyz* задано пряму *l* і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s}=(m,n,p)$. Тоді довільна точка $M\,(x,\, y,\, z)$ лежатиме на прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\,. \tag{5}$$

Рівняння (5) називається *канонічним рівнянням прямої* у просторі.

Параметричне рівняння. В рівнянні прямої (5) позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\,.$$

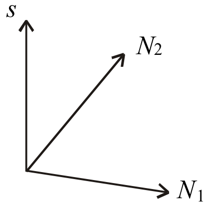
Звідси дістаємо *параметричне рівняння* прямої в просторі:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Нехай дві точки $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ і $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s}(m,n,p)$ у рівнянні (5), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пригадуючи геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні площини, записуємо вектор $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ — перпендикулярний до першої площини, а $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ — перпендикулярний до другої.



Напрямний вектор прямої $\vec{s}$ перпендикулярний до обох цих векторів (Рис. 2.). Таким чином, $\vec{s}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}$. Використовуючи запис векторного добутку через визначник, дістаємо:

$$\vec{s}=\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)=(m,\ n,p). \qquad (6)$$

Рисунок – 2.

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

З останньої формули випливає умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (Рис. 3.). Оскільки площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Тому шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

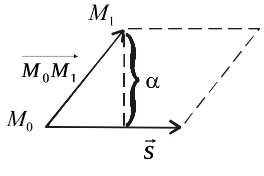


Рисунок – 3.

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (7)$$

4. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax+By+Cz+D=0$ у просторі. Якщо

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C},$$

то пряма перпендикулярна до площини, а коли

$$Am+Bn+Cp=0,$$

пряма паралельна площині.

Нехай $Am+Bn+Cp\neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt$$

і підставимо значення *x*, *y*, *z* у рівняння площини:

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0.$$

Звідси, використовуючи умову паралельності, знайдемо значення параметра

$$t^*=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Координати точки перетину:

$$x=x_0+mt^*,\quad y=y_0+nt^*,\quad z=z_0+pt^*.$$

Кут між площиною і прямою шукаємо з формули:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$ Место для формулы.

Лекція 8. Криві ІІ порядку

План

1. Коло.
2. Еліпс.
3. Гіпербола.
4. Парабола.

1. Коло

Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$.

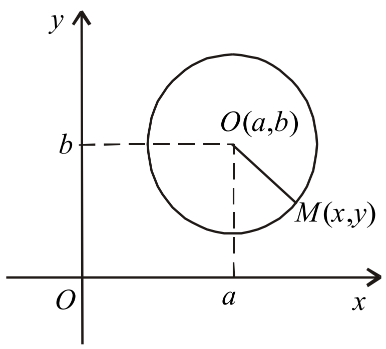


Рисунок – 1.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

— канонічне рівняння кола. Тут $(a,\ b)$ — координати центра кола, R — його радіус.

2. Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами.

Нехай $F_1M + F_2M = 2a$ $(a > 0)$.

Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами* еліпса, а відстань F_1F_2 – *міжфокусною відстанню;* вона позначається через $2c$:

$$F_1F_2 = 2c.$$

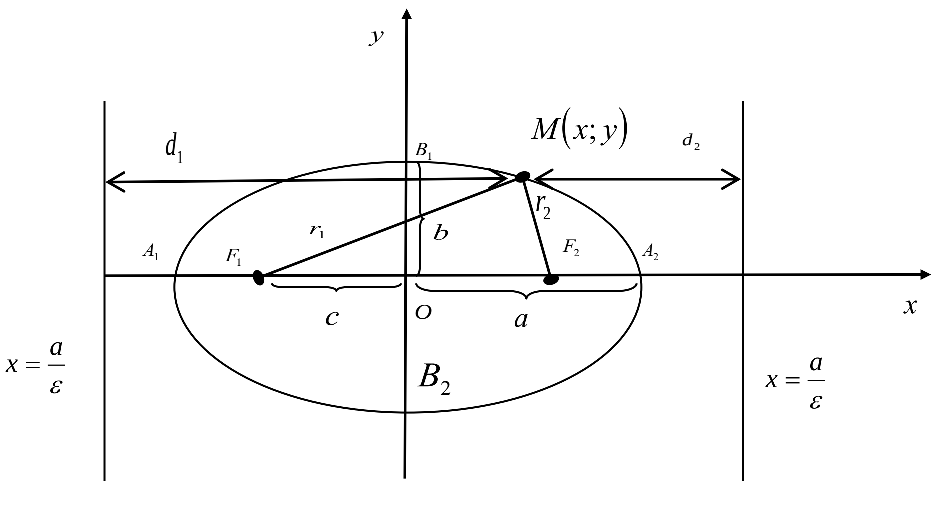


Рисунок – 2.

Якщо взяти пряму F_1F_2 (мал. 2) за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 – за початок прямокутної декартової системи координат, то одержимо канонічне (найпростіше) рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ де } b^2=a^2-c^2. \qquad (1)$$

Еліпс, заданий рівнянням (1), симетричний відносно осей координат. Параметри a і b називаються *півосями еліпса*. Якщо $a>b$, тоді відрізок A_1A_2 – *велика вісь еліпса*, відрізок B_1B_2 – *мала вісь еліпса*. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – точки перетину еліпса з віссю Ox, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ – точки перетину еліпса з віссю Oy. Координати фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Відношення міжфокусної відстані до великої осі, тобто величина $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ називається *ексцентриситетом* еліпса**.**

Відстані від точки $M(x,y)$ еліпса до його фокусів (*фокальні радіуси*) визначаються за формулами

$$r_1=a-\varepsilon x \qquad r_2=a+\varepsilon x.$$

Якщо в рівнянні (1) $a<b$, тоді фокуси еліпса знаходяться на осі Oy.

Отже, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса.

Приклад. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задано точку $M_1(2,-\frac{5}{3})$ еліпса і його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

Розв'язування. Виходячи з умови, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a>b).$$

Потрібно знайти значення параметрів *a*, *b*. Координати точки еліпса $M_1(2,-\frac{5}{3})$ задовольняють рівнянню еліпса, отже $\frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1$.

Крім того, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2}{3}$.

Розв'язавши систему, знаходимо: $a^2=9$, $b^2=5$. Отже, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

3. Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами.

Позначимо через координати фокусів $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. Точка $M(x,y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли

$$|F_1M - F_2M| = 2a, \quad (0 < 2a < F_1F_2).$$

Якщо M ближче до фокуса F_2, ніж до фокуса F_1, то точки M утворюють одну вітку гіперболи, для якої $F_1M - F_2M = 2a$ (Рис. 3 права вітка). Ті точки, для яких $F_2M - F_1M = 2a,$ утворюють другу вітку (Рис. 3 ліва вітка). Середина відрізка F_1F_2 – точка O називається *центром* гіперболи.

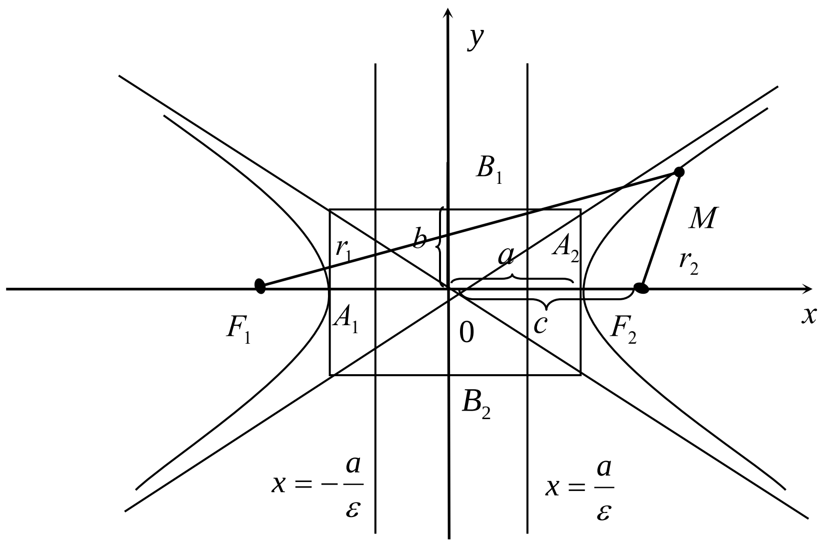


Рисунок – 3

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи дістаємо у випадку, якщо приймаємо пряму F_1F_2 за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 – за початок координат. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Гіпербола, задана рівнянням (2), симетрична відносно осей координат. Вона перетинає вісь Ox у точках $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ – *вершинах гіперболи,* і не перетинає ось Oy. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ (а часто й пряма A_1A_2) називається *дійсною віссю* гіперболи. Гіпербола має також уявну вісь, яка проходить через її центр, але не перетинає її. На уявній осі прийнято відкладати від центра відрізки $B_1O = OB_2 = b$. Параметр a називається *дійсною* піввіссю, b – *уявною* піввіссю. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ є відстанню від фокуса до центра. Відношення міжфокусної відстані до дійсної осі називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Відстань від точки $\grave{I}\ \ (x; y)$ гіперболи до її фокусів (*фокальні радіуси*) визначається за формулами:

$$r_1 = (\varepsilon x - a); \qquad r_2 = (\varepsilon x + a).$$

Дві гіперболи називаються *спряженими*, якщо вони мають спільний центр O і спільні осі, але дійсна вісь однієї з них є уявною віссю іншої. Якщо $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ є рівнянням однієї із спряжених гіпербол, тоді інша подається рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Спряжені гіперболи мають спільні асимптоти.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються *директрисами гіперболи*.

Приклад. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її фокуси лежать на осі Oy і відстань між ними дорівнює 20, а дійсна вісь гіперболи дорівнює 16.

Розв'язування. Шукане рівняння гіперболи матиме вигляд $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, де b– дійсна, а a– уявна піввісь гіперболи. За умовою $2c = 20$, звідки $c = 10$, $2b = 16, b = 8$.

Уявну вісь знайдемо із співвідношення $a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 100 - 64 = 36.$

Отже, рівняння гіперболи $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1.$

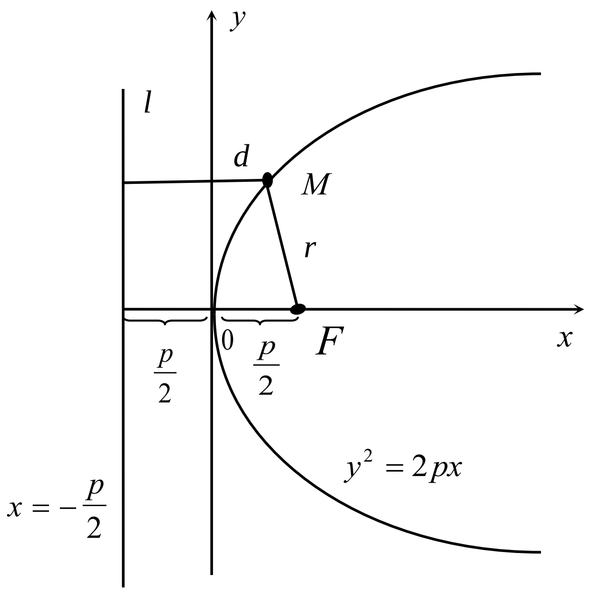
4. Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, що називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

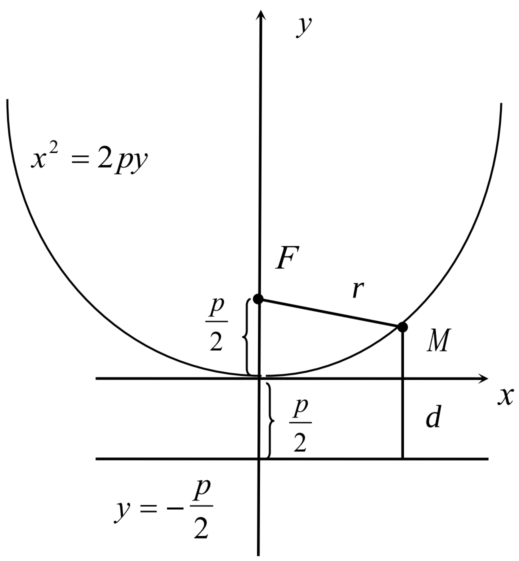
Відстань від фокуса до директриси називається *параметром* параболи і позначається p.

Канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox (мал. 3): $y^2 = 2px$; канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy (мал. 4): $x^2 = 2py$.

З мал. 3 видно, що парабола $y^2 = 2px$ має фокус $F(\frac{p}{2}; 0)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус точки M на ній $r = x + \frac{p}{2}$. Парабола $x^2 = 2px$ (мал. 4) має фокус $F(0;\dfrac{p}{2})$ і директрису $y=-\dfrac{p}{2}$; фокальний радіус точки M на ній $r=y+\dfrac{p}{2}$.



Мал. 3



Мал. 4

Приклад. Скласти рівняння параболи, що має фокус $F=(0;-3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Oy.

Розв'язування. Оскільки фокус знаходиться у нижній півплощині, то й парабола, що міститься у нижній півплощині, симетрична відносно осі Oy. Її рівняння $x^2=-2py$. Фокус має координати $F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right)$. За умовою $-\dfrac{p}{2}=-3 \Rightarrow$ $p=6$. Отже, рівняння параболи $x^2=-12y$.

РОЗДІЛ IV. Вступ до математичного аналізу

Лекція 9. Границя числової послідовності

План

1. Границя числової послідовності.
2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Їх властивості.
3. Основні теореми про границі послідовності.

1. Границя числової послідовності

Правило або закон, згідно з яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність деяке дійсне число x_n називається *числовою послідовністю*. Числову послідовність будемо позначати $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, або $\{x_n\}$, де x_n – загальний член послідовності.

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число n_0, що при всіх $n > n_0$ виконується нерівність: $|x_n - a| < \varepsilon$. Той факт, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$ записується у вигляді:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ , або } x_n \to a \text{, якщо } n \to \infty .$$

Послідовність, що має границю, називається *збіжною*, а яка не має границі, називається *розбіжною*.

Зауважимо, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{, або } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$$

Це означає, що число x_n належить інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Такий інтервал називається ε*-околом* точки a.

