

**Загальна  
фізика**

**Л. Д. Дідух**

**ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ**

**Підручник**



Тернопіль  
Видавництво «Підручники і посібники»  
2020

УДК 53 (075.8)

Д44

**Рецензенти:**

**Б. А. Лукіянець** — д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри інженерних технологій і прикладної фізики Інституту прикладної математики і фундаментальних наук при Національному університеті «Львівська політехніка»;

**О. М. Петченко** — д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фізики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

**З. В. Стасюк** — д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фізичної та біомедицинської електроніки Львівського національного університету імені Івана Франка.

*Рекомендовано науково-методичною радою  
Тернопільського національного технічного університету  
імені Івана Пулюя (протокол №5 від 15.05.2018 р.)*

**Дідух Л.**

Д44 Електрика та магнетизм : підручник / Л. Д. Дідух. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2020. — 464 с.

ISBN 978-966-07-3614-6

У підручнику викладені основи «Електрики» та «Магнетизму» як розділів курсу загальної фізики. Теоретичний матеріал ілюструє велика кількість прикладів. Одне із завдань підручника — націлити студента на активне опрацювання матеріалу. З цією метою до кожного розділу доданий параграф «Запитання і задачі. Відповіді». Задачі, наведені тут, органічно поєднані із основним змістом розділу.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів і класичних та педагогічних університетів.

УДК 53 (075.8)

ISBN 978-966-07-3614-6

© Дідух Л. — текст  
© Зелінська С., Парій І. — дизайн, 2020

## ПЕРЕДМОВА

- Мета підручника — сприяти поглибленому засвоєнню фізики електричних та магнітних явищ, які є основою багатьох розділів інженерної науки, зокрема електротехніки та енергетики, комп'ютерних технологій, автоматизації та промислової революції загалом.

- Спрямованість підручника — з'ясування фізичного змісту основних понять і законів електрики та магнетизму на основі математичного апарату. Ідеологія цього підручника продовжує «Механіку», надруковану видавництвом «Підручники та посібники» у 2016 р. Ідея органічного поєднання «фізичного змісту» і «математики» є основою і для цієї книги та має формувати у студента науковий світогляд і навички фізико-математичного мислення.

- Навчальний матеріал ілюструється великою кількістю прикладів та задач практичного спрямування, які будуть особливо корисними для розвитку у майбутніх фахівців необхідних компетентностей. Саме тому кожен розділ доповнений параграфом «Запитання і задачі. Відповіді»; наведені у ньому задачі органічно поєднані зі змістом розділу. Найкращого результату досягне той студент, який намагатиметься самостійно відтворити математичні викладки, прагнучиме самостійно розв'язати всі задачі.

- Зазвичай у студентів викликає труднощі застосування складного математичного апарату. Включення до підручника окремого «Математичного доповнення», котре містить необхідні відомості з векторного аналізу, дозволить студентові подолати ці труднощі, а також оволодіти «мистецтвом математики» у застосуванні до фізичних задач, для яких ці методи, власне, і створювалися.

- Розділ «Електростатика», який розпочинає підручник, може здатися на перший погляд дещо громіздким. Однак ґрунтовність, з якою в цьому розділі розглянуто властивості електричного поля, дозволить читачу вільно орієнтуватися в матеріалі наступних розділів, а також розвинути широку фізичну ерудицію та вміння бачити фізичний зміст за математичними тонкощами. У розділі «Електричні кола постійного струму» студент знайде достатньо повний класичний виклад, збагачений численними прикладами. Цей розділ є необхідним для формування розуміння електричних та магнітних явищ. Окремі розділи присвячені основам електронної теорії металів, контактним, термоелектричним та емісійним явищам, електричному струму в електролітах та газах, — частину поданого в них матеріалу можна розглядати як додатковий, що дозволить, «підлаштувати» курс під потреби конкретної спеціальності.

- Комплекс розділів, присвячених магнітним явищам, тісно зв'язаний з першою частиною підручника єдністю підходів та глибиною аналізу. Особливістю цих розділів є використання окремих понять квантової теорії. Такий підхід є, по-перше, більш науковим та послідовним, по-друге, дозволить уникнути «дисонансу» при більш глибокому вивченні квантової природи мікроскопічних явищ у заключній частині університетського курсу фізики, «наводить містки» між різними класами явищ, дозволяє трактувати їх з єдиних позицій.

- Органічний зв'язок між електричними та магнітними явищами глибоко розкритий в розділах «Електромагнітна індукція» та «Основи теорії електромагнітного поля». Ці розділи, а також «Електричні кола змінного струму» є надзвичайно важливими для розуміння сучасних технічних застосувань та сприяють формуванню здатності розвивати нові підходи та інженерні рішення.

- У додатках читач знайде фундаментальні та похідні фізичні сталі, таблиці одиниць електричних та магнітних величин, характеристики деяких чистих металів.

- Підручник розрахований, насамперед, на студентів технічних закладів вищої освіти, проте може бути використаний і ширшим колом студентів; в залежності від програми курсу фізики частина матеріалу може бути опущена без шкоди для розуміння основного тексту.

\* \* \* \* \*

Широї подяки заслуговують всі, хто зробив свої зауваження і висловив пропозиції, спрямовані на покращення підручника. Насамперед — проф. Б. А. Лукіянець, проф. О. М. Петченко, проф. З. В. Стасюк — рецензенти, проф. А. В. Пундик, доц. Ю. Л. Скоренький, доц. О. І. Крамар, доц. В. І. Кульчицький, ас. Ю. М. Довгоп'ятий. Видання підручника стало можливим завдяки сумлінній та якісній роботі С. С. Зелінської та І. С. Парій, які підготували його до друку.

Видання цієї книги стало можливим завдяки дружній підтримці Ярослава Тадейовича Гринчишина та Сергія Володимировича Мартинюка.

## ПОЗНАЧЕННЯ

- $a \approx b$  — величина  $a$  приблизно дорівнює величині  $b$   
 $a \propto b$  — величина  $a$  пропорційна величині  $b$   
 $a \sim b$  — величина  $a$  має такий самий порядок, що і величина  $b$   
 $\langle x \rangle$  — позначення середньої величини  $x$ , наприклад,  $\langle \vec{v} \rangle$ ,  $\langle N \rangle$   
 $\Delta x$  — скінчений приріст величини  $x$  (різниця між кінцевим і початковим значеннями); наприклад,  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ,  $\Delta U = U_2 - U_1$   
 $dx$  — позначення диференціалу (нескінченно малого приросту) величини  $x$ , наприклад  $d\vec{v}$ ,  $dU$   
 $\delta x$  — позначення елементарного (нескінченно малого) значення величини  $x$ ; не має змісту нескінченно малого приросту, наприклад,  $\delta m$  — елементарна маса,  $\delta A$  — елементарна робота  
 $\frac{dy}{dx}$  — похідна від функції  $y(x)$   
 $\frac{\partial f}{\partial x}$  — позначення частинної похідної (функція  $f$  є функцією декількох змінних)  
 $\Rightarrow$  — вказує на послідовність тотожних перетворень лівої і правої сторін рівняння (щоб уникнути зайвих слів), наприклад:  $v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$   
 $\vec{a}$  — вектори позначаються стрілкою над відповідною величиною  
 $|\vec{a}|$  — модуль вектора (наприклад  $\vec{v}$ ) позначається так:  $|\vec{v}|$  або просто  $v$   
 $\vec{a}_x$  — складова вектора ( $\vec{a}$ ) у напрямку осі  $OX$   
 $a_x$  — проекція вектора ( $\vec{a}$ ) на вісь  $OX$   
 $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$  — вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  однаково напрямлені  
 $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$  — вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  протилежно напрямлені  
 $\vec{e}$  — одиничний вектор ( $|\vec{e}| = 1$ ), напрямлений вздовж певного напрямку  
 $\vec{n}$  — одиничний вектор, який пов'язується із нормальним (перпендикулярним) напрямком до кривої або до площини  
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — одиничні вектори (орти) вздовж декартових осей  $OX, OY, OZ$   
 $a = \vec{b}\vec{c}$  — скалярний добуток  
 $\vec{a} = [\vec{b}\vec{c}]$  — векторний добуток  
 $\vec{a} \odot$  — вектор  $\vec{a}$  напрямлений «до нас»  
 $\vec{a} \otimes$  — вектор  $\vec{a}$  напрямлений «від нас»  
 СВ — система відліку, ІСВ – інерціальна система відліку  
 $[N]CI - Вт$  — ват (одиницею вимірювання потужності  $N$  у  $CI$  є ват)  
 $\square \blacksquare$  — позначення прямого кута  
 • — знак, який вживається з метою акцентування уваги на певних аспектах розглядуваної проблеми в межах параграфа і для уникнення додаткової нумерації певних параграфів

## РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРОСТАТИКА

*...Закон Кулона. Однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні притягують один одного з силою, обернено пропорційною до відстані між ними... у всіх явищах атомної і молекулярної фізики, у всіх твердих тілах, рідинах і газах. І в усіх явищах, які пов'язані із нашими взаємовідносинами із оточуючим нас світом; єдина діюча сила, крім сили тяжіння. Сила тертя, в'язкість, хімічні зв'язки, сили, які змушують обертатися колеса машин заводів і фабрик,- всі ці явища не що інше, як прояв закону Кулона.*

*Дж.Р.Загаріас*

**Електростатика** — розділ *електродинаміки*, в якому вивчається електричне поле нерухомих електричних зарядів та їх взаємодія. Основний закон електростатики — закон Кулона.

### 1.1 ЕЛЕКТРИЗАЦІЯ ТІЛ. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ

1. Згадаймо відомі з середньої школи факти. Якщо потерти скляну паличку до хутра, або пластмасову лінійку до паперу, то вони *електризуються* (*набувають електричного заряду*) — проявляють здатність притягувати або відштовхувати інші наелектризовані тіла. Подібно до цього можна наелектризувати й інші тіла. Встановлено, що існує два типи наелектризованих тіл (два види електричних зарядів): одні притягуються склом і відштовхуються пластмасою, інші, навпаки, притягуються пластмасою і відштовхуються склом; наелектризовані скло і пластмаса притягуються. Тілам, які наелектри-

зовані подібно до скла, приписують додатній заряд, тілам, які поводять себе як наелектризована пластмаса, приписують від'ємний заряд.

Пояснення електризації тіл наступне. За сучасними уявленнями атом (найменша частинка хімічного елемента, яка зберігає його властивості) складається із ядра, електричний заряд якого визначається кількістю протонів, кожен з яких має додатній заряд  $+1,6 \cdot 10^{-19}$  кулона (Кл), і від'ємно заряджених електронів (електрон має заряд  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл). Кількість електронів в атомі дорівнює кількості протонів, тому атом є електрично нейтральним. За певних умов атом може втрачати електрони, які є найбільш віддалені від ядра, або приймати електрони — такий атом стає додатньо або від'ємно зарядженим йоном.

Тіло, яке складається з атомів, — електрично нейтральне, проте при контакті двох тіл електрони можуть переходити від атомів одного тіла до атомів іншого тіла. Електризація тертям відбувається при контактній взаємодії, при якій атоми контактуючих тіл наближаються настільки, що стає можливим перехід електронів від одного тіла до іншого. Тіло, яке втратило електрони, стає зарядженим додатно, друге тіло, яке отримало електрони, набуває від'ємного заряду. Однойменні заряди відштовхуються один від одного, різнойменні — притягуються.

2. Якщо при контакті двох електрично нейтральних тіл перше тіло втратило  $N$  електронів, то його заряд (додатній)

$$q_1 = Ne;$$

заряд другого тіла (від'ємний) буде

$$q_2 = -Ne,$$

$e$  — найменший заряд, спостережуваний у природі<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> У теорії елементарних частинок передбачається існування фундаментальних частинок — кварків, з яких складаються, зокрема, протони і нейтрони. Одна із найбільш вражаючих особливостей кварків — наявність дробового електричного заряду ( $\pm e/3$ ,  $\pm 2e/3$ ). Питання щодо можливості спостереження кварків є надзвичайно важливим і водночас складним

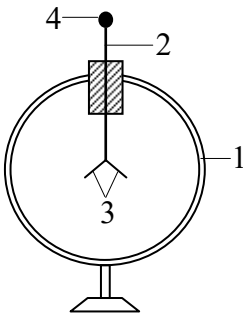


Рис. 1.1

Наявність електричного заряду можна виявити за допомогою *електроскопа* (рис. 1.1). Він складається із корпусу 1, у верхній частині якого є отвір, через який проходить металевий стержень 2, ізолюваний від корпусу. До стержня прикріплені два легкі металеві листочки 3, що можуть відхилитися від стержня. Якщо доторкнутися зарядженим тілом до кульки 4, якою закінчується стержень, то листочки отри-

мають однойменні заряди і розійдуться; кут відхилення листочків буде тим більший, чим більший заряд отримав електроскоп. Цей дослід доводить також, що електричні заряди поширюються по металевому стержню.

За допомогою електроскопа можна визначити і знак заряду (подумайте: як?).

3. При будь-яких процесах, які відбуваються в електрично ізолюваній системі (система не набуває і не втрачає електрично заряджені частинки), *алгебраїчна сума електричних зарядів у системі є величина стала*. Це — закон збереження електричного заряду. Наведений вище приклад двох тіл ілюструє цей закон: до взаємодії  $q=0$  (тіла нейтральні), після взаємодії  $q = q_1 + q_2 = 0$ . Закон збереження заряду не заперечує, проте, можливості парного виникнення і знищення протилежних електричних зарядів. Так, при взаємодії електрона і позитрона (елементарної частинки, аналогічної до електрона, але із додатнім зарядом) виникає фотон (квант світла); за певних умов може відбутися і зворотній процес: фотон перетворюється в пару частинок — електрон і позитрон. Інший приклад: нейтрон (електрично нейтральна частинка, яка входить до складу атомного ядра) може перетворитися в пару протилежно заряджених частинок — протон і електрон.

Електричний заряд є релятивістськи інваріантним — його величина не залежить від системи відліку, тобто не залежить від того рухається заряд чи перебуває у стані спокою.

Одиниця електричного заряду — *кулон* (Кл) визначається в системі СІ як заряд, що проходить за 1 с через поперечний переріз провідника, струм у якому постійний і дорівнює одному *амперу*.

## 1.2 ЗАКОН КУЛОНА

У 1785 р. французький вчений Кулон дослідним шляхом встановив основний закон взаємодії точкових зарядів. Точковим зарядом називають заряджене тіло, розміри якого малі в порівнянні з відстанню від цього тіла до інших заряджених тіл, з якими це тіло взаємодіє. *За законом Кулона два нерухомі точкові заряди взаємодіють між собою у вакуумі з силою, величина якої пропорційна до добутку величин зарядів і обернено пропорційна до квадрату відстані між ними:*

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.2.1)$$

Коефіцієнт пропорційності  $k_0$  залежить від вибору системи одиниць вимірювань. В СІ  $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , де  $\epsilon_0$  — електрична стала;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м (фарад<sup>1</sup>) на метр). Сила  $F$  спрямована по прямій, яка з'єднує заряди, і є притягальною для різнойменних зарядів і відштовхувальною для однойменних.

У векторній формі закон взаємодії двох зарядів визначається формулами

$$\vec{F}_{12} = -k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}, \quad \vec{F}_{21} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e},$$

де  $\vec{F}_{12}$  — сила, яка діє на заряд  $q_1$  з боку заряду  $q_2$ ,  $\vec{F}_{21}$  — сила, що діє на заряд  $q_2$  з боку заряду  $q_1$ ,  $\vec{e}$  — одиничний вектор, спрямований від заряду  $q_1$  до заряду  $q_2$  (рис. 1.2 а, б). Видно, що виконується третій закон Ньютона ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ). Закон Кулона часто записують і у формі

$$\vec{F}_{21} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{F}_{12} = -k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

де  $\vec{r} = r\vec{e}$  — радіус-вектор, проведений від заряду  $q_1$  до заряду  $q_2$  ( $|\vec{r}| = r$ ).

Експериментальні факти стверджують справедливість закону Кулона на відстанях від  $10^{-15}$  м.

<sup>1</sup>) Фарад — одиниця вимірювання ємності



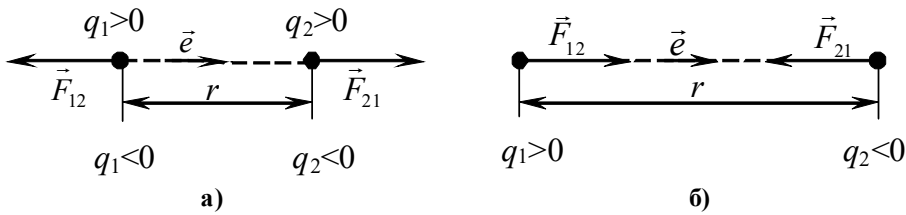


Рис. 1.2: а) взаємодія однойменних зарядів, б) взаємодія різнойменних зарядів

Закон Кулона справджується і для сферичних тіл з рівномірним розподілом заряду, тоді за  $r$  приймається відстань між центрами сфер.

**Приклад.** Дві кульки з масою  $m=0,2$  г підвішені на шовкових нитках так, що їх поверхні доторкаються. Після надання їм заряду, вони розійшлися на віддаль  $d=10$  см. Довжина нитки  $l=50$  см. Знайти заряди кульок  $q$ .

⇒ У стані рівноваги маємо:

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = 0,$$

де  $m\vec{g}$  — сила тяжіння,  $\vec{F}$  — сила Кулона,  $\vec{T}$  — сила натягу нитки. Із рисунка видно, що

$$\frac{F}{mg} = \operatorname{tg} \alpha,$$

звідки

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 g m d^2} = \frac{d}{2l} \Rightarrow$$

$$q = d \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m g d}{l}}.$$

Після підстановки числових даних маємо:

$$q = 10 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-2}}} \text{ Кл} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

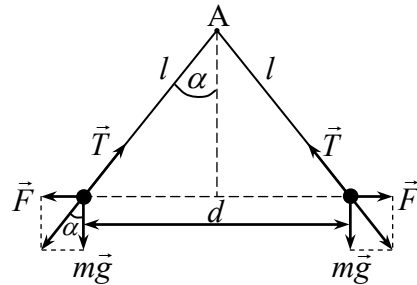


Рис. 1.3

### 1.3 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. НАПРУЖЕНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

**1. Електричне поле. 2. Напруженість електричного поля точкового заряду. 3. Принцип суперпозиції. 4. Електричне поле диполя. 5. Поле на осі тонкого рівномірно зарядженого кільця. 6. Геометричний опис електричного поля. 7. Теорема Гаусса. 8. Застосування теореми Гаусса**

Електричне поле нерухомого заряду чи системи нерухомих зарядів називається *електростатичним* (або *кулонівським*). Зазначимо, що в природі існують електричні поля і без (!) електричних зарядів; це так звані *вихрові електричні поля* (Розділ 9), зумовлені змінним *магнітним полем*. У цьому розділі розглядатимуться лише електростатичні поля. Ці поля створюються зарядженими тілами.

#### *1.3.1 Електричне поле*

Закон Кулона *констатує існування* взаємодії між зарядженими тілами, але не пояснює природи цієї взаємодії. Постає питання: який механізм взаємодії двох просторово розділених зарядів?

Відповідь (за сучасними уявленнями) така: електричний заряд створює навколо себе своєрідне фізичне середовище — *електричне поле*, основною властивістю якого є здатність діяти на інший («пробний») електричний заряд, внесений в якусь точку поля. І, отже, взаємодія між зарядами здійснюється через електричне поле.

Електричне поле чинить силову дію на заряд, вміщений в це поле; за рахунок енергії електричного поля виконується робота по переміщенню електричного заряду.

У відповідності з цим *електричне поле можна означити за допомогою напруженості електричного поля та потенціалу (різниці потенціалів)*.

Напруженість електричного поля є силовою характеристикою поля, потенціал (різниця потенціалів) — енергетичною. Перейдемо до з'ясування цих понять.

## 1.3.2 Напруженість електричного поля точкового заряду

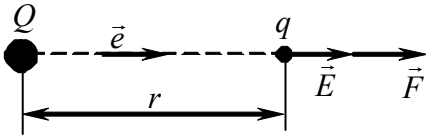


Рис. 1.4

З'ясуємо поняття напруженості електричного поля — силової характеристики електричного поля на прикладі електричного поля точкового заряду.

Нехай маємо нерухомий точковий додатний заряд  $Q$  і додатний заряд  $q$  (пробний заряд), який використовується для виявлення і дослідження електричного поля, створеного зарядом  $Q$ <sup>1)</sup>. Сила, яка діє на пробний заряд

$$\vec{F} = k_0 \frac{Qq}{r^2} \vec{e}$$

(рис. 1.4) може бути записана так:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q, \quad (1.3.1)$$

де

$$\vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \vec{e}. \quad (1.3.2)$$

Запис закону Кулона у формі (1.3.1) можна інтерпретувати з точки зору прояву двох фундаментальних властивостей електричного заряду — створювати електричне поле (заряд  $Q$ ) і взаємодіяти з електричним полем (заряд  $q$ ). Величина  $\vec{E}$  називається *напруженістю електричного поля*, створеного точковим зарядом  $Q$  на відстані  $r$  від цього заряду. Як видно, напруженість електричного поля можна означити як силу, що діє з боку поля на одиничний позитивний заряд в даній точці поля. Цю величину природно взяти за міру інтенсивності електричного поля, створеного зарядом  $Q$ . Напрямок  $\vec{E}$ , показаний на рис. 1.4, відповідає  $Q > 0$ ; якщо  $Q < 0$ , то вектор  $\vec{E}$  буде направлений протилежно до показаного на рис. 1.4. Модуль вектора  $\vec{E}$

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2}. \quad (1.3.3)$$

<sup>1)</sup> Тут ми ввели позначення  $Q$  і  $q$  (а не  $q_1$  і  $q_2$ , як в попередньому параграфі), щоб чіткіше розрізнити заряд, що створює поле ( $Q$ ) і пробний заряд ( $q$ )

Одиниця напруженості електростатичного поля — 1 Н/Кл; це напруженість такого поля, яке діє з силою 1 Н на точковий заряд 1 Кл. Еквівалентна одиниця вимірювання (яка випливає з зв'язку між напруженістю і різницею потенціалів 1 В/м — один вольт на метр<sup>1)</sup>).

$\vec{E}$  за формулою (1.3.3) — напруженість електростатичного поля точкового заряду. Напруженість електростатичного поля системи зарядів визначається за принципом суперпозиції.

### 1.3.3 Принцип суперпозиції

Сила, яка діє на нерухомий точковий пробний заряд  $q$  з боку електричного поля, створеного точковим зарядом  $Q$ , дається формулою (1.3.1). Якщо є система нерухомих точкових зарядів  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , то і в цьому випадку сила  $\vec{F}$ , що діє на пробний заряд  $q$  з боку електричного поля, створеного системою зарядів, може бути подана у вигляді

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

де  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля, створеного системою зарядів.  $\vec{E}$  знаходиться за *принципом суперпозиції*, який стверджує, що напруженість електричного поля системи точкових нерухомих зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожним із зарядів зокрема:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = k_0 \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{e}_i, \quad (1.3.4)$$

де  $r_i$  — відстань від заряду  $Q_i$  до точки, в якій визначається напруженість поля, а  $\vec{e}_i$  — відповідні одиничні вектори.

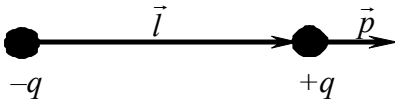
Принцип суперпозиції дозволяє знайти напруженість поля довільної системи зарядів, оскільки будь-який заряд можна розглядати як сукупність точкових зарядів. При цьому часто зручно перейти до уявлення про неперервний розподіл заряду з певною лінійною ( $\lambda$ ), поверхневою ( $\sigma$ ) або об'ємною ( $\rho$ ) густиною заряду за формулами

$$dq = \lambda dl, \quad dq = \sigma dS, \quad dq = \rho dV,$$

де  $dq$  — заряд, який приймається за точковий відповідно на відрізку  $dl$ , на поверхні  $dS$  та в об'ємі  $dV$  (див. п. 1.3.5).

<sup>1)</sup> Див. п. 1.4.6

## 1.3.4 Електричне поле диполя

Рис. 1.5.  $\vec{p}$  — дипольний момент

**Електричний диполь** — система з двох рівних за величиною різнойменних зарядів, розміщених на відстані  $l$ . Дипольним моментом називається величина  $\vec{p} = q\vec{l}$ , де  $\vec{l}$  — вектор, спрямований від від'ємного заряду до додатного

(рис. 1.5). Наявність дипольного момента характерна для молекул багатьох речовин, це поняття широко використовується для пояснення фізичних властивостей діелектриків.

Знайдемо напруженість електричного поля диполя для точок, які розташовані на перпендикулярі, що проходить через середину осі диполя (рис. 1.6).

За принципом суперпозиції напруженість у точці А, яка знаходиться на віддалі  $r$  від осі диполя,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

де  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  — напруженості полів, створених відповідно додатнім і від'ємним зарядами, рівні між собою за абсолютною величиною:

$$E_1 = E_2 = k_0 \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}.$$

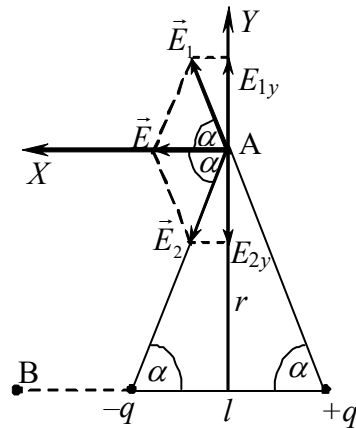


Рис. 1.6

$y$ -компоненти векторів  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  протилежно спрямовані, і внесок у результуючу напруженість дають лише  $x$ -компоненти  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  ( $E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos \alpha$ ), тому

$$E = E_{1x} + E_{2x} = 2E_1 \cos \alpha = k_0 \frac{2q \cos \alpha}{r^2 + \frac{l^2}{4}} = k_0 \frac{2q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

(використано, що проекція вектора на координатну вісь дорівнює сумі проєкцій складових векторів на цю вісь). Введемо позначення  $ql=p$  ( $p = |\vec{p}|$ ). Тоді

$$E \approx k_0 \frac{p}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}. \quad (1.3.5)$$

Якщо  $r \gg l$  (розмір диполя є малим порівняно із відстанню до нього), то

$$E = k_0 \frac{p}{r^3}.$$

Для точки В, яка лежить вздовж осі диполя на відстані  $r$  від середини диполя, величина напруженості поля диполя

$$E = E_1 - E_2,$$

оскільки в цій точці напруженості полів зарядів  $q$  і  $-q$  спрямовані протилежно. Маємо

$$E = k_0 q \left[ \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \Rightarrow$$

$$E = k_0 q \frac{\left(\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2\right)}{\left(\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2\right)}.$$

Якщо  $r \gg l$ , то

$$E \approx k_0 \frac{2p}{r^3}.$$

Отримані результати показують, що напруженість електричного поля диполя спадає зі збільшенням  $r$  швидше, ніж для точкового заряду (як  $\frac{1}{r^3}$ , а не як  $\frac{1}{r^2}$ ). Цей результат можна тлумачити так: на великих відстанях від диполя ( $r \gg l$ ) два заряди протилежного знаку здаються настільки близько розташованими, що «намагаються» нейтралізувати один одного.

