## Лекція 2. Рівносильні формули. Закони логіки

### План

*1. Рівносильні формули*

*2. Закони логіки*

### *1. Рівносильні формули*

***Означення.*** Формули $\varphi$ та $\omega$ називаються **рівносильними (еквівалентними) формулами** логіки висловлень, якщо вони приймають однакові значення істинності на всіх інтерпретаціях змінних, кожна з яких входить принаймні у одну з формул $\varphi$ або $\omega$. Той факт, що формули **рівносильні**, позначається як $\varphi \equiv \omega$.

Відношення рівносильності формул, побудованих із деякої фіксованої множини атомів, задовольняє умови рефлексивності, симетричності та транзитивності , а отже є відношенням еквівалентності. Тому множина усіх формул розбивається на класи, у кожному з яких містяться рівносильні між собою формули.

### *2. Закони логіки*

***Означення.*** Формула логіки висловлень називається **законом**, якщо вона набуває значення істинності при всіх можливих наборах значень істинності висловлень з яких вона складається.

Рівносильні перетворення формул ґрунтуються на законах логіки висловлень, основні з яких наведені у таблиці.

| № | Назва закону | Формулювання |
|---|---|---|
| 1 | Закон комутативності кон'юнкції | $A \wedge B \equiv B \wedge A$ |
| 2 | Закон комутативності диз'юнкції | $A \vee B \equiv B \vee A$ |
| 3 | Закон асоціативності кон'юнкції | $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ |
| 4 | Закон асоціативності диз'юнкції | $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ |
| 5 | Перший закон дистрибутивності | $A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$ |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Другий закон дистрибутивності | $A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
| 7 | Закон подвійного заперечення | $\bar{\bar{A}} \equiv A$ |
| 8 | Закон суперечності | $A \wedge \bar{A} \equiv 0$ |
| 9 | Закон виключення третього | $A \vee \bar{A} \equiv 1$ |
| 10 | Перший закон де Моргана | $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$ |
| 11 | Другий закон де Моргана | $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ |
| 12 | Закон ідемпотентності кон'юнкції | $A \wedge A \equiv A$ |
| 13 | Закон ідемпотентності диз'юнкції | $A \vee A \equiv A$ |
| 14 | Властивості нуля | $A \wedge 0 \equiv 0, \quad A \vee 0 \equiv A$ |
| 15 | Властивості одиниці | $A \wedge 1 \equiv A, \quad A \vee 1 \equiv 1$ |
| 16 | Перший закон поглинання | $A \vee A \wedge B \equiv A$ |
| 17 | Другий закон поглинання | $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ |
| 18 | Модифікований закон поглинання | $A \vee \bar{A} \wedge B \equiv A \vee B$ |
| 19 | Закон усунення імплікації | $A \to B \equiv \bar{A} \vee B$ |
| 20 | Перший закон усунення еквівалентності | $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$ |
| 21 | Другий закон усунення еквівалентності | $A \leftrightarrow B \equiv \bar{A} \wedge \bar{B} \vee A \wedge B$ |

***Теорема:*** Формули $\varphi$ та $\omega$ рівносильні тоді і тільки тоді, коли формула $\varphi \leftrightarrow \omega$ є загальнозначущою.

***Теорема:*** Якщо $\varphi_1$ підформула формули $\omega_1$, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, формула $\omega_2$ отримується з формули $\omega_1$ заміною підформули $\varphi_1$ на $\varphi_2$, то формули $\omega_1$та $\omega_2$ рівносильні.

Ці теореми використовуються для побудови ланцюжків рівносильних формул.

**Приклад 1**. Для формули $\varphi \equiv \bar{A} \wedge B \to (C \leftrightarrow \bar{A})$ побудувати рівносильну їй формулу, яка містила б лише атоми, символи операцій заперечення і диз'юнкції.

Розв'язок.

$$\bar{A} \wedge B \to (C \leftrightarrow \bar{A}) \equiv \overline{\bar{A} \wedge B} \vee (C \leftrightarrow \bar{A}) \equiv \bar{\bar{A}} \vee \bar{B} \vee (C \leftrightarrow \bar{A}) \equiv A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge \bar{\bar{A}} \vee C \wedge \bar{A} \equiv$$

$$\equiv A\vee\bar{B}\vee\bar{C}\wedge A\vee C\wedge\bar{A}\equiv A\vee\bar{B}\vee\overline{\overline{\bar{C}\wedge A}}\vee\overline{\overline{C\wedge\bar{A}}}\equiv A\vee\bar{B}\vee\overline{C\vee\bar{A}}\vee\overline{\bar{C}\vee A}.$$

**Приклад 2**. З використанням рівносильних перетворень довести, що формула $\varphi\equiv\overline{\bar{B}\to\bar{C}}\to(C\leftrightarrow A\vee C)$ є загальнозначущою.

Розв’язок. Покажемо, що формула $\varphi\equiv\overline{\bar{B}\to\bar{C}}\to(C\leftrightarrow A\vee C)$ рівносильна 1.

$$\overline{\bar{B}\to\bar{C}}\to(C\leftrightarrow A\vee C)\equiv(\bar{B}\to\bar{C})\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\vee\mathrm{C}\wedge(A\vee C)\equiv$$

$$\equiv B\vee\bar{C}\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\vee C\equiv\bar{C}\vee C\vee B\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\equiv 1\vee B\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\equiv 1.$$

Отже, формула $\varphi$ є загальнозначущою.