Означення границі послідовності можна перефразувати наступним чином, надавши йому геометричну наочність: число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо в будь-якому ε-околі числа a містяться всі члени послідовності, починаючи з деякого номера. Поза ε-околом може бути скінченне число членів даної послідовності.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою зверху (знизу)*, якщо існує число M (m), таке, що при всіх натуральних n виконується нерівність $x_n \le M \left(x_n \ge m\right)$. Послідовність, яка обмежена зверху і знизу називається *обмеженою*.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *монотонно зростаючою (спадною)*, якщо $x_{n+1} > x_n (x_{n+1} < x_n)$.

Властивості збіжних послідовностей:

1. Кожна збіжна послідовність має єдину границю.
2. Кожна збіжна послідовність є обмеженою.
3. Границя сталої дорівнює цій сталій.
4. Кожна монотонна обмежена послідовність є збіжною.
5. Нехай послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ є збіжними і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тоді якщо $a < b$, то починаючи з деякого номера виконуються нерівності $x_n < y_n$.

6. Нехай виконується нерівність $x_n \le y_n \le z_n$. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ збіжні, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то послідовність y_n також буде збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Їх властивості

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Розглянемо деякі властивості нескінченно малих послідовностей.

1. Алгебраїчна сума скінченого числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

2. Добуток нескінченно малої послідовності і обмеженої є нескінченно мала послідовність.

3. Якщо $\{x_n\}$ нескінченно мала послідовність і $x_n \ne 0$, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ є нескінченно великою. Якщо $\{y_n\}$ нескінченно велика послідовність, то послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ є нескінченно малою послідовністю.

3. Основні теореми про границі послідовності

Теорема 1(про структуру збіжної послідовності). Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ була збіжною і мала границею число *a*, необхідно і достатньо, щоб $x_n = a + \alpha_n$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Теорема 2. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca,\ c = const$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$, якщо $b \ne 0$

Лекція 10. Границя функції в точці

План

1. Основні означення.
2. Односторонні границі.
3. Дві особливі границі.
4. Техніка обчислень деяких границь.
5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

1. Основні означення

Нехай задано дві непорожні множини *X* та *Y*, елементи яких можуть мати довільну природу. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким правилом (законом) поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то говорять, що задано функцію $y = f(x)$. Функції можна задавати такими способами як аналітичний, табличний, графічний, описовий, в неявній формі.

Розглянемо деяку множину *E* дійсних чисел.

Точка $x_0 \in E$ називається *ізольованою точкою* множини, якщо існує деякий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ в якому є лише одна точка $x_0 \in E$.

Точка $x_0 \in E$ називається *точкою скупчення* множини, якщо в будь-якому її околі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ міститься хоча б одна точка цієї множини відмінна від x_0.

Означення (Коші). Число *A* називається *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, яка є точкою скупчення в області визначення функції, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$, які задовільняють умову $0 < |x - x_0| < \delta,$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Означення (Гейне) . Число *A* називається *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, яка є точкою скупчення в області визначення функції, якщо для будь-якої збіжної послідовності $\{x_n\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_0 \neq x_n)$ відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Позначають границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Теорема 1(Гейне). Обидва означення границі функції еквівалентні.

Вище ми розглядали границю функції в скінченній точці, нехай тепер функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Означення. Число *A* називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує залежне від нього число $m > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовільняють умову $|x| > m$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon.$ Позначають $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

2. Односторонні границі

Число A називається *лівосторонньою границею* функції $f(x)$ в точці x_0 або границею зліва, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовільняють умову $x_0 - \delta < x < x_0$, справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Лівостороння границя позначається $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$. Аналогічно вводиться поняття правосторонньої границі, яку позначають $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Ліву та праву границі функції називають односторонніми.

Теорема 2. Для того, щоб функція $f(x)$ у точці x_0 мала границю, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існували лівостороння та правостороння границі, і щоб вони були рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Основні теореми про границі функції.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ має границю в точці x_0, то вона єдина.

Теорема 4.(арифметичні властивості границь). Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то існують границі суми, різниці, добутку та частки (остання за умови $B \neq 0$), причому

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = AB$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

Як наслідок, $\lim\limits_{x \to x_0}\left(c\, f(x)\right) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cA$, тобто сталий множник можна виносити за знак границі.

Теорема 5. Якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то функція $f(x)$ обмежена при $x \to x_0$.

Теорема 6. Якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ A \neq 0$, то знайдеться такий δ-окіл точки x_0, де ця функція набуває значень, які мають той самий знай, що й A.

Теорема 7. Якщо $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$, то існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

3. Дві особливі границі

Перша особлива границя

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Границі – наслідки першої особливості границі:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x}{x} = 1.$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}\, x} = 1.$ 4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}.$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Друга особлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Границі – наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right]$.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

4. Техніка обчислення деяких границь

Для обчислення границь використовують теореми та підставляють замість аргумента його граничне значення. Інколи трапляються вирази, які призводять до обчислення границь виду $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},1^\infty,\infty^0,\infty-\infty$.Розглянемо методи розкриття цих невизначеностей.

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів. Для розкриття треба чисельник і знаменник розділити на *x* в найвищому степені у цих многочленах.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2-1}{x^4+x^3-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^4}}=\frac{2+0-0}{1+0-0}.$$

2. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів. Для розкриття треба чисельник і знаменник розкласти на множники і скоротити дріб.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+5)}{(x+3)}=\frac{3}{2}.$$

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами. Для розкриття позбуваємось ірраціональності шляхом домноження на спряжений вираз.

Приклад.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{2}{3}.$$

4. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задану виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкривають за допомогою першої чудової границі.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}=5.$$

5. Невизначеність виду 1^∞ розкривають за допомогою другої чудової границі.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}(-8)}=e^{-8}.$$

5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою в точці* x_0, якщо $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Нескінченно малі функції часто доводиться порівнювати між собою. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$ то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою вищого порядку ніж нескінчено мала $\beta(x)$ і записують $\alpha = 0(\beta).$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$ то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними і записують $\alpha(x) \sim \beta(x).$ Наприклад, $\sin x \sim x,$ при $x \to 0.$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c,$ $c \neq 0,$ то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими однакового порядку при $x \to x_0.$

Функцію $f(x)$ називають нескінченно великою в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Лекція 11. Границя функції та неперервність

План

1. Основні поняття.
2. Властивості функцій неперервних на відрізку.
3. Рівномірна неперервність.
4. Точки розриву функції та їх класифікація.

1. Основні поняття

З поняттям границі функції тісно пов’язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття неперервності функції.

Означення 1. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* скупчення x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо розглядати означення границі функції в точці, то означення неперервної функції можна сформулювати інакше.

Означення 2 (Гейне). Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* скупчення x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до $f(x_0)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Означення 3 (Коші). Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* скупчення x_0, якщо для кожного (достатньо малого) числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що при умові $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Сформулюємо означення неперервності функції мовою приростів. Покладемо $\Delta x = x - x_0$. Число Δx називають приростом аргумента, а різницю $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називають приростом функції.

Означення 4. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції.

Функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a,b)(відрізку $[a,b]$), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу (відрізку).

Теорема. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці x_0, то їх сума, різниця, добуток і частка (при умові $g(x_0) \neq 0$) також неперервні функції.

Теорема. Якщо функція $t = \varphi(x)$ неперервна в будь-якій точці x_0 і $y = f(t)$ неперервна в точці $t_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ – неперервна в точці x_0.

2. Властивості функцій неперервних на відрізку

Теорема 1. (Больцано-Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків(Рис.1). Тоді на інтервалі (a,b) знайдеться точка c, в якій функція перетворюється на нуль.

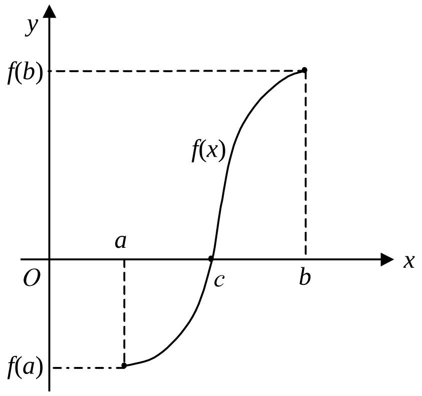


Рисунок –1.

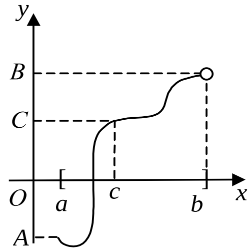


Рисунок –2.

Теорема 2 (Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на його кінцях набуває різних значень(Рис.2). Позначимо $f(a) = A$ і $f(b) = B$. Тоді при будь-якому С: А < С < В знайдеться точка с із $[a,b]$, така що $f(c) = C$.

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку $[a,b]$, досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.

3. Рівномірна неперервність

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *рівномірно неперервною на деякому проміжку I***,** якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке що для будь-яких $x_1, x_2 \in I$, які задовольняють умову $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Теорема 5 (Кантора). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна на ньому.

4. Точки розриву функції та їх класифікація

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва (справа), якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0) \ \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \right).$$

Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0. Це означає, що має місце рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Точки, в яких функція не є неперервною називаються *точками розриву*.

Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $y = f(x)$, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і при цьому:

1. $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$

або

2. $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$

або

3. $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$

неусувний розрив 1-го роду;

або

4. $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$

– усувний розрив 1-го роду

Точка x_0 називається *точкою розриву 2-го роду* функції $ó = f(x)$, якщо одна із границь

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x), \ \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

не існує або нескінченна.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

Розв'язання.

$$y = \frac{1}{(x-2)(x+2)}.$$

Можливі точки розриву (функція невизначена в цих точках): $x = \pm 2$. Оскільки функція парна, то її поведінка в околі цих точок однакова. Дослідимо точку $x = 2$. Функція визначена в околі цієї точки, знайдемо $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$ і $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty$. Отже, односторонні границі не існують, тому в точці $x = 2$ і аналогічно в точці $x = -2$ функція має розрив другого роду.

РОЗДІЛ V. Диференціальне числення функції однієї змінної.
Лекція 12. Поняття похідної. Основні правила диференціювання

План

1. Поняття похідної, її геометричний та механічний зміст.
2. Основні правила диференціювання.

1. Поняття похідної, її геометричний та механічний зміст

Поняття похідної – фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагрівання, значення електричного струму та ін.) проводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_0 даного проміжку, надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала даному проміжку, тоді

1) Обчислимо в точці x_0 приріст $\Delta y = \Delta f(x_0)$ функції:
$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$
2) Складемо відношення: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta x \to 0$, тобто:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо дана границя існує, то її називають *похідною функції* $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y'.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Приклад. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 + 2$ в точці x_0.

Розв'язання.

Знайдемо приріст функції:
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 =$$
$$= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 = 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 =$$
$$= \Delta x(6x_0 + 3\Delta x).$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x.$$

Знайдемо похідну даної функції в точці x_0 за (1):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x_0 + 3\Delta x) = 6x_0 + 3 \cdot 0 = 6x_0 .$$

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється за законом $s = s(t)$, то швидкість її руху $\upsilon(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$: $\upsilon(t) = s'(t)$. В цьому полягає механічний зміст похідної.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha .$$

Це і є геометричний зміст похідної.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. У точці $M(x_0; y_0)$ проведено дотичну до кривої $y = f(x)$. Складемо рівняння дотичної *AM*, знаючи координати точки $M(x_0; y_0)$ дотику і рівняння $y = f(x)$ кривої. Дотична – це пряма. Рівняння будь-якої прямої має вигляд: $y = kx + b$. Оскільки $k = f'(x_0)$, тому рівняння дотичної має такий вигляд:

$$k = f'(x_0)x + b \qquad (2)$$

Знайдемо b, виходячи з того, що дотична проходить через точку $M(x_0; y_0)$ і тому її координати задовольняють рівнянню дотичної:

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b,$$

звідси $b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тепер підставимо значення b в рівняння (2) дотичної і одержимо:

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Отже, рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) . \qquad (3)$$

Приклад. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання.

1. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ - рівняння шуканої дотичної.
2. $y_0 = 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$.

$$f'(x_0) = f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 4(1+\Delta x) - 1 + 4}{\Delta x} =$$

3. $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 - 4\Delta x - 1 + 4}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-2 + \Delta x)}{\Delta x} = -2.$$

Підставляємо значення $x_0 = 1, y_0 = -3, f'(x_0) = -2$ у рівняння дотичної:
$y + 3 = -2(x - 1)$, або $y = -3 - 2x + 2,$ або $y = -1 - 2x$.

Нехай на деякому проміжку (a,b) визначена функція $y = f(x)$ і точка $x_0 \in f(x)$. Візьмемо деяке Δx так, щоб точка $(x_0 + \Delta x) \in (a,b)$.

Функція $f(x)$ називається *диференційованою в точці* x_0, якщо в околі цієї точки приріст функції можна подати у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \mathrm{A} \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (4)$$

де А – деяка стала, що не залежить від Δx і α – нескінченно мала, при $\Delta x \to 0$.

Теорема. Для того, щоб функція $f(x)$ була диференційованою в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб в точці x_0 функція $f(x)$ мала похідну $f'(x_0)$.

2. Основні правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = \mathrm{const}$, то $y' = 0$.

Теорема 2. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані в точці x_0, то в цій точці є диференційованими їх сума, різниця, добуток і частка (у випадку $v(x_0) \neq 0$). При цьому мають місце такі рівності:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Теорема 3. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \mathrm{const}.$$

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \mathrm{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x) \cdot$$

Приклад. Обчислити похідну для функції $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = (\operatorname{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

Теорема 4. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції на похідну внутрішньої.

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція — диференційовна.

Продиференціювавши по x обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

● Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції. Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y) \ \left(f\left(\varphi(y)\right) = y\right).$$

Теорема 5. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Похідна параметрично заданої функції. Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \left(t_1 \le t \le t_2\right).$$

Треба знайти похідну $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Нехай функції $\varphi(t), \psi(t)$ диференційовані і при цьому $\varphi'(t) \ne 0$, тоді формально, користуючись означенням диференціала маємо $dy = \psi'(t)dt$, $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді маємо

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{або} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} \left(0 \le t \le \pi\right).$$

Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

а) $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\,t$;

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

Лекція 13. Похідна функції. Диференціал

План

1. Похідні від основних елементарних функцій.
2. Похідні вищих порядків.
3. Означення диференціалу функції, його застосування в наближених обчисленнях.
4. Основні теореми диференціального числення.