## 1.3.5 Поле на осі тонкого рівномірно зарядженого кільця

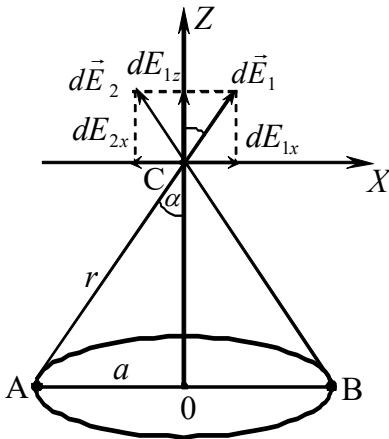


Рис. 1.7

поле  $d\vec{E}_1$ , величина якого

$$dE_1 = k_0 \frac{\lambda dl}{r^2}.$$

$z$ -складова  $d\vec{E}_1$

$$dE_{1z} = k_0 \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha = k_0 \frac{\lambda z dl}{r^3} = k_0 \frac{\lambda z dl}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Всі інші елементи кільця дадуть точно такий самий внесок в  $z$ -компоненту напруженості електричного поля кільця. Таким чином,

$$E_z = \oint_l k_0 \frac{\lambda z dl}{(z^2 + a^2)^{3/2}},$$

де інтегрування ведеться по всіх елементах кільця  $dl$ . Маємо  $\left( \oint_l dl = 2\pi a \right)$ :

$$E_z = k_0 \frac{\lambda \cdot 2\pi a z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = k_0 \frac{qz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (1.3.6)$$

Результуючі  $x$ - і  $y$ -складові  $\vec{E}$  вздовж осі в сумі будуть рівні нулю (тобто  $E_z = E$ ). Переконатися в цьому можна, розглядаючи елементи кільця, розташовані на протилежних кінцях діаметра (так, наприклад, із рис. 1.7 видно, що

Проілюструємо тепер використання інтегральної форми принципу суперпозиції (1.3.4) на прикладі розрахунку напруженості поля заряду  $q > 0$ , рівномірно розподіленого по тонкому кільцю з радіусом  $a$  (рис. 1.7).

Виділимо на кільці в околі точки  $A$  елемент довжиною  $dl$ . Заряд його

$$dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi a} dl$$

де  $\lambda$  — лінійна густина заряду ( $\lambda = \frac{q}{2\pi a}$ ). Заряд  $dq$  створює в точці  $C$

$dE_{1x} + dE_{2x} = 0$ , де  $dE_{1x}$  і  $dE_{2x}$  —  $x$ -складові напруженості поля, що створюється елементами кільця, розташованими в околі точок А і В). Із формули (1.3.6) видно, що на великих відстанях від кільця ( $z \gg a$ )

$$E = k_0 \frac{q}{z^2},$$

що і слід було очікувати: на великих відстанях від зарядженого кільця його електричне поле не відрізняється від поля точкового заряду.

### 1.3.6 Геометричний опис електричного поля

Електричне поле можна зобразити геометрично (графічно) за допомогою *ліній напруженості* електричного поля (*електричних силових ліній*). Цей опис дозволяє в наочній формі характеризувати напрям і модуль напруженості електричного поля. З'ясуємо основні особливості методу.

#### 1.3.6.1 Лінії напруженості (силові лінії)

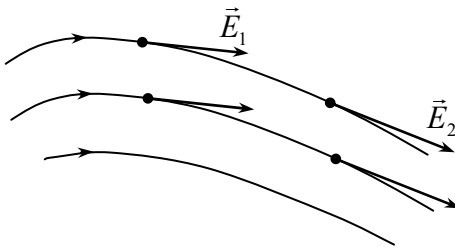


Рис. 1.8

Лінії напруженості — лінії, проведені так, що дотичні до них в кожній точці співпадають з напрямом вектора  $\vec{E}$  (рис. 1.8). Лінії напруженості починаються на додатних зарядах і закінчуються на від'ємних. Оскільки в даній точці поля  $\vec{E}$  має лише одне значення, то

силові лінії не перетинаються. Лініям напруженості приписується напрям, який співпадає з напрямом вектора  $\vec{E}$ .

Якщо поле створене точковим зарядом, то силові лінії — радіальні прямі, які виходять із заряду (заряд додатній), або входять в нього (заряд від'ємний) (рис. 1.9, а, б). Комбінуючи ці два прості випадки, можна, враховуючи принцип суперпозиції, отримати картину силових ліній і для системи зарядів.

Зобразимо, для прикладу, картину поля для диполя. Уявімо собі, що ми визначили напруженість  $\vec{E}$  для всіх точок поля в околі диполя (подібно до знаходження  $\vec{E}$  у п. 1.3.4). Проведемо тепер лінії, які починаються на додат-



ному заряді і закінчуються на від'ємному так, що дотичні до цих ліній в певній точці співпадають з напруженістю електричного поля в цій точці; це — силові лінії диполя (рис. 1.9, в).

Подібно до цього можна дати картину силових ліній поля, створеного двома однойменними зарядами (рис. 1.9, г). Можна переконатися також, використовуючи міркування симетрії, що лінії напруженості нескінченної однорідно зарядженої площини будуть паралельними прямими, що виходять (додатний заряд площини) або входять (від'ємний заряд площини) з площини (рис. 1.9, д). Електричне поле між двома такими паралельними площинами (рис. 1.9, е) зобразиться паралельними лініями напруженості у проміжку між площинами; поза цим проміжком поле буде відсутнє (так моделюється електричне поле плоского конденсатора).

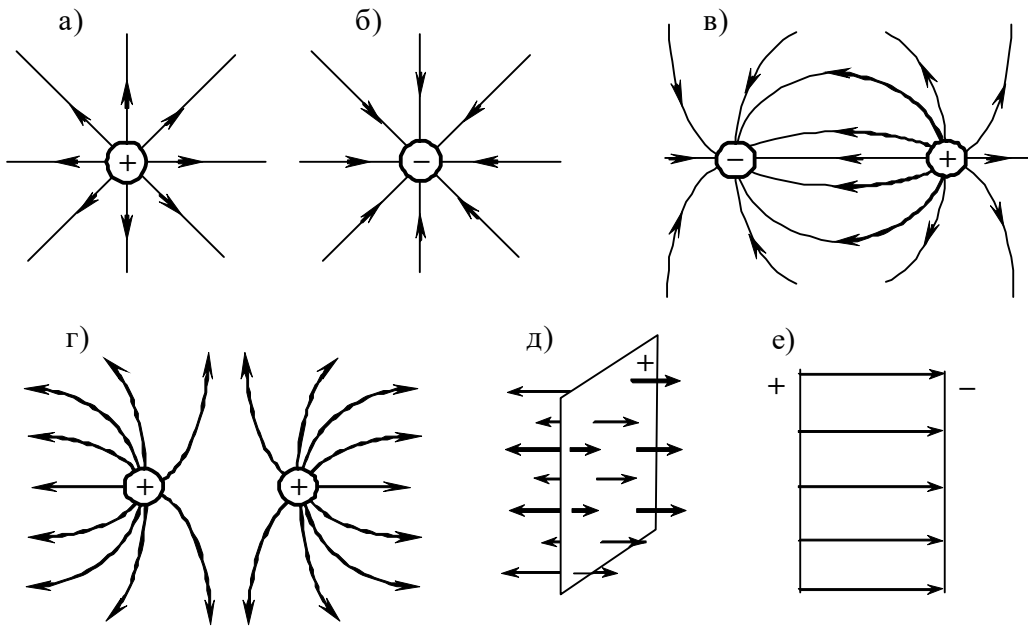


Рис. 1.9

Лінії напруженості можуть характеризувати поле не тільки якісно (вказувати напрям ліній вектора  $\vec{E}$ ), але і кількісно. З цією метою лінії вектора  $\vec{E}$  проводять так, щоб густина цих ліній — число ліній, які пронизують одиничну площадку, перпендикулярну до ліній в даній точці, була пропорційна до модуля вектора  $\vec{E}$ .

Поле, у всіх точках якого величина і напрям вектора  $\vec{E}$  однакові ( $\vec{E} = \text{const}$ ), називається однорідним. Поля, зображені на рис. 1.9, д, е — однорідні.

### 1.3.6.2 Потік напруженості електричного поля<sup>1)</sup>

1. Розглянемо однорідне електричне поле. В цьому випадку потік напруженості електричного поля через плоску поверхню, площа якої  $S$ , дорівнює

$$\Phi_e = ES \cos \alpha = E_n S, \quad (1.3.7)$$

де  $\alpha$  — кут між векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{n}$ ; ( $\vec{n}$  — нормаль до поверхні  $S$ ),  $E_n$  — проекція вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  (рис. 1.10).

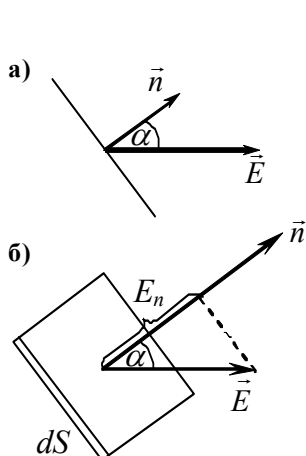


Рис. 1.10

Якщо вважати, що густина ліній  $\vec{E}$  дорівнює модулю вектора  $\vec{E}$ , то  $\Phi_e$ <sup>2)</sup> — кількість ліній напруженості, які пронизують площадку  $S$ .

$\Phi_e$  — величина алгебраїчна, знак якої залежить від вибору напрямку  $\vec{n}$  (він може бути довільний — один з двох можливих напрямків вздовж нормалі).

2. Якщо поле неоднорідне, а поверхня  $S$  не плоска, то потік напруженості через цю поверхню знаходиться через сумування (інтегрування) потоків  $d\Phi_e$ , які пронизують елементарні плоскі площадки  $dS$ ; в межах

даної елементарної площадки вектор  $\vec{E}$  вважається сталим (рис. 1.10, б):

$$d\Phi_e = E dS \cos \alpha,$$

або

<sup>1)</sup> При опрацюванні цього параграфу корисно ознайомитися із п. 3 «Математичного доповнення»

<sup>2)</sup> Ми вживаємо позначення  $\Phi$  з індексом «e» щоб підкреслити, що мова йде про електричні силові лінії. При вивченні магнетизму вживається величина  $\Phi$  (без індексу) для позначення потоку магнітних силових ліній

$$d\Phi_e = E_n dS = \vec{E} d\vec{S},$$

де  $E_n$  — проекція вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  до площадки  $dS$ ,  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  — одиничний вектор нормалі до площадки).

Отже, якщо є довільна поверхня  $S$ , то потік вектора  $E$  крізь цю поверхню

$$\Phi_e = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}, \quad (1.3.8)$$

3. Якщо поверхня  $S$  замкнута, то потік вектора  $\vec{E}$

$$\Phi_e = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.3.9)$$

Для випадку замкнутих поверхонь за додатній напрям нормалі приймаємо нормаль, яка спрямована назовні області, охопленої поверхнею. У відповідності з цим потік, який входить в замкнутий об'єм, від'ємний (бо  $E_n dS < 0$ ), а потік, який виходить із об'єму, — додатний ( $E_n dS > 0$ ).

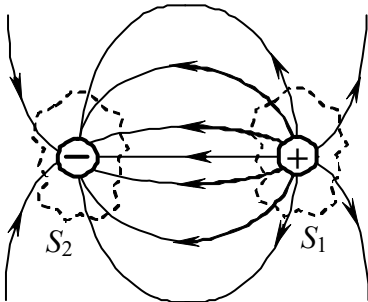


Рис. 1.11

Якщо всередині деякого об'єму, обмеженого замкнутою поверхнею, відсутні заряди, то кількість силових ліній, які входять в об'єм, дорівнює кількості силових ліній, які виходять із цього об'єму. Потік  $\Phi_e$  через поверхню дорівнює нулю і в тому випадку, коли всередині замкнутої поверхні є заряди, але додатний заряд компенсується від'ємним.  $\Phi_e \neq 0$  через замкнуту поверхню тільки в тому випадку, коли вона

охоплює нескомпенсований заряд. Сказане ілюструє рис. 1.11, де зображене електричне поле диполя. Потік через поверхню  $S_1$ , яка оточує заряд  $+q$ , спрямований назовні ( $\Phi_e > 0$ ), а потік через поверхню  $S_2$  спрямований всередину поверхні ( $\Phi_e < 0$ ); за абсолютною величиною потоки рівні. Потік  $\Phi_e$  через будь-яку замкнуту поверхню, що охоплює обидва заряди дорівнює нулю: кількість силових ліній, які входять у цю поверхню, компенсується такою ж кількістю силових ліній, які виходять з даної поверхні.

### 1.3.7 Теорема Гаусса

Нехай ми маємо електричне поле, створене довільною системою зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Виділимо в ньому певний об'єм, обмежений замкнутою поверхнею. Виявляється, що між потоком напруженості електричного поля, який пронизує замкнуту поверхню, і алгебраїчною сумою зарядів, оточених цією поверхнею, існує зв'язок:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}, \quad (1.3.10)$$

де  $\sum q_i$  — алгебраїчна сума зарядів, оточених поверхнею  $S$ . Це — *теорема Гаусса*. Вона є, зокрема, корисною для розрахунку електричних полів у випадку, коли розподіл зарядів характеризується певною симетрією (див. далі п. 1.3.8).

Переконаємося у справедливості теореми Гаусса на конкретних прикладах.

Якщо у виділеній області відсутні заряди, або алгебраїчна сума зарядів дорівнює нулю (у правій частині формули (1.3.10) — нуль), то  $\oint \vec{E} d\vec{S}$  справді дорівнює нулю (кількість силових ліній, які входять у замкнуту поверхню дорівнює кількості силових ліній, які виходять за межі поверхні).

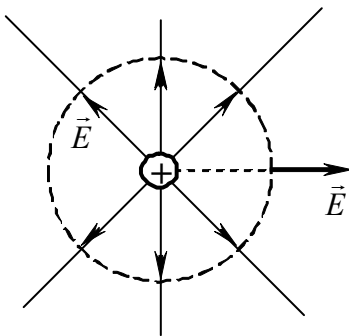


Рис. 1.12

У випадку точкового заряду  $q$  (візьмемо  $q > 0$ ) оточимо його уявною сферою радіуса  $r_0$  (рис. 1.12). Оскільки для будь-якої точки на сфері  $\vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha = E_n dS = E dS$  (силові лінії точкового заряду — радіальні прямі), то із врахуванням того, що для всіх точок на сфері радіуса  $r_0$

$$E = k_0 \frac{q}{r_0^2},$$

маємо:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S k_0 \frac{q}{r_0^2} dS = k_0 \frac{q}{r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

де використано, що

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \oint_S dS = 4\pi r_0^2$$

(площа сфери з радіусом  $r_0$ ). Якщо замість сферичної замкнутої поверхні обрати якусь іншу замкнуту поверхню, то і в цьому випадку потік напруженості електричного поля дорівнюватиме  $q/\epsilon_0$ .

Поширення міркувань, приведених вище, на довільну систему зарядів, оточених замкнутою поверхнею, дозволяє переконатися у справедливості теореми Гаусса і у загальному випадку.

### 1.3.8 Застосування теореми Гаусса

Напруженість електричного поля довільної системи зарядів можна розраховувати за формулою (1.3.5). Проте у тих випадках, коли розподіл зарядів характеризується певною симетрією, ефективним є використання теореми Гаусса. Розглянемо конкретні приклади.

1. *Поле однорідно зарядженої сферичної поверхні.* По тонкій сферичній оболонці з радіусом  $r_0$  рівномірно розподілений заряд  $q$  (рис. 1.13). Потрібно знайти напруженість електричного поля  $\vec{E}$  поза сферою та всередині сфери. Така задача постає при дослідженні поля зарядженої провідної сфери (в цьому випадку заряд розподілений в тонкому поверхневому шарі).

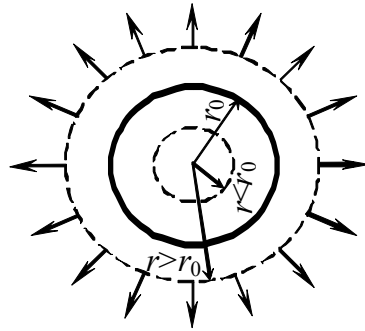


Рис. 1.13  $r_0$  — радіус зарядженої сферичної поверхні. Штрихами відображені уявні сферичні поверхні

Заряд розподілений симетрично, тому і електричне поле повинно бути симетричним (центрально-симетричним). Це означає, що вектор  $\vec{E}$  в будь-якій точці спрямований вздовж радіуса сфери від поверхні сфери ( $q>0$ ), або до неї ( $q<0$ ) (на рис. 1.13 розглянуто випадок  $q>0$ ). При цьому величина напруженості електричного поля буде функцією відстані  $r$  від центра сфери ( $E=E(r)$ ).

Уявимо концентричну із зарядженою сферою поверхню з радіусом  $r > r_0$ . Оскільки напруженість  $\vec{E}$  в будь-якій точці сфери перпендикулярна до поверхні, то  $E_n = E$ , тому потік напруженості через уявну поверхню з радіусом  $r$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2.$$

За теоремою Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_0 \frac{q}{r^2} \quad (r > r_0). \quad (1.3.11)$$

Якщо вибрати уявну сферу з радіусом  $r < r_0$ , то за теоремою Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

(заряд всередині сфери відсутній), тому

$$E = 0 \quad (r < r_0),$$

тобто всередині сферичної поверхні поле відсутнє.

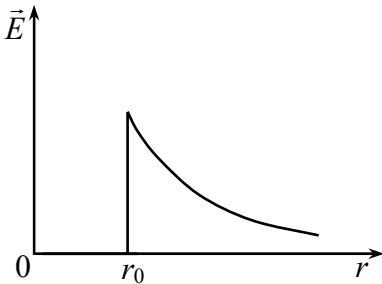


Рис. 1.14

Графік залежності напруженості електричного поля від відстані  $r$  між її центром і точкою, в якій визначають напруженість, показаний на рис. 1.14.

2. *Поле двох концентричних тонких сферичних оболонок із зарядами  $+q$  і  $-q$  (сферичний конденсатор).*

Використовуючи отриманий вище результат, а також принцип суперпозиції полів, можна переконатися, що поле зосереджене лише в проміжку між оболонками (поле поза сферами і поле всередині меншої сфери відсутні), причому величина напруженості дається виразом (1.3.11).

3. *Поле однорідно зарядженої кулі.* Це — поле електричного заряду, який рівномірно розподілений по об'єму непровідної кулі з радіусом  $r_0$  (для випадку провідної кулі заряд розподіляється біля поверхні провідника).

Розподіл напруженості знайдемо за теоремою Гаусса подібно до випадку зарядженої оболонки. Оскільки заряд розподілений всередині кулі рівномірно, електричне поле буде центральносиметричним і в цьому випадку.

Поле поза кулею ( $r > r_0$ ) знайдемо за допомогою міркувань, аналогічних до випадку зарядженої сфери. Маємо

$$E = k_0 \frac{q}{r^2} \quad (r > r_0). \quad (1.3.12)$$

Поле всередині кулі знайдемо так. Як і для випадку зарядженої сфери, потік  $\vec{E}$  через уявну сферичну поверхню з радіусом  $r$  ( $r < r_0$ ) є

$$\Phi_e = E \cdot 4\pi r^2.$$

За теоремою Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0}, \quad (1.3.13)$$

де  $q' = \rho V$  — заряд, що охоплює уявну сферу, а  $\rho$  — об'ємна густина заряду,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Заряд розподілений в кулі рівномірно, тому

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

і

$$q' = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{r_0^3}.$$

Підстановка  $q'$  у формулу (1.3.13) дає

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3}{r_0^3} \Rightarrow;$$

$$E = k_0 \frac{qr}{r_0^3} \quad (1.3.14)$$

$$(k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}).$$

Залежність  $E(r)$  за формулами (1.3.12) і (1.3.14) показана на рис. 1.15. Видно, що зі збільшенням віддалі  $r$  від центра кулі напруженості поля споча-

тку лінійно зростає (до  $r=r_0$ ) за формулою (1.3.14), а потім спадає як  $1/r^2$  (формула (1.3.12)).

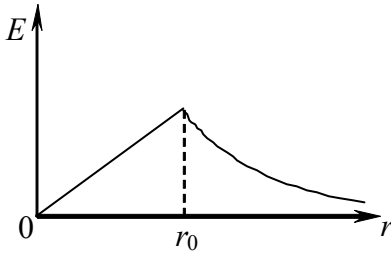


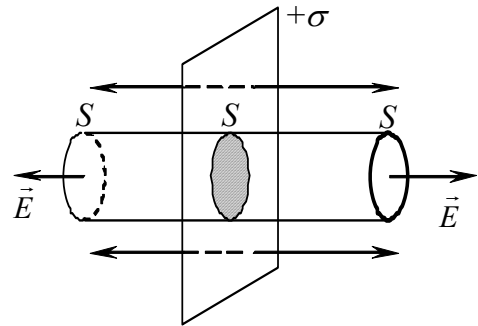
Рис. 1.15

4. Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини.

Припустимо, що є рівномірно заряджена безмежна площина з поверхневою густиною заряду  $\sigma$  ( $\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow \frac{q}{S}$ ). З міркувань симетрії очевидно, що електричне поле такої площини однорідне і силові лінії поля

нормальні до площини (виходять з площини, якщо  $\sigma > 0$ , і входять в неї, якщо  $\sigma < 0$ ).

Для знаходження напруженості за допомогою теореми Гаусса замкнуту поверхню в даному випадку зручно вибрати у формі циліндра з твірною, що перпендикулярна до зарядженої площини, і основами  $S$ , які охоплюють ділянку зарядженої площини (рис. 1.16).

Рис. 1.16  $S$  — площа основи циліндра, який охоплює заряд  $q = \sigma S$ 

При знаходженні потоку вектора  $\vec{E}$  через обрану циліндричну поверхню врахуємо, що вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до основ цього циліндра. Тому, оскільки потік через бокову поверхню циліндра дорівнює нулю,

$$\Phi_e = 2ES$$

(врахований потік через обидві основи циліндра).

За теоремою Гаусса

$$2ES = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow ;$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$



де  $q = \sigma S$  — заряд, обмежений поверхнею циліндра. Отже,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.3.15)$$

Важливою особливістю отриманого результату є незалежність напруженості від віддалі точки спостереження до площини.

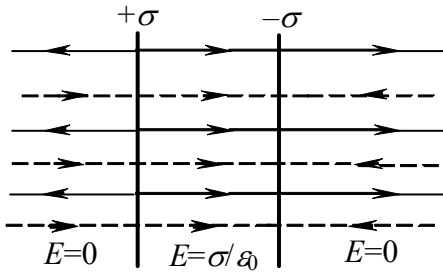


Рис. 1.17

5. Поле двох безмежних паралельних площин, різнойменно заряджених з густинами  $+\sigma$  і  $-\sigma$  (рис. 1.17).

Користуючись попереднім результатом і принципом суперпозиції, отримуємо, що напруженість поля поза площинами дорівнює нулю, а між площинами

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.3.16)$$

Отриманий результат можна використати для розрахунку поля всередині плоского конденсатора, якщо знехтувати так званими крайовими ефектами, зумовленими скінченними розмірами пластин конденсатора.

6. Поле нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра.

Розглянемо циліндр з радіусом  $r_0$  і довжиною  $l$ , заряд якого  $q$  рівномірно розподілений по поверхні вздовж довжини циліндра. Величина  $\lambda = \frac{q}{l}$  є лінійною густиною заряду.

Прийmemo, що відстань  $r$  від осі циліндра до точки  $A$ , в якій визначається напруженість електричного поля, набагато менша від довжини циліндра ( $r \ll l$ ); у цьому разі циліндр можна вважати нескінченно довгим. Із міркувань симетрії випливає тоді, що лінії напруженості будуть спрямовані вздовж радіусів кругових перерізів циліндра з однаковою густиною у всі боки від осі циліндра.

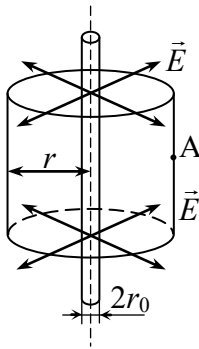


Рис. 1.18

Виділимо довільну ділянку циліндра довжиною  $l$  і охопимо її поверхнею циліндра (коаксіального із заданим циліндром) радіуса  $r$ ; заряд всередині цієї уявної поверхні  $q' = \lambda l$ .

Оскільки лінії вектора  $\vec{E}$  нормальні до бічної поверхні циліндра, то потік  $\Phi_E$  пронизує лише бокову поверхню допоміжного циліндра, площа якої  $2\pi r l$ . Отже

$$\Phi_E = 2\pi r l E.$$

За теоремою Гаусса

$$2\pi r l E = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow,$$

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (1.3.17)$$

У цій формулі  $r \gg r_0$ . Якщо ж  $r < r_0$ , то  $E=0$  (поле всередині циліндра відсутнє); результат, аналогічний випадку сфери з рівномірним розподілом заряду по поверхні.

#### 1.4 РОБОТА СИЛ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦІАЛ. РІЗНИЦЯ ПОТЕНЦІАЛІВ

**1. Робота сил електростатичного поля. 2. Потенціальна енергія взаємодіючих зарядів. 3. Потенціал. 4. Різниця потенціалів. 5. Еквівалентні поверхні. 6. Зв'язок між напруженістю і потенціалом. 7. Знаходження різниці потенціалів за відомою напруженістю електричного поля**

Як зазначалося вище, електростатичне поле можна описувати не лише за допомогою напруженості  $\vec{E}$  (силова характеристика електричного поля), але і за допомогою енергетичної характеристики — потенціалу, величини, пов'язаної із виконанням роботи по переміщенню заряду електричним полем.

1.4.1 Робота сил електростатичного поля

Розглянемо спочатку простий (і надзвичайно важливий) приклад переміщення точкового заряду  $q$  в електростатичному полі, створеному точковим зарядом  $Q$  (для означеності приймемо  $Q>0, q>0$ )<sup>1)</sup>.

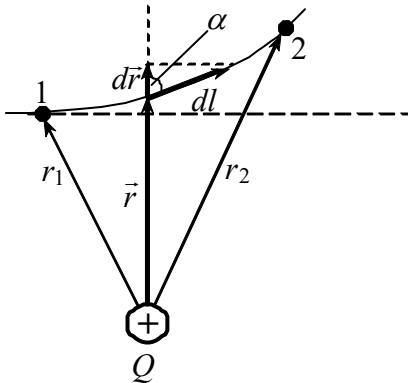


Рис. 1.19 Рух додатнього заряду  $q$  в полі нерухомого заряду  $Q$ . Штрихована лінія – початковий напрям руху заряду  $q$ , суцільна лінія – траєкторія руху заряду  $q$ , зумовлена дією електростатичного поля, створеного зарядом  $Q$

Нехай заряд  $q$  рухається «із нескінченності» в напрямку нерухомого заряду  $Q$ . Дія кулонівської сили призведе до зміни початкового напрямку руху заряду  $q$  (штрихована пряма) і заряд рухатиметься по траєкторії, показаній на рис. 1.19 суцільною лінією.