1. Похідні від основних елементарних функцій

1. $(x)' = 1$; 2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;

3. $(e^x)' = e^x$; 4. $(a^x)' = a^x \ln a$;

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$; 8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 14. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Приклад. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Розв'язання.

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2:

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію $\Rightarrow$ — застосуємо до нього теорему 3 і формулу (2) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником $n = \dfrac{1}{3}$ — застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою $e \Rightarrow$ — використаємо формулу (5):

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

2. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається $y'',\ \ f''(x),\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається $y''',\ f'''(x),\ \ \dfrac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n-1)$-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \ \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)',\ \ n=1,\ 2,\ \ldots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x+4)$.

$y' = 5\cos(5x+4);\quad y'' = -25\sin(5x+4);\quad y''' = -125\cos(5x+4)$.

3. Означення диференціалу функції, його застосування в наближених обчисленнях

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається *диференційованою в точці* x_0, якщо в околі цієї точки приріст функції можна подати у вигляді

$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \mathrm{A}\cdot\Delta \mathrm{x} + \alpha\cdot\Delta \mathrm{x} = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta \mathrm{x}$,

де α – нескінченно мала, при $\Delta x \to 0$.

Вираз $\mathrm{A}\cdot\Delta \mathrm{x} = f'(x_0)\cdot\Delta x$ називається лінійною частиною приросту функції.

Лінійну частину приросту функції називають диференціалом функції і позначають $df(x)$ або dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

З огляду на те, що диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx, формулу для диференціала (1) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx.$$

Якщо врахувати властивості похідних, одержимо такі властивості диференціала:

1. $y = c$; $dy = 0$;
2. $y = uv,\quad dy = udv + vdu$;
3. $y = u+v,\quad dy = du + dv$;
4. $y = \dfrac{u}{v},\quad dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Якщо замінити $\Delta f(x_0)$ на $df(x_0)$, одержимо наступну рівність:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \tag{2}$$

Саме рівністю (2) користуються при наближених обчисленнях.

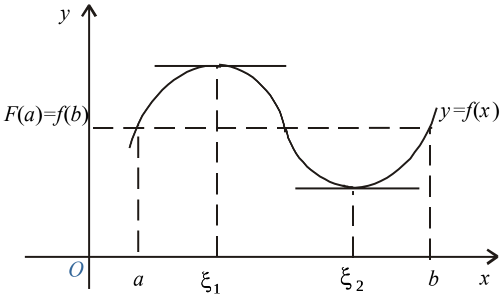
4. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Якщо диференційовна на проміжку D функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці x_0 цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Торема Ролля. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1) $f(x)$ неперервна на $[a;b]$;
2) $f(x)$ диференційована на $(a;b)$;
3) $f(a) = f(b) = 0$,

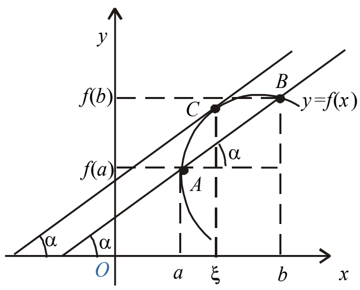
тоді існує хоча б одна точка c є $(a;b)$ така, що $f'(x) = 0$.



Теорема Лагранжа (про скінченні прирости). Нехай функція *f(x)* задовольняє умовам:

1) $f(x)$ неперервна на $[a;b]$;
2) $f(x)$ диференційована на $(a;b)$.

Тоді існує точка $c \in (a;b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.



Теорема Коші. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції: 1) неперервні на сегменті $[a;b]$; 2) диференційовні на інтервалі $(a;b)$; 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$ $(a < c < b)$, така що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Лекція 14. Застосування похідної.
Правило Лопіталя розкриття неозначеностей

План

1. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$.

2. Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Перетворення невизначеностей виду $[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$

Теорема 1(Перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x),\varphi(x)$ є неперервними і диференційованими в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)=0,\ \varphi'(x)\neq 0.$$

Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\mathrm{k}$, то обов’язково $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\mathrm{k}$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x),\varphi(x)$ визначені при $x>a$ є диференційованими на цій множині і $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)=0$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то обов’язково $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

2. Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 2 (Друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty,\quad \varphi'(x)\neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Застосовуємо перше правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin 7x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

3. Перетворення невизначеностей виду $[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Нехай $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a}\big(u(x)\cdot v\cdot(x)\big). \qquad (1)$$

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$. Якщо вираз (1) записати у вигляді

$$\lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Невизначеність виду $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$. При $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ \ v\to 0$ маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$;

б) $u\to\infty,\ \ v\to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^0\right]$;

в) $u\to 1,\ \ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y=v\cdot\ln u\,(u>0)$.

Легко перевірити, що при $x\to a$ добуток $v\cdot\ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to a}\ln y=k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x\to a}y=\lim\limits_{x\to a}u^v=e^k$.

Невизначеність $[\infty-\infty]$. Якщо функції $u(x)\to\infty,\ \ v(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $(u-v)$ при $x\to a$ дає невизначеність $[\infty-\infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Лекція 15. Формула Тейлора. Розклади елементарних функцій

План

1. Формула Тейлора для многочлена.
2. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена.
3. Розклад за формулою Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.

1. Формула Тейлора для многочлена

Як відомо, многочленом *n*-го степеня називають функцію виду

$$P_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Запис многочлена $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + C_3(x-x_0)^3 + ... + C_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

називають розкладом многочлена за степенями $(x-x_0)$.

Покладемо в рівності (1) $x = x_0$, тоді одержимо $P_n(x_0) = C_0$. Продиференціюємо рівність (1)

$$P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-x_0) + 3C_3(x-x_0)^2 + ... + nC_n(x-x_0)^{n-1}. \qquad (2)$$

Покладаючи в рівності (2) $x = x_0$ знайдемо $P_n'(x_0) = C_1$. Продиференціюємо рівність (2)

$$P_n''(x) = 2\cdot 1 C_2 + 3\cdot 2 C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}. \qquad (3)$$

Покладаючи в рівності (3) $x = x_0$ знайдемо $P_n''(x_0) = 2C_2$. Продовжуючи аналогічно будемо мати

$$6C_3 = P_n'''(x_0),$$

$$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 c_4 = P_n^{(4)}(x_0),$$

$$n! c_n = P_n^{(n)}(x_0).$$

Як бачимо, коефіцієнти в ряді (1) обчислюються за формулами

$$C_0 = P_n(x_0),\ C_1 = P_n'(x_0) = \frac{P_n'(x_0)}{1!},\ C_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2} = \frac{P_n''(x_0)}{2!},\ C_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!},...,$$

$$c_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Завдяки цьому рівність (1) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{P_n'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ... +$$

$$+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (4)$$

Рівність (4) називають *формулою Тейлора для многочлена*.

2. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена

Візьмемо деяку функцію $f(x)$, визначену в околі точки x_0 і таку, що в точці x_0 має похідні до $(n+1)$-го порядку. Тоді по аналогії з формулою Тейлора для многочлена можемо скласти многочлен

$$P_n(x)= f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

В загальному випадку цей многочлен не буде рівний $f(x)$, тому можна записати $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, або у розгорнутому вигляді

$$f(x)= f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_n(x). \tag{5}$$

Доданок $R_n(x)$ називають залишковим членом. Його шукають з формули

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}\big(x_0+\Theta(x-x_0)\big),\ \text{де } 0<\Theta<1.$$

Підставивши $R_n(x)$ в рівність (5) отримуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x)= f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}\big(x_0+\Theta(x-x_0)\big),\quad (0<\Theta<1) \tag{6}$$

Узявши у формулі $x_0=0$, дістанемо формулу Маклорена:

$$f(x)= f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Theta\, x). \tag{7}$$

3. Розклад за формулою Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$

Розклад функції $f(x)=e^x$. Послідовно диференціюючи функцію e^x, дістаємо:

$$f(x)=e^x,\quad f(0)=1;$$
$$f'(x)=e^x,\quad f(0)=1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x,\ f(0)=1.$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу Маклорена, маємо:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x},\ 0 < \Theta < 1.$$

При $x = 1$ маємо формулу для знаходження наближеного значення числа e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828,$$

при цьому допущена похибка не перевищує числа $\frac{3}{9!}$ або 0,00001.

Розклад функції $f(x) = \sin x$. Знаходимо послідовно похідні від $f(x) = \sin x$:

$$f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2};$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), f^{(n+1)}(\Theta x) = \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(0 < \Theta < 1)$$

Підставляючи здобуті значення у формулу Маклорена, дістаємо розклад функції $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Розклад функції $f(x) = \cos x$. Знаходячи значення послідовних похідних при $x = 0$ від функції $f(x) = \cos x$ та підставляючи у формулу Маклорена, дістаємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad |\Theta x| < |x|.$$

Розклад функції $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1},\ |\Theta x| < |x|.$$

Лекція 16. Застосування похідної до дослідження функцій

План

1. Проміжки монотонності.
2. Екстремуми функцій.
3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
4. Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину.

1. Проміжки монотонності

Нагадаємо: функція $f(x)$ називається *зростаючою (спадною) на проміжку* $(a;b)$, якщо з того що $a<x_1<x_2<b$ випливає $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$). У випадку $f(x_1)\le f(x_2)$ функція – неспадна, а у випадку $f(x_1)\ge f(x_2)$ – незростаючою.

Проміжки зростання та спадання функції називають проміжками монотонності.

Теорема 1. Для того, щоб диференційована функція $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ була неспадною(незростаючою), необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку виконувалась нерівність $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$).

2. Екстремуми функцій

Означення. При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має *максимум* $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність (Рис. 1) $f(x_1)>f(x)$ $(x\ne x_1)$. Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має *мінімум* $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність (Рис. 1) $f(x_2)<f(x)(x\ne x_2)$.

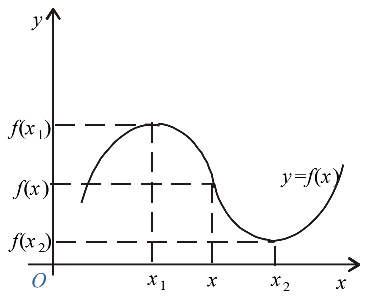


Рисунок –1.

Зауваження. Точки максимуму та мінімуму не треба ототожнювати з точками, в яких функція приймає найбільше або найменше значення. Точки максимуму та мінімуму називають точками екстремуму функції. У точках екстремуму функція приймає найбільше або найменше значення в деякому околі точки. Завдяки цьому говорять про локальні екстремуми.

Теорема (Необхідна умова екстремуму функції). Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум і є в цій точці диференційованою, то обов'язково $f'(x_0)=0$.

Точки, в яких похідна рівна 0, або не існує називають підозрілими на екстремум або критичними точками.

Достатні умови екстремуму функції.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;

2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;

3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Зауваження. На основі даної теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;

б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної точки x_2, досить визначити знак похідної в точках α і β $(x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3)$, де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки.

4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Теорема 2. Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x)>0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x)<0$ — максимум;

3) якщо $f''(x)=0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати теорему 1.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, теорема 2 не застосовується.

3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$, то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку $[a;b]$ називається *абсолютним максимумом*, а найменше — *абсолютним мінімумом*.

Припустимо, що на даному проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку $[a;b]$, то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше — найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, функція на відрізку $[a;b]$ досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму. Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції.

Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку $[a;b]$, то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно треба діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

4. Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину

Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

З графіка функції $y = f(x)$ (Рис. 2) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою на проміжку (c, b).

Наведемо дві теореми.

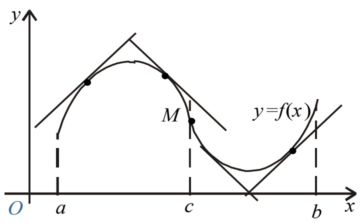


Рисунок – 2.

Теорема 1 (достатня умова випуклості). Якщо функція $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ є двічі диференційованою і на цьому проміжку $f''(x) > 0$, то графік функції вгнутий, а у випадку $f''(x) < 0$ графік функції випуклий.

Точка x_0 називається *точкою перегину* графіка функції $f(x)$, якщо при переході через цю точку графік функції змінює напрям випуклості. На Рис. 2 точка M – точка перегину.

Теорема 2 . Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0; f(x_0))$ не є точкою перегину.

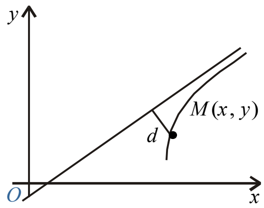


Рисунок – 2

Лекція 17. Асимптоти. План дослідження функції

План

1. Асимптоти.
2. План дослідження функції і побудова графіка.

1. Асимптоти

Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою до графіка функції $y = f(x)$, якщо виконується хоча б одна з рівностей: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* до графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$, якщо виконується рівність $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx - b \right) = 0$. При знаходженні похилих асимптот користуються формулами: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right)$. Якщо хоча б одна з останніх границь не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Приклад. Визначити асимптоти кривої $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x \to \pm 0} y = \lim_{x \to \pm 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \lim_{x \to \pm 0} \left(x + 2 - \frac{1}{x} \right) = \mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y = kx + b$, тоді

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ — похила асимптота для графіка функції.

2. План дослідження функції і побудова графіка

При дослідженні функції треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.

9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення x = 1. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ \ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка x = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2}=+\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки x = 1 маємо нескінченний розрив.

Точка x = 1 — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма x = 1 є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y=0$, $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0$, $2x-1=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x=0$, $y=\dfrac{-1}{1}=-1$, $(0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 1:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3};\quad y'=0\Rightarrow$$

$-2x=0\Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку x = 0 на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\dfrac{2}{-8}=-\dfrac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\dfrac{1}{2}$ $y'=\dfrac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

Таблиця 1.

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	$\searrow$	$y_{\min}$ (–1)	$\nearrow$	Не існує	$\searrow$

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці x = 0 функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$ $\quad y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0 \ (-)$;

при $x = 0$ $\quad y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0 \ (+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину. Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$ – точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, тому графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 2.

Таблиця 2.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y=0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на Рис. 1: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

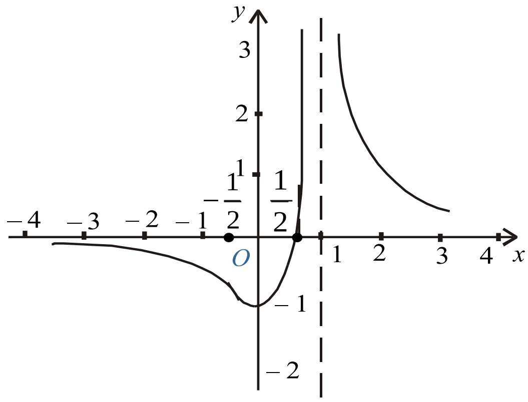


Рисунок – 1.

РОЗДІЛ VI. Вступ до теорії функцій комплексної змінної
Лекція 18. Комплексні числа

План

1. Алгебраїчна форма комплексного числа.
2. Геометричне зображення комплексного числа.
3. Тригонометрична форма комплексного числа.

1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Означення. *Комплексним числом* називається число виду $z = a + bi$, де a, b – дійсні числа, $i^2 = -1$. Число a називається *дійсною частиною*, bi – *уявною частиною*, i – *уявною одиницею*. Множина комплексних чисел позначається C.

Означення. Два комплексних числа $z = a + bi$ і $\overline{z} = a - bi$, які відрізняються знаком при уявній частині, називаються *спряженими*. Число, спряжене до дійсного числа є це ж саме число. Два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні частини і рівні їх уявні частини.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Нехай $z_1 = a + bi$ та $z_2 = c + di$.

Додавання: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Віднімання: $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Множення:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ділення: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Приклад. Для комплексних чисел $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = 5 - 4i$ знайти суму, різницю, добуток та частку.

Розв'язування.

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 4i) = 7 - i$;

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 4i) = -3 + 7i$;

$z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 - 4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 22 + 7i$;

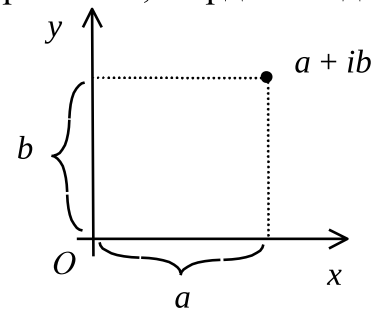
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 3i)(5 + 4i)}{(5 - 4i)(5 + 4i)} = \frac{10 + 8i + 15i + 12i^2}{25 - 16i^2} = \frac{-2 + 23i}{41} = -\frac{2}{41} + \frac{23}{41} i.$$

2. Геометричне зображення комплексного числа

Будь-яке комплексне число $z = a + bi$ можна зобразити геометрично. Візьмемо в площині прямокутну систему координат і, вибравши одиницю довжини, зображатимемо дійсні числа на осі абсцис, а уявні – на осі ординат.

Відповідно до цього вісь абсцис називається *дійсною віссю*, а вісь ординат – *уявною*.

Комплексне число $a+bi$ зображатимемо точкою площини, абсциса якої чисельно дорівнює a, а ордината дорівнює b (Рис. 1).



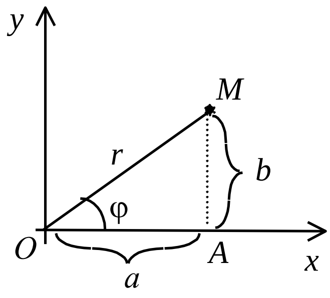


Рисунок – 1.　　　　　　Рисунок – 2.

3. Тригонометрична форма комплексного числа

Зображення комплексних чисел за допомогою точок на площині дає змогу подати число $a+bi$ в іншому вигляді, а саме – у *тригонометричній формі.*

Нехай точка $M(a;b)$ (Рис. 2) зображає комплексне число $a+bi$.

Позначимо віддаль *OM* точки від початку координат через ρ, а кут *AOM*, утворюваний *OM* з віссю *x*, – через φ. Тоді запис

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

є *тригонометричною формою комплексного числа*. Довжина ρ називається *модулем комплексного числа*, а кут φ – *його аргументом* і позначається $\arg z$, $-\pi\le\arg z\le\pi$. Для обчислення головного значення аргумента числа $z=a+bi$ користуються формулами:

$$\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, & a>0 \\ arctg\dfrac{b}{a}+\pi, & a<0,\quad b\ge 0 \\ arctg\dfrac{b}{a}-\pi, & a<0,\quad b<0. \end{cases}$$

Для того, щоб перетворити в тригонометричну форму комплексне число, подане в звичайній алгебраїчній формі, знайдемо ρ і φ за даними *a* і *b*. З трикутника *OAM* (Рис. 2) маємо:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{\rho},\ \cos\varphi=\frac{a}{\rho}$$

Приклад. Подати комплексне число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометричній формі.

Розв'язування. Знаходимо модуль комплексного числа:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Знаходимо головне значення аргумента:

$$\arg z = arctg\,\frac{b}{a} = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Маємо, $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ\right).$

Дії над комплексними числами, поданими в тригонометричній формі

Додавати і віднімати комплексні числа простіше і зручніше, коли компоненти подані в алгебраїчній формі.

Множення. Нехай треба перемножити числа:

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\ z_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right).$$

Дістанемо:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]$$

Звідси випливає:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ \arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = \arg z_1 \cdot \arg z_2.$$

Приклад. Нехай:

$$z_1 = 3\left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right);\ z_2 = 2\left(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ\right).$$

Тоді $z_1 z_2 = 3 \cdot 2\left[\cos\left(20^\circ + 35^\circ\right) + i\sin\left(20^\circ + 35^\circ\right)\right] = 6\left(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ\right).$

Ділення. Нехай треба число $z_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ поділити на число $z_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right).$

Матимемо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Піднесення до степеня. Нехай треба число $z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ піднести до цілого степеня *n*. Матимемо формулу:

$$z^n = \left[\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Модуль степеня комплексного числа дорівнює тому самому степеню модуля основи, а аргумент — аргументові основи, помноженому на показник степеня.

У частинному випадку, якщо $\rho = 1$, формула піднесення до степеня набуває вигляду

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Ця формула має назву *формули Муавра*.

Приклад. Піднести до куба число z = 2 (cos 20° + i sin 20°).

Матимемо:

$$z^3 = 8\left(\cos 3\cdot 20 + i\sin 3\cdot 20\right) = 8\left(\cos 60 + \sin 60\right) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Добування кореня. Добудемо корінь n-го степеня з числа:

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Матимемо:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

1. *Модуль кореня n-го степеня з комплексного числа дорівнює кореню того самого степеня з модуля підкореневого числа, а аргумент — аргументові підкореневого числа, поділеному на показник кореня.*

2. *Корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень.*

Користуючись формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ можна дістати *показникову форму* комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

РОЗДІЛ VII. Інтегральне числення функції однієї змінної
Лекція 19. Невизначений інтеграл

План

1. Поняття первісної.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Основні методи інтегрування.

1. Поняття первісної

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо для кожного $x \in (a;b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на $X = (-\infty, +\infty)$, тому що при будь-якому x: $(\sin x)' = \cos x$.

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – деяка стала, також є первісною для функції $f(x)$, тому що $\left[F(x) + C\right]' = f(x)$ для будь-якого числа C. Наприклад, для $f(x) = \cos x$ первісної є не тільки $\sin x$, але й функція $\sin x + C$, тому що $(\sin x + C)' = \cos x$.

Означення. Якщо функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то множина функцій $F(x) + C$, де C – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом від функції* $f(x)$ й позначається символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При цьому функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією,* $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом,* а dx – *диференціал змінної інтегрування*.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$. Інтегрування – операція, обернена диференціюванню.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що їх немає.

Теорема (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

2. Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.
5. $\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

3. Основні методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів й основних властивостей невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням.*

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$;
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$;
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$; $\qquad \int e^x dx = e^x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \quad a \neq 0$;
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0$;
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$.

Метод безпосереднього інтегрування. Коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b,$, дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b) \cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C..$$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

Приклад. $\int \dfrac{\sin xdx}{1+3\cos x} = \int \dfrac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\dfrac{1}{3}\int \dfrac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} =$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$$

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування). Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема . Якщо $f(x)$ – неперервна, а $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ t=\varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x)=t| = \int f(t)dt.$$

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Метод інтегрування частинами. Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі називається формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

де u й v – диференцфійовні функції по x.

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким правилом: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u=x,\ du=dx \\ dv=\sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v=-\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Лекція 20. Інтегрування дробово-раціональних функцій

План

1. Основні означення.
2. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
3. Методика інтегрування раціональних функцій

1. Основні означення

Означення. Відношення двох многочленів $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *раціональним дробом.*

Означення. Раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \ge m$, то дріб називається *неправильним*.

Теорема 5. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Всякий правильний правильний дріб можна розкласти на суму простих: I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{B}{(x-a)^k}$; III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, де $D = p^2 - 4q < 0$, $k \ge 2, k \in N,$. Це роблять методом невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простих.

Приклад.

$$\frac{5x^3+3x-9}{(x-6)^2(x+4)\left(x^2+3x+11\right)^3} = \frac{A_1}{(x-6)} + \frac{A_2}{(x-6)^2} + \frac{B}{(x+4)} +$$
$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+3x+11\right)} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+3x+11\right)^2} + \frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+3x+11\right)^3}.$$

Це приклад розкладу правильного раціонального дробу на суму простих, де A_1, A_2, B, M_i, N_i – невизначені коефіцієнти. Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо відповідні коефіцієнти чисельника лівої частини з коефіцієнтами чисельника правої. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язки її є коефіцієнтами розкладу.

2. Інтегрування дробово-раціональних функцій

I. $$\int \frac{Adx}{x-a} = \left| \begin{matrix} t = x-a \\ dt = dx \end{matrix} \right| = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C.;$$

II. $$\int \frac{Bdx}{(x-a)^k} = \left| \begin{matrix} t = x-a \\ dt = dx \end{matrix} \right| = B\int \frac{dt}{t^k} = B\int t^{-k}dt = B\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$=\frac{A}{1-k}t^{-k+1}+C=\frac{A}{1-k}\left(x-a\right)^{-k+1}+C\,;$$

$$\text{III. }\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\left(x^2+px+q\right)'=2x+p\right|\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+(N-\frac{Mp}{2})}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

Обчислимо обидва інтеграли. В першому зробимо заміну $t=x^2+px+q;$ $dt=2x+p,$ одержимо інтеграл

$$\int\frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x^2+px+q\right|+C\,.$$

Відносно другого маємо

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}=\begin{vmatrix}t=x+\frac{p}{2}\\ dt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C_1=\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C_1\cdot$$

Завдяки цьому

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C\,.$$

Приклад. Знайти $\int\frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx$.

На практиці інтеграли такого типу обчислюють, виділивши в знаменнику повний квадрат $x^2-4x+8=x^2-4x+4+4=\left(x-2\right)^2+2^2$.

$$\int\frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{2x-2}{\left(x-2\right)^2+2^2}dx=\begin{vmatrix}x-2=t\\ x=t+2\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{2\left(t+2\right)-2}{t^2+2^2}dt=$$

$$\int\frac{2t+2}{t^2+2^2}dt=\int\frac{2t}{t^2+2^2}dt+\int\frac{2}{t^2+2^2}dt=\int\frac{d\left(t^2+2^2\right)}{t^2+2^2}+2\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$\ln\left|t^2+4\right|+arctg\frac{t}{2}+C=\ln\left|\left(x-2\right)^2+4\right|+arctg\frac{x-2}{2}+C\,.$$

IV. $\int\frac{\left(Ax+B\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ – інтегрується за допомогою рекурентної формули

$$I_k = \frac{t}{2a^2\left(k-1\right)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2\left(k-1\right)} I_{k-1}.$$

3. Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Лекція 21. Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій

План
1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

1. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$,, де R – раціональна функція відносно sin$x$, cos$x$, тобто над sin$x$, cos$x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня.

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*\left(t\right)dt$,, загальну схему інтегрування якої розроблено.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*\left(t\right)dt .$$

.

Приклад. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln\left| t \right| + C = \ln\left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| + C .$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin x, cos x входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція – непарна відносно sin x, тоді роблять підстановку cos $x = t$.

Приклад. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx =$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{vmatrix} = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C .$$

III. Підінтегральна функція – непарна відносно cos x раціоналізується за допомогою підстановки sin $x = t$.

Приклад. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x}dx =$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \left(1-t^2\right)t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C .$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$..

У цьому випадку використовують підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$..

V. Підінтегральна функція $R(\operatorname{tg} x)$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$.

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} .$$

Приклад.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C .$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу:

$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$, $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$, $\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx$ $a \neq b$,,

користуються формулами: $\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + +\sin(a-b)x)$,

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right).$$

Приклад.

$$\int\cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

2. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ $R(x;y)$ означає раціональну залежність від змінних x та y.

$$\text{I. }\int R\left(x,\sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx=\left|\begin{array}{l} ax+b=t^n \\ x=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right) \\ dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt \end{array}\right|=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a}=\int R^*(t)dt.$$

Приклад. $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\left|\begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array}\right|=\int\frac{(t^3-1)3t^2dt}{t^2}=3\int(t^3-1)dt=$$

$$=\frac{3}{4}t^4-3t+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x+1}+C.$$

$$\text{II. }\int R\left(x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx=\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^n\right|=\int R^*(t)dt.$$

Приклад.

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1}=t^2,\ x+1=t^2(x-1), \\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1};dx=\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2} \end{array}\right|=\int\frac{(t^2-1)^2t(-4t)dt}{(t^2+1)^2(t^2-1)^2}=$$

$$=2\int\frac{t\cdot(-2t)dt}{(t^2+1)^2}=\left|\begin{array}{l} u=t,du=dt; \\ \frac{-2tdt}{(t^2+1)^2}=dv\Rightarrow v=\frac{1}{t^2+1} \end{array}\right|=\frac{2t}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{2t}{t^2+1}-2\operatorname{arctg}t+C=2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

III. $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx=\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^s,\right.$

$s=HCK\left(n_1,n_2\dots,n_k\right)\Big|=\int R^*\left(t\right)dt$.