Елементарна робота кулонівської сили

$$dA = \vec{F}d\vec{l},$$

де

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

$d\vec{l}$  — елементарне переміщення,  
 $\vec{E}$  — напруженість поля, створено-

ного зарядом  $Q$ ;

$$\vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , ( $r = |\vec{r}|$ ). Оскільки  $\vec{F}d\vec{l} = qEdl \cos \alpha = qE dr$ , то можна записати

$$dA = qE dr.$$

Робота поля при переміщенні заряду із точки 1 у точку 2

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = q \int_1^2 E dr. \tag{1.4.1}$$

<sup>1)</sup> Приклад відображає ідею знаменитих дослідів Резерфорда (1911 р.) по розсіюванню додатно заряджених  $\alpha$ -частинок в полі ядер атомів; ці досліди призвели до сучасних уявлень про будову атома.

Оскільки величина напруженості

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2},$$

то

$$A = k_0 q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{r^2} dr = - \left. \frac{k_0 q Q}{r} \right|_{r_1}^{r_2} = k_0 q Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.4.2)$$

*Важливий наслідок* з отриманого виразу той, що робота, виконувана силами електричного поля, не залежить від форми шляху, а визначається лише положенням початкової і кінцевої точок знаходження рухомого заряду (для іншої траєкторії руху робота сил поля буде така сама, якщо початкові та кінцеві положення будуть ті самі).

Інший наслідок: якщо рух заряду відбувається по замкнутій траєкторії, тобто кінцева точка співпадає з початковою ( $r_1=r_2$ ), то робота сил поля дорівнює нулю:

$$q \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

або

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.4.3)$$

Цей інтеграл називається *циркуляцією вектора  $\vec{E}$  вздовж замкнутого контура  $L$* <sup>1)</sup>.

Вище розглядалося електростатичне поле, створене точковим зарядом  $Q$ . Якщо поле створене системою нерухомих зарядів, то робота рівнодійної сили буде дорівнювати алгебраїчній сумі робіт складових сил. Це призведе до узагальнення формули (1.4.2), але висновок щодо характеру потенціального характеру електростатичного поля залишаться справедливими і для поля, створеного системою зарядів.

Векторні поля, які задовольняють умові (1.4.3), називаються потенціальними, отже *електростатичне поле — потенціальне*.

Незалежність роботи сил електростатичного поля від форми шляху (або рівність нулю циркуляції напруженості електростатичного поля) дозволяє ввести поняття потенціалу електростатичного поля та різниці потенціалів.

<sup>1)</sup> Тут корисно ознайомитися із п. 4. *Математичного доповнення*

### 1.4.2 Потенціальна енергія взаємодіючих зарядів

При енергетичному способі опису електростатичного поля (опис за допомогою потенціалу) вводяться скалярні характеристики поля — потенціальна енергія, потенціал, різниця потенціалів; ці величини визначаються відповідною роботою сил поля (або роботою зовнішніх сил, що виконуються проти сил поля). Хоча опис поля за допомогою потенціалу і еквівалентний опису за допомогою напруженості  $\vec{E}$ , він у багатьох випадках простіший і наочніший.

Введемо поняття потенціальної енергії електростатичного поля, потенціалу та різниці потенціалів на прикладі електричного поля, створеного нерухомим точковим зарядом  $Q$ , користуючись виразом

$$A = k_0 Q q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

для роботи сил поля при переміщенні точкового заряду  $q$  між двома точками поля, створеного зарядом  $Q$ ;  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  — початкове і кінцеве положення заряду  $q$  (рис. 1.15).

1. Структура виразу вказує на доцільність введення величин

$$W_1 = k_0 Q q \frac{1}{r_1} + C, \quad W_2 = k_0 Q q \frac{1}{r_2} + C, \quad (1.4.4)$$

після чого маємо

$$A = W_1 - W_2 \quad (1.4.5)$$

або

$$A = -(W_2 - W_1) = -\Delta W. \quad (1.4.6)$$

Останні два вирази мають прямий фізичний зміст: робота сил електростатичного поля виконується за рахунок зміни (зменшення) потенціальної енергії. При цьому  $W_1$  є потенціальна енергія заряду  $q$  в початковій точці ( $\vec{r}_1$ ), а  $W_2$  — в кінцевій ( $\vec{r}_2$ ). Як видно, потенціальні енергії означені з точністю до довільної сталої величини  $C$  (різниця  $W_1 - W_2$  не містить величини  $C$ !). Цю сталу покладають рівною нулю на основі такого міркування. Прийmemo, що на безмежно великій віддалі від заряду  $Q$  потенціальна енергія заряду  $q$  дорівнює нулю. Тоді, покладаючи у виразах (1.4.4)  $r_1 \rightarrow \infty$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$  отримуємо, що  $C=0$ . Звідси маємо, що

$$W_1 = k_0 Qq \frac{1}{r_1}, \quad W_2 = k_0 Qq \frac{1}{r_2}.$$

Таким чином, потенціальна енергія заряду  $q$ , який знаходиться на віддалі  $r$  від точкового заряду  $Q$

$$W = k_0 \frac{Qq}{r}. \quad (1.4.7)$$

Ця величина дорівнює роботі сил поля по переміщенню заряду  $q$  із даної точки поля (яка знаходиться на віддалі  $r$  від заряду  $Q$ ) у безмежність. Справді, в цьому випадку  $r_1=r$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$  і з формули (1.4.2) отримуємо:

$$A = W = k_0 \frac{Qq}{r}.$$

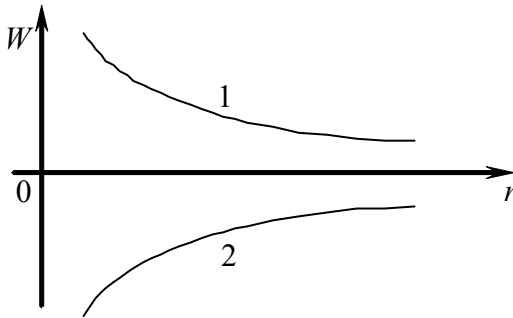


Рис. 1.20 Залежності потенціальної енергії двох точкових зарядів від віддалі між ними. Крива 1 відповідає однойменним зарядам, крива 2 — різнойменним

Якщо заряди  $Q$  і  $q$  однойменні, то потенціальна енергія їх взаємодії (відштовхування) додатна і зменшується при віддаленні цих зарядів (рис. 1.20). Для випадку притягання (заряди різнойменні) потенціальна енергія від'ємна і зменшується при наближенні зарядів (рис. 1.20).

Якщо заряд  $q$  знаходиться в полі точкових зарядів  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , то потенціальна енергія заряду  $q$  дорівнює алгебраїчній сумі його потенціальних енергій в полях, створених кожним із зарядів  $Q_i$  зокрема:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = k_0 q \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}, \quad (1.4.8)$$

де  $r_i$  — відстані між зарядами  $q$  і  $Q_i$ .

### 1.4.3 Потенціал

Із формул (1.4.7) і (1.4.8) видно, що відношення  $W/q$  не залежить від величини заряду  $q$  і може слугувати як енергетична характеристика електрос-

татичного поля, створеного зарядом чи системою зарядів. Це відношення і є потенціалом електростатичного поля  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{W}{q}. \quad (1.4.9)$$

Потенціал поля точкового заряду  $Q$  на віддалі  $r$  від нього

$$\varphi = k_0 \frac{Q}{r} \quad (1.4.10)$$

(за формулою (1.4.7), при цьому потенціал на нескінченності приймається рівним нулю).

Для системи зарядів

$$\varphi = k_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}, \quad (1.4.11)$$

де  $r_i$  — відстані від точки поля, потенціал  $\varphi$  в якій розраховують, до заряду  $Q_i$ . Якщо заряди розподілені неперервно, то задача зводиться до відповідного інтегрування по об'єму (об'ємний розподіл заряду), по поверхні (поверхневий розподіл заряду), або вздовж лінії (при лінійному розподілі заряду). Так, якщо заряд розподілений по об'єму  $V$ , (1.4.11) набуває вигляду

$$\varphi = k_0 \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (1.4.11, a)$$

де  $\rho$  — об'ємна густина заряду.

Оскільки  $\varphi = W/q$ , то потенціал електростатичного поля чисельно дорівнює потенціальній енергії одиничного додатного заряду в даній точці поля. Потенціал можна означити і як роботу, виконувану силами поля при переміщенні одиничного додатного заряду з даної точки поля у нескінченність:

$$\int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{l} = \int_r^{\infty} E dr = k_0 Q \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = k_0 \frac{Q}{r}.$$

При переміщенні одиничного позитивного заряду із безмежності у дану точку поля виконується така сама робота (проти сил поля).

Одиницею вимірювання потенціалу є вольт (В); 1 В=1 Дж/1 Кл.

### 1.4.4 Різниця потенціалів

Якщо заряд  $q$  переміщається із точки поля з потенціалом  $\varphi_1$  у точку поля з потенціалом  $\varphi_2$ , то роботу сил поля можна записати так:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.4.12)$$

(використані формули (1.4.2) та (1.4.9)).  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  називають *різницею потенціалів* між точками 1 і 2<sup>1)</sup>. Вираз (1.4.12) можна подати і у формі

$$A = -q(\varphi_2 - \varphi_1),$$

або

$$A = -q\Delta\varphi, \quad (1.4.13)$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  — зміна потенціалу.

Якщо при переміщенні заряду  $q$  потенціал змінився на величину  $d\varphi$ , то робота сил поля

$$dA = -qd\varphi.$$

Повна робота, виконана при переміщенні заряду  $q$  із точки поля з потенціалом  $\varphi_1$  в точку поля з потенціалом  $\varphi_2$

$$A = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qd\varphi.$$

Ця формула справедлива і за умови, що  $q$  — величина змінна (заряд, розряд конденсатора). Якщо  $q = \text{const}$ , то приходимо до формули (1.4.12).

Оскільки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q},$$

то різниця потенціалів між двома точками поля чисельно дорівнює роботі перенесення одиниці додатного заряду між цими точками поля.

За одиницю різниці потенціалів приймається один вольт. Різниця потенціалів між двома точками поля дорівнює одному вольту, якщо для переміщення між ними заряду 1 кулон потрібно виконати роботу 1 джоуль:  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$ .

### 1.4.5 Еквіпотенціальні поверхні

Графічне зображення електростатичного поля при його енергетичному описі (за допомогою потенціалу) здійснюється за допомогою еквіпотенціаль-

---

<sup>1)</sup> Вживається також термін *напруга*. Варто мати на увазі, що поняття *напруга* більш широке, ніж поняття *різниця потенціалів* (див. розділ 2)



них поверхонь. Еквіпотенціальна поверхня — поверхня, для всіх точок якої потенціал має одне і теж значення:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const};$$

для електростатичного поля у площині маємо еквіпотенціальну лінію ( $\varphi(x, y) = \text{const}$ ). Для випадку точкового заряду ( $\varphi = k_0 \frac{Q}{r}$ ) еквіпотенціальні поверхні є концентричними сферами (рис. 1.21).

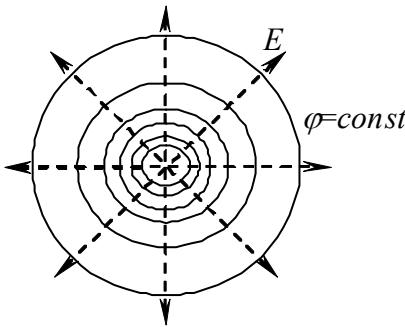


Рис. 1.21 — Еквіпотенціальні поверхні точкового заряду — концентричні сфери. Силіві лінії — радіальні прямі

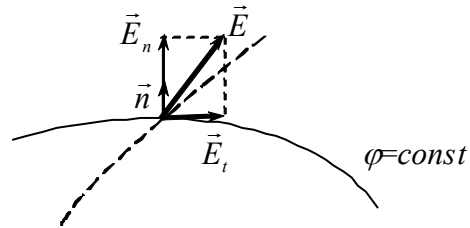


Рис. 1.22 — Зображений гіпотетичний (уявний) випадок: напруженість поля  $\vec{E}$  має тангенціальну (вздовж еквіпотенціальної поверхні) складову. Еквіпотенціальна лінія зображена суцільною лінією; силова лінія штрихована. Насправді  $\vec{E}_t = 0$ ,  $\vec{E}_n = \vec{E}$ .  $\vec{n}$  — одиничний вектор нормалі

Основна властивість еквіпотенціальної поверхні: робота сил електростатичного поля по переміщенню заряду по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю. Справді:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

бо  $\varphi_1 = \varphi_2$  для всіх точок, які лежать на еквіпотенціальній поверхні.

Лінії напруженості завжди нормальні (перпендикулярні) до еквіпотенціальної поверхні. Для точкового заряду це очевидно: силіві лінії — радіальні прямі, еквіпотенціальні поверхні — концентричні кола. У загальному випадку можна міркувати так: якщо б на еквіпотенціальній поверхні існувала б дотична складова напруженості електричного поля  $\vec{E}$  ( $\vec{E}_t$  на рис. 1.22), то робота по переміщенню заряду вздовж еквіпотенціальної поверхні не дорівнювала б нулю, а це суперечить основній властивості еквіпотенціальної поверхні. Таким чином, лінії вектора  $\vec{E}$  перпендикулярні до цих поверхонь.

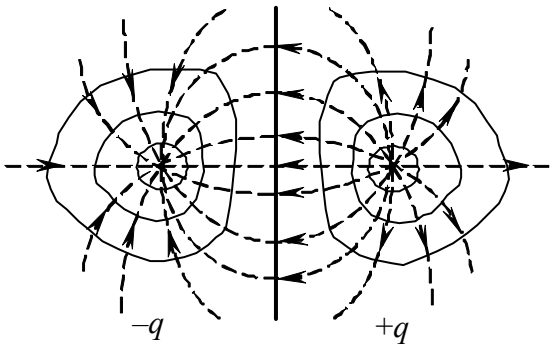


Рис. 1.23

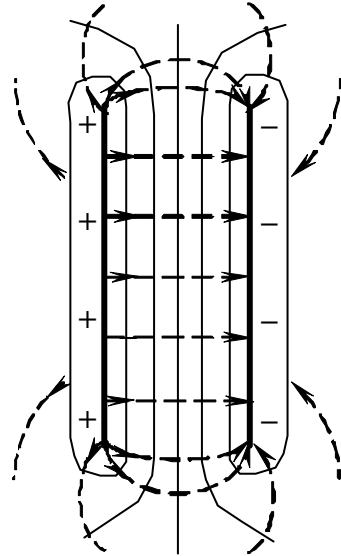


Рис. 1.24

За допомогою еквіпотенціальних поверхонь електростатичне поле можна характеризувати не тільки з якісного боку (відтворюється конфігурація поля), але і кількісно. З цією метою їх проводять так, щоб потенціали сусідніх еквіпотенціальних поверхонь відрізнялися на одиницю потенціалу. Тоді густина еквіпотенціальних поверхонь (число поверхонь, які перетинають одиницю довжини силової лінії) буде дорівнювати напруженості електричного поля; чим ближче одна від одної будуть проходити еквіпотенціальні поверхні, тим сильніше поле.

За відомою картиною силових ліній можна побудувати еквіпотенціальні поверхні і, навпаки, за відомими еквіпотенціальними поверхнями знайти  $\vec{E}$  в кожній точці поля. На рис. 1.23, рис. 1.24 зображені картини електричних полів диполя і конденсатора. На рис. 1.24 силові лінії зображені із врахуванням «крайових ефектів» (на відміну від рис. 1.14).

#### 1.4.6 Зв'язок між напруженістю і потенціалом

Нехай заряд  $q$  переміщається у напрямку  $\vec{l}$  із точки 1 у точку 2 (рис. 1.25, а). При нескінченно малому переміщенні  $d\vec{l}$  заряду  $q$  робота сил поля

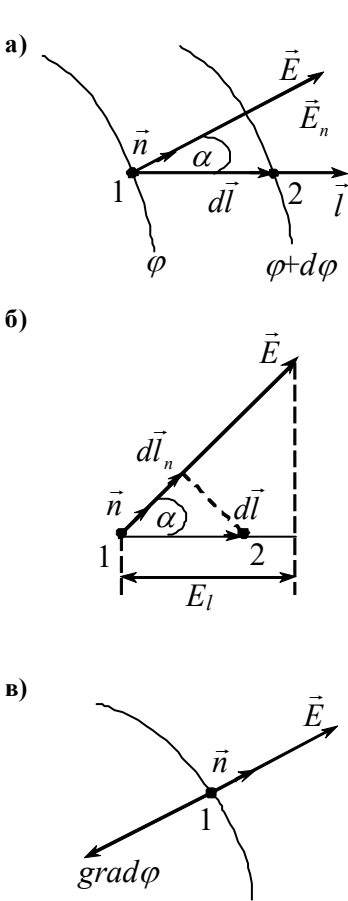


Рис. 1.25

або, навпаки, — знайти  $\vec{E}$  за розподілом потенціалу  $\varphi$ . Зв'язок між різницею потенціалів і напруженістю поля знаходиться через інтегрування виразу (1.4.14):

$$\vec{E}d\vec{l} = -d\varphi \Rightarrow \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \Rightarrow$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{1.4.15, а}$$

або

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}.$$

З «енергетичної» точки зору

$$dA = -qd\varphi.$$

Звідси маємо, прирівнюючи праві частини останніх виразів:

$$q\vec{E}d\vec{l} = -qd\varphi$$

або

$$\vec{E}d\vec{l} = -d\varphi \tag{1.4.14, а}$$

і, оскільки  $\vec{E}d\vec{l} = Edl \cos \alpha = E_l dl$  ( $E_l = E \cos \alpha$  — проекція  $\vec{E}$  на напрям переміщення — рис. 1.21, б), то замість (1.4.14, а) можна записати:

$$E_l dl = -d\varphi. \tag{1.4.14, б}$$

Вирази (1.4.14) описують зв'язок між напруженістю електричного поля, — силовою характеристикою поля, і потенціалом  $\varphi$ , — енергетичною характеристикою поля. Важливість отриманого результату полягає, насамперед, в тому, що він дозволяє знайти різницю потенціалів між двома точками поля за відомою залежністю  $\vec{E}$  від координат,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl. \quad (1.4.15, б)$$

Проекція  $\vec{E}$  на напрям переміщення  $\vec{l}$  знаходиться із формули (1.4.14, б):

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Оскільки  $\vec{l}$  — один із множини можливих напрямків, то  $d\varphi/dl$  записують у вигляді частинної похідної  $\partial\varphi/\partial l$ . Вона називається похідною від потенціалу  $\varphi$  по напрямку  $\vec{l}$  і означає швидкість зміни потенціалу у цьому напрямку<sup>1)</sup>. Маємо:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (1.4.16)$$

Формула (1.4.16) дозволяє знайти складову напруженості електричного поля у певному напрямку за зміною потенціалу у цьому напрямку.

Для проєкцій вектора  $\vec{E}$  на координатні осі  $X, Y, Z$  маємо:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

тут частинні похідні відображають швидкість зміни потенціалу вздовж відповідного напрямку. Отже,

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.4.17)$$

Покажемо, що напрям найшвидшої зміни потенціалу лежить вздовж нормалі  $\vec{n}$  до екіпотенціальної поверхні у точці 1 (рис. 1.21);  $\vec{n}$  співпадає за напрямом із  $\vec{E}$ . Справді, оскільки  $E_l = E \cos \alpha$ , то

$$E \cos \alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial l},$$

звідки видно, що найбільше значення  $d\varphi/dl$  (найшвидша зміна потенціалу) буде при  $\alpha=0$ , тобто у напрямку  $\vec{n}$ . Отже,

$$E_n = -\frac{d\varphi}{dl_0} \Rightarrow E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \Rightarrow \vec{E}_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n};$$

<sup>1)</sup> Див. Математичне доповнення, п.2

тут  $dl_n = |d\vec{l}| \cos \alpha$ , а  $\partial\varphi/\partial n$  — швидкість зміни потенціалу у напрямку нормалі  $\vec{n}$ . Таким чином, поблизу даної точки поля потенціал найшвидше змінюється у напрямку  $\vec{E}$  в цій точці поля (у напрямку силової лінії), а напруженість  $\vec{E}_n$  чисельно дорівнює швидкості зміни потенціалу вздовж силової лінії; знак мінус у цій формулі вказує на те, що вектор  $\vec{E}_n$  спрямований у бік найшвидшого зменшення потенціалу.

Оскільки  $\vec{E} = \vec{E}_n$ , то за формулою (1.4.17) напруженість поля

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}. \quad (1.4.18)$$

Вектор  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$  називається градієнтом потенціалу: —

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}; \quad (1.4.19)$$

(градієнт скаляра — величина векторна!). Чисельне значення цього вектора дорівнює швидкості зміни потенціалу вздовж нормалі до екіпотенціальної поверхні, і спрямований вектор у бік зростання  $\varphi$  (див. Математичне доповнення, п.2).

Із двох останніх формул отримуємо:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (1.4.20)$$

Знак мінус вказує на те, що вектор  $\vec{E}$  і  $\text{grad}\varphi$  протилежно спрямовані. Порівняння останньої формули із формулою (1.4.16) показує, що

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Зв'язок між напруженістю і зміною потенціалу можна подати у наближеній формі —

$$\vec{E} = -\frac{\Delta\varphi}{d}\vec{n} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}\vec{n} \Rightarrow, \\ E = \frac{U}{d}, \quad (1.4.21)$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  — зміна потенціалу при переміщенні у напрямку  $\vec{n}$  на відстань  $d$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 = U$  — різниця потенціалів. У випадку однорідного поля (як,

наприклад, поля всередині конденсатора при нехтуванні крайовими ефектами) формула (1.4.21) — точна.

#### 1.4.7 Знаходження різниці потенціалів за відомою напруженістю електричного поля

Встановлена вище формула

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl$$

дозволяє знайти різницю потенціалів між двома точками поля за відомою напруженістю. Проілюструємо це прикладами електричних полів, розглянутих у п. 1.3.8.

1. *Поле однорідно зарядженої сферичної поверхні.* Поле всередині сфери відсутнє (п. 1.3.8), а поза сферою ( $r > r_0$ ) дається виразом

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2}$$

(як і для точкового заряду та зарядженої сфери). Тому поза сферою різниця потенціалів між двома точками, які лежать на відстані  $r_1$  і  $r_2$  від центра сфери дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = k_0 Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Якщо прийняти  $r_1 = r$  і  $r_2 = \infty$ , то потенціал поля поза сферою

$$\varphi = k_0 \frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(рис.1.26);  $\varphi_1 \rightarrow \varphi$ ,  $\varphi_2 = 0$ . У випадку  $r_1 = r_0 \equiv R$ ,  $r_2 = \infty$  поверхня сфери характеризується потенціалом

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Оскільки поле всередині зарядженої сфери відсутнє (п. 1.5.2), то потенціал тут один і той самий, і такий, як на поверхні сфери (при переміщенні заряду всередині сфери робота не виконується!).

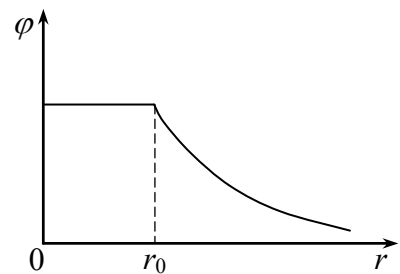


Рис. 1.26

2. Поле кулі радіусом  $r_0$ , рівномірно зарядженої з об'ємною густиною  $\rho$  (рис.1.11). Як показано у п. 1.3.8, напруженість поля поза кулею ( $r > r_0$ )

$$E = k_0 \frac{q}{r^2},$$

де  $q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3$ , тому різниця потенціалів між точками, які знаходяться на відстанях  $r_1$  і  $r_2$  від центра зарядженої кулі ( $r_1 > r_0, r_2 > r_0$ )

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = k_0 q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

( $\vec{E} d\vec{l} = E dr \cos 0 = E dr$ ).

Всередині кулі ( $r < r_0$ )  $E = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho r}{\epsilon_0}$  (п. 1.3.8), тому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

( $r_1 < r_0, r_2 < r_0$ ).

3. Поле рівномірно зарядженої безмежної площини. Оскільки напруженість поля  $E = \sigma / 2\epsilon_0$ , де  $\sigma$  — поверхнева густина заряду (п. 1.3.8), то різниця потенціалів між точками, які лежать на відстані  $x_1$  і  $x_2$  від площини

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

4. Поле конденсатора при нехтуванні крайовими ефектами. Якщо дві різнойменно заряджені пластинки знаходяться достатньо близько одна від

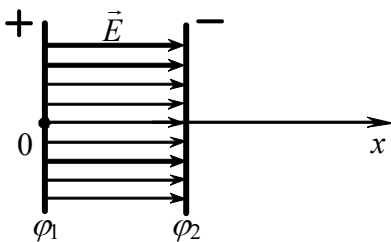


Рис. 1.27

одної (плоский конденсатор), тоді поле у проміжку між пластинами конденсатора однорідне,  $E = \sigma / \epsilon_0$  (п. 1.3.8). Різниця потенціалів між додатно зарядженою пластинкою і від'ємно зарядженою пластинкою

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0},$$

де  $d$  — відстань між пластинами конденсатора (рис. 1.27).

5. *Поле однорідно зарядженого нескінченно довгого циліндра.* Поле всередині циліндра відсутнє; поза циліндром напруженість задається формулою

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

(п. 1.3.8). Отже, різниця потенціалів між двома точками поля, які лежать на відстані  $r_1$  і  $r_2$  від осі циліндра є

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

## 1.5 ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

**1. Загальна характеристика провідників. 2. Провідник в електричному полі. Явище електростатичної індукції. 3. Електростатичний захист. 4. Вимірювання різниці потенціалів між провідниками. 5. Людина в електричному полі Землі**

Перейдемо тепер до дослідження впливу зовнішнього електричного поля на поведінку провідників, внесених у це поле. Хоча нижче мова йтиме про метали, отримані результати будуть справедливими і для інших тіл, які містять вільні заряди (електрони чи іони), зокрема для електролітів.

### 1.5.1 Загальна характеристика провідників

Найхарактерніша, — визначальна ознака провідників (металів) — наявність у них вільних (або колективізованих) електронів. Коли атоми металу утворюють твердий або рідкий метал, зовнішні (валентні) електрони атомів вже не належать окремим атомам і можуть вільно переміщатися по провіднику. Ці електрони зумовлюють високу провідність металів; інша назва для них — електрони провідності. Електрони провідності — своєрідний «електронний газ», поведінка якого підлягає певним закономірностям<sup>1)</sup>. Якщо електричне поле всередині провідника відсутнє, — електрони провідності здійс-

<sup>1)</sup> Особливості електронного газу, пов'язані із провідністю, будуть розглянуті у третьому розділі



нують хаотичні рухи. Під дією електричного поля рух електронів набуває впорядкованості — виникає електричний струм; тут ми розглядатимемо поведінку провідників за умови відсутності електричного струму (електростатика!).

Додатньо заряджені іони утворюють кристалічну ґратку. Рух іонів — коливний (відносно своїх положень рівноваги — вузлів кристалічної ґратки); інтенсивність цих коливань зростає із підвищенням температури.

Сумарний заряд вільних електронів повністю компенсується повним зарядом іонів, тому метал в цілому електрично нейтральний. Якщо нейтральний металічний провідник отримує або втрачає певну кількість електронів, він заряджається відповідно від'ємно або додатно.