Приклад. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{array}{l}x=t^{12},12=HCK(2,3,4)\\ dx=12t^{11}dt;t=\sqrt[12]{x}\end{array}\right|=\int\frac{t^6\cdot 12t^{11}dt}{t^8-t^3}=$

$$=12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1}=12\int\frac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1}=12\int\left(t^4\left(t^5+1\right)+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.$$

Лекція 22. Визначений інтеграл

План

1. Означення визначеного інтеграла.
2. Властивості визначеного інтеграла.

1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a<b$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин так, щоб

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ назвемо *T*-розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 0, 1, ..., n-1)$ та значення функції $f(\xi_i)$ у довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Позначимо через λ – найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$. Утворимо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, яка називається *інтегральною сумою* функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

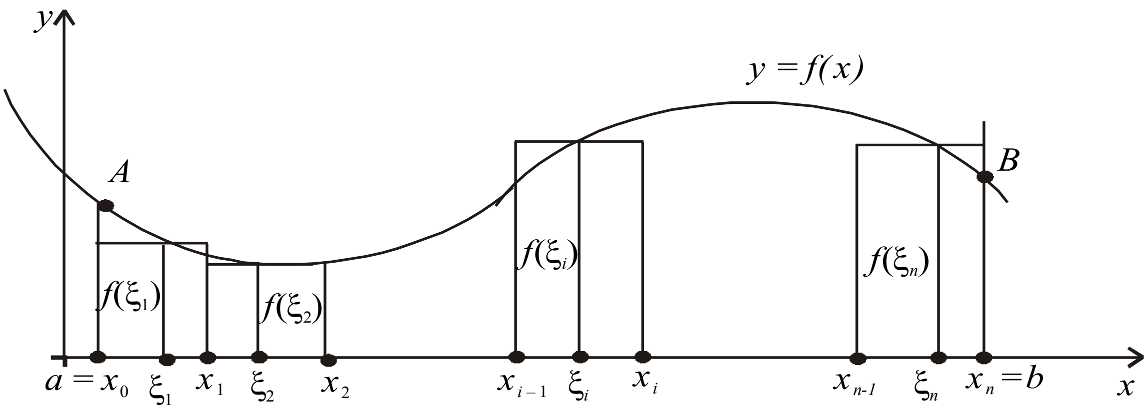
Означення 1. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i у кожному з частинних відрізків, то вона називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Числа a і b називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; dx – диференціал змінної інтегрування.

Означення 2. Функція, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної та інтегровної на відрізку$[a;b]$ функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ та віссю Ox:



Необхідною умовою існування визначеного інтеграла є обмеженість функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Достатньою умовою існування визначеного інтеграла є неперервність функції $f(x)$ на цьому ж відрізку.

2. Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int\limits_a^b c\,dx = c\cdot(b-a).$

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int\limits_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$

VII. Якщо $f(x)\ge 0$ і інтегровна для $x\in[a, b]$, $b > a$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ – інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f(x)$ – інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,\ b]$, $b > a$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

X. **Теорема (про середнє):** Якщо функція $f(x)$ – неперервна для $x \in [a,\ b]$, $b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a,\ b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Лекція 23. Обчислення визначених інтегралів

План

1. Інтеграл зі змінною верхньою межею.
2. Формула Ньютона-Лейбніца.
3. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.
4. Метод інтегрування частинами.

1. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$. Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку $[a;x]$, де $a \le x \le b$, тобто для будь-якого $x \in [a;b]$ має зміст інтеграл $\int_a^x f(t)dt$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ця функція визначена на відрізку $[a;b]$ і називається *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

Теорема 1. Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

2. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 2. (Основна теорема інтегрального числення). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Якщо функція $F(x)$ є довільною її первісною на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца.*

Приклад.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

3. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо: 1) $f(x)$ – неперервна для $x \in [a;\, b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b;$ 3) $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні для $t \in [\alpha;\ \beta]$; 4) при $t \in [\alpha;\ \beta] \Rightarrow x \in [a;\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)\,dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \;\; dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3 - \ln 4 - \left(2 - \ln 3\right)\right) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

4. Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a;\, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Приклад.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1.$$

Лекція 24. Невласні інтеграли першого роду

План

1. Невласні інтеграли I роду.
2. Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду.

1. Невласні інтеграли I роду (з нескінченими межами)

Як відомо, ми розглядали визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a;b]$. Проте у ряді задач стає потреба розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a;\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$. Отже, нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[a;B]$ де $B > a$. Тоді існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, який є функцією своєї верхньої межі.

Означення 1. *Невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ називають границю $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$ і записують

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx \qquad (1)$$

У цьому випадку інтеграл називають *збіжним,* якщо границя скінченна і *розбіжним,* якщо границя не існує або нескінченна, а підінтегральну функцію – *інтегровною на проміжку* $[a;+\infty)$. Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;b]$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[A;b]$, де $A < b$.

Означення 2. *Невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty;b]$ називають границю $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx$ і записують

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ і неперервна на будь-якому відрізку $[a;b]$, то можна означити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int_{C}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

де C - довільне дійсне число. Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^C f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_C^B f(x)dx \qquad (4)$$

називається також *невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

При цьому, якщо обидва інтеграли в правій частині рівності (3) збігаються, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним*. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (3) розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним.*

Варто відзначити, що іноді питання про збіжність (розбіжність) невласного інтеграла можна вирішити не обчислюючи його. При цьому користуються такзваними ознаками збіжності невласних інтегралів.

2. Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

1. Ознака порівняння.

Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. Гранична ознака порівняння.

Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$), то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідки. а) Якщо $k = 0$, то із збіжності $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

б) Якщо $k = +\infty$, то із розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

3. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причому в цьому випадку він називається *абсолютно збіжним.*

Зауваження. Найчастіше при дослідженні інтегралів першого роду для порівняння використовують функції $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, оскільки відомо, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ $(a > 0)$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $0 < \alpha \le 1$.

Приклад.

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Згідно з формулою (1) матимемо:

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{B\to+\infty} \ln|x| \Big|_{1}^{B} = \lim\limits_{B\to+\infty} \left(\ln|B| - \ln 1\right) = \lim\limits_{B\to+\infty} \ln|B| = +\infty$. Границя нескінченна, отже, інтеграл розбігається.

2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1} dx$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x+1} dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} e^{-4x+1} dx = -\frac{1}{4} \lim\limits_{B\to+\infty} e^{-4x+1} \Big|_{0}^{B} = -\frac{1}{4} \lim\limits_{B\to+\infty} \left(e^{-4B+1} - e^{1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim\limits_{B\to+\infty} e^{-4B+1} + \frac{1}{4} \lim\limits_{B\to+\infty} e = -\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot e = \frac{e}{4}.$$

Границя скінченна, заданий інтеграл збігається.

Лекція 25. Невласні інтеграли другого роду

Як відомо, необхідною умовою інтегровності функції на відрізку $[a;b]$ є її обмеженість. Проте є задачі, що приводять до розгляду інтеграла від функції, яка майже на всьому відрізку обмежена і стає необмеженою поблизу деякої точки, наприклад, поблизу однієї чи обох меж. Тоді природньо поширити поняття визначеного інтеграла і на такі функції, ввівши при цьому додаткові означення.

Отже, нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад, поблизу точки $x=a$, зокрема на відрізку $[a;a+\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$. Нехай $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;\, b]$. Точку a при цьому називають *особливою точкою* функції $f(x)$.

Означення 1. *Невласним інтегралом другого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(a;b]$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\ . \qquad (1)$$

Якщо ця границя скінченна, то інтеграл називається *збіжним*. Якщо границя нескінченна, або взагалі не існує, тоді інтеграл називається *розбіжним*. Функція $f(x)$ при цьому називається інтегровною на данному проміжку.

Нехай тепер функція $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ і не є інтегровною на відрізку $[b-\varepsilon;b]$.

Означення 2. *Невласним інтегралом другого роду* функції $f(x)$ на проміжку $[a;b)$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \qquad (2)$$

У цьому випадку точка b вважається *особливою точкою* функції $f(x)$.

Розглянемо випадок, коли особливими точками функції є одночасно точки $x=a$ й $x=b$. Це означає, що функція $f(x)$ необмежена на $[a;a+\varepsilon]$ та на $[b-\varepsilon;b]$, а на будь-якому відрізку $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ вона є інтегровною. Тоді покладають $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx$, де $x=c$ – довільна точка інтервалу $(a;b)$. В цьому разі

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \qquad (3)$$

Іноді може трапитися випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ є необмеженою поблизу точки $x=c$, яка знаходиться всередині відрізка $[a;b]$. В інших частинах відрізка $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегровна. Тобто точка $x=c$ є *особливою точкою* функції $f(x)$.

Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, але тепер у цій рівності обидва інтеграла правої частини означаються формулами (1) та (2). Позначають:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Зауважимо, що ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні подібним ознакам для інтегралів першого роду. При дослідженні на збіжність інтегралів, де особливою точкою є точка $x=a$, для порівняння використовують функції $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, інтеграл від яких $\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ збігається, якщо $0<\alpha<1$ і розбігається, якщо $\alpha\geq1$. Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x=b$, використовують функції $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$, інтеграл від яких $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ так само збігається при $0<\alpha<1$ і розбігається при $\alpha\geq1$.

Приклади. Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sqrt{x}\;\Big|_{\varepsilon}^{1}=$

$$=2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right)=2\lim_{\varepsilon\to+0}1-2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon}=2\cdot1-2\cdot0=2.$$

Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається.

2. $\int\limits_2^4\frac{dx}{4-x}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_2^{4-\varepsilon}\frac{dx}{4-x}=-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln|4-x|\;\Big|_{2}^{4-\varepsilon}=$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|4-4+\varepsilon|-\ln|4-2|\right)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon+\lim_{\varepsilon\to+0}\ln2=\infty,$$

оскільки перша границя нескінченна (при $\varepsilon\to+0$ $\ln\varepsilon\to-\infty$). Тобто наш інтеграл розбігається.

Лекція 26. Застосування визначеного інтегралу

План

1. Обчислення площ плоских фігур.
2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої.
3. Обчислення об’ємів тіл обертання.

1. Обчислення площ плоских фігур

Визначений інтеграл від додатної неперервної функції $f(x)$, заданої на відрізку $[a;b]$, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $x = a, x = b, y = 0$ (Рис.1):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В разі, коли $f(x) < 0$ на $[a;b]$ (Рис.2)

$$S = \int_a^b \left[-f(x)\right] dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

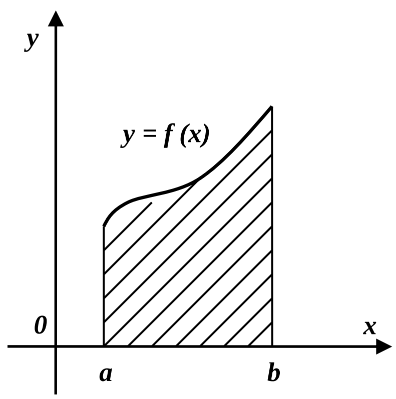


Рисунок – 1

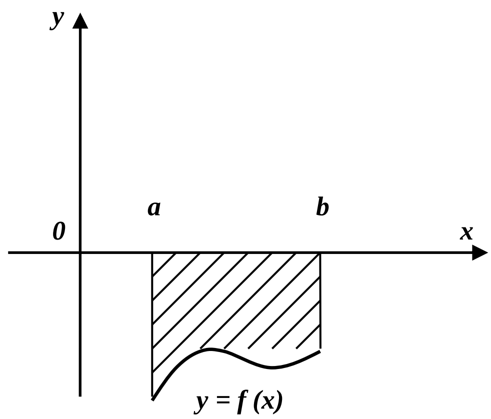


Рисунок – 2

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ скінчене число разів змінює знак, то

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a, \quad x = b$ за умови, що $f_2(x) \geq f_1(x)$ (Рис.4) знаходять за формулою

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

У випадку, коли фігура обмежена кривою $x=\psi(y)$ $\left(\psi(y)>0\right)$ та прямими $y=c, y=d, x=0$ (Рис.3), її площу знаходять за формулою

$$S=\int_c^d\psi(y)dy.$$

Якщо крива задана *параметричними рівняннями* $x=x(t), y=y(t)$, $t_1<t<t_2$, де $x(t), y(t)$ - неперервні функції, що мають неперервні похідні на відрізку $[t_1;t_2]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x=a,\quad x=b$ та відрізком $[a;b]$ осі Ox, визначається за формулою:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x'(t)\,dt,$$

де t_1 і t_2 - значення параметра t, при яких $x(t_1)=a,\quad x(t_2)=b$ $\left(y(t)\geq o \text{ при } t_1\leq t\leq t_2\right)$.