### 1.5.2 Провідник в електричному полі. Явище електростатичної індукції

1. Помістимо провідник<sup>1)</sup> у зовнішнє електричне поле, наприклад у поле, створене двома паралельними, різнойменно зарядженими пластинами (рис. 1.28). В момент внесення провідника в електричне поле електрони починають переміщатися в напрямку додатно зарядженої пластинки під дією сили

$$\vec{F} = q\vec{E}_0,$$

де  $\vec{E}_0$  — напруженість електричного поля, створеного пластинами,  $q$  — заряд електрона ( $q < 0$ ). Внаслідок цього з одного боку тіла (на поверхні) створюватиметься надлишок електронів, а з протилежного — їх недостача. Цей перерозподіл електронів у тілі супроводжуватиметься виникненням внутрішнього електричного поля з напруженістю  $\vec{E}'$ , спрямованою протилежно до напруженості  $\vec{E}_0$ . Перерозподіл електронів триватиме до тих пір, доки величина напруженості електричного поля, зумовленого цим перерозподілом  $|\vec{E}'|$ , не

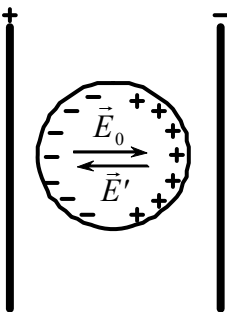


Рис. 1.28

рівняється за величиною зовнішньому полю. Перерозподіл електронів триватиме до тих пір, доки величина напруженості електричного поля, зумовленого цим перерозподілом  $|\vec{E}'|$ , не

<sup>1)</sup> Тут і надалі, якщо не буде окремого застереження, ми абстрагуємося щодо форми і розмірів провідника (вони, в принципі, можуть бути довільні)

зрівняється з величиною напруженості зовнішнього електричного поля  $|\vec{E}_0|$ . Це означає, що результуюча напруженість електричного поля в будь-якій точці всередині провідника

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0,$$

тобто електричне поле всередині провідника відсутнє.

Перерозподіл зарядів у провіднику під впливом зовнішнього електричного поля називається *явищем електростатичної індукції*; інша назва цього явища — «електризація тіла через вплив». Заряди, що виникають при цьому, називаються *індукованими*, або наведеними.

Якщо якійсь ділянці провідника надати заряд, то цей заряд розподілиться по поверхні провідника з певною поверхневою густиною; цей надлишковий заряд знаходиться в тонкому поверхневому шарі (товщиною декілька міжатомних відстаней).

Відсутність заряду всередині провідника можна обґрунтувати на основі теореми Гаусса. Справді, використання попередніх міркувань приводить до висновку, що у рівноважному стані результуюче електричне поле всередині провідника відсутнє і в цьому випадку. Звідси маємо, що, оскільки потік вектора  $\vec{E}$  через довільну замкнену поверхню  $S$ , яка обмежує деякий внутрішній об'єм провідника, дорівнює нулю, то і заряд, що знаходиться в цьому об'ємі, дорівнює нулю:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0; \quad q=0.$$

Це означає, зокрема, що виділення деякої частини об'єму всередині провідника не призведе до зміни рівноважного розподілу заряду.

2. Відсутність результуючого поля всередині провідника означає, у згоді із формулою (1.4.14), що всередині провідника потенціал один і той самий для різних точок тіла.

$$\vec{E} d\vec{l} = -d\varphi \Rightarrow d\varphi = 0,$$

і, отже

$$\varphi = const .$$

Таким чином, провідник (незалежно від того, чи він нейтральний, чи несе на собі заряд того або іншого знаку) є *еквіпотенціальним тілом*, поверхня провідника є *еквіпотенціальною поверхнею*.

Можна міркувати і так. Для виконання умови рівноваги зарядів на провіднику необхідно, щоб напруженість результуючого поля  $\vec{E}$  вздовж поверхні провідника була всюди перпендикулярна до поверхні (наявність тангенці-

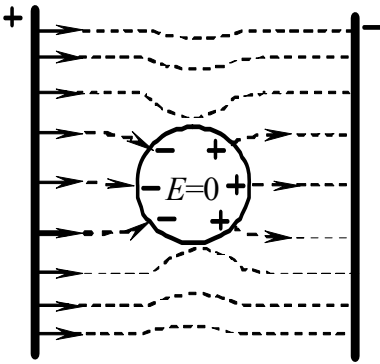


Рис. 1.29 — Стрілки вказують напрям силових ліній результуючого поля  $\vec{E}$ .

альної складової  $\vec{E}$  викликало б рух зарядів). Звідси знову виходить, що за умови рівноваги зарядів поверхня провідника є еквіпотенціальною. Рис. 1.29 ілюструє сказане. Зазначимо, що зовнішнє однорідне поле (в проміжку між двома пластинами) «спотворюється» внутрішнім електричним полем, причому на поверхні провідника лінії  $\vec{E}$  нормальні до поверх-

ні провідника.

Сформулюємо викладене у формі висновку: якщо провідник помістити у електростатичне поле, то

1. Напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю.
2. Наданий провіднику заряд (провідник отримує або втрачає електрони) розподіляється по поверхні провідника.
3. Провідник являє собою еквіпотенціальну область і його поверхня є еквіпотенціальною. Наслідок з цього: напруженість поля на поверхні провідника в кожній точці спрямована по нормалі до поверхні провідника.

**Приклад 1.** Властивість зарядів розміщуватися на зовнішній поверхні провідника використовується для отримання високих напруг і накопичення великих зарядів у *електростатичних генераторах*. Принцип роботи такого генератора можна зрозуміти на прикладі порожнистої металічної кулі, розташованої на ізолюючій підставці. Якщо внутрішній поверхні кулі надати заряд, то він відразу переходить на зовнішню поверхню. Таку операцію можна здійснити багатократно і, таким чином, зарядити кулю до потенціалу

$\varphi = q / 4\pi\epsilon_0 R$  (п. 1.4.7), — теоретично не обмеженого за величиною; насправді ж величина  $\varphi$  обмежується через втрату заряду внаслідок іонізації повітря.

**Приклад 2.** Рис. 1.30 ілюструє спосіб отримання зарядженого провідника (до того нейтрального) за допомогою явища електростатичної індукції внаслідок наступних дій:

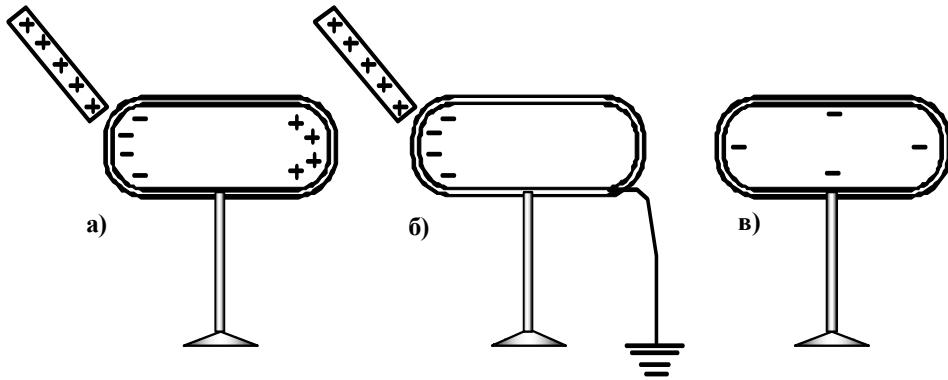


Рис. 1.30

1. До провідника, який знаходиться на ізолюваній підставці підноситься заряджене тіло. Внаслідок цього відбувається перерозподіл електронів на провіднику (рис. 1.30, а).

2. Віддалений кінець провідника заземляється; додатні заряди переміщуються у «нескінченність» — йдуть в землю (насправді на провідник із землі переміщуються електрони, які і нейтралізують додатній заряд) (рис. 1.30, б).

3. Знімається заземлення. Віддаляється заряджене тіло. Від'ємний заряд розподіляється по поверхні провідника (рис. 1.30, в).

### 1.5.3 Електростатичний захист

1. Нехай маємо провідник з порожниною всередині, — наприклад, металічна замкнена оболонка (форма порожнини, як і форма зовнішньої поверхні провідника, зрозуміло, не має значення), вміщений у електростатичне поле (рис. 1.31). Міркування, подібні до наведених у п. 1.5.2, приводять до висновку, що електричне поле всередині порожнини відсутнє: замкнута провідна оболонка екранує внутрішню область від зовнішнього електричного поля; це — металічний екран. Екрани використовують для захисту технічних

пристроїв від шкідливого впливу зовнішніх електричних полів. На практиці використовуються екрани у вигляді сітки з дрібними комірками; встановлено, що ефективність подібного екрана мало відрізняється від суцільного, проте виготовлення його простіше, а затрати матеріалу на виготовлення значно менші. Екран заземлюється, цим нейтралізуються заряди, які виникають на поверхні екрана.

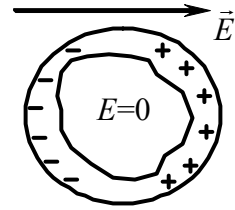


Рис. 1.31

2. Розглянемо тепер випадок, коли замкнута провідна оболонка (екран) оточує заряд  $q$  (рис. 1.32). За законом електростатичної індукції на внутрішній поверхні оболонки індукується від'ємний заряд  $(-q)$ , розподілений з певною поверхневою густиною. Можна показати, користуючись теоремою Гаусса, що цей заряд дорівнює за абсолютною величиною заряду, який знаходиться всередині оболонки. На зовнішній поверхні оболонки знаходиться заряд  $q$  (оболонка електронейтральна:  $q + (-q) = 0$ ).

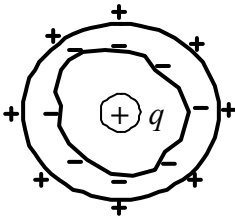


Рис. 1.32

Всередині оболонки поле відсутнє (бо оболонка — провідник). За межами оболонки (у зовнішній області) електричне поле існує, і його напруженість задовольняє теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

де поверхня  $S$  охоплює заряд  $q$ .

Поблизу поверхні зарядженого провідника (оболонки) напруженість поля знайдемо подібно до розрахунку поля зарядженої площини. Тут, проте, потрібно врахувати нерівномірність (у загальному випадку) розподілу заряду по поверхні та відсутність поля всередині провідника. Отже, вибираємо на поверхні тіла малу ділянку  $\Delta S$ , де поверхнева густина заряду приймається сталою ( $q = \sigma \Delta S$ ), і уявляємо циліндр, який вирізає ділянку  $\Delta S$  при перетині з поверхнею, з твірними, нормальними до площадки  $\Delta S$  (паралельними вектору  $\vec{E}$ ); одна частина циліндра знаходиться поза провідником, друга — у провіднику. Оскільки поле всередині провідника відсутнє, то потік напруженості  $\vec{E}$  через замкнуту циліндричну поверхню буде визначатися лише потоком через основу циліндра поза провідником:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Поле поза оболонкою можна усунути, якщо «зняти» заряд із зовнішньої поверхні оболонки. Це можна зробити, з'єднавши провідником оболонку із землею. Тоді додатні заряди перемістяться із зовнішньої поверхні оболонки у «безмежність» (в землю). Після цього залишиться лише заряд  $q$  всередині оболонки і заряд  $-q$ , розміщений на внутрішній поверхні оболонки. Поле такої системи поза оболонкою дорівнюватиме нулю; воно дорівнюватиме нулю і після усунення з'єднувального провідника; отже екранується зовнішня область від заряду, обмеженого цією оболонкою.

#### 1.5.4 Вимірювання різниці потенціалів між провідниками

Різницю потенціалів між провідниками (напругу) можна виміряти за допомогою *електрометра* (статичного вольтметра). Електрометр, зображений на рис. 1.33, є модифікацією електроскопа (рис. 1.1). Корпус електрометра 1 — металічний, може бути з'єднаний із землею (заземлений); до металічного стержня 2, добре ізольованого від корпусу, прикріплена алюмінієва стрілка 3, яка може обертатися навколо горизонтальної осі. Електрометр має шкалу, проградуєвану у вольтах.

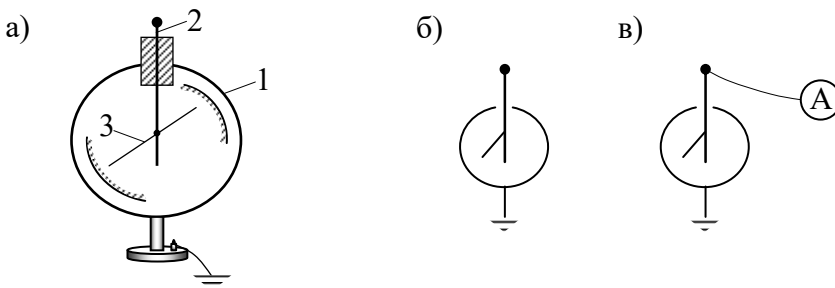


Рис. 1.33

а — Електрометр; б — його схематичне зображення; в — вимірювання різниці потенціалів між зарядженим провідником А і Землею

Якщо з'єднати стержень електрометра за допомогою дротини із зарядженим провідником А, а корпус електрометра заземлити (рис. 1.33, в), то

між корпусом електрометра і стержнем виникне електричне поле; стержень матиме той самий потенціал, що і тіло А, а корпус набуде потенціалу Землі. Під дією електричного поля стрілка повернеться на певний кут. Цим буде зафіксована різниця потенціалів (напруга) між стержнем і корпусом електрометра, тобто між тілом А і Землею. Якщо будемо умовно вважати, що потенціал Землі дорівнює нулю, тоді електрометр визначатиме потенціал тіла А (відносно Землі).

Візьмемо тепер два заряджених провідники. Якщо потенціал цих тіл відносно Землі є  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , то різниця потенціалів (напруга) між цими тілами буде  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . Таку напругу покаже і електрометр, стержень якого з'єднаний з одним тілом, а корпус — з іншим.

За допомогою електрометра можна досліджувати і розподіл потенціалу в просторі навколо заряджених тіл. При цьому ми можемо безпосередньо переконатися, що поверхня зарядженого тіла є еквіпотенціальною поверхнею незалежно від форми тіла.

### 1.5.5 Людина в електричному полі Землі

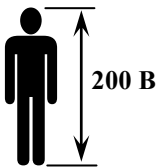


Рис. 1.34

Встановлено, що навколо Землі існує електричне поле, напруженість якого біля її поверхні складає в середньому 120 В/м, а заряд Землі від'ємний. Із зв'язку між напруженістю і різницею потенціалів ( $E \approx \frac{\Delta\varphi}{d}$ ) видно, що різниця потенціалів між головою людини і ногами складає біля 200 В (!).

Постає питання: чому ми не відчуваємо цієї різниці потенціалів? Інше цікаве питання, пов'язане з поставленим: чи не можна використати потужне поле Землі для енергетичних цілей? Відповідь полягає в тому, що наше тіло — хороши провідник. Тому людина є еквіпотенціальним тілом; це означає, що різниця потенціалів між головою людини і ступнями ніг близька до нуля. Саме через це (нульова різниця потенціалів!) людина і не відчуває цієї різниці потенціалів. Негативна відповідь на друге питання ґрунтується на тому, що для протікання електричного струму (як, наприклад, у кишеньковому ліхтарику) необхідні, крім електростатичних сил, і так звані сторонні сили (див. наступний розділ).

## 1.6 ЕЛЕКТРОЄМНІСТЬ

### 1. Електроємність відокремленого провідника. 2. Конденсатори. 3. З'єднання конденсаторів

*Електрична ємність (електроємність або просто ємність)* — важлива електрична величина. Розрізняють ємність відокремленого провідника і ємність системи провідників.

#### 1.6.1 Електроємність відокремленого провідника

Розглянемо заряджений провідник, відокремлений (достатньо віддалений) від інших тіл. Для всіх точок провідника значення потенціалу одне й те ж; це — потенціал провідника.

Так, потенціал (у вакуумі) металічної кулі радіусом  $R$ , заряд якої  $q$  (розподілений по поверхні кулі), —

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (1.6.1)$$

(п. 1.4.7). Якщо надати кулі заряд  $q'$ , то потенціал кулі буде

$$\varphi' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

проте відношення

$$\frac{q'}{\varphi'} = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (1.6.2)$$

залишиться незмінним.

Можна показати (задача № 21 у п. 1.10), що і для будь-якого відокремленого провідника відношення заряду провідника до його потенціалу не залежить від величини заряду та потенціалу; для кожного провідника це відношення має своє певне значення. Досліди підтверджують цей висновок.

Величина  $C$ , яка дорівнює відношенню заряду провідника до його потенціалу, — називається *ємністю відокремленого провідника*:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (1.6.3)$$

Оскільки

$$q = C\varphi, \quad (1.6.4)$$



то чим більша електроємність провідника, тим більший заряд він може мати при заданому  $\varphi$ ,  $\Delta q = C\Delta\varphi$ , тому електроємність провідника чисельно дорівнює заряду, який потрібно надати провіднику, щоб змінити його потенціал на одиницю.

Електроємність залежить від форми провідника і його розмірів, але не залежить від можливих порожнин у провіднику, бо надлишкові заряди розподіляються по поверхні провідника. Так, наприклад, для кулі і сферичної оболонки, які знаходяться у вакуумі,

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (1.6.5)$$

за формулою (1.6.2).

Електроємність не залежить від матеріалу провідника.

Якщо провідник знаходиться не у вакуумі, то його електроємність залежить і від електричних властивостей цього середовища (про це йтиметься у п. 1.7.3).

Ємність провідника у СІ виражається у фарадах (Ф)<sup>1)</sup>. Із формули (1.6.3) маємо:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}},$$

тобто 1 фарад — це ємність такого провідника, потенціал якого стає рівним 1 В при наданні йому заряду 1 Кл.

Для уявлення про розміри тіл, ємність яких 1 Ф, знайдемо радіус кулі з ємністю 1 Ф. За формулою (1.6.5) радіус такої кулі

$$R = \frac{1 \text{ Ф}}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ м} \approx 1,4 \cdot 10^3 R_3,$$

де  $R_3$  — радіус Землі. Отже, 1 фарад — дуже велика електроємність. Тому на практиці користуються частковими одиницями:

$$\begin{aligned} 1 \text{ міліфарад (мФ)} &= 10^{-3} \text{ Ф}, & 1 \text{ нанофарад (нФ)} &= 10^{-9} \text{ Ф}, \\ 1 \text{ мікрофарад (мкФ)} &= 10^{-6} \text{ Ф}, & 1 \text{ пікофарад (пФ)} &= 10^{-12} \text{ Ф}. \end{aligned}$$

### 1.6.2 Конденсатори

Електроємність відокремлених провідників невеликих розмірів дуже мала. Технічні ж та наукові запити потребують пристроїв, які могли б нако-

<sup>1)</sup> На честь М. Фарадея

пичувати значні заряди при малих розмірах провідників і незначному їх потенціалі відносно оточуючих тіл. Такі пристрої називаються конденсаторами; конденсатори — необхідні елементи мало не всіх електричних схем. Найпростіший конденсатор — два близько розташовані провідники (*обкладки конденсатора*) розділені діелектриком.

• Для розуміння здатності конденсатора акумулювати значні заряди розглянемо провідник А (металічна куля) із зарядом  $q > 0$ , рівномірно розподіленим по поверхні тіла, і незаряджений провідник В, достатньо віддалений від провідника А (на рис. 1.35, а не показаний). Потенціал  $\varphi$  провідника А визначимо за показом електрометра; розрахункова формула (1.6.1). Ємність провідника за формулою (1.6.3).

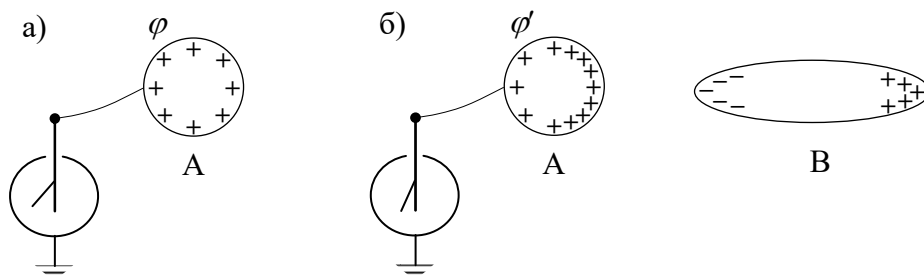


Рис. 1.35

Наблизимо провідники (рис. 1.35, б). Тепер електрометр зафіксує потенціал  $\varphi'$  провідника А, причому  $\varphi' < \varphi$ . Зменшення потенціалу пояснюється появою індукованих зарядів обох знаків на провіднику В і перерозподілом зарядів на провіднику А (через вплив зарядів, індукованих на провіднику В). Внаслідок цього, у довільній точці поля Р величина результуючої напруженості поля  $\vec{E}'$  буде менша від величини напруженості поля  $\vec{E}$ , яка була б за відсутності тіла В (від'ємні заряди провідника В більше впливають на поле провідника А, ніж додатні, бо вони знаходяться ближче до заряду А). За означенням потенціалу,

$$\varphi = \int_R^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_R^{\infty} E_r dr, \quad \varphi' = \int_R^{\infty} \vec{E}' d\vec{r} = \int_R^{\infty} E'_r dr;$$

оскільки  $E'_r < E_r$ , то  $\varphi' < \varphi$  — потенціал зменшиться. Ємність при цьому стане рівною

$$C' = \frac{q}{\varphi'}; \quad C' > C.$$

При подальшому зближенні провідників потенціал тіла А зменшуватиметься, електроємність його зростатиме.

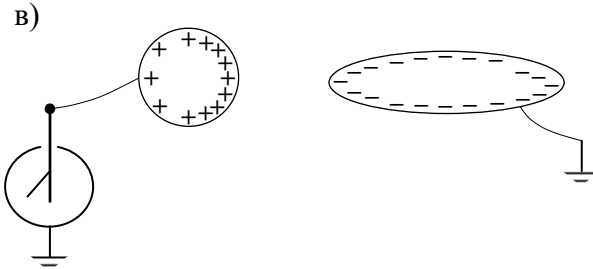


Рис. 1.35, в

З'єднаємо тепер провідник В із землею (рис. 1.35, в). Тоді область додатного заряду буде нейтралізована надходженням електронів із землі, і тіло В стане зарядженим від'ємно. Електрометр покаже тепер ще менший потенціал, що

означає зростання ємності провідника А.

Викладене дозволяє зробити висновки: 1) електроємність невідокремленого провідника більша від електроємності того ж відокремленого провідника, 2) електроємність зростає при наближенні провідників, 3) електроємність провідника буде більшою у тому випадку, коли сусідній провідник матиме протилежний заряд. Зазначені закономірності справедливі для провідників довільної форми і розмірів.

- За яких умов система, яка складається з двох провідників, розділених діелектриком, здатна накопичувати заряди, набагато більші, ніж для відокремлених провідників (які входять до системи)?

Розрахунок і досліди стверджують: ця система має найбільшу електроємність для провідників такої форми і взаємного розміщення, що при наданні провідником рівних за величиною і протилежних за знаком зарядів, електричне поле цих провідників практично зосереджене у проміжку між провідниками (це означає, що лінії напруженості виходять із однієї обкладки конденсатора і входять в іншу). Така ситуація реалізується, як не важко переконатися, у випадку двох паралельних металічних пластин, віддаль між якими значно менша від їх лінійних розмірів (плоский конденсатор), двох концентричних сфер (сферичний конденсатор), двох порожнинних коаксіальних циліндрів (циліндричний конденсатор).

• Розглянемо плоский конденсатор (рис. 1.36). Як було показано у п. 1.4.7, різниця потенціалів між обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0},$$

де  $\sigma$  — поверхнева густина заряду,  $d$  — відстань між обкладками конденсатора,  $\varepsilon_0$  — електрична стала.  $\sigma S = q$  ( $S$  — площа обкладки, абсолютна величина заряду обкладки), тому

$$q = \frac{\varepsilon_0 S (\varphi_1 - \varphi_2)}{d} = C_0 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.6.6)$$

де коефіцієнт пропорційності  $C_0$  між  $q$  і  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  називають *ємністю конденсатора*:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \quad (1.6.7)$$

індекс біля  $C$  вказує на те, що обкладки розділені вакуумом (повітрям).

Ємність конденсатора можна означити і так:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (1.6.8)$$

де  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  — напруга між обкладками конденсатора. Із порівняння формул (1.6.4) і (1.6.8) можна бачити відмінність між ємністю відокремленого провідника і ємністю конденсатора. Означення ємності за формулою (1.6.8) справедливе і тоді, коли між обкладками знаходиться довільний діелектрик.

• *Розрахунок ємностей сферичного і циліндричного конденсаторів* проведемо на основі формули (1.6.8), і для різниць потенціалів використаємо результати, отримані у п. 1.4.7.

Оскільки поле поза обкладками сферичного конденсатора відсутнє, то різниця потенціалів між обкладками сферичного конденсатора дається формулою

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Отже, *ємність сферичного конденсатора у вакуумі*

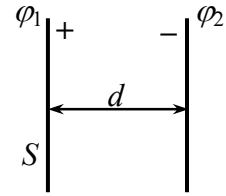


Рис. 1.36

$$C_0 = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (1.6.9)$$

За умови достатньо малого проміжку між сферами ( $r_2 \approx r_1 = r$ ) остання формула переходить у формулу для плоского конденсатора; при цьому  $(r_2 - r_1) \rightarrow d$ ,  $4\pi r^2 \rightarrow S$ .

Подібно до цього можна отримати формулу для ємності циліндричного конденсатора, якщо скористатися виразом для різниці потенціалів між обкладками конденсатора (п. 1.4.7):

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (1.6.10)$$

де  $l$  — довжина конденсатора  $r_1$  і  $r_2$  — радіуси внутрішньої і зовнішньої обкладок. Як і для плоского конденсатора, тут знехтувано крайовими ефектами.

Коли радіуси коаксіальних циліндрів близькі ( $r_2 - r_1 \ll r_1$ ), то ємність циліндричного конденсатора можна обчислювати за формулою плоского конденсатора з  $d = r_2 - r_1$  і  $S = 2\pi r_1 l$ <sup>1)</sup>.

• Якщо у проміжку між обкладками конденсатора знаходиться довільний діелектрик, то електроємність конденсатора

$$C = \epsilon C_0, \quad (1.6.11)$$

де  $\epsilon$  — діелектрична проникність середовища, яке заповнює проміжок між обкладками конденсатора, — величина, яка показує у скільки разів напруженість і потенціал електричного поля у вакуумі більші від напруженості і потенціалу електричного поля в однорідному діелектрику.  $\epsilon > 1$ ; для вакууму  $\epsilon = 1$ , для повітря  $\epsilon \approx 1$  (див. п. 1.7).

• Зарядити конденсатор можна приєднанням (за допомогою провідників — тонких дротин) полюсів джерела напруги до обкладок конденсатора (рис. 1.37). Після від'єднання батареї заряди обох обкладок конденсатора перемістяться на їх внутрішні поверхні.