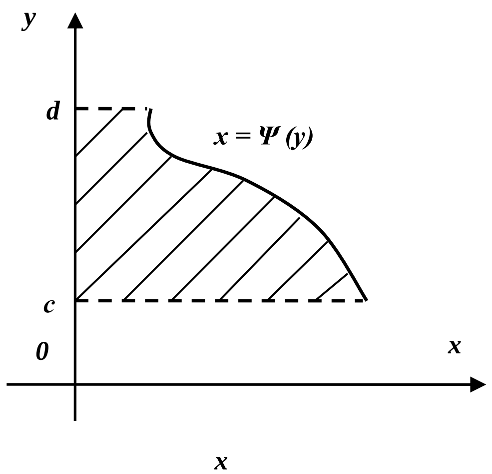


Рисунок – 3

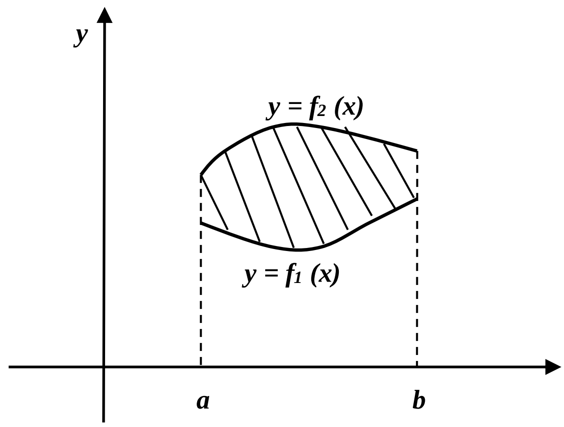
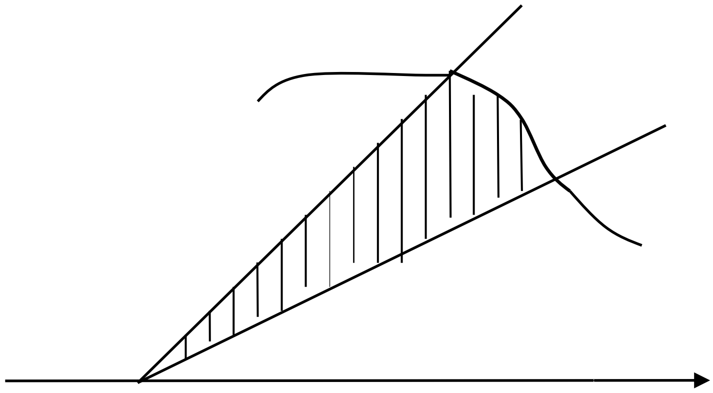


Рисунок – 4

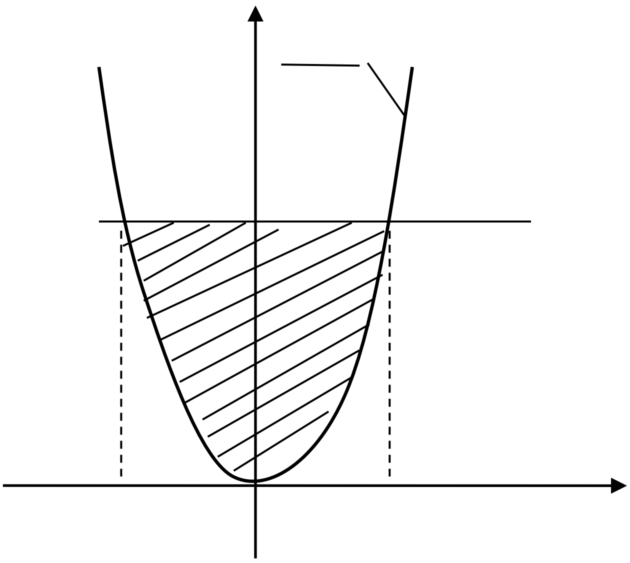
У *полярній системі координат* площа криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho=\rho(\varphi),\quad \varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$, $0\le\varphi_2-\varphi_1\le 2\pi$ та відповідними відрізками променів $\varphi=\varphi_1,\quad \varphi=\varphi_2$ (Рис.5), дорівнює



$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Рисунок – 5

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2,\quad y=4$.



Розв'язання. Фігура обмежена параболою $y=x^2$ і прямою $y=4$.

Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину ліній $y=x^2$ та $y=4$:

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=4 \end{cases}$, звідки $x^2=4$, $x=\pm 2.$.

Як бачимо, фігура симетрична відносно осі Oy, тому обчислимо площу її правої половини, а загальний результат подвоємо.

Будемо мати: $S=2\cdot\int_0^2 x^2dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{2}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}$ кв. од.

2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай крива задана рівнянням $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, причому $f(x)$ неперервна разом із своєю похідною на $[a;b]$. Тоді довжина дуги кривої визначається формулою

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Вираз $dL=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$ називається диференціалом дуги. В разі, коли крива задається рівнянням $x=\varphi(y)$, $y\in[c;d]$ довжина дуги кривої обчислюється так:

$$L=\int_c^d \sqrt{1+\left[\varphi'(y)\right]^2}\,dy.$$

У разі *параметричного задання* кривої $x=x(t), y=y(t), t_1\le t\le t_2$, довжина дуги дорівнює:

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt.$$

Якщо ж гладка крива задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ *в полярних координатах*, то

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}d\varphi.$$

3. Обчислення об’ємів тіл обертання

Нехай функція $y=f(x)$ - неперервна і додатна на відрізку $[a;b]$.

Об’єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ та відрізками прямих $x=a,\ x=b,\ y=0$ (Рис.6), дорівнює

$$V_{ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Якщо задані дві неперервні криві $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ такі, що $f_1(x)>0$, $f_2(x)\ge f_1(x)$ при $a\le x\le b$, то об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої цими лініями та відрізками прямих $x=a,\ x=b$ (Рис.7), обчислюється за формулою

$$V_{ox}=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx.$$

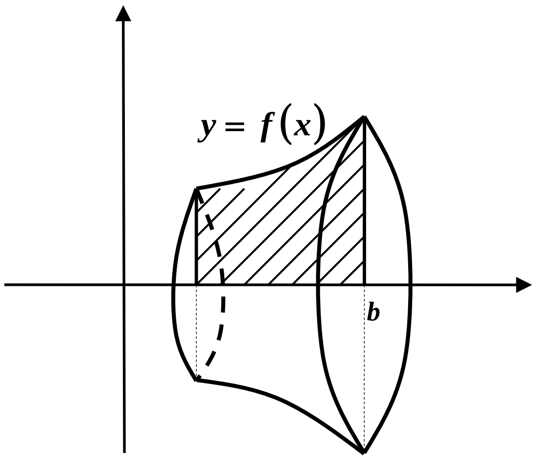


Рисунок – 6

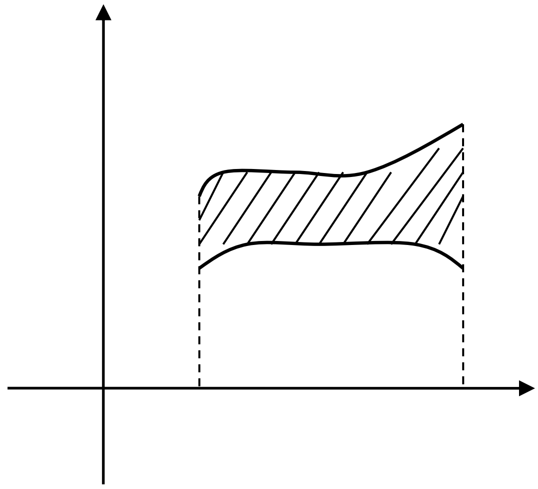


Рисунок – 7

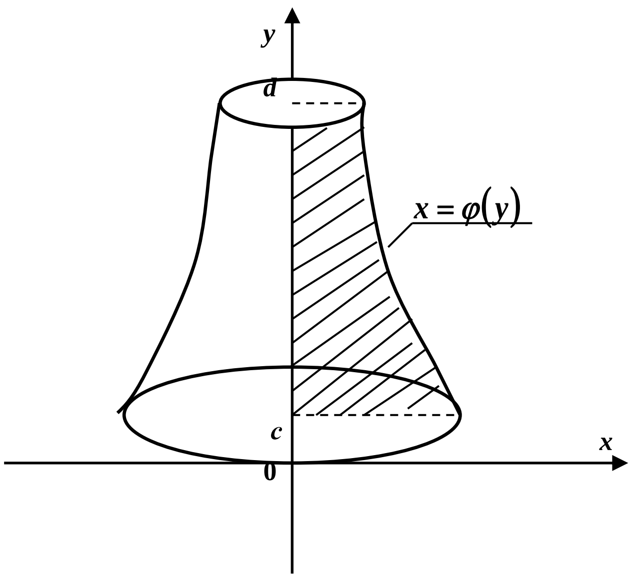


Рисунок – 8

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $x=\varphi(y)$, прямою $x=0$ та відрізками прямих $y=c$, $y=d$ (Рис.8), дорівнює

$$V_{oy}=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy .$$

У разі *параметричного задання* кривої рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, об’єми утворених тіл обертання навколо осі Ox або осі Oy визначаються відповідно формулами:

$$V_{ox}=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)\,dt, \qquad V_{oy}=\pi\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\cdot y'(t)\,dt .$$

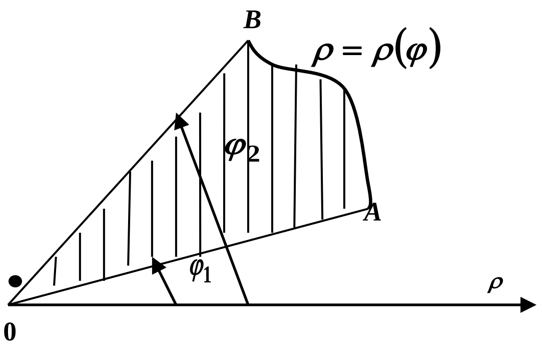


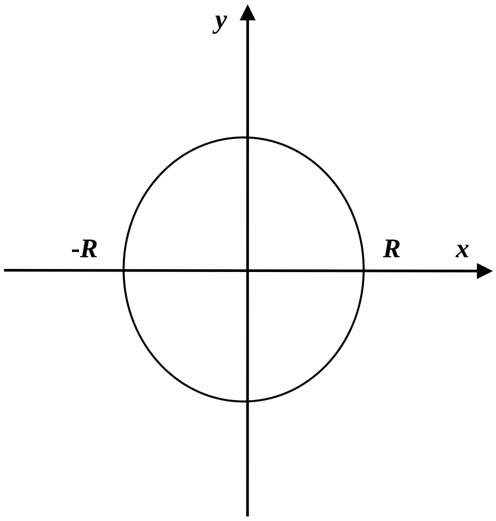
Рисунок – 9

Нехай крива задана в *полярній системі координат* рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ - неперервна функція при $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$. Тоді об’єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі плоскої фігури, обмеженої кривою $\rho=\rho(\varphi)$ та двома полярними радіусами OA і OB, які відповідають кутам φ_1 та φ_2 (Рис.9), обчислюється за формулою

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3(\varphi)\cdot\sin\varphi\, d\varphi .$$

Приклад. Знайти об'єм кулі.

Розв'язання. Нехай куля утворена обертанням навколо осі Ox кола $x^2+y^2=R^2$. Звідки $y^2=R^2-x^2$. Враховуючи, що $-R\le x\le R$.



Отже, $V_{ox}=\pi\int_{-R}^{R}y^2dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=$

$=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\left(R^2\cdot R-\frac{R^3}{3}\right)-$

$-\left(R^2(-R)-\frac{(-R)^3}{3}\right)=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right)=$

$=\frac{4}{3}\pi R^3$ куб. од.

РОЗДІЛ VIII. Функції багатьох змінних
Лекція 27. Функції багатьох змінних. Границя. Неперервність

План

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Границя функції двох змінних. Неперервність.

1. Поняття функції багатьох змінних

Нехай задано множину D впорядкованих пар чисел (x,y). Якщо кожній парі чисел $(x,y)\in D$ за певним законом відповідає єдине число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y і записують $z=f(x,y)$.

Прикладом функції двох змінних є площа S прямокутника зі сторонами a і b, яку знаходять за формулою $S=a\cdot b$. Кожній парі значень a та b відповідає єдине значення площі, тобто S – функція двох змінних $S=f(a,b)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а x та y – незалежними змінними (аргументами). Множину пар (x,y) значень x та y, для яких функція $z=f(x,y)$ визначена називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$. Множину значень позначають $E(f)$.

Лінію, що обмежує область D, називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називають внутрішніми. Область, яка містить лише внутрішні точки, називають відкритою. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається замкненою.

Для характеристики функцій двох змінних вводиться поняття ліній рівня.

Означення. *Лінією рівня функції* $z=f(x,y)$ називається сукупність всіх точок на площині xOy, для яких виконується умова $f(x,y)=C$.

Лінії рівня можна отримати, перетнувши поверхню $z=f(x,y)$ площинами $z=C,\quad C=const$.

Нехай D – це деяка множина впорядкованих трійок (x,y,z) дійсних чисел, тобто точок $M(x,y,z)$ тривимірного простору R_3. Якщо кожній точці $(x,y,z)\in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних і записують $u=f(x,y,z)$.

Поверхнею рівня функції $u=f(x,y,z)$ називають множину всіх точок $(x,y,z)\in D(f)$, для яких задана функція набуває одне й те саме значення $c\in E(f)$: $f(x,y,z)=c$ (ізоповерхні).

Якщо число n незалежних змінних більше трьох, то їх частіше позначають: $x_1,x_2,...,x_n$. Поняття функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в цьому випадку вводиться аналогічно.

2. Границя функції двох змінних. Неперервність.

Розглянемо деяку послідовність точок $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), ..., M_n(x_n, y_n).$, яку позначимо $\{M_n\}$. Послідовність точок $\{M_n\}$ називають *збіжною до точки* M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M, M_0) < \varepsilon$. В цьому випадку точку M_0 називають границею послідовності $\{M_n\}$.

Всі внутрішні точки круга з центром в точці M_0 радіуса δ називають δ-*околом* точки $M_0(x_0, y_0)$.

Означення. Число А називається *границею функції* $z = f(x; y)$ *у точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якої збіжної до M_0 послідовності точок $M_1, M_2, ..., M_n$ ($M_n \neq M_0$, $M_n \in \{M\}$) , відповідна послідовность значень функції $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$, ... збігається до числа *A*. Записують $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x; y) = B$.

Означення. Число *A* називається *границею функції* $z = f(x; y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ виконується нерівність $|f(x; y) - A| < \varepsilon$.

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена на множині *D*, точка $M_0 \in D$ і довільний δ-окіл точки M_0 містить точки множини *D*.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається *неперервно в точці* M_0, якщо $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = f(x_0; y_0)$ Точки, в яких функція неперервна, називають *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується – *точками розриву*.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Лекція 28. Диференціювання функцій багатьох змінних. Дотична площина і нормаль до поверхні.

План

1. Частинні та повний прирости функції двох змінних.
2. Диференційовність функції двох змінних. Частинні похідні.
3. Дотична площина та нормаль.

1. Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $M(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0+\Delta x; y_0)$, $N(x_0; y_0+\Delta y)$ також належатимуть даному околу.

Означення. Різницю $\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$ називають *повним приростом* функції $z = f(x;y)$, а різниці $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0;y_0)$, $\Delta_y z = f(x_0; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$ називають *частинними приростами по змінних x та y* відповідно.

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

2. Диференційовність функції двох змінних. Частинні похідні.

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *диференційовною* у точці $(x_0;y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B — числа, α,β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* двох змінних $f(x;y)$ у точці (x_0, y_0) і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя виду $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta x}\right)$, то вона називається *частинною похідною по змінній x (по y)* функції $z = f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f'_x(x_0;y_0)$($\dfrac{\partial z}{\partial y}$, або z'_y, або $f'_y(x_0;y_0)$).

Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x змінна y вважається сталою, а при знаходженні z'_y сталою вважається змінна x.

Теорема 14 (необхідна умова диференційовності функції): Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Приклад. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \ +\operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Приклад. Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \text{ де}$$

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ отже,}$$

$$dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y}dy\right).$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x;y)$ у деякому околі точки $(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційовна в точці $(x_0; y_0)$.

Теорема (диференціювання складної функції): Нехай на множині D визначена складна функція $z = f(u;v)$, де $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$, і нехай функції u, v мають у деякому околі точки $(x_0;y_0) \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $z = f(u;v)$ — неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0;v_0)$, де $u_0 = u(x_0;y_0)$, $v_0 = v(x_0;y_0)$. Тоді складна функція $z = f(u(x,y); v(x,y))$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

3. Дотична площина та нормаль

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то виконується рівність $\Delta z \approx A\Delta x + B\Delta y$, або

$$f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a = x_0 + \Delta x$, $b = y_0 + \Delta y$, дістанемо:

$$f(a; b) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(b - y_0). \qquad (1)$$

На формулі (1) ґрунтується *алгоритм використання диференціала для наближених обчислень*.

Крім того, якщо в рівності (1) взяти $a = x$, $b = y$, дістанемо

$$z = f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + f'_y(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Це рівняння *дотичної площини*, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$.

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x; y; z) = 0$ в точці $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (5.4)$$

де $A = F'_x(x_0; y_0; z_0)$, $B = F'_y(x_0; y_0; z_0)$, $C = F'_z(x_0; y_0; z_0)$.

Нормаль до поверхні в точці $(x_0; y_0; z_0)$ — це пряма, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}.$$

Лекція 29. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

План

1. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

2. Похідна неявної функції.

1. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x;y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x;y) \in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{yx}.$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z = f(x;y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Приклад. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2z = -\sin x \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\; dx\, dy - \sin x \sin y\, dy^2.$$

Приклад. Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3,\; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2,\; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$$

Теорема 19. Якщо функція $z = f(x;\, y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а також другі мішані похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2. Похідна неявної функції

Якщо існує неперервна функція однієї змінної $y = f(x)$, така що відповідні пари $(x;\, y)$ задовольняють умову $F(x;\, y) = 0$, тоді ця умова називається *неявною формою функції* $f(x)$, а сама функція $f(x)$ називається *неявною функцією*, яка задовольняє умову $F(x; y) = 0$.

Припустимо, що неперервна функція $y = f(x)$ задана в неявній формі $F(x, y) = 0$ і що $F'_y(x, y) \neq 0$. Похідну $\dfrac{dy}{dx}$ обчислюємо за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},\; F'_y(x, y) \neq 0.$$

Приклад. Знайти похідну від неявної функції $y^5 + 2x^2y^2 + xy - 42 = 0$ в точці $x = 1$, $y = 2$.

Маємо $F'_x = 4xy^2 + y$, $F'_y = 5y^4 + 4x^2y + x$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2y + x}.$$

Для $x = 1$, $y = 2$ маємо $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{18}{89}$.

Аналогічно частинні похідні функції двох незалежних змінних $z = f(x;\, y)$, яку задано за допомогою рівняння $F(x;\, y;\, z) = 0$, де $F(x;\, y;\, z)$ — диференційовна функція змінних x, y, z, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad (2)$$

за умови, що $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3 - 3xyz = 5$.

У даному разі $F\left(x, y, z\right) = z^3 - 3xyz - 5$. Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Тоді за формулами (2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

Лекція 30. Екстремум функцій декількох змінних. Мінімум і максимум функцій декількох змінних.

План

1. Екстремум функції двох змінних.
2. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

1. Екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x; y)$ цього околу виконується нерівність $f(x; y) \le f(x_0; y_0)$ $\left[f(x; y) \ge f(x_0; y_0)\right]$, тоді ця точка $(x_0; y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x; y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x;y)$ має екстремум у точці $(x_0; y_0)$, тоді в цій точці частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Теорема 2 (достатня умова екстремуму). Нехай функція $z = f(x;y)$ має екстремум у точці $(x_0; y_0)$, неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0;y_0) = 0$ та $f'_y(x_0;y_0) = 0$, а також $f''_{x^2}(x_0;y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0;y_0) = B$, $f''_{y^2}(x_0;y_0) = C$. Якщо:

1) $AC - B^2 > 0$ **і** $A < 0$**,** тоді $(x_0; y_0)$ точка максимуму функції $z = f(x;y)$;
2) $AC - B^2 > 0$ **і** $A > 0$, тоді $(x_0; y_0)$ точка мінімуму функції $z = f(x;y)$;
3) $AC - B^2 < 0$, тоді в точці $(x_0; y_0)$ немає екстремуму.
4) $AC - B^2 = 0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x;y)$ на екстремум

1. Знайти перші частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.
5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі теореми 2.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x;y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

1. Знайдемо $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 8 - 4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $\begin{cases} 2-2x=0 \\ 8-4y=0 \end{cases}$.

Розв’язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=1$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, звідки дістаємо, що $\Delta=8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $A<0$.

2. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Функція, що неперервна в замкненій обмеженій області D, досягає в ній найбільшого та найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційована функція може набувати цих значень лише в точках екстремуму. Тому потрібно знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області *D*, розв’язавши систему рівнянь $f'_x(x;y)=0$, $f'_y(x;y)=0$, і обчислити значення функції в цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області.

Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+y^3-3xy$ в області, обмеженій прямими $x=-1$, $x=2$, $y=-1$, $y=3-x$ (Рис. 1).

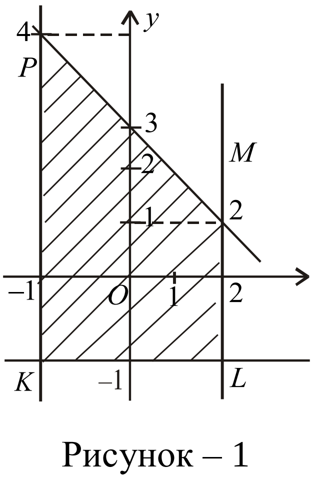


Рисунок – 1

1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z=x^3+y^3-3xy$: : $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$.

Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0;0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y=-1$, $-1\le x\le 2$. Підставивши $y=-1$ у задану функцію, дістанемо

$z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної y: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної x: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \dfrac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;\ -1)$, $M(2;1)$, $P(-1;\ 4)$, $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0;0) = 0$, $f(1;\ 1) = -1$, $f(-1;-1) = -5$, $f(2;-1) = 13$, $f(2;\ 1) = 3$, $f(-1;4) = 75$, $f\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right) = 0$.

Отже, $z_{\min} = -5$, і це значення досягається в точці $(-1;\ -1)$, $z_{\max} = 75$, і це значення досягається в точці $(-1;\ 4)$.

РОЗДІЛ IX. Диференціальні рівняння першого порядку
Лекція 31. Диференціальні рівняння

План

1. Основні поняття
2. Задача Коші

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить похідну шуканої функції. Найбільший порядок похідних називається *порядком диференціального рівняння*.

У загальному випадку диференціальне рівняння *n*-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Далі замість слів «диференціальні рівняння» використовуватимемо позначення ДР.

Приклад.

	$y' = xy$	— ДР першого порядку;
	$y'' + \sin y = 0$	— ДР другого порядку;
	$y'''y' - y''y' = 0$	— ДР третього порядку.

Диференціальне рівняння може визначити функцію багатьох змінних.

Далі розглядатимемо лише диференціальні і різницеві рівняння, в яких шукана функція залежить лише від одного аргументу. Такі рівняння називаються звичайними. ДР першого порядку в загальному вигляді можна записати рівнянням

$$F\left(x,\ y,\ y'\right) = 0. \tag{1}$$

Це — ДР рівняння, що *не розв'язане відносно похідної*. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної, то рівняння (1) подаємо у вигляді

$$y' = f\left(x,\ y\right). \tag{2}$$

Це ДР рівняння, що розв'язане відносно похідної, і його можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$ або $dy = f\left(x, y\right)dx$.

Якщо $f\left(x; y\right)$ є дробом, $f\left(x; y\right) = -\frac{M\left(x, y\right)}{N\left(x, y\right)}$, тоді ДР першого порядку можна записати в *симетричній формі*

$$M\left(x,\ y\right)dx + N\left(x,\ y\right)dy = 0. \tag{3}$$

Означення. Розв'язком ДР $y' = f\left(x, y\right)$ називається функція $y = \varphi\left(x\right)$, яка при підстановці у ДР перетворює його на тотожність. Графік функції $y = \varphi\left(x\right)$ називається *інтегральною кривою*.

Приклад. Задача інтегрування функцій може бути розглянута як задача інтегрування ДР $y' = f(x)$ і має розв'язок $y = \int f(x)dx + c,$ який знаходиться інтегруванням, тобто квадратурою.

Інтегральні криві утворюються зсувом однієї з них вздовж осі *y*.

Приклад. ДР $y' = 3y$ має розв'язок $y = e^{3x}$.

Справді, $y' = 3e^{3x}$. Підставивши y' в рівняння, дістанемо тотожність $3e^{3x} \equiv 3e^{3x}$.

Звичайно, ДР має нескінченну множину розв'язків. Так, попереднє рівняння $y' = 3y$ має розв'язок $y = Ce^{3x}$, де C — довільний параметр.

2. Задача Коші

Розглянемо ДР $y' = f(x, y)$.

Задача пошуку розв'язку $y = \varphi(x)$, що задовольняє умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \tag{4}$$

називається *задачею Коші*. Умови (4) називаються *початковими умовами*, числа y_0, x_0 називаються *початковими значеннями*.

Теорема існування та єдиності розв'язків: нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області D і задовольняє в області D умову Ліпшиця:

$$\left| f(x_1 y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|, \ L = \text{const}, \tag{5}$$

тоді при $(x_0, y_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР, який задовольняє початкові умови (4) $y_0 = \varphi(x_0)$.

Якщо в області *D* виконуються умови теореми існування та єдності, то через кожну точку області *D* проходить єдина інтегральна крива. Задача Коші полягає у знаходженні інтегральної кривої, що проходить через задану точку (x_0, y_0).

Умови (5) можна замінити іншою умовою: $\left| \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \le L.$ (6)

Точки, в яких порушується єдиність розв'язків ДР, називаються *особливими*. Розв'язок ДР називається *особливим*, коли всі точки на розв'язку особливі.

Якщо в диференціальному рівнянні першого порядку

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}; \qquad P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0,$$

то точка $(x_0; y_0)$ є особливою точкою ДР.

Наведемо приклади поводження інтегральних кривих в околі особливої точки (Рис. 1).

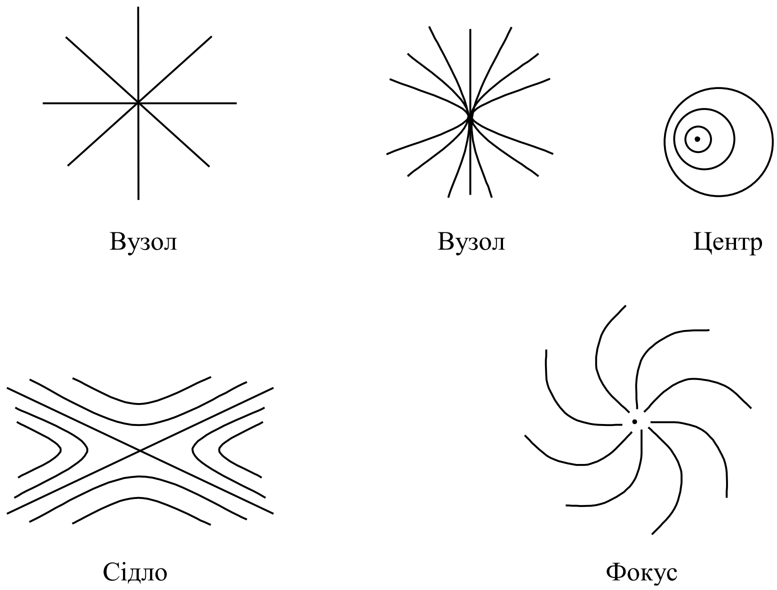


Рисунок – 1

Приклад. Розглянемо ДР $y' = \dfrac{x}{y}$, яка має особливу (0; 0). Розв'яжемо ДР $y' = \dfrac{x}{y}$, $x - y\,y' = 0$, $\left(x^2 - y^2\right)' = 0$, $x^2 - y^2 = c$.

Інтегральними кривими є гіперболи. Особлива точка (0; 0) є сідлом.

Розглянемо ДР $y' = f\left(x; y\right)$.

Функція $y = \varphi\left(x, C\right)$, що містить довільну сталу C, називається *загальним розв'язком ДР*, якщо функція $y = \varphi\left(x, C\right)$ є розв'язком ДР при довільному значенні сталої C, тобто $\dfrac{\partial\varphi\left(x, c\right)}{\partial x} \equiv f\left(x, \varphi\left(x, c\right)\right)$ і за рахунок вибору довільної сталої C можна розв'язати задачу Коші з довільними початковими умовами, тобто рівняння $y_0 = \varphi\left(x_0, c\right)$ розв'язується відносно C. Розв'язок $y = \varphi\left(x, C_0\right)$ при фіксованому значенні сталої C називається *частинним розв'язком*.

Приклад. ДР $y' = 2xy^2$ має загальний розв'язок $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$

Справді, маємо тотожність:

$$\left(-\frac{1}{x^2 + C}\right)' = 2x\left(\frac{1}{x^2 + C}\right)^2.$$

При довільних початкових значеннях $\left(x_0, y_0\right)$, $y_0 \neq 0$ знаходимо значення довільної сталої C

$$y_0 = -\frac{1}{x_0^2 + C} \Rightarrow C = -x_0^2 - \frac{1}{y_0}.$$

Якщо довільна стала виражена через початкові дані, то загальний розв'язок називається *розв'язком у формі Коші*.

Задача знаходження розв’язків ДР називається *інтегруванням ДР*. Самий розв’язок називається також *інтегралом ДР*. Назва пояснюється розв’язуванням найпростішого ДР $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx.$

Загальний розв’язок може бути знайдений у неявній формі: $\varphi(x, y) = C.$ Тоді ця рівність називається *інтегралом ДР*. Функція $\varphi(x, y)$ також називається *інтегралом ДР*. Якщо загальний розв’язок ДР подається неявним рівнянням $\psi(x, y, C) = 0,$ то рівняння називається *загальним інтегралом ДР*.

Розв’яжемо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{e^x}{2y + 3y^2}.$$

Рівняння можна записати у вигляді

$$2y\,y' + 3y^2 y' - e^x = 0 \quad \left(y^2 + y^3 - e^x\right)' = 0.$$

Звідси знаходимо інтеграл ДР $y^2 + y^3 - e^x = c.$

Розглянемо детальніше питання про особливі розв’язки. Точки, в яких існує не єдиний розв’язок ДР $y' = f(x, y),$ можуть бути точками розриву функцій $f(x, y),$ $f'_y(x, y),$ а також точками, в яких загальний інтеграл ДР $\psi(x, y, c) = 0$ не розв’язуваний відносно c, тобто $\psi'_c(x, y, c) = 0.$ Криві, в точках яких не виконані умови єдиності рішень, називають *дискримінантними кривими*. Однак не завжди дискримінантна крива визначає рішення ДР.

Лекція 32. Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку

План

1. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.
2. Однорідні диференціальні рівняння
3. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

1. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{1}$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \tag{2}$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0,\ y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0. \tag{3}$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до квадратури, тобто до знаходження інтегралів.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0.$ Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C.$ Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши рівняння (4) на $N_1(y)\,M_2(x),$ дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{5}$$

Рівняння (4) має розв'язок $y = y_k,\ x = x_j,$ де $y = y_k,\ x = x_j$ є розв'язками рівнянь $N_1(y) = 0,\ M_2(x) = 0.$

Аналогічно ДР виду $y' = f_1(x)\,f_2(y)$ (6) є ДР з відокремлюваними змінними. Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Рівняння (6) має розв'язок виду $y = y_k$, де $f_2(y_k) = 0$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = 2xy^2$.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

2. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

Воно за допомогою заміни змінної $\frac{y}{x} = u,\ y = ux$ зводиться до ДР з відокремлюваними змінними $u'x + u = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u$, а знаходження розв'язку зводиться до квадратур $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y}{x}$.

Узявши $y = ux$, дістанемо ДР і його загальний розв'язок $u'x + u = u,\ u'x = 0,\ u = C,\ y = Cx.$

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Візьмемо $y = ux$ і одержимо ДР для змінної

$$u'x + u = u^2,\ x\frac{du}{dx} = u^2 - u,\ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:
$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x},\ \ \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C,\ \ \frac{u-1}{u} = Cx,\ u = \frac{1}{1 - Cx},\ \ \frac{y}{x} = \frac{1}{1 - Cx},\ \ y = \frac{x}{1 - Cx}.$$

Однорідне ДР $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ не змінюється при перетворенні подібності:

$$y = ky_1, \quad x = kx_1, \quad k = \text{const}. \tag{8}$$

ДР $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ перетворюється на ДР $\frac{dky_1}{dkx_1} = f\left(\frac{ky_1}{kx_1}\right),\ \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right).$

При перетворенні подібності (8) інтегральні криві рівняння (7) знову переходять в інтегральні криві рівняння (7). Усі інтегральні криві однорідного ДР подібні з центром подібності в початку координат. Якщо будь-яка інтегральна крива, що лежить в деякому секторі, входить у початок координат, то всі інтегральні криві в цьому секторі теж входять у початок координат. Якщо одна із інтегральних кривих замкнена, то всі інтегральні криві замкнені.

3. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння $du = 0$ або

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,\ u = u(x, y) \tag{9}$$

називається *ДР у повних диференціалах*. Це ДР має інтеграл

$u(x, y) = C = \mathbf{const}$. (10)

ДР виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{11}$$

є ДР у повних диференціалах, якщо виконується тотожність

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{12}$$

При цьому знаходимо функцію $u(x, y)$ із рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,\ y),\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,\ y). \tag{13}$$

В окремому випадку можна скористатись формулою

$$u(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x,\ y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)dy. \tag{14}$$

Значення x_0, y_0 можуть бути довільними числами.

Розв'язок задач Коші з початковими умовами $x = x_0,\ \ y = y_0$ визначається рівнянням $u(x,\ y) = 0,$ де $u(x,\ y)$ подається формулами (14).

Приклад. Розв'яжемо ДР $(2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy = 0$.

Перевіримо спочатку виконання умови (11):

$$M(x, y) = 2x + 2y,\ \ N(x, y) = 2x - 2y,\ \ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2,\ \ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2.$$

Умова (11) виконується, і знаходимо функцію $u(x, y)$ із рівнянь (13). При $x_0 = 0,\quad y_0 = 0$ маємо $u(x,\ y) = \int_0^x 2xdx + \int_0^y (2x - 2y) = x^2 + 2xy - y^2.$

Отже, ДР має інтеграл $x^2 + 2xy - y^2 = C.$

Л. Ейлер довів, що для будь-якого ДР першого порядку

$$M(x,\ y)dx + N(x, y)\ dy = 0.$$

для якого не виконується умова (11), існує інтегрувальний множник $\mu = \mu(x, y)$ такий, що ДР $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$ є ДР у повних диференціалах. Із умови виду (11)

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (15)$$

шукаємо інтегрувальний множник μ, а потім інтегруємо рівняння (14).

Приклад. Знайдемо інтегрувальний множник для ДР

$$\left(x^2 - 2y\right)dx + (-x)dy = 0.$$

Маємо: $M(x, y) = x^2 - 2y,\ \ N(x, y) = -x,\ \ \dfrac{\partial M}{\partial y} = -2,\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1.$

Умова (11) не виконується. Розглядуване ДР не є рівнянням у повних диференціалах. Складемо рівняння (15).

Припустимо, що інтегрувальний множник μ залежить тільки від x. Дістанемо рівняння $\dfrac{d \ln \mu(x)}{dx} = \dfrac{1}{x},\ \ln \mu(x) = \ln|x|,\ \ \mu(x) = x.$ Домножимо початкове ДР на x і дістанемо рівняння в повних диференціалах: $\left(x^3 - 2xy\right)dx - x^2 dy = 0$, яке легко зінтегрувати:

$$\int_0^x x^3 dx + \int_0^y \left(-x^2\right)dy = C, \quad \frac{x^4}{4} - x^2 y = C.$$

РОЗДІЛ X. Ряди

Лекція 33. Числові ряди. Поняття збіжності ряду

План

1. Основні поняття
2. Деякі властивості збіжних рядів
3. Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами
4. Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Основні поняття

Означення. Нехай $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,u_n,\ \ldots$ — деяка нескінченна послідовність чисел. Побудований із цих чисел за допомогою знака «+» символ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

називається *нескінченним рядом* (чи просто *рядом*), а самі числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — членами ряду; n-ий член u_n — називається *загальним членом ряду*.

Побудуємо частинні суми ряду:

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1;\\ &S_2 = u_1 + u_2;\\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3;\\ &\ldots\\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n;\\ &\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Частинні суми ряду (2) утворюють числову послідовність: $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$ Надалі основним буде питання про збіжність послідовності частинних сум ряду. Таким чином, поняття ряду вводиться для побудови числових послідовностей спеціального виду — частинних сум ряду. Такі послідовності широко використовуються в математичному аналізі, наприклад, відоме число e можна подати таким рядом $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Числовий ряд називається збіжним, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{3}$$

При цьому величина S називається сумою ряду, а число

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} \tag{4}$$

— залишком ряду. Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називається розбіжним.

Приклад. Нехай ряд задано першими трьома членами $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$ $+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$. Знайти загальний член ряду і дослідити ряд на збіжність.

Загальний член ряду, як правило, знаходять методом перебирання варіантів, виходячи із аналізу заданих перших членів ряду з наступною перевіркою його правильності.

У даному прикладі чисельник кожного члена дорівнює одиниці, а знаменник є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Вважатимемо, що $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Тоді, беручи n послідовно таким, що дорівнює 1, 2, 3, ..., дістаємо члени ряду $u_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$; $u_2=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$; $u_3=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$, чим упевнюємося, що загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ побудований правильно.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів u_n можна розкласти на такі дроби:

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\left|\frac{A}{n(n+1)}+\frac{B}{(n+1)(n+2)}\right|=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Часткова сума ряду S_n запишеться тоді так:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}$. Отже, ряд збігається, його сума $S=\frac{1}{4}$.

У цьому прикладі збіжність ряду було встановлено безпосередньо за означенням, тобто обчислено $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Для переважної більшості рядів обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ неможливо, тому далі буде наведено такі методи й ознаки, за допомогою яких можна встановити збіжність ряду, не обчислюючи $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

2. Деякі властивості збіжних рядів

Теорема 1. Якщо збігається ряд, то збігається його залишок; і навпаки, із збіжності залишку випливає збіжність ряду.

Наслідок 1. Із розбіжності ряду випливає розбіжність його залишку, і навпаки.

Наслідок 2. Якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду або додати до нього кілька нових членів, то це не вплине на його збіжність.

Теорема 2. Якщо члени збіжного ряду (1) помножити на сталий множник c, то його збіжність не порушиться, а сума (3) помножиться на це число c:

$$cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot S \cdot \quad (5)$$

Теорема 3. Збіжні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ можна почленно додавати або віднімати, при цьому ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ також збігається, а його сума буде $S \pm \sigma$.

Теорема 4. Послідовність частинних сум збіжного ряду обмежена. Це твердження випливає зі збіжності послідовності частинних сум ряду.

Теорема 5. Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\right)$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад: Перевірити виконання необхідної умови збіжності для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}$. Загальний член ряду $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$. Розглянемо

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0$. Необхідна умова збіжності ряду не виконується. Ряд розбігається.

3. Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} = u_n$ з додатними членами $u_n > 0,\ u_2 > 0,\ \ldots,\ u_n > 0, \ldots$. Частинні суми ряду (2) утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$.

Теорема 6 (основна). Для того щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами розбігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Теорема. 7 (ознака порівняння рядів). Якщо для рядів з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (6)$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (7)$$

виконується умова $v_n \geq u_n$, то:

а) із збіжності ряду (7) випливає збіжність ряду (6);

б) із розбіжності ряду (6) випливає розбіжність ряду (7).

Якщо для рядів (6), (7) виконується умова $u_n \leq v_n$, то ряд (7) називається *мажорантним* відносно ряду (6), а ряд (6) — *мінорантним* відносно ряду (7).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n!}>0$. Зауважимо, що

$$\left(n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\ge1\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{n-1}=2^{n-1}\right)\Rightarrow\left(u_n=\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}=v_n\right).$$

Ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q=0{,}5<1$. Значить, за ознакою порівняння (теорема 7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ — збігається.

Теорема 8 (ознака порівняння в граничній формі). Якщо для рядів з додатними членами (6), (7) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c\quad(0<c<+\infty)$, то ряди (6) і (7) збігаються або розбігаються разом.

Теорема 9 (ознака Даламбера). Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, тоді:

при $l<1$ ряд збігається;
при $l>1$ ряд розбігається;
при $l=1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n=\frac{2^n}{n!}>0$. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2\cdot2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^n\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ збігається.

Теорема 10 (ознака Коші (радикальна)). Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n>0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, тоді:

при $l<1$ ряд збігається;
при $l>1$ ряд розбігається;
при $l=1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

Загальний член ряду $u_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^2=\frac{1}{9}<1.$$

За ознакою Коші (теорема 10) ряд збігається.

Теорема 11 (ознака Коші (інтегральна)). Якщо функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає при $x\geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластивий інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються разом.

4. Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Інтегральна ознака Коші використовується тоді, коли функція загального члена ряду $u_n=f(n)\Rightarrow f(x)$ легко інтегрується.

4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії (6) або ряд Діріхле (8).

5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.

6. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}=\frac{1^3}{e}+\frac{2^3}{e^2}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots;\quad u_n=\frac{n^3}{e^n}>0\Rightarrow$ ряд знакододатний.

2) $$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix}n\sim x\\ n\to\infty\\ x\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'''}{(e^x)'''}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot2\cdot1}{e^x}=0\Rightarrow$$

необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: базовий підручник для вузів / В.С. Пономаренка. – Х.: Фоліо, 2017. – 669 с.

2. Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2013. - 648 с.

3. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 3-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2012. — 606 с.

4. Вища математика: Навчальний посібник / І.І. Литвин, О.М. Конопчук, Г.О. Желізняк. – К.: ЦУЛ, 2019. – 368 с.

5. Вища математика: 36. Задач. У 2 ч. ч.1,2: 5. Вища математика: Навчальний посібник у 2-х частинах / Ф. Лиман, В. Власенко, С. Петренко. – К.: Університетська книга, 2018. – 614 с

6. Вища математика: навчальний посібник / В. І. Казановський, А. Г. Африканова, Н. А. Виштакалюк, О. Л. Дрозденко. URL: https://docplayer.net/91117677-V-i-kazanovskiy-a-g-afrikanova-n-a-vishtakalyuk-o-l-drozdenko-vishcha-matemati-ka-navchalniy-posibnik.html (дата звернення 12.11.2020)

7. Коваленко І.П. Вища математика: Навч. Посіб. — К.: Вища шк.,2016. — 343с.

8. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики: Навч. посібник. Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2013. — 305 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Вища математика : курс лекцій для здобувачів фахової передвищої освіти освітньо-професійної програми «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 Електрична інженерія спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка та освітньо-професійної програми «Менеджмент» галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 073 Менеджмент денної форми навчання / уклад. Ю. В. Боровська. – Луцьк : Технічний фаховий коледж Луцького НТУ, 2020. – 128 с.

Комп'ютерний набір Ю.В.Боровська
Редактор Ю.В.Боровська

Підп. до друку 2020р.
Формат 60x84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк. 8.
Тираж ___ прим.

Інформаційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ІВВ Луцького НТУ