<sup>1)</sup> Переконайтеся в цьому! **Вказівка:** Скористайтесь наближеною формулою  $\ln(1+x) \approx x$ , якщо  $x \ll 1$

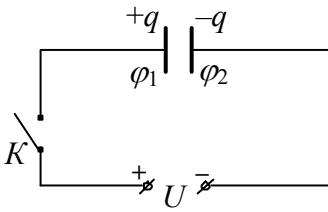


Рисунок 1.37

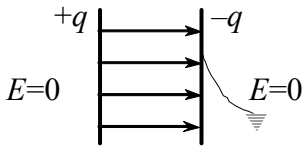


Рис. 1.38

Дещо інший спосіб зарядки конденсатора ілюструє рис. 1.38. Нехай спочатку пластини, ліва з яких має заряд  $+q$ , а права заземлена, знаходяться далеко одна від одної. З наближенням лівої пластинки до правої, на останній зростатиме індукований від'ємний заряд. При цьому все більше зарядів лівої обкладки переходитимуть на її внутрішню сторону, що зумовить подальше зростання заряду  $-q$  і переміщення його до внутрішньої поверхні правої обкладки. Якщо віддаль між пластинами буде достатньо мала, то електричне поле конденсатора буде

практично зосереджене між обкладками, а заряди на пластинах конденсатора стануть рівними за абсолютною величиною (рис. 1.38).

### 1.6.3 З'єднання конденсаторів

На практиці конденсатори часто з'єднують в батареї з метою отримання електроємностей потрібної величини та запобігання пробою конденсаторів. З'єднання може бути паралельним, послідовним, змішаним.

**1. Паралельне з'єднання конденсаторів.** Для отримання великої ємності конденсатори сполучають паралельно; три паралельно з'єднані конденсатори, ємності яких  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , показані на рис. 1.39. При під'єднанні такої батареї до джерела постійної напруги  $U$  конденсатори отримують заряди

$$q_1 = C_1(\varphi_A - \varphi_B), \quad q_2 = C_2(\varphi_A - \varphi_B), \quad q_3 = C_3(\varphi_A - \varphi_B),$$

або

$$q_1 = C_1U, \quad q_2 = C_2U, \quad q_3 = C_3U,$$

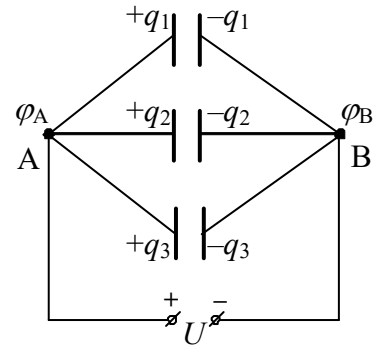


Рис. 1.39

оскільки різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U$  однакова для всіх конденсаторів. Сумарний заряд системи конденсаторів

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

З іншого боку

$$q = CU,$$

де  $C$  — ємність батареї. Отже,

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Для  $n$  паралельно з'єднаних конденсаторів

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (1.6.12)$$

Якщо всі конденсатори мають однакову електроємність  $C_1$ , то

$$C = nC_1. \quad (1.6.13)$$

**2. Послідовне з'єднання конденсаторів.** Після під'єднання батареї послідовно сполучених конденсаторів до джерела напруги (рис. 1.40) спостерігається наступне:

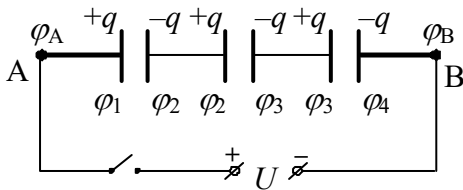


Рис. 1.40

- 1) сусідні обкладки набувають заряди  $\pm q$ ,
- 2) різниці потенціалів між обкладками різних конденсаторів неоднакова (якщо неоднакові ємності конденсаторів),
- 3) обкладки двох сусідніх конденсаторів, з'єднаних провідником, мають

однаковий потенціал.

Це — прояв явища електростатичної індукції: — під дією електричного поля крайніх обкладок системи відбувається перерозподіл заряду між обкладками конденсаторів (сполучених провідниками) до тих пір, доки не зникне електричне поле у проміжку між ними (воно буде зосереджене між обкладками конденсатора); у стані рівноваги обкладки конденсаторів набувають саме таких зарядів і потенціалів, як це показано на рис. 1.40.

Знайдемо ємність послідовно сполучених конденсаторів. За формулою (1.6.8)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2}, \quad \varphi_3 - \varphi_4 = \frac{q}{C_3}.$$

Додамо ліві та праві частини цих рівностей. Маємо

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \varphi_4 &= q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \Rightarrow \\ \varphi_A - \varphi_B &= q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).\end{aligned}\quad (1.6.14)$$

З іншого боку, ємність батареї

$$C = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B},$$

тому

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C}.\quad (1.6.15)$$

Із порівняння формул (1.6.14) і (1.6.15) отримуємо формулу для визначення ємності трьох послідовно з'єднаних конденсаторів

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.\quad (1.6.16)$$

Для  $n$  послідовно з'єднаних конденсаторів ємність батареї визначається із формули

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.\quad (1.6.17)$$

Якщо ємності з'єднаних конденсаторів однакові ( $C_1$ ), то

$$C = \frac{C_1}{n}.\quad (1.6.18)$$

Із формули (1.6.17) видно, що

$$\frac{1}{C} > \frac{1}{C_i} \Rightarrow C < C_i,$$

тобто при послідовному сполученні конденсаторів ємність батареї менша, ніж ємність будь-якого із конденсаторів.

- Напряга  $U$  ( $U = \varphi_A - \varphi_B$ ), подана на батарею послідовно сполучених конденсаторів, дорівнює сумі напруг на окремих конденсаторах:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i,\quad (1.6.19)$$

бо



$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1} - \varphi_n;$$

формулу (1.6.19) можна отримати також з формули (1.6.17) (як?). Звідси маємо корисний для практики висновок: коли напруга  $U$  більша від номінальної для окремо взятого конденсатора (і може відбутися пробій конденсатора), то можна використати батарею із послідовно сполучених конденсаторів; при послідовному сполученні напруга  $U$  розподіляється між всіма конденсаторами.

**3. Змішане з'єднання.** Якщо ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів недостатня, то такі батареї з'єднують між собою паралельно. Це змішане з'єднання конденсаторів. Якщо є батареї з  $n$  послідовно з'єднаних конденсаторів з однаковою ємністю  $C_1$ , то  $m$  таких батарей, з'єднаних паралельно матимуть ємність

$$C = \frac{mC_1}{n} \quad (1.6.20)$$

(наслідок із формул (1.6.13) і (1.6.18)).

Якщо  $n$  однакових конденсаторів з'єднати паралельно і зарядити їх до напруги  $U$ , а потім з'єднати їх послідовно, то отримується напруга  $nU$  (як видно з формули (1.6.19), яка може сягати кількох мільйонів вольт).

**Приклад.** Є набір конденсаторів, які характеризуються ємністю  $C_1=20$  мкФ і номінальною напругою  $U_n=50$  В. Як отримати батарею конденсаторів з ємністю 40 мкФ, розраховану на вхідну напругу 100 В?

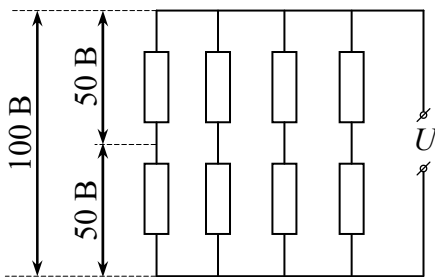


Рис. 1.41

(1.6.20), в якій покладаємо  $m=4$ ,  $n=2$ ), але тепер напруга на кожному із конденсаторів буде дорівнювати номінальній. Неважко запропонувати і більш надійну (щодо уникнення пробію) схему.

Якщо з'єднати паралельно два конденсатори, то хоча ємність такої батареї і дорівнюватиме 40 мкФ, таке з'єднання небезпечне: на вхід батареї буде подана напруга вдвічі більша від номінальної.

Змішане з'єднання, показане на рис. 1.41, також являє батарею з ємністю 40 мкФ (видно із формули

## 1.7 ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

**1. Типи діелектриків. 2. Поляризованість. Поверхнева густина зв'язаних зарядів. 3. Напруженість електричного поля в діелектрику. Різниця потенціалів. Ємність конденсатора. 4. Електричне зміщення. Теорема Гаусса для поля в діелектрику**

Принципово інша, ніж у провідників, поведінка у зовнішньому електричному полі діелектриків<sup>1)</sup>. Ця відмінність зумовлена тим, що у діелектриках відсутні вільні носії струму.

### 1.7.1 Типи діелектриків

Діелектрики (або ізолятори) — речовини, електропровідність яких дуже низька (питомий опір їх  $\rho \sim 10^8 - 10^{15}$  Ом·м, що у  $10^{15} - 10^{20}$  разів більше, ніж у металів). Це зумовлено тим, що, на відміну від металів, зовнішні електрони атомів сильно зв'язані зі «своїми» атомами; у діелектриках практично відсутні вільні носії струму. Під дією зовнішнього електричного поля електрони не залишають «своїх» атомів, а лише дещо зміщуються відносно атомних ядер атомів; електричні заряди молекул (або атомів) в діелектриках є *зв'язаними* (на відміну від вільних електронів в металах).

Діелектрики поділяють на наступні типи.

**1. Неполлярні діелектрики.** Тут «центри» додатних і від'ємних зарядів співпадають (молекули речовини — *неполлярні*). Прикладом неполярних діелектриків є гази ( $H_2, N_2, O_2 \dots$ ), парафін, поліетилен.

При внесенні неполярних молекул у зовнішнє електричне поле відбувається зміщення «центрів» додатних зарядів (зарядів атомних ядер) у напрямку напруженості цього поля  $\vec{E}_0$

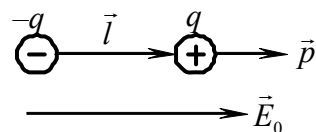


Рис. 1.42

<sup>1)</sup> Термін *діелектрик* введений М. Фарадеєм для позначення речовин, в які проникає зовнішнє електричне поле (відсутність поля всередині *провідника* можна тлумачити як факт непроникнення поля у *провідник*); англ. dielectric від dia (грецьк.) — *через, крізь* і англ. electric.

(внаслідок дії сили  $\vec{F}_+ = q\vec{E}_0$ ,  $q>0$ ), а «центрів» від'ємних зарядів (електрони) у протилежному напрямку ( $\vec{F}_- = q\vec{E}_0$ ). Таке зміщення додатних і від'ємних зарядів можна інтерпретувати як появу у молекул дипольного моменту  $\vec{p}$ ;

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

де  $l$  — плече диполя (рис. 1.42).

Неполярні молекули внесені у зовнішнє електричне поле, набувають дипольний момент — *поляризуються*. Цей тип поляризації називається *електронним* (оскільки зміщується, в основному, «центр» від'ємних зарядів).

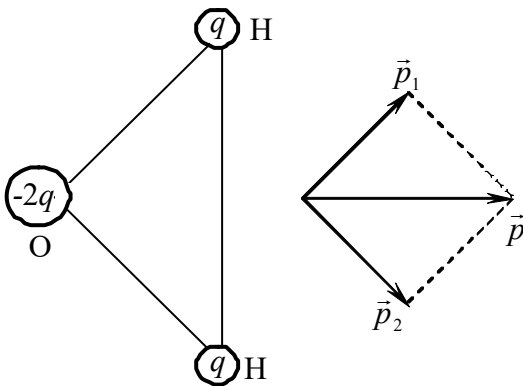


Рис. 1.43 — Модель зарядової структури молекули  $\text{H}_2\text{O}$

## 2. Полярні діелектрики.

В цих діелектриках «центри» додатних і від'ємних зарядів зміщені один відносно одного і за відсутності електричного поля, тобто полярні молекули завжди характеризуються дипольним моментом і при відсутності електричного поля. Цю ситуацію ілюструє рис. 1.43, який моделює зарядову структуру полярної молекули  $\text{H}_2\text{O}$ . Тут дипольні моменти  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}_2$  існують у згоді із зображеною зарядовою структурою.

Результуючий дипольний момент

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Величина дипольного моменту

$$p_1 = p_2 \approx ql = 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 10^{-10} \text{ м} = 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м};$$

тут за  $q$  взятий заряд електрона, за  $l$  — міжатомну віддаль в молекулі. Отримане значення близьке до експериментального для води ( $p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ ).

Якщо зовнішнє електричне поле відсутнє, то дипольні моменти орієнтовані хаотично і сумарний дипольний момент всіх молекул дорівнює нулю:

$$\sum_i \vec{p}_i = 0.$$

Типові полярні діелектрики —  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{H}_2\text{S}$ , фенол, нітробензол.

Якщо діелектрик вміщений у зовнішнє електричне поле, то диполі будуть впорядковуватися у напрямку дії цього поля. Це відображено на рис. 1.44, де пара сил  $\vec{F}_+$  і  $\vec{F}_-$ , які діють відповідно на додатній і на від'ємний заряди диполя, намагаються орієнтувати його вздовж напрямності однорідного поля  $\vec{E}_0$ ;  $\vec{F}_+ = -\vec{F}_- = q\vec{E}_0 = \vec{F}$ .

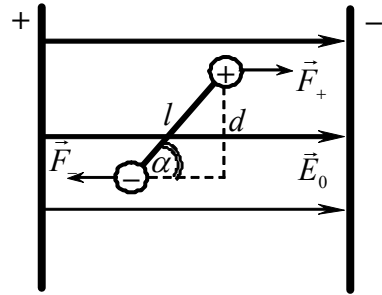


Рис. 1.44

Під дією сил  $\vec{F}_+$  і  $\vec{F}_-$  виникає момент пари сил

$$M = Fd$$

( $d$  — плече пари сил), який орієнтує диполь вздовж поля. Оскільки  $d = l \sin \alpha$  (рис. 1.44), то

$$M = Fl \sin \alpha \Rightarrow M = pE_0 \sin \alpha,$$

де  $p$  — модуль моменту диполя ( $p = ql$ ). Диполі, орієнтовані вздовж поля, мають мінімум потенціальної енергії в зовнішньому електричному полі.

Важливо відзначити, що орієнтуючій дії електричного поля протидіє дезорієнтуючий тепловий рух; внаслідок цього дипольні моменти молекул  $\vec{p}_i$  не будуть орієнтовані строго вздовж напрямку вектора  $\vec{E}_0$ . Виникає переважна орієнтація векторів  $\vec{p}_i$  вздовж поля — *діелектрик поляризується; це орієнтаційний тип поляризації*. Поляризація тим більша, чим більша величина поля і менша температура.

**3. Іонні діелектрики.** Прикладом їх є іонні кристали  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ . Просторова ґратка іонних діелектриків являє собою правильне чергування додатних і від'ємних іонів.

Під дією електричного поля додатні іони зміщуються у напрямку напрямності зовнішнього електричного поля  $\vec{E}_0$ , а від'ємні — у протилежному напрямку. Цей вид поляризації — *іонна поляризація*.

Окремі групи діелектриків складають *сегнетоелектрики*, *п'єзоелектрики*, *піроелектрики* та *електрети*. Про них йтиметься далі.

### 1.7.2 Поляризованість. Поверхнева густина зв'язаних зарядів

Кількісною характеристикою ступеня поляризації діелектрика є *поляризованість*, яка визначається як векторна сума дипольних моментів молекул, що знаходяться в одиниці об'єму діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}, \quad (1.7.1)$$

де  $\vec{p}_i$  — дипольний момент однієї молекули.

Для більшості ізотропних діелектриків поляризованість діелектрика пропорційна напруженості поля всередині нього:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1.7.2)$$

де  $\chi$  — *діелектрична сприйнятливість діелектрика*.  $\chi$  — величина безрозмірна, яка залежить від будови речовини і температури (для неполярних діелектриків  $\chi = \text{const}$ );  $\chi$  може змінюватися у широких межах: від  $\sim 10^{-4}$  (для газоподібних діелектриків) до декількох сотень (для іонних діелектриків), для води  $\kappa \approx 80$ . Діелектрична сприйнятливість — одна із головних характеристик діелектрика, яка показує його здатність поляризуватися у електричному полі.

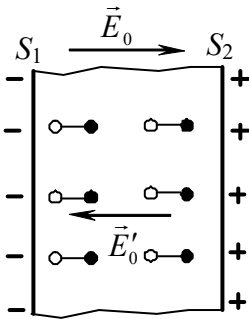


Рис. 1.45

Вертикальні прямі відображають поверхні ( $S_1$  і  $S_2$ ), які обмежують діелектрик. Світлий кружок зображає від'ємний заряд, темний — додатний заряд

Помістимо пластинку із однорідного діелектрика в зовнішнє однорідне електричне поле  $\vec{E}_0$ . Внаслідок поляризації на гранях діелектрика (точніше: в тонких шарах біля поверхонь, які його обмежують) виникають некомпенсовані заряди. Це приводить до того, що на одній його грані виникають додатні заряди, на протилежній — від'ємні (рис. 1.45); всередині діелектрика додатні і від'ємні заряди диполів компенсуються. Непенсовані заряди називаються зв'язаними зарядами (інша назва — поверхневі поляризаційні заряди); вони не можуть бути віддалені від діелектрика.

Зрозуміло, що як і поляризованість  $P$ , поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma'$  зростає із зростанням напруженості зовнішнього електричного поля  $E_0$ . Встановимо зв'язок між цими величинами ( $\sigma'$  і  $P$ ).

Оскільки  $\vec{P}$  — дипольний момент одиниці об'єму діелектрика, то загальний дипольний момент пластини діелектрика

$$P_V = PV = PSd,$$

де  $S$  — площа грані пластини,  $d$  — її товщина. З іншого боку, величина  $P_V$  може бути означена як добуток величини зв'язаного заряду грані  $q'$  ( $q' = \sigma'S$ ) на відстань  $d$  між зарядами  $q'$  і  $-q'$ :

$$P_V = q'd \Rightarrow,$$

$$P_V = \sigma'Sd.$$

Порівняння обох виразів для  $P_V$  дає:

$$\sigma' = P. \quad (1.7.3)$$

Отже, поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює поляризованості.

### **1.7.3 Напруженість електричного поля в діелектрику. Різниця потенціалів. Ємність конденсатора**

1. Нехай пластинка діелектрика знаходиться між обкладками конденсатора в однорідному полі з напруженістю  $\vec{E}_0$ . Поляризація діелектрика під дією цього поля призводить до появи зв'язаних зарядів з поверхневою густиною  $\sigma'$  на протилежних гранях діелектрика, що викликає електричне поле з напруженістю  $\vec{E}'$ , спрямовану протилежно до  $\vec{E}_0$  (верхня частина рис. 1.46). Напруженість результуючого поля всередині діелектрика

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}';$$

модуль напруженості

$$E = E_0 - E'. \quad (1.7.4)$$

Будемо вважати, що поле, створене зв'язаними зарядами (як і поле конденсатора), можна розрахувати як поле між двома протилежно зарядженими площинами (п. 1.3.8). Тоді

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (1.7.5)$$

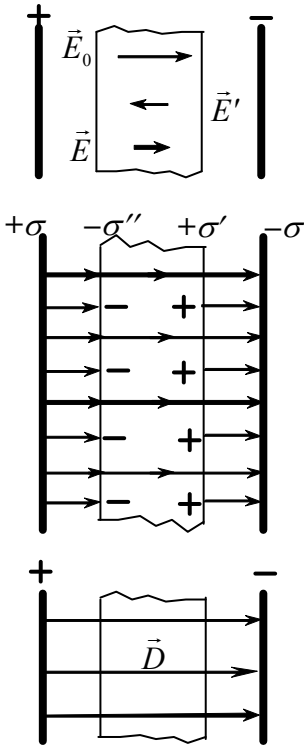


Рис. 1.46

У попередньому пункті було встановлено, що поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює поляризованості  $P$ . Оскільки  $P = \chi \epsilon_0 E$  (формула (1.7.2)), то

$$E' = \chi E .$$

Підстановка  $E'$  у формулу (1.7.4) дає:

$$E = E_0 - \chi E ,$$

звідки

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} .$$

Отже, напруженість електричного поля у діелектрику

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} , \quad (1.7.6)$$

де  $\epsilon = 1 + \chi$  — діелектрична проникність середовища — величина, яка показує у скільки разів напруженість електричного поля, утвореного вільними зарядами, у вакуумі більша, ніж напруженість поля цих зарядів у діелектрику ( $\epsilon = E_0/E > 1$ ).

Для газів  $\epsilon \approx 1$ , для рідин  $\epsilon$  може змінюватися від декількох одиниць до кількох десятків, для кристалічних тіл  $\epsilon$  може мати значення кількох тисяч (для конкретних речовин значення  $\epsilon$  наведені в таблицях).

2. Формула (1.7.6) дозволяє знайти напруженість поля в середовищі, якщо відома напруженість поля у вакуумі.

Так, напруженість поля між обкладками конденсатора (з поверхневою густиною зарядів  $\sigma$ ), заповненого діелектриком із діелектричною проникністю  $\epsilon$ ,

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$$

(використана формула 1.3.16 для  $E_0$ ).

Із попереднього виходить також, що закон Кулона для взаємодії точкових зарядів в ізотропному і однорідному діелектрику має вигляд

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2};$$

сила взаємодії в діелектрику у  $\epsilon$  разів менша, ніж у вакуумі.

3. Оскільки різниця потенціалів

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

то доходимо висновку: вирази для різниці потенціалів в однорідному і ізотропному діелектрику можна отримати із відповідних формул для вакууму (п. 1.4.5), якщо зробити в них заміну  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$ . Це означає зменшення різниці потенціалів у  $\epsilon$  разів.

4. Ємність конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

тому зменшення різниці потенціалів при заповненні прошарку між обкладинками конденсатора однорідним діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , призводить до збільшення ємності конденсатора в  $\epsilon$  разів:

$$C = \epsilon C_0, \quad (1.7.7)$$

де  $C_0$  ємність повітряного конденсатора. Конкретні формули для ємності  $C$  отримуються, як уже відзначалося, із відповідних формул для  $C_0$ , наведених у п. 1.6.2, заміною  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$ .

Зв'язок  $C = \epsilon C_0$  дозволяє означити діелектричну проникність діелектрика як відношення ємності конденсатора, між обкладинками якого знаходиться даний діелектрик, до ємності конденсатора без цього діелектрика.

### 1.7.4 Електричне зміщення. Теорема Гаусса для поля в діелектрику

1. Зменшення напруженості електричного поля в діелектрику означає, що щільність (густота) ліній напруженості всередині діелектрика  $\vec{E}'$  менша, ніж щільність ліній напруженості  $\vec{E}_0$  поза діелектриком. Середня частина рис. 1.46 ілюструє це. Стрибкоподібна зміна вектора напруженості на границі вакуум-діелектрик (або на границі двох діелектриків з різними значеннями



діелектричної проникності) створює певні труднощі при розрахунку електричних полів в діелектриках. Пряме використання теореми Гаусса (потужного методу розрахунку електричних полів у вакуумі) в застосуванні до діелектриків виявляється неефективним: у правій частині (1.3.10)  $q$  стоятиме як алгебраїчна сума вільних ( $q$ ), так і зв'язаних ( $q'$ ) зарядів, і величина  $q'$  сама визначається через шукану напруженість поля. Тому виявилось необхідним ввести поряд з вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}$  ще вектор електричного зміщення<sup>1)</sup>  $\vec{D}$ , який для ізотропного і однорідного середовища означається як

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (1.7.8)$$

У вакуумі ( $\varepsilon=1$ )  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ . Вектор  $\vec{D}$  не залежить від властивостей середовища (не залежить від  $\varepsilon$ ). Справді, оскільки  $\varepsilon_0 E = E_0$ , то

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0,$$

тобто електричне зміщення всередині ізотропного і однорідного середовища (з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ ) співпадає з електричним зміщенням поля у вакуумі  $\vec{D}_0$ . Оскільки  $\varepsilon=1+\chi$ , а  $\chi \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{P}$  ( $\vec{P}$  — поляризованість), то

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}.$$

Якщо тепер зображати поле вектора  $\vec{D}$  лініями електричного зміщення подібно до зображення поля  $\vec{E}$  силовими лініями, то на рис. 1.46 (нижня частина) густина ліній  $\vec{D}$  буде одна і та ж — за межами діелектрика і в діелектрику ( $\vec{D} = \vec{D}_0$ !); при проходженні через діелектрик лінії  $\vec{D}$  (на відміну від ліній  $\vec{E}$ ) — неперервні.

Із визначення вектора  $\vec{D}$  виходить, що як і для поля вектора  $\vec{E}$ , тут справедливий принцип суперпозиції полів.

2. Узагальненням теореми Гаусса для електричного поля у вакуумі (формула 1.3.10) є теорема Гаусса для електричного поля у діелектрику:

<sup>1)</sup> Вживається також термін «вектор електричної індукції» («вектор електричної індукції») і «електрична індукція» — різні поняття! У першому випадку — це фізична величина, у другому — фізичне явище)

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i, \quad (1.7.9)$$

тобто потік вектора електричного зміщення в діелектрику через довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі *вільних зарядів*, охоплених цією поверхнею.

Для випадку  $\varepsilon=1$  (вакуум) теорема Гаусса (1.7.9) співпадає із формулою (1.3.10).

Користуючись теоремою Гаусса (1.7.9), можна, по аналогії із розглядом у п.1.3.8, розрахувати електричне зміщення. Для електричного поля точкового заряду, наприклад, отримуємо

$$D = \frac{q}{4\pi r^2},$$

звідки ще раз видно, що електричне зміщення визначається тільки величиною і розміщенням вільних зарядів, але при такому їх розподілі, який є при наявності діелектрика (зв'язані заряди, які виникають у діелектрику, впливають на розподіл вільних зарядів, які створюють електричне поле).

## 1.8 ЗВ'ЯЗОК МІЖ ВЕКТОРАМИ $\vec{E}$ І $\vec{D}$ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ ДВОХ ДІЕЛЕКТРИКІВ

### 1. Умови на межі двох діелектриків. 2. Заломлення ліній векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$

#### 1.8.1 Умови на межі двох діелектриків

Дослідимо тепер детальніше поведінку векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  на межі розділу двох діелектричних середовищ. Вихідними будуть дві теореми — теорема про циркуляцію вектора  $\vec{E}$  і теорема Гаусса для вектора  $\vec{D}$ :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = q.$$

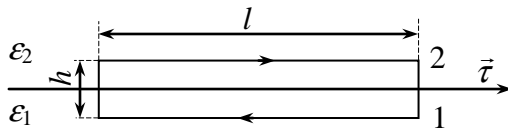


Рис. 1.47

1. Розглянемо (рис. 1.47) прямокутний контур з безмежно малою висотою  $h$ , одна сторона якого лежить у середовищі 1 (з діелектричною проникністю  $\varepsilon_1$ ), друга — у середовищі 2 (зі

критичною проникністю  $\varepsilon_2$ ). Маємо ( $h \rightarrow 0$ ):

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L E_{1\tau} dl = 0 \Rightarrow E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0;$$

тут проекції вектора  $\vec{E}$  взяті на напрям обходу контура за годинниковою стрілкою. Отже,

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (1.8.1)$$

— тангенціальна складова вектора  $\vec{E}$  є однаковою по обидва боки межі розділу середовищ.

В протилежність до цього проекція вектора  $\vec{D}$  стрибкоподібно змінюється. Справді, оскільки  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ , то із формули (1.8.1) отримуємо:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (1.8.2)$$

2. Уявимо тепер на межі двох середовищ прямий циліндр дуже малої висоти  $h$  (рис. 1.48). За теоремою Гаусса

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q \Rightarrow D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = q \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (1.8.3)$$

де  $\sigma = \frac{q}{\Delta S}$ .

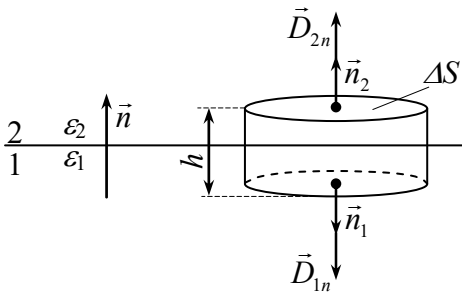


Рис. 1.48

Остання формула отримана за умов: 1) переріз циліндра  $\Delta S$  настільки малий, що в межах його основ вектор  $\vec{D}$  був однаковий; 2) потік вектора  $\vec{D}$  через бічну поверхню дорівнює нулю ( $h \rightarrow 0$ ); 3) вектори  $\vec{D}_{1n}$  і  $\vec{D}_{2n}$  спроектовані на напрям нормалі  $\vec{n}$ .

Якщо вільні заряди на межі се-

редовищ відсутні ( $\sigma=0$ ), то

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad (1.8.4)$$

— нормальна складова вектора  $\vec{D}$  не змінюється при переході від одного діелектричного середовища до іншого.

Для нормальних складових вектора  $\vec{E}$  маємо, оскільки  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ ,

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (1.8.5)$$

Співвідношення (1.8.1) — (1.8.5) і дають відповідь на питання щодо поведінки векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  на межі двох однорідних ізотропних діелектриків.

### 1.8.2 Заломлення ліній векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$

Із умов (1.8.1) — (1.8.5) випливає, що лінії векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  заломлюються. Розглянемо вектор  $\vec{E}$  (рис. 1.49). Якщо на межі діелектриків вільні заряди відсутні, то  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ,  $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ . Маємо:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}}{\frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}}.$$

Врахування попередніх зв'язків між складовими вектора  $\vec{E}$  приводить до закону заломлення ліній напруженості електричного поля на межі розділу двох діелектриків:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (1.8.6)$$

Лінії вектора  $\vec{D}$  заломлюються за таким самим законом (оскільки  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ ).

Формула (1.8.6) показує, що у діелектрику з більшим значенням  $\varepsilon$  лінії  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  утворюють з нормаллю до межі розділу більший кут (рис. 1.49, рис. 1.50).

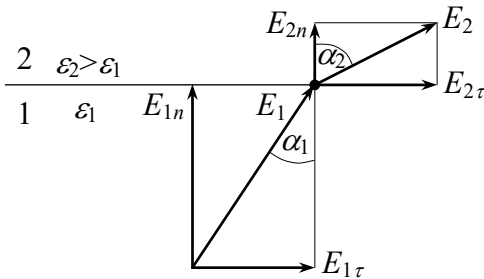


Рис. 1.49

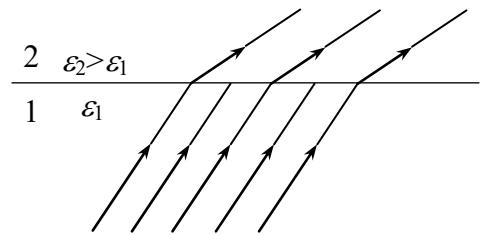


Рис. 1.50

Із рис. 1.49 видно, що по модулю  $E_2 < E_1$  (за умови  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ); це означає, що лінії вектора  $\vec{E}$  у середовищі 1 густіші, ніж у середовищі 2 (рис. 1.49); графічно це відображено на рис. 1.50.

Подібно до цього можна було б дослідити поведінку вектора  $\vec{D}$ . Із відповідного рисунка можна зробити висновок, що оскільки  $D_{1n} = D_{2n}$ , то по модулю  $D_2 > D_1$  ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ); лінії вектора  $\vec{D}$  густіші у середовищі 2, причому на відміну від ліній вектора  $\vec{E}$ , вони неперервні (що відзначалося і раніше, — у п. 1.7.4).

## 1.9 ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

**1. Енергія системи нерухомих точкових зарядів. 2. Енергія відокремленого зарядженого провідника. 3. Енергія зарядженого конденсатора. 4. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля.**

Електричне поле, як і будь-яке матеріальне середовище, характеризується енергією. Переміщення заряду в електричному полі — прояв енергії електричного поля. Електрична енергія електричного поля конденсатора, локалізованого між обкладками конденсатора, проявляється при його розрядці у короткочасному свіщенні лампочки, під'єднаної до обкладок, нагріванні з'єднувальних провідників і т.д.

### 1.9.1 Енергія системи нерухомих точкових зарядів

Нехай два точкові заряди  $q_1$  і  $q_2$  знаходяться на віддалі  $r$ . Кожен із зарядів перебуває у полі іншого, тому енергію їх взаємодії можна записати двома способами:

$$W_1 = q_1\varphi_1, \quad W_2 = q_2\varphi_2,$$

де  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  відповідно потенціали поля заряду  $q_2$  у точці знаходження заряду  $q_1$  і заряду  $q_1$  у точці знаходження заряду  $q_2$  (див. п. 1.4.3)  $W_1 = W_2$ , тому енергію взаємодії зарядів  $W$  можна записати так:

$$W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \varphi_i.$$

Поширення цієї формули на систему  $n$  точкових зарядів дає наступний вираз для енергії електростатичного поля такої системи

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (1.9.1)$$

де  $\varphi_i$  — потенціал поля, створеного всіма зарядами за виключенням заряду  $q_i$ , у точці знаходження заряду  $q_i$ .

### 1.9.2 Енергія відокремленого зарядженого провідника

Поверхня зарядженого провідника є екіпотенціальною, тому енергія провідника, заряд якого  $q$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum q_i = \frac{1}{2} \varphi q;$$

тут  $\varphi$  — потенціал провідника.

Візьмемо до уваги, що  $\varphi$ ,  $q$  і ємність провідника  $C$  пов'язані між собою співвідношенням (1.6.8), тоді можна записати

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (1.9.2)$$

**Приклад.** Знайдемо енергію металічної кулі з радіусом  $R$ , яка знаходиться у середовищі з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ , і якій надано заряд  $q$ .

⇒ Підстановка у формулу (1.9.2) виразу для  $\varphi$  зарядженої кулі, або виразу для ємності зарядженої кулі ( $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ ,  $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ ) приводить до виразу

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}. \quad (1.9.3)$$

### 1.9.3 Енергія зарядженого конденсатора

Розглянемо зарядку конденсатора за схемою, показаною на рис. 1.37. Джерело напруги створює різницю потенціалів між обкладками конденсатора, і заряди починають переходити із однієї обкладки конденсатора на іншу до тих пір, доки заряди на обкладках не набудуть максимальних значень  $\pm q$ , а потенціали обкладки не стануть рівними.

За формулою (1.9.1) енергія конденсатора

$$W = \frac{1}{2} ((+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

або

$$W = \frac{qU}{2}, \quad (1.9.4)$$

де  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  — напруга. Ємність конденсатора  $C = \frac{q}{U}$ , тому

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.9.5)$$

Якщо замість окремого конденсатора буде батарея конденсаторів, то під  $C$ ,  $U$  і  $q$  потрібно розуміти величини, які характеризують системи послідовно-, паралельно- чи послідовно-паралельно з'єднаних конденсаторів (змішане з'єднання конденсаторів).

При зарядці конденсатора робота зовнішніх сил (наприклад, джерела електричної напруги) зумовлює акумулювання електричної енергії конденсатором (задача № 21 у п. 1.11). При розрядці конденсатора енергія конденсатора перетворюється у інші види енергії (теплову, механічну і т.д.).

- Джерело напруги характеризується електрорушійною силою  $\mathcal{E}$  (про це докладно йтиме у наступному розділі). Після зарядки конденсатора напруга на клеммах джерела струму (або, що те ж саме, — напруга на конденсаторі) дорівнюватиме електрорушійній силі.

#### **1.9.4 Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля**

1. Повернімося до формули (1.9.5) для енергії зарядженого конденсатора. Покажемо, що цю енергію можна виразити через напруженість електричного поля між обкладками конденсатора.

За формулою (1.4.21) напруга на обкладках конденсатора

$$U = \frac{E}{d},$$

де  $E$  — напруженість електричного поля між обкладками,  $d$  — відстань між ними. Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

де  $\varepsilon$  — діелектрична проникність середовища між обкладками,  $S$  — площа обкладки. Підстановка  $C$  і  $U$  у формулу (1.9.5) дає:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V, \quad (1.9.6)$$

де  $V = Sd$  — об'єм між обкладками конденсатора.

Отже, енергія конденсатора виражається через напруженість електричного поля. Тому можна стверджувати: енергія зарядженого конденсатора — це енергія електричного поля, локалізованого між обкладками конденсатора (поза конденсатором електричне поле відсутнє).

Енергія електричного поля може перетворитися в інші види енергії, як наприклад, при розрядці конденсатора; навпаки, — при зарядці конденсатора підведена до конденсатора енергія від джерела струму акумулюється як енергія електричного поля.

Оскільки  $\varepsilon_0 \varepsilon E = D$  — електричне зміщення, то енергію конденсатора (енергію електричного поля) можна записати і так:

$$W = \frac{1}{2} DEV = \frac{D^2 V}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (1.9.7)$$

2. Введемо величину

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (1.9.8)$$

яка називається *густиною енергії електричного поля*.

Для однорідного поля (як у випадку конденсатора)  $w$  — величина стала, тому енергія однорідного поля в об'ємі  $V$

$$W = wV. \quad (1.9.9)$$

Якщо поле неоднорідне ( $w$  є функцією координат), то енергія такого електричного поля (створеного довільною системою зарядів)

$$W = \int_V w dV, \quad (1.9.10)$$

де інтегрування ведеться по всьому об'ємі (в якому  $E \neq 0$ ). Найпростіший приклад — поле зарядженої провідної кулі.

Знайдемо, користуючись формулою (1.9.10), енергію електричного поля провідної кулі радіусом  $R$ , заряд якої  $q$ , оточеної діелектриком з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ .



Напруженість поля провідної сфери, заряд якої  $q$ , дорівнює нулю всередині сфери, а поза нею дається виразом

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

(див. формули (1.3.11) і (1.7.6)). Об'ємна густина енергії електричного поля на віддалі  $r$  від центра кулі

$$w = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon r^4};$$

вона швидко спадає із зростанням відстані від центра кулі. За формулою (1.9.10) енергія зарядженої кулі (енергія електричного поля)

$$W = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{dV}{r^4}.$$

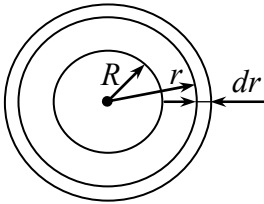


Рис. 1.51

Простір, що означає кулю, можна уявити як сукупність концентричних кульових шарів товщиною  $dr$  (рис. 1.51). На відстані  $r$  від центра кулі площа поверхні, охопленої сферою радіусом  $r$  є  $\pi r^2$ , тому об'єм між сферами з радіусами  $r+dr$  і  $r$  є

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Отже,

$$W = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

( $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$  — ємність кулі). Кінцевий результат співпадає з виразом для енергії зарядженого провідника (формула (1.9.2)).

### 1.10 ПОНДЕРОМОТОРНІ СИЛИ

Обкладки конденсатора, заряджені різнойменно, притягуються одна до іншої. *Механічні сили, які діють на заряджені макроскопічні тіла, називаються пондеромоторними силами* (від латинського пондус — вага, пондеромоторний — той, що рухає вагомі тіла).

Розрахуємо пондеромоторні сили для випадку плоского конденсатора, скориставшись зв'язком між зміною потенціальної енергії і проекцією відпо-

відної сили (четвертий розділ «Механіки»). Нехай початкова відстань між обкладками конденсатора (який відімкнутий від джерела напруги) є  $x$  (рис. 1.52). За формулою (1.9.5) енергія конденсатора

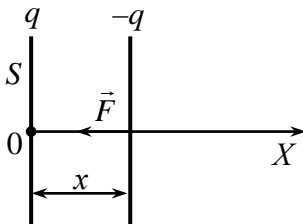


Рис. 1.52

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} x. \quad (1.10.1)$$

Якщо під дією зовнішньої сили права обкладка зміститься вправо на  $dx$ , то виникне протидіюча цьому  $\vec{F}$ , проекція якої на вісь  $X$

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2 dx}{2\varepsilon_0\varepsilon S dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} \quad (1.10.2)$$

Модуль цього виразу дає силу притягання

обкладок конденсатора:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (1.10.3)$$

Зауважимо, що при виведенні останньої формули ми вважали, що  $q = \text{const}$ , це означає, що конденсатор відімкнутий від джерела напруги. Читачу пропонуємо самостійно переконатися, що за умови сталої напруги  $U$  між обкладками конденсатора (конденсатор не відімкнутий від електричної батареї) пондеромоторна сила

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2x^2}. \quad (1.10.4)$$

Неважко переконатися, що дві останні формули еквівалентні. Оскільки  $U = Ex$  (поле однорідне), то

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}; \quad (1.10.5)$$

цю формулу можна отримати і безпосередньо з виразу (1.9.6) для енергії конденсатора (переконайтеся самостійно).

### 1.11 СЕГНЕТОЕЛЕКТРИКИ. П'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ. ЕЛЕКТРЕТИ

Розглянути вище закономірності щодо поведінки діелектриків у зовнішньому електричному полі стосуються діелектриків, означених у п. 1.7.1. Існують, проте, і такі типи діелектриків, поведінка яких лежить поза проведеним описом. Це сегнетоелектрики, п'єзоелектрики та електрети.

1. *Сегнетоелектрики*<sup>1)</sup>. Сегнетоелектриками називають групу полярних кристалічних діелектриків, в яких у певному інтервалі температур виникає спонтанна орієнтація дипольних моментів молекул; тобто сегнетоелектрики мають поляризованість при відсутності електричного поля. Прикладом сегнетоелектрика є титанат барію  $\text{BaTiO}_3$ , який знайшов широке науково-технічне застосування (зокрема, в якості генераторів і приймачів ультразвукових коливань).

Діелектрична проникність сегнетоелектриків надзвичайно висока ( $\epsilon \sim 10^4$ , в  $\text{NaCl}$   $\epsilon=6$ ) і залежить від напруженості електричного поля. Проте,  $\epsilon$  не є однозначною функцією напруженості; значення  $\epsilon$  залежить від того, як змінювалась напруженість поля до досягнення даного значення (див. далі).

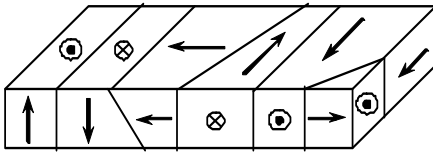


Рис. 1.53

Стрілки і знаки  $\otimes$   $\odot$  вказують напрям вектора  $\vec{P}$  в домені;  $\otimes$  -  $\vec{P}$  спрямований у відповідну площину;  $\odot$  - від площини

ми<sup>2)</sup>. Оскільки в доменах поляризованості різні (рис. 1.53), то результуюча поляризованість діелектрика в цілому дорівнює нулю. При внесенні сегнетоелектрика у зовнішнє електричне поле відбувається орієнтація дипольних моментів окремих доменів у напрямку поля, виникає сумарна поляризованість діелектрика, яка повністю не зникає і після усунення зовнішнього поля.

Для сегнетоелектриків, на відміну від звичайних діелектриків, зв'язок між  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$  — нелінійний (формула (1.7.2) тут не справджується); діелектрична проникність  $\epsilon$  є функцією напруженості  $E$ . Особливості залежності поля-

Сегнетоелектрики складаються з малих областей (порядка тисяч міжмолекулярних віддалей), в кожній із яких є спонтанна поляризація в певному напрямку, який різний для різних областей. Области спонтанної поляризації називаються діелектричними доменами, або просто доменами.

<sup>1)</sup> Назва пішла від сегнетової солі ( $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), у якої вперше були знайдені властивості, спостережані у сегнетоелектриках

<sup>2)</sup> Тут є певна аналогія з доменною структурою феромагнетика. З цієї причини сегнетоелектрики називають і фероелектриками

ризованості діелектрика від напруженості електричного поля в сегнетоелектриках ілюструється наступним прикладом.

Помістимо сегнетоелектрик між обкладками плоского конденсатора і будемо вивчати залежність між поляризованістю діелектрика і величиною поля  $E$ ; отримана залежність (рис. 1.54) відобразить також залежність  $\varepsilon(E)$ . При збільшенні напруженості електричного поля (збільшення напруги між обкладками конденсатора) поляризованість сегнетоелектрика зростає і досягає насичення (крива 1). Зменшення  $E$  призводить до зменшення  $P$  (по кривій 2), але при  $E=0$  зберігається залишкова поляризованість  $P_0$ , тобто сегнетоелектрик залишається поляризованим і при відсутності зовнішнього електричного поля. Щоб усунути поляризованість  $P_0$  потрібно між обкладками конденсатора прикласти поле, протилежне до початкового ( $-E_0$ ). Величина  $E_0$  називається коерцитивною силою. Подальше дослідження  $P(E)$  призведе до залежностей, відображених на рис. 1.54. Видно, що при змінах напруженості електричного поля значення поляризації  $P$  (і зміщення  $D$ ) відстають від напруженості поля, внаслідок чого  $P$  і  $D$  визначаються не тільки величиною  $\vec{E}$  в даний момент, але і попередніми значеннями  $\vec{E}$ . Це – явище гістерезису («запізнення») в сегнетоелектриках. Криві  $A2B$  та  $B3A$  утворюють так звану петлю гістерезису.

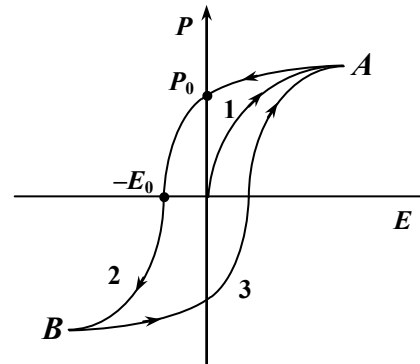


Рис. 1.54

При підвищенні температури вище деякого значення  $T_c$ , характерного для кожного діелектрика, його сегнетоелектричні властивості зникають і він перетворюється у звичайний полярний діелектрик. Точка такого фазового переходу називається точкою Кюрі, а відповідна їй температура — температура Кюрі<sup>1)</sup>. У деяких випадках (як у сегнетовій солі) є дві точки Кюрі ( $-18^\circ\text{C}$  і  $24^\circ\text{C}$ ).

<sup>1)</sup> Потрібно відрізнити температуру Кюрі цього переходу від температури Кюрі для переходу феромагнетик-парамагнетик

2. *П'єзоелектрики*. Це — кристалічні діелектрики, для яких є характерними п'єзоелектричні ефекти. Прямий п'єзоелектричний ефект полягає в тому, що при механічній деформації (стиску, розтягу) на протилежних гранях зразка з'являються заряди протилежного знаку (виникає електричне поле). Таким чином, механічний вплив призводить до поляризації. Прямий п'єзо ефект спостерігається, наприклад, для кварцу, сегнетової солі. Існує і зворотний п'єзоелектричний ефект: під дією зовнішнього електричного поля в діелектрику виникають механічні деформації. У деяких п'єзоелектриках існує спонтанна поляризація за рахунок зміщення однієї іонної підґратки відносно іншої, протилежно зарядженої; це — *піроелектрики*. П'єзоелектрики мають широке застосування в приладах різного призначення (мікрофони, телефони, гучномовці, стабілізатори частот, побутові прилади і тощо).

3. *Електрети*. Електрети — діелектрики, які довгий час зберігають поляризований стан після усунення зовнішнього електричного поля (за рахунок якого і виник наелектризований стан). Електрети створюють в навколишньому просторі електричне поле подібно до того, як постійні магніти створюють магнітне поле (електричні аналоги постійних магнітів). Електрети мають застосування в техніці зв'язку, копіювальній техніці і т.д.

## 1.12 ЕЛЕКТРОСТАТИКА: ЗАПИТАННЯ, ЗАДАЧІ, ВІДПОВІДІ

### 1.12.1 Запитання, задачі

1. Металічному провіднику надається додатній заряд. Як зміниться маса провідника: зросте чи зменшиться?

2. Якщо покласти на стіл дрібні клаптики паперу і підносити до них наелектризоване тіло, то клаптики паперу спочатку будуть притягуватися до нього, а потім відштовхуватися. Чому?

3. Заряджене тіло притягує клаптики паперу. Що станеться, якщо оточити металевою сферою: 1) заряджене тіло; 2) клаптик паперу?

4. Чи можуть притягуватися одна до одної дві однойменно заряджені металічні кульки?

5. Встановлено, що у сухому повітрі виникають іскрові розряди (повітря стає провідником, відбувається утворення іонів), якщо напруженість по-

ля  $E$  більша, ніж  $10^6$  В/м. Який максимальний заряд можна надати сфері з радіусом 10 см?

6. Покажіть, що напруженість електричного поля поблизу поверхні провідника довільної форми визначається виразом  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , де  $\sigma$  — поверхнева густина заряду в даній точці поверхні провідника. **Вказівка.** Скористайтеся теоремою Гаусса.

7. Електричне поле поблизу поверхні Землі  $E \approx 150$  В/м і спрямоване до центра Землі (це означає, що заряд Землі — від'ємний). Знайти заряд Землі.

8. Ємність однієї із ділянок електричної схеми необхідно зменшити від 3,6 нФ до 1 нФ. Конденсатор якої ємності і як потрібно підключити до схеми?

9. Дроти в лініях електропередач відділені від щогл цілими гірляндами ізоляторів. Чому ж небезпечно торкатися щогл?

10. Якщо електрон прискорюється в електричному полі плоского конденсатора, то він набуває кінетичної енергії. Оскільки сили електричного поля виконують роботу, то чи зменшується заряд пластин конденсатора?

11. Невелике тіло, маса якого  $m$ , а заряд  $q$ , перемістилося по еквіпотенціальній поверхні. Чи змінилася його швидкість? В розглядуваній системі діють лише електростатичні сили.

12. Чи може мати електричну енергію тіло, повний заряд якого дорівнює нулю?

13. В електростатичне поле помістили незаряджену кульку. Чи буде діяти на кульку сила з боку поля?

14. У деякій області простору електричне поле було відсутнє, але коли в цю область помістили заряджену кульку, воно виникло, діючи на кульку. Яке походження поля?

15. Поле плоского повітряного конденсатора має напруженість  $E$ , заряд пластини  $q$ . Яка сила діє на кожну із пластин?  $F = qE$ ?

16. Потенціал тіл зручно вимірювати відносно потенціалу Землі. Чому?

17. Різниця потенціалів між пластинами повітряного конденсатора  $U=200$  В. Площа кожної із обкладок  $S=1000$  см<sup>2</sup>, віддаль між обкладками  $d=1$  мм. Яка сила притягання пластин?

18. Порожниста металева куля А, яка має невеличкий отвір, заряджена додатно. З'єднаємо металеву кулю В дротиною із внутрішньою поверхнею кулі А. Чи зарядилася куля В?

19. На рис. 1.55 зображений один із проєктів вічного двигуна. Між обкладками плоского конденсатора знаходиться провідник ABCDA, нижня частина якого знаходиться в посудині з водою. Ідея автора винаходу: оскільки вода — діелектрик, то в нижній частині конденсатора поле буде послаблене і тому електрорушійна сила, яка діє на ділянці АВ, буде більша від електрорушійної сили, яка діє на ділянці DC; внаслідок цього у провіднику ABCDA буде підтримуватися струм так, як показано на рис. 1.39 стрілками. У чому хибність проєкту?

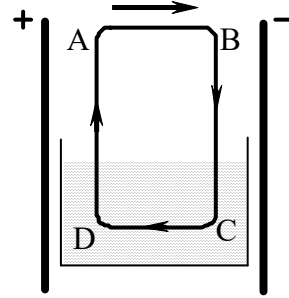


Рис. 1.55

20. Відокремлений незаряджений провідник можна зарядити до потенціалу  $\varphi$  багатократним перенесенням заряду  $dq$  із безмежності на провідник. Елементарна робота, виконувана при цьому проти сил поля,  $dA = \varphi dq$ . Робота  $A = \int \varphi dq$ , виконана при наданні провіднику заряду  $q$ , визначить енергію зарядженого провідника  $W$ . Показати, що звідси отримують формули для  $W$ , наведені у п. 1.9.2.

21. Під час зарядки конденсатора (за схемою, показаною на рис. 1.37) виконується робота по перенесенню заряду із однієї обкладки конденсатора на іншу, оскільки між обкладками конденсатора виникає різниця потенціалів (напруга). При цьому напруга зростає від нуля (в момент під'єднання конденсатора з джерелом напруги) до максимального значення  $U_m$ , а заряд обкладки зростає від нуля до значення  $q_m = CU_m$  (де  $C$  — ємність конденсатора). Робота по зарядці конденсатора і дорівнюватиме енергії, надбаній конденсатором. Проведіть відповідний розрахунок. Вказівка: Скористатися розв'язком попередньої задачі, де потрібно під  $d\varphi$  розуміти  $dU$  (зміну різниці потенціалів між обкладками конденсатора).

22. Знайти енергію конденсатора, розглядаючи його розрядку (рис. 1.56); при розрядці конденсатора енергія акумульована в ньому (енергія його електричного поля) проявляється у нагріванні з'єднувальних провідників, короткочасному спаласі лампочки і т.д. Задача подібна до попередньої, проте тут є одна тонкість: якщо додатній заряд  $\delta q$  переноситься із обкладки додатнім зарядом  $q$ , то зміна зарядку обкладки  $dq = -\delta q$  (величина від'ємна!).

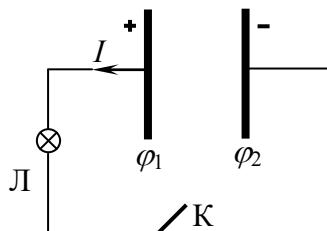


Рис. 1.56 — Схема розрядки конденсатора. Л — лампочка, К — ключ для ввімкнення розрядки

23. При зарядці конденсатора з повітряною прокладкою виконується робота

$$A_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V \approx \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V$$

(формула (1.9.6)), і конденсатор набуває енергію  $W_0$ . Якщо ж між обкладками міститься діелектрик ( $\varepsilon > 1$ ), то для зарядки конденсатора потрібно виконати роботу

$$A > A_0 \Rightarrow W > W_0$$

(хоча при цьому  $E$  в обох випадках таке саме). Як розуміти останню нерівність?

### 1.12.2 Відповіді

1. Маса провідника зменшиться, оскільки при електризації додатнім зарядом зменшується число електронів у тілі, що заряджається.

2. Клаптики паперу при наближенні до них зарядженого тіла поляризуються, внаслідок чого на ближній до зарядженого тіла частині листочка виникає зв'язаний заряд (папір — діелектрик) протилежного знаку — листочок притягується. Після зіткнення з тілом листочки заряджуються однойменним зарядом, — і відштовхуються.

3. У першому випадку сила притягання збережеться, оскільки електричне поле існуватиме і поза металевою сферою (теорема Гаусса!), у другому випадку взаємодії не буде: клаптики паперу оточені металічним екраном.



4. Можуть, якщо заряд однієї кульки набагато більший від заряду іншої. В цьому випадку сила притягання (за рахунок перерозподілу зарядів внаслідок електростатичної індукції) може бути більша, ніж сила відштовхування.

5.  $q = 1,1 \cdot 10^{-6}$  Кл. Цей результат показує, наскільки великою величиною є кулон.

6. За замкнуту поверхню інтегрування потрібно вибрати невеликий замкнутий циліндр, вісь якого перпендикулярна площині і який пересікається площиною. Оскільки електричне поле всередині провідника відсутнє, а поблизу поверхні провідника вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до неї, то буде лише потік вектора  $\vec{E}$  через зовнішню основу циліндра. Виберемо основу достатньо малою (щоб напруженість  $\vec{E}$  можна було вважати сталою). Мас-

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad ES = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma = \frac{q}{S}).$$

7.  $Q = -6,8 \cdot 10^5$  Кл.

8. 1,4 нФ; послідовно.

9. Ідеальних ізоляторів не існує. Запилена або покрита вологою поверхня ізолятора стає провідником. Через щоглу в землю проходить певний заряд (струм витікання). Якщо людина торкається щогли, то струм, який пройде через людину (тіло людини — добрий провідник), може стати небезпечним для людини.

10. Якщо конденсатор ізольований, то величина заряду не зміниться, бо для поміщення електрона в поле конденсатора потрібно виконати роботу. Наслідок цього є поява у електрона потенціальної енергії, яка і переходитиме у кінетичну енергію.

11. За законом збереження енергії зміна кінетичної енергії  $\Delta E_k = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а оскільки  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то  $\Delta E_k = 0$ ; швидкість не змінилася.

12. Якщо до незарядженого провідника піднести заряджене тіло, то внаслідок електростатичної індукції відбудеться перерозподіл вільних зарядів, виникне електричне поле, яке буде характеризуватися певною енергією.

13. Якщо поле однорідне, то не буде. Якщо поле неоднорідне, то на кульку діятиме сила в напрямку більшої напруженості поля.

14. Кульку помістили поблизу незарядженого провідника. Внаслідок електростатичної індукції на провіднику появилися індуквані заряди  $i$ , як наслідок, — електричне поле.

15. Поле створюється обома обкладинками конденсатора:  $E=2E_0$ , де  $E_0=E/2$  — напруженість поля, створюваного однією обкладинкою. Тому  $F = \frac{1}{2}qE$ .

16. Ємність Землі  $\approx 0,7$  мФ дуже велика (відповідає радіусу Землі  $\approx 6,4 \cdot 10^6$  м). Приєднання до землі будь-якого зарядженого тіла («заземлення») практично не змінює її потенціалу, а тіло набуває потенціалу землі. З цих міркувань зручно відраховувати потенціал тіл відносно Землі та прийняти потенціал землі за нульовий.

17.  $\approx 7$  мН.

18. Зарядиться додатно. Куля А є екіпотенціальним тілом, тому потенціал внутрішньої і зовнішньої поверхонь однаковий, тому байдуже, з якою поверхнею, зовнішньою чи внутрішньою кулі А з'єднана куля В. Механізм переходу заряду полягає в наступному. Електрони з кулі В переходитимуть (притягаючись до додатних зарядів кулі А) на внутрішню поверхню кулі А, а звідти — на зовнішню.

19. У верхній частині конденсатора різниця потенціалів між обкладками така ж, як і у нижній. Напруженість поля на ділянці АВ така ж, як і на ділянці DC; це означає, у згоді із формулою  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ , що в нижній частині ( $\varepsilon > 1$ ) конденсатора поверхнева густина заряду більша, ніж у верхній (тут  $\varepsilon = 1$ ).

20.  $dq = Cd\varphi$ , тому

$$dA = C\varphi d\varphi$$

( $C$  — ємність провідника). Останню формулу можна тлумачити так: надання провіднику заряду  $dq$  підвищує потенціальну енергію провідника на величину

$$dW = C\varphi d\varphi.$$

Отже, при збільшенні потенціалу провідника від 0 до  $\varphi$ , енергія його стане рівною

$$W = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

$\varphi = \frac{q}{C}$ , тому потенціальну енергію провідника можна записати і як

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}q\varphi,$$

де  $q$  — заряд провідника.

21. Нехай в процесі зарядки конденсатора на ліву обкладку (додатно заряджену) переноситься заряд  $dq$ , а різниця потенціалів між обкладками  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  ( $U$  — величина змінна: на початку зарядки  $U = 0$ , а в кінці зарядки визначається із співвідношення  $q_m = CU_m$ ). Робота, виконувана при цьому джерелом напруги (джерелом струму)

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = dqU.$$

$q = CU$ , тому  $dq = CdU$ , і, отже, робота виконана під час зарядки конденсатора

$$A = \int_0^{U_m} CUdU = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Це і є енергія, акумульована конденсатором:

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

(індекс  $m$  біля  $U$  опущений).

22. Нехай  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_0$  — початкова різниця потенціалів між обкладками конденсатора,  $q$  — початковий заряд обкладок. При розрядці відбуватиметься перенос заряду від лівої обкладки до правої (вважається, що переноситься додатній заряд; це відповідає «технічному» напрямку струму, насправді переносяться електрони — в протилежному напрямку).

При заданій (миттєвій) різниці потенціалів  $U$  робота сил поля по перенесенню безмежно малого заряду  $\delta q$

$$dA = \delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \delta qU.$$

Величина  $\delta q$  пов'язана із зарядом обкладинки  $q$  так:

$$\delta q = -dq;$$

додатній заряд  $\delta q$  визначається через зменшення заряду обкладки;  $dq < 0$ ! Тому

$$dA = -dqU.$$

Оскільки ємність конденсатора  $C = q/U$ , то  $dq = CdU$  і

$$dA = -CUdU.$$

Внаслідок повної розрядки полем виконується робота

$$A = -\int_{U_0}^0 CUdU = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Це і є енергія електричного поля, зосередженого між обкладинками конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

(індекс біля  $U$  опущений).

23. Запишемо вираз для густини енергії електричного поля (1.9.8) у вигляді

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$$

(в ізотропному діелектрику  $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{D}$ );  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Звідси маємо:

$$w = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}.$$

Перший доданок є густина енергії у вакуумі, другий являє енергію, отриману від зовнішнього джерела при поляризації діелектрика. Ось чому  $W > W_0$ .

## РОЗДІЛ 2

### ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

- Студент коментує на екзамені свій запис

$$\frac{1 \text{ В}}{1 \text{ А}} = 1 \text{ Ом} ;$$

«Один вольт на один ампер дорівнює десять метрів»

- Викладач: Який зміст величини  $R$  і  $r$  в законі Ома для електричного кола?

Студент:  $R$  — радіус великого кола,  $r$  — радіус малого кола.<sup>1)</sup>

*Електричне коло* — це сукупність джерел електричної енергії (джерел струму) та споживачів електричної енергії, з'єднаних провідниками. На рис. 2.1 відображена схема електричного кола кишенькового ліхтаря з лампочкою розжарення. Тут джерелом електричного струму є електрична батарея Б (два гальванічні елементи, з'єднані послідовно), споживачем — електрична лампочка Л; В — вимикач, з'єднуювальні провідники сполучають батарею із лампочкою.

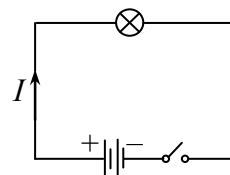


Рис. 2.1

На схемі гальванічний елемент зображений символом  $\begin{array}{c} + \\ | \\ | \\ - \end{array}$  (батарея з двох гальванічних елементів, з'єднаних послідовно, позначається як  $\begin{array}{c} + \\ | \\ | \\ - \\ + \\ | \\ | \\ - \end{array}$ ), лампочка позначена як  $\otimes$ , з'єднуювальні провідники — прямими лініями. У такому замкненому електричному колі протікатиме електричний струм. Електричне коло, відображене на рис. 2.1 — *нерозгалужене електричне коло*. Приклади більш складних електричних кіл (*розгалужених кіл*) будуть розглянуті далі.

<sup>1)</sup> Авторами цих перлинок, найімовірніше, були самі студенти з добре розвинутим почуттям гумору

У цьому розділі означені основні поняття та величини, що характеризують електричне коло, сформульовані основні закони для електричних кіл постійного струму та наведені приклади розрахунку таких кіл.

## 2.1 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ. СИЛА СТРУМУ. ГУСТИНА СТРУМУ

1. *Електричний струм* — це впорядкований рух електричних зарядів. У металах електричний струм зумовлений вільними електронами, в електролітах — йонами різних знаків, у напівпровідниках — електронами і дірками, у газах — електронами і йонами; це — *носії струму*.

У даному розділі розглядатиметься електричний струм в металах (металічних провідниках).

Електричний струм виникає за умови, що на вільні електричні заряди діє електричне поле, енергія якого і зумовлює впорядкований рух електричних зарядів. Якщо заряди рухаються разом із тілом, на якому вони зосереджені, то струм називається конвекційним (наприклад, рух заряджених пилинок).

Проходження електричного струму по провіднику чинить теплову, механічну, магнітну та хімічну (в електролітах) дію.

Мірою електричного струму є сила струму і густина струму.

2. Сила струму  $I$  — кількісна міра електричного струму. Якщо через поперечний переріз провідника за час  $dt$  пройшов заряд  $dq$ , то сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (2.1.1)$$

Струм називається постійним, якщо сила струму і його напрям не змінюються з часом. У цьому випадку ( $I = \text{const}$ )

$$dq = Idt \Rightarrow q = \int_0^t Idt = It,$$

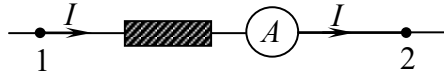
де  $q$  — заряд, що пройшов через переріз провідника за час  $t$ . Тому для постійного струму

$$I = \frac{q}{t}. \quad (2.1.2)$$

Сила струму вимірюється в амперах (А).  $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл}/1 \text{ с}$ : через поперечний переріз провідника переноситься заряд 1 кулон за 1 секунду. Означення

ампера як основної одиниці силу струму в SI буде дане у п. 7.5 сьомого розділу.

Прилад для вимірювання сили струму називається амперметром. Схема ввімкнення амперметра показана нижче; тут амперметром вимірюється сила струму  $I$  на ділянці 1-2 електричного кола; заштрихованим прямокутником відображена можлива наявність на цій ділянці кола джерела струму чи споживача електричної енергії.



3. Напрямок електричного струму і розподіл електричного струму по перерізу провідника визначає густина струму  $\vec{j}$ . Напрямок вектора  $\vec{j}$  в даній точці провідника співпадає з напрямком, в якому рухалися б додатні носії струму; чисельно густина струму визначається відношенням сили струму  $dI$ , який проходить через елемент площі поперечного перерізу  $dS$ , до величини  $dS$ :

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Звідси маємо, що сила струму, який проходить через поперечний переріз провідника  $S$ ,

$$I = \int_S j dS.$$

У загальному випадку сила струму через поверхню  $S$

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j_n dS,$$

де  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  ( $\vec{n}$  — одиничний вектор, перпендикулярний до площадки  $dS$ , який утворює з вектором  $\vec{j}$  кут  $\alpha$ ),  $j_n = j \cos \alpha$  — проекція вектора  $\vec{j}$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Якщо густина струму по всьому перерізу провідника є однаковою ( $j = \text{const}$ ), то

$$I = jS, \tag{2.1.3}$$

$$j = \frac{I}{S}. \quad (2.1.4)$$

Як буде показано далі,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , де  $\sigma$  — питома провідність, а  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля в провіднику.

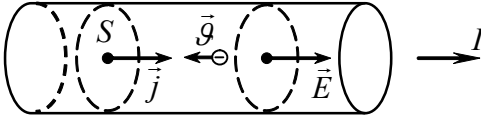


Рис. 2.2

Елемент провідника у формі циліндра з площею поперечного перерізу  $S$ , по якому тече струм  $I$ . На електрон діє сила  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , і він рухається у напрямку, протилежному до напрямку векторів  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$

• Густина струму можна виразити через концентрацію носіїв струму  $n$  та їх швидкість впорядкованого руху  $\vec{G}$  (так звана дрейфова швидкість носія):

$$\vec{j} = qn\vec{G},$$

де  $q$  — заряд носія. Для носіїв струму в металах (електронів)

$$\vec{j} = -en\vec{G},$$

де  $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд електрона. Отже електрон рухається у напрямку, протилежному до напрямку струму (рис. 2.2).

Умовні лінії, вздовж яких рухаються заряди, називаються *лініями струму*.

## 2.2 МЕХАНІЗМ ПРОХОДЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ

**1. Модель електричного кола. 2. Сторонні сили. 3. Електричне коло кишенькового ліхтаря**

### 2.2.1 Модель електричного кола

1. Нехай ми маємо систему із двох заряджених тіл, потенціали яких  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  — різні (рис. 2.3, а); прикладом може бути заряджений конденсатор. Якщо ці тіла з'єднати провідником А, то додатні заряди будуть переміщатися від тіла 1 до тіла 2 — по провіднику потече струм. Це можна зафіксувати за допомогою амперметра, ввімкненого на ділянці 1А2, або за відхиленням магнітної стрілки компаса, розміщеного поблизу провідника А (магнітна дія струму). Через короткий проміжок часу, коли потенціали тіл зрівняються, струм припиниться. Неперервне проходження струму по провіднику А можна за-



безпечити за допомогою пристрою В (рис. 2.3, б), який поповнює додатними зарядами початок провідника А, відбираючи їх від його кінця. Тіла 1 і 2 стають при цьому *електродами* такого пристрою; додатно заряджений електрод називається анодом, від'ємно заряджений — катодом. Таким чином забезпечується постійна різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  на кінцях провідника А і проходження по ньому *постійного струму*.

Система, зображена на рис. 2.3, б, є моделлю замкненого електричного кола. Пристрій, який зумовлює неперервне проходження струму в електричному колі, називається *джерелом електричного струму*. Це своєрідний «насос», який спричиняє «кругообіг» зарядів у електричному колі. Джерелами струму є гальванічні елементи, акумулятори, фотоелементи, термоелементи, генератори електричного струму та інші пристрої.

У розглядуваній моделі електричного кола провідник А є одночасно і *споживачем електричної енергії*: в провіднику виділяється теплота при проходженні по ньому електричного струму.

Більш складне електричне коло може містити декілька джерел струму та споживачів електричної енергії різних типів; схема такого кола наведена на рис. 2.4, де прямокутниками позначені споживачі електричної енергії — опори<sup>1)</sup> (резистори). Тому електричне коло можна означити як сукупність джерел та споживачів електричної енергії,

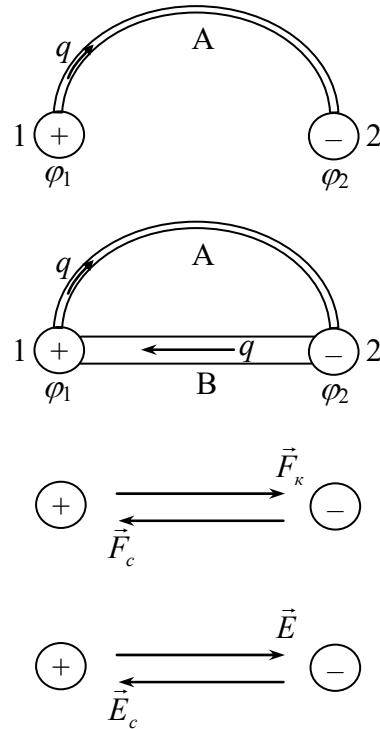


Рис. 2.3

<sup>1)</sup> Терміном «опір» означають як елемент, який є споживачем електричної енергії і який дозволяє регулювати як силу струму, так і фізичну величину «електричний опір»; з контексту відповідного речення, як правило, зрозуміло про що йде мова — про фізичну величину чи елемент електричного кола.

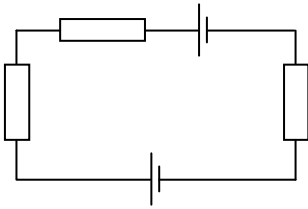


Рис. 2.4

з'єднаних провідниками; електричне коло може містити також вимірювальні прилади, прилади керування та інші пристрої. Електричні кола, зображені на рис. 2.1 і рис. 2.4 — нерозгалужені електричні кола. Приклади розгалужених електричних кіл будуть розглянуті далі (п. 2.11).

### 2.2.2 Сторонні сили

• Перенесення додатного заряду від катода до анода всередині джерела струму може відбуватися лише під дією неелектростатичних (некулонівських) сил, бо електростатичні (кулонівські сили) протидіють такому переміщенню; це видно із рис. 2.3, в, г, де кулонівська сила  $\vec{F}_k = q\vec{E}$ , а  $\vec{E}$  — напруженість електростатичного поля всередині джерела струму. Сила  $\vec{F}_c$ , що зумовлює перенесення заряду всередині джерела струму, називається сторонньою силою (рис. 2.3). По аналогії з кулонівською силою її записують у вигляді

$$\vec{F}_c = q\vec{E}_c \quad (2.2.1)$$

і величину  $\vec{E}_c$  означають як напруженість поля сторонніх сил.

Природа сторонніх сил в різних джерелах струму різна. В гальванічних елементах і акумуляторах їх спричиняють хімічні реакції між електродами і електролітом, в генераторах електричної енергії вони виникають внаслідок обертання ротора генератора (за рахунок механічної енергії), в термоелементах і фотоелементах сторонні сили проявляються у термоелектричних та фотоелектричних явищах і т.д. З конкретними проявами сторонніх сил ми будемо неодноразово зустрічатися в подальшому.

• Знайдемо роботу  $A$ , яка виконується електростатичними ( $A_k$ ) і сторонніми ( $A_c$ ) силами, по переміщенню додатного заряду  $q$  в замкненому електричному колі, зображеному на рис. 2.1; схему цього кола подамо у вигляді рис. 2.5.

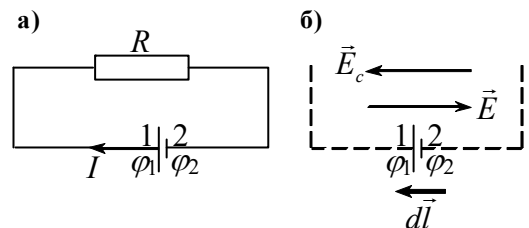


Рис. 2.5

При переміщенні заряду  $q$  по замкненому колу кулонівські сили не виконують роботу

$$A_k = \oint \vec{F}_k d\vec{l} = q \oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (2.2.2)$$

(циркуляція напруженості електричного поля дорівнює нулю, — формула (1.4.3) першого розділу). Це видно і з рис. 2.5, а:

$$A_k = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q(\varphi_2 - \varphi_1) = q(\varphi_1 - \varphi_2) - q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \quad (2.2.3)$$

(заряд  $q$  переміщається по контуру 1R21 ( $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ )). Робота кулонівських сил на зовнішній ділянці кола (1R2) — додатна, на внутрішній (2→1) — від’ємна; сумарна робота  $A_k=0$ .

Робота сторонніх сил по переміщенню заряду  $q$  по замкненому колу у загальному випадку дається формулою

$$A_c = \oint \vec{F}_c d\vec{l} \quad (2.2.4)$$

або

$$A_c = q \oint \vec{E}_c d\vec{l}$$

(використана формула (2.2.1)); тут  $\vec{E}_c$  — напруженість поля сторонніх сил,  $d\vec{l}$  — елементарне переміщення додатного заряду  $q$ , а інтегрування ведеться на ділянках дії сторонніх сил. У розглядуваному випадку (рис. 2.5, б) інтегрування йде в межах джерела струму (від точки 2 до точки 1); тут  $\vec{E}_c \parallel d\vec{l}$ , і, отже,  $A_c > 0$ . Остання формула справедлива і тоді, коли сторонні сили діють вздовж всього кола (як у важливому випадку сторонніх сил, зумовлених змінним магнітним полем<sup>1)</sup>).

• Отже, оскільки повна робота перенесення заряду по колу  $A = A_k + A_c = 0 + A_c$ , приходимо до висновку, що енергія, отримана в електричному колі споживачами, теплові, механічні, світлові прояви електричного струму є наслідком дії сторонніх сил. Кулонівські сили є лише проміжною ланкою в процесі передачі енергії від джерел струму до споживачів електричного струму; та енергія, яка витрачається на зовнішній ділянці кола (поза джерелами електричного струму) поповнюється за рахунок джерел струму.

---

<sup>1)</sup> Розділ 9

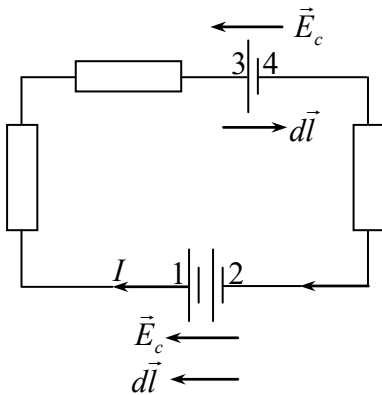


Рис. 2.6

**Приклад.** З'ясуємо питання щодо розрахунку роботи сторонніх сил у випадку електричного кола з декількома джерелами струму на прикладі електричного кола, показано на рис. 2.4, 2.6.

⇒ Нехай струм має напрям, показаний на рисунку (напрямок руху додатного заряду). Тоді робота сторонніх сил по переміщенню заряду  $q$  по замкненому контуру (1-3-4-2-1) у згоді із формулою (2.2.4), є

$$A_c = q \oint \vec{E}_c d\vec{l} = q \int_3^4 \vec{E}_c d\vec{l} + q \int_2^1 \vec{E}_c d\vec{l} .$$

Зважаючи на напрямки векторів  $\vec{E}_c$  і  $d\vec{l}$  на відповідних ділянках (рис. 2.6), маємо

$$A_c = -q \int_3^4 E_c dl + q \int_2^1 E_c dl . \quad (2.2.5)$$

**Висновок:** робота сторонніх сил на ділянці кола додатна, якщо струм проходить всередині джерела струму від «мінуса» до «плюса», і від'ємна, — якщо струм всередині джерела струму йде у напрямку від «+» до «-».

Оскільки напрям струму визначається напрямом руху додатних зарядів, то за умови  $A_c > 0$  напрям струму в колі такий, як показано на рисунку, якщо ж  $A_c < 0$ , то напрям струму буде протилежний.

### 2.2.3 Електричне коло кишенькового ліхтаря

Розглянемо проходження струму в електричному колі на прикладі кишенькового ліхтаря (рис. 2.1). Для більшої наочності і спрощення розгляду обмежимося джерелом струму із одного гальванічного елемента; нескладне поширення отриманих нижче результатів на батарею із декількох елементів пропонується провести читачеві.

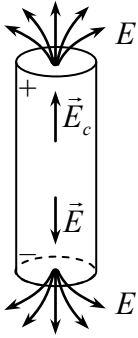


Рис. 2.7

Напруженість кулонівського поля ( $\vec{E}$ ) і поля сторони сил ( $\vec{E}_c$ ) всередині елемента протилегно спрямовані

Гальванічний елемент складається із двох електродів — стержнів або пластин, занурених у рідкий або пастоподібний розчин електроліту. Кінці електродів, які виводяться назовні для підключення до них провідників, називають клемми. Внаслідок хімічних реакцій, які відбуваються в розглядуваній системі один із електродів (анод) заряджається додатно, інший (катод) — від’ємно. Отже, між клемми виникає різниця потенціалів (напруга). Електричне поле гальванічного елемента подібне до поля електричного диполя (рис. 2.7).

Після під’єднання до клем елемента провідників і утворення замкнутого кола (рис. 2.1), електричне поле виникне і на всіх ділянках

електричного кола за рахунок наступного. Заряди, що знаходяться на електродях, діють на заряди провідника поблизу електродів, а ті, в свою чергу, діють на інші заряди провідника і т.д. Оскільки взаємодія зарядів здійснюється через електромагнітне поле (швидкість поширення якого  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с), то практично миттєво всі заряди провідника відчують замикання електричного кола. При цьому електричне поле, що виникає у провіднику, відтворює всі згини провідника (рис. 2.8, б)<sup>1)</sup>. Це забезпечується відповідним перерозподілом електронів на поверхні провідника; подібно до цього електричне поле «корегується» і всередині провідників більш складної форми. У випадку двох послідовно з’єднаних гальванічних елементів електричне поле батареї буде таке ж, як і зображене на рис. 2.7, проте різниця потенціалів між анодом і катодом батареї збільшиться вдвічі (чому?). Під дією електричного поля, що існує в провіднику, і виникає впорядкований рух зарядів. Лінії напруженості кулонівського поля всередині провідника (у збільшеному вигляді) на ділянці кола IABC (див. схему кола — рис. 2.8). Плюси означають недостачу електронів, мінуси — їх надлишок на поверхні провідника.

<sup>1)</sup> Див. задачу № 19 у п. 2.14

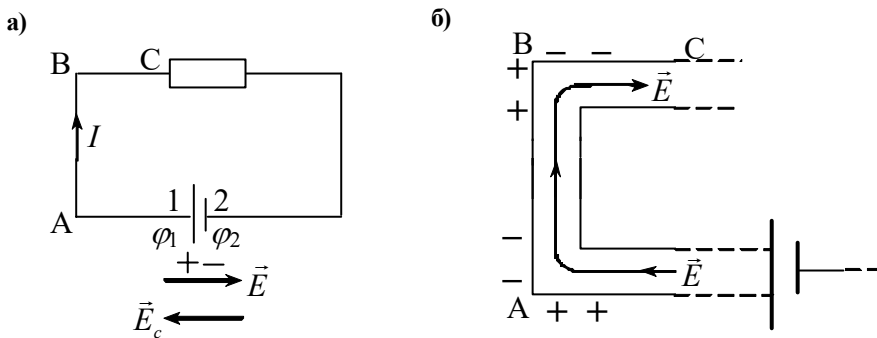


Рис. 2.8 — Схема електричного кола

За рахунок яких сил додатний заряд, дійшовши до точки 2, потрапить знову у вихідну точку 1 (з тим, щоб був неперервний кругообіг зарядів — електричний струм)? Із рис. 2.3, в) видно, що оскільки електростатичне поле  $E$  між точками 1 і 2 протидіє такому переміщенню, то воно відбувається за рахунок електричного поля неелектростатичного походження. Це — поле *сторонніх* (по відношенню до електростатичних) *сил*. В гальванічному елементі сторонні електричні поля виникають внаслідок хімічних реакцій, які проходять в батареї. Гальванічний елемент за своєю дією являє собою пристрій, який відділяє додатні заряди від від'ємних (докладніше гальванічні елементи будуть розглянуті у розділі 5). Іншими джерелами, здатними підтримувати певну різницю потенціалів і забезпечити переміщення зарядів у електричному колі, є електричні генератори, термопари, фотоелементи (про це йтиме мова окремо). Кількісною характеристикою сторонніх сил є електрорушійна сила (е.р.с.), до означення якої і переходимо.

### 2.3 ЕЛЕКТРОРУШІЙНА СИЛА

Розрізняють електрорушійну силу (е.р.с.), яка діє в колі і е.р.с., яка діє на ділянці кола.

Е.р.с.  $\mathcal{E}$ , що діє в електричному колі, визначає роботу, яку виконують сторонні електричні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду в електричному колі. Якщо при переміщенні заряду  $q$  виконана робота  $A$ , то

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q}. \quad (2.3.1)$$

Видно, що, як і потенціал (різниця потенціалів),  $\mathcal{E}$  вимірюється у вольтах<sup>1)</sup>.

Робота по переміщенню заряду  $q$  в електричному колі по замкнутому контуру

$$A_{cm} = \oint \vec{F}_{cm} d\vec{l}, \quad (2.3.2)$$

де

$$\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm}; \quad (2.3.3)$$

$\vec{E}_{cm}$  — напруженість електричного поля сторонніх сил. Звідси маємо (використовуючи три останні формули), що е.р.с., яка діє у даному колі,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l}, \quad (2.3.4)$$

тобто визначається циркуляцією вектора напруженості сторонніх сил. (Згадаємо, що циркуляція вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю (1.4.3)).

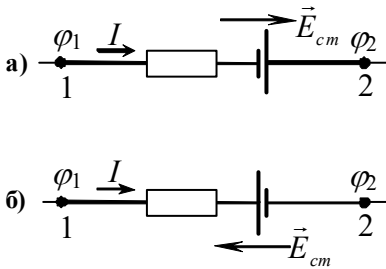


Рис. 2.9

ду на даній ділянці кола:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}, \quad (2.3.5)$$

$\mathcal{E}_{12}$  — алгебраїчна величина. Якщо сторонні сили сприяють переміщенню додатних носіїв струму у вибраному напрямку (1-2), то  $\mathcal{E}_{12} > 0$ , якщо е.р.с.

Введемо поняття е.р.с., що діє<sup>2)</sup> на ділянці кола. Виділимо в довільному колі ділянку, яка містить е.р.с. (рис. 2.9). Робота сторонніх сил на ділянці 1-2 дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{cm} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Е.р.с. на цій ділянці визначається роботою, яку виконують сторонні сили при переміщенні одиничного додатного заряду

<sup>1)</sup> Е.р.с., зрозуміло, енергетична характеристика сторонніх сил (а не силова); термін е.р.с. — наслідок історичної традиції

<sup>2)</sup> Термін «е.р.с.» вживають як для означення дії сторонніх сил («діє е.р.с.»), так і для означення кількісної характеристики роботи цих сторонніх сил.

протидіє такому переміщенню, то  $\mathcal{E}_{12} < 0$ . На рис. 2.9, а відображений перший випадок, на рис. 2.9, б — другий<sup>1)</sup>.

## 2.4 НАПРУГА

Якщо на ділянці кола діють як електростатичні сили (існує різниця потенціалів), так і сторонні сили (діє е.р.с., як це показано, наприклад, на рис. 2.9), то робота цих сил по переміщенню заряду  $q$  на даній ділянці кола

$$A_{12} = A_k + A_{cm},$$

де робота електростатичних (кулонівських сил)

$$A_k = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

а робота сторонніх сил

$$A_{cm} = q\mathcal{E}_{12}.$$

Маємо

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}). \quad (2.4.1)$$

Фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі, що виконується *кулонівськими і сторонніми силами* при переміщенні одиничного позитивного заряду на даній ділянці кола, називається *напругою* на цій ділянці кола:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q};$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (2.4.2)$$

Для випадку, зображеному на рис. 2.9 а),  $\mathcal{E}_{12} > 0$ ,

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}; \quad (2.4.2,а)$$

для випадку б)  $\mathcal{E}_{12} < 0$ ,

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}, \quad (2.4.2,б)$$

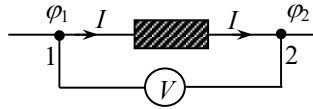
де  $\mathcal{E} > 0$  — е.р.с. батареї.

Ділянка кола, на якій не діють сторонні сили, називається *однорідною*. Неоднорідна ділянка кола та, на якій діють сторонні сили. *Для однорідної ділянки кола напруга співпадає з різницею потенціалів на кінцях ділянки кола*. Отже, напруга більш широке поняття, ніж різниця потенціалів.

<sup>1)</sup> Тут корисно ще раз прослідкувати за переміщенням додатного заряду в електричному колі (рис. 2.3) для з'ясування зв'язку між напрямом струму і знаком  $\mathcal{E}_{12}$ .



**Приклад.** На схемі,



яка, в свою чергу, містить дві ділянки — неоднорідну ділянку кола (заштрихованим прямокутником відображена наявність на цій ділянці споживача електричної енергії і джерела струму) і однорідну — з вольтметром. На першій ділянці діють як кулонівська так і стороння сили, і, отже, напруга на цій ділянці визначається за формулою (2.42). На другій ділянці напруга  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$  (відсутні сторонні сили) і струм, що проходить через вольтметр (і зумовлює відхилення стрілки вольтметра) пропорційний саме різниці потенціалів; за законом Ома для цієї ділянки  $\varphi_1 - \varphi_2 = I_v \cdot R_v$ , де  $I_v$  — сила струму через вольтметр,  $R_v$  — опір вольтметра. Отже, вольтметр, під'єднаний паралельно до ділянки електричного кола, вимірює різницю потенціалів на кінцях цієї ділянки.

## 2.5 ЗАКОН ОМА

**1. Закон Ома для однорідної ділянки кола. 2. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола (узагальнена форма закону Ома). 3. Закон Ома для електричного кола. 4. Приклади застосування закону Ома.**

Розрізняють три форми закону Ома — 1) для однорідної ділянки кола (на ділянці не діють е.р.с.); 2) для неоднорідної ділянки кола (діють е.р.с.); 3) для електричного кола.

### 2.5.1 Закон Ома для однорідної ділянки кола

Ом експериментально встановив (1827 р.), що сила струму  $I$ , який тече по металевому провіднику, пропорційна до напруги  $U$  на провіднику:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2.5.1)$$

Тут напруга  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  — різниця потенціалів (відсутні сторонні сили),  $R$  — електричний опір провідника.

Одиницею опору є 1 Ом; 1 Ом — це опір такого провідника, в якому при напрузі 1 В тече струм 1 А. Величина опору певного провідника залежить від матеріалу, форми і розмірів провідника. Для однорідного циліндричного провідника (з'єднувальні провідники електричних кіл, нагрівні елементи)

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.5.2)$$

де  $l$  — довжина провідника,  $S$  — площа його поперечного перерізу,  $\rho$  — питомий електричний опір даного матеріалу (знаходиться із таблиць фізичних величин), вимірюється в ом-метрах (Ом·м).

На рис. 2.10, а наведена схема ділянки електричного кола, для якої застосований закон Ома у формі (2.5.1), де  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , та показана зміна потенціалу на цій ділянці (рис. 2.10, б). Тут  $R$  — опір споживача електричного струму — резистора, який сполучений з точками 1-2 з'єднувальними провідниками (1-1' і 2'-2), опором яких нехтуємо (тому на ділянках 1-1' і 2'-2 потенціали стали — відповідно  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ ).

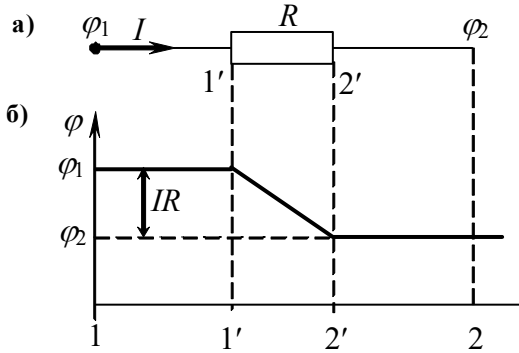


Рис. 2.10

Оскільки сила струму  $I$  може бути виражена через густину струму (формула 2.1.3), а напруженість електричного поля в провіднику  $E$  пов'язана з різницею потенціалів, то між  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  існує зв'язок. Встановимо його.

Нехай маємо циліндричний провідник з площею поперечного перерізу  $S$  і довжиною  $l$ . Різниця

$$(\varphi_1 - \varphi_2)l = E \cdot S.$$

Із врахуванням цього та формули (2.5.2) закон Ома (2.5.1) набуде форми ( $I = jS$ )

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma E, \quad (2.5.3)$$

де  $\sigma$  називається *електричною провідністю матеріалу*.  $\sigma$  вимірюється в *сіменсах на метр* (См/м).

Хоча формула (2.5.3) і отримана у припущенні щодо сталості густини струму вздовж перерізу провідника і однорідності електричного поля в провіднику (використана формула  $(\varphi_1 - \varphi_2)l = E$ ), вона має ширше тлумачення:  $j$  і  $E$  — відповідні величини в одній і тій самій точці провідника. Оскільки в ізотропному провіднику впорядкований рух носіїв відбувається у напрямку вектора  $\vec{E}$ , то

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.5.4)$$

Ця формула виражає *закон Ома у диференціальній формі для однорідної ділянки кола* (на цій ділянці діють лише електростатичні сили). Термін «диференціальна» тут означає, що  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  відносяться до даної точки провідника; формулу (2.5.1) означають як інтегральна форма закону Ома для однорідної ділянки кола (для ділянки провідника без е.р.с.).

### **2.5.2 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола (узагальнена форма закону Ома)**

Розглянемо тепер випадок неоднорідної ділянки кола (рис. 2.9).

Тут поряд з кулонівською напруженістю електричного поля  $\vec{E}$  діятиме поле сторонніх сил, тому замість (2.5.4) будемо мати

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{cm}), \quad (2.5.5)$$

де  $\vec{E}_{cm}$  — напруженість електричного поля сторонніх сил. (2.5.5) — *закон Ома для неоднорідної ділянки кола в диференціальній формі*. Від диференціальної форми можна перейти до *інтегральної форми закону Ома для неоднорідної ділянки кола* (див. також задачу 4 в п. 2.13). Маємо:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \quad (2.5.6)$$

або

$$I = \frac{U}{R}, \quad (2.5.7)$$

де напруга  $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$ . Для випадків, зображених на рис. 2.9, а і 2.9, б, маємо відповідно  $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$  і  $U = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}$ , де  $\mathcal{E}$  — е.р.с. батареї. (2.5.6) – загальна форма закону Ома (за умови, що напруга  $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$ ).

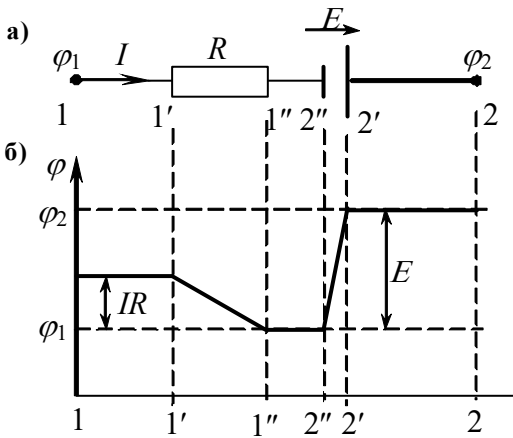


Рис. 2.11 — Неоднорідна ділянка кола з е.р.с., спрямованою у напрямку струму (а) та зміна потенціалу вздовж ділянки кола (б). Опором з'єднувальних провідників та внутрішнім опором батареї знехтувано

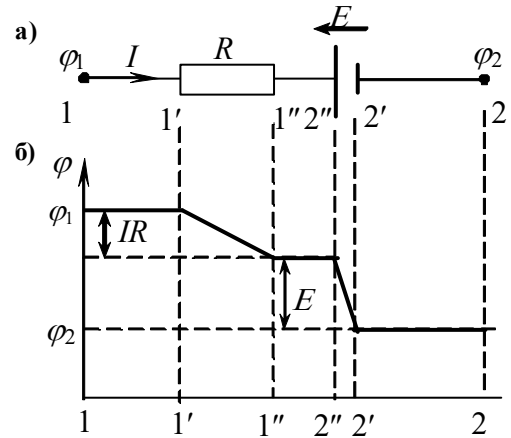


Рис. 2.12 — Неоднорідна ділянка з е.р.с., протидіючою струму, та зміна потенціалу. Опором з'єднувальних провідників та е.р.с. знехтувано

Зміну потенціалу між точками неоднорідної ділянки кола показано на рис. 2.11 і рис. 2.12.

### 2.5.3 Закон Ома для електричного кола

Покладемо у загальній формулі (2.5.7)  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Маємо:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_s}, \tag{2.5.8}$$

де  $\mathcal{E}$  — е.р.с., яка діє в електричному колі (рис. 2.3),  $R_s = R + r$ , де  $R$  — опір зовнішньої ділянки кола (опір споживачів електричної енергії та з'єднувальних провідників), а  $r$  — опір внутрішньої ділянки кола (джерела струму). Отже,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \tag{2.5.9}$$

Це закон Ома для електричного кола.

Розглянемо деякі наслідки, які впливають звідси.

1. Припустимо, що зовнішній опір  $R$  може змінюватися за допомогою реостата (рис. 2.13). Нехай опір  $R$  збільшився. Із (2.5.9) маємо, що напруга на зовнішній ділянці  $U = IR = \mathcal{E} - Ir$  збільшиться (бо зменшилася сила струму).

Якщо  $R \rightarrow \infty$ , то  $I \rightarrow 0$  і напруга на зовнішній ділянці кола наближається до  $\mathcal{E}$ . Таким чином, *е.р.с. можна означити як різницю потенціалів на клеммах (затискачах) джерела струму при розімкненому колі.*

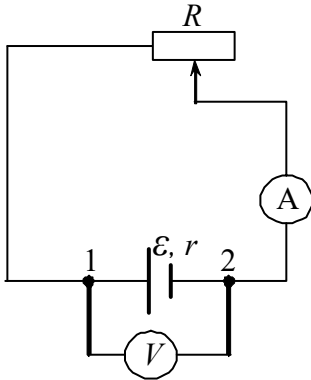


Рис. 2.13

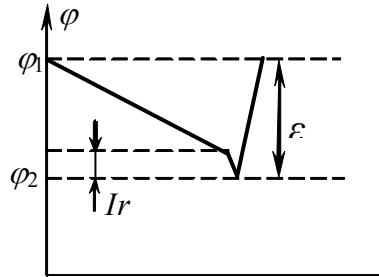


Рис. 2.14 — Зміна потенціалу в електричному колі

2. Якщо ж  $R \rightarrow 0$  (коротке замикання), то сила струму в колі досягає максимального значення  $\mathcal{E}/r$ , а напруга  $U=0$  ( $U = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r}r$ ).

3. Зміну потенціалу в електричному колі можна прослідкувати за рис. 2.14. Тут  $\varphi_1$  відповідає точці кола, яка належить додатному полюсу батареї,  $\varphi_2$  — від'ємному,  $R$  — опір зовнішньої ділянки кола,  $r$  — внутрішній опір батареї. Можна бачити, що *е.р.с. визначається як різниця потенціалів ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) між затискачами батареї за умови відсутності струму в ній ( $I=0$ ).*

**2.5.4 Приклади застосування закону Ома**

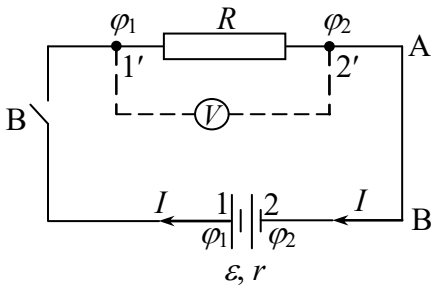


Рис.2.15

= 0,1 Ом. Опір  $R=9$  Ом.

Проілюструємо форми законів Ома на прикладі електричного кола кишенькового ліхтаря (рис. 2.1 та рисунок 2.15, зображений нижче). Тут дві батарейки, із *е.р.с.*  $\mathcal{E}_1=1,5$  В кожна, з'єднані послідовно; результуюча *е.р.с.*  $\mathcal{E}=3$  В (п. 2.11). Внутрішні опори батарейок  $r_1=r_2=r=$

1. Якщо знехтувати опором з'єднувальних провідників, то потенціали точок 1 і 1' однакові ( $\varphi_1$ ); однакові і потенціали точок 2 і 2' ( $\varphi_2$ ). За законом Ома для однорідної ділянки кола

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR \Rightarrow U = IR. \quad (*)$$

Силу струму  $I$  можна виміряти, ввімкнувши амперметр на ділянці АВ, а напругу — під'єднавши вольтметр до обох кінців резистора.

2. Ділянка кола 2- $\mathcal{E}$ -1 — неоднорідна ділянка кола, по якій проходить струм  $I$  і опір якої  $2r$  (див. п. 2.6). За законом Ома для неоднорідної ділянки кола

$$2Ir = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} - 2rI \Rightarrow U = \mathcal{E} - 2rI. \quad (**)$$

3. Закон Ома для кола в даному випадку є

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + 2r}.$$

Звідси маємо:

$$IR + I2r = \mathcal{E} \Rightarrow IR = \mathcal{E} - 2rI. \quad (***)$$

Порівняння формул (\*\*) і (\*\*\*) дає

$$U = IR,$$

тобто ми отримали для різниці потенціалів (напруги) один і той самий результат як за допомогою закону Ома для однорідного кола, так і з закону Ома для неоднорідного кола. Зрозуміло, що простіше у даному випадку знаходити різницю потенціалів за формулою (\*).

Чисельно сила струму  $I = \frac{3}{9 + 0,2} \approx 0,33$  А, а напруга  $U \approx 2,97$  В (цю величину можна отримати як за формулою  $U = IR$ , так і за формулою  $U = \mathcal{E} - 2rI$ ).

## 2.6 ПОСЛІДОВНЕ І ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ПРОВІДНИКІВ

**1. Послідовне з'єднання провідників. 2. Паралельне з'єднання провідників. 3. Приклад**

1. При послідовному з'єднанні провідників з опорами  $R_1, R_2, R_3$  (резисторів) на ділянці 1-2 (рис. 2.16) сила струму  $I$  через кожен із провідників (показ амперметра) однакова, спади напруги на кожному із провідників (різниця

потенціалів) — різні. Маємо:  $U_1 = IR_1$ ,  $U_2 = IR_2$ ,  $U_3 = IR_3$  ( $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $U_2 = \varphi_2 - \varphi_3$ ,  $U_3 = \varphi_3 - \varphi_4$ ).

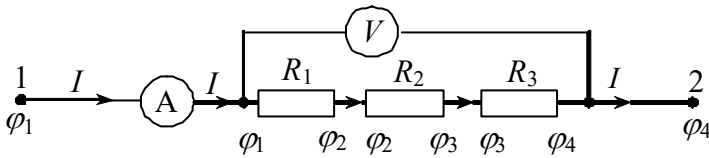


Рис. 2.16 — Послідовне з'єднання провідників

Спад напруги на ділянці 1-2 (показ вольтметра) з одного боку

$$U = IR$$

( $R$  — повний опір послідовно сполучених провідників,  $U = \varphi_1 - \varphi_4$ ), з іншого:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3.$$

Звідси

$$IR = I(R_1 + R_2 + R_3),$$

тобто

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \tag{2.6.1}$$

Для  $n$  послідовно з'єднаних провідників повний опір

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \tag{2.6.2}$$

2. При паралельному з'єднанні провідників (рис. 2.17) різниця потенціалів на кінцях кожного із провідників та ж сама ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ), проте струми, що проходять через провідники — різні ( $I_1, I_2, I_3$ ).

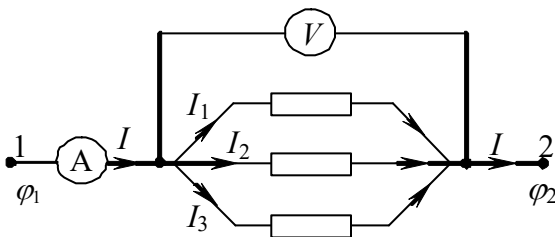


Рис. 2.17 — Паралельне з'єднання провідників

На основі закону Ома для ділянки кола

$$I = \frac{U}{R}$$

( $R$  — опір паралельно сполучених провідників,  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ ) маємо:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3}.$$

Оскільки  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , то

$$\frac{U}{R} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right),$$

і  $R$  визначається із виразу

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (2.6.3)$$

Для  $n$  паралельно з'єднаних провідників повний опір визначається з умови

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (2.6.4)$$

Для двох паралельно з'єднаних провідників

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

**3. Приклад.** Знайдемо опір ділянки кола, зображеного на рис. 2.18.

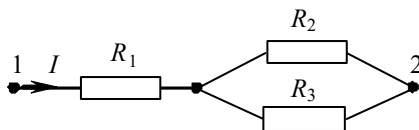


Рис.2.18

$\Rightarrow$  За формулами (2.6.2) та (2.6.4) маємо  $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$

## 2.7 ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ОПОРУ ПРОВІДНИКІВ

1. Для більшості металічних провідників питомий опір  $\rho$  є лінійною функцією температури  $t$  (за шкалою Цельсія):

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (2.7.1)$$

де  $\rho$  — питомий опір при температурі  $t$ ,  $\rho_0$  — питомий опір при  $t=0$  °С,  $\alpha$  — температурний коефіцієнт опору (знаходимо з таблиць).

Оскільки для більшості металічних провідників  $\alpha \approx (3 \div 5) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \approx \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$ , то  $1 + \alpha t \approx 1 + \frac{t}{273} = \frac{T}{273} \approx \alpha T$ , де  $T$  — абсолютна температура. Таким чином, наближено можна записати:



$$\rho = \rho_0 \alpha T. \quad (2.7.2)$$

Така залежність ( $\rho$  змінюється прямопропорційно абсолютній температурі  $T$ ) спостерігається в доволі широкому інтервалі температур, далеких від абсолютного нуля; найкраще виконується ця залежність для температур, близьких до кімнатних. На рис. 2.19 лінією 1 зображена типова спостережувана на досліді температурна залежність, штрихованою — лінійна залежність за формулою (2.7.2). Наявність ненульового залишкового ( $\rho_3$ ) опору пояснюється наявністю у даному матеріалі домішок, відхилення від ідеальності в структурі кристалічної ґратки (зокрема, через наявність механічних напружень у досліджуваному зразку); для «ідеального зразка» (абсолютно чистого і з правильною кристалічною ґраткою) опір  $\rho$  прямував би до нуля при  $T \rightarrow 0$ .

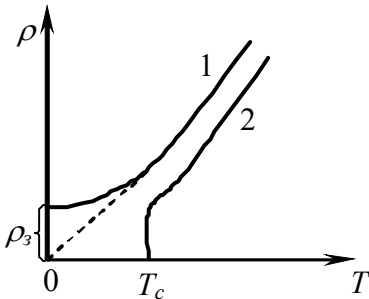


Рис. 2.19

2. Для великої групи металів і сплавів при зменшенні температури опір стрибкоподібно стає рівним нулю (крива 2 на рис. 2.19). Температура, при якій зникає опір провідника, називається температурою надпровідного переходу  $T_c$ . Для кожного надпровідника існує своя температура надпровідного переходу. В області температур  $T > T_c$  надпровідний стан зникає і речовина веде

себе як нормальний метал. Надпровідний стан зникає і в сильному магнітному полі.

До 1987 р. максимальне спостережуване значення  $T_c$  було  $\approx 20$  К. Відкриття у 1987 р. так званої «високотемпературної надпровідності» у деяких матеріалах (наприклад, в кераміці  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{Cu}_3\text{O}_4$ ) дозволило спостерігати (і використовувати) явище надпровідності до температур  $\approx 10^2$  К; це одне із найбільших відкриттів останнього часу.

Елементи теорії надпровідності будуть викладені у п. 3.5 третього розділу.

## 2.8 РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ

Розглянемо довільну ділянку електричного кола, яка складається із системи провідників із опором  $R$  і батареї з е.р.с.  $\mathcal{E}$  (наприклад, ділянку кола,

зображеного на рис. 2.9). За час  $t$  через поперечний переріз провідника проходить заряд  $q = It$ . При цьому виконується робота  $A$  як силами електростатичного поля, так і сторонніми силами:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}$$

(це впливає з означення різниці потенціалів і е.р.с.), або

$$A = qU, \quad (2.8.1)$$

де  $U$  — напруга. Якщо провідник нерухомий, ця робота йде на нагрівання даної ділянки кола і на протікання хімічних реакцій (теплова і хімічна дії струму).

Потужність струму на даній ділянці

$$P = \frac{A}{t} = \frac{qU}{t} = IU. \quad (2.8.2)$$

Для *однорідної* ділянки кола (джерело струму відсутнє)  $U = IR$  і

$$P = I^2 R, \quad (2.8.3)$$

або

$$P = \frac{U^2}{R}. \quad (2.8.4)$$

Одиниця потужності електричного струму — ватт (Вт).

**Приклад 1.** Потужність типової лампочки для кишенькового ліхтарика складає  $P=1$  Вт. Різниця потенціалів між місцями підключення лампочки зі з'єднувальними провідниками забезпечується двома послідовно з'єднаними елементами з результируючою е.р.с. 3 В. Струм, що проходить через лампочку

$$I = \frac{P}{U} \approx \frac{P}{\mathcal{E}} \quad (\text{якщо знехтувати внутрішнім опором елемента, то різниця потенціалів } U \approx \mathcal{E}).$$

Струм через лампочку  $\approx 1/3$  А. Для порівняння: струм в освітлювальній лампочці потужністю 100 Вт, ввімкненій в електричну мережу з напругою 220 В, складає  $\approx 0,45$  А.

**Приклад 2.** Стартер у легковому автомобілі працює на постійному струмі. Типова потужність його  $\approx 736$  Вт. Якщо батарея 12-вольтова, то струм в електромоторі  $I = \frac{P}{U} \approx 62$  А. Це дуже велика сила струму, і щоб зменшити нагрівання дротів, які йдуть від батареї до стартера (*джоулева теплота*), ці дрони мають порівняно великий переріз (для зменшення опору).

## 2.9 ТЕПЛОВА ДІЯ СТРУМУ. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА

Виділення теплоти провідником (перетворення електричної енергії у теплову) пов'язане із взаємодією носіїв струму (електронів) з іонами провідника та між собою. Електрони при зіткненні з іонами передають їм повністю або частково свою енергію<sup>1)</sup>. Внаслідок цього збільшується енергія коливного руху іонів відносно положень рівноваги, що і є причиною збільшення температури провідника (температура — міра середньої кінетичної енергії теплового руху іонів). Свічення лампочки в електричному колі кишенькового ліхтаря зумовлено виділенням енергії на даній ділянці кола — прояв теплової дії електричного струму.

Якщо робота електричного струму затрачається лише на нагрівання провідника (переходить у його внутрішню енергію, хімічних перетворень у провіднику не відбувається), то, у згоді із формулою (2.8.1), теплота, виділена провідником

$$Q = IUt, \quad (2.9.1)$$

(використано, що  $q = It$ ), або ( $U = IR$ )

$$Q = I^2 R t \Rightarrow Q = \frac{U^2}{R} t \quad (2.9.2)$$

Це — закон Джоуля-Ленца (закон встановлений незалежно Джоулем і Ленцем).

Цьому відповідає потужність

$$N = IU \Rightarrow N = I^2 R \Rightarrow N = \frac{U^2}{R}. \quad (2.9.3)$$

В залежності від типу сполучень декількох провідників (паралельного чи послідовного) зручнішою може виявитися та або інша форма запису закону Джоуля-Ленца.

Подібно до того, як у п. 2.5 здійснений перехід від закону Ома в інтегральній формі до диференціальної, можна показати<sup>2)</sup>, що закон Джоуля-Ленца у диференціальній формі має вигляд

<sup>1)</sup> Детальніше про електронну провідність в металах дивись наступний розділ

<sup>2)</sup> Задача 2.18

$$w = jE = \sigma E^2, \quad (2.9.4)$$

де  $w$  — густина теплової потужності струму (кількість теплоти, що виділяється в одиниці часу в одиниці об'єму провідника),  $j$  — густина струму,  $\sigma$  — питома провідність,  $E$  — напруженість електричного поля в провіднику.

Відзначимо, що загальна кількість теплоти, яка виділяється на даній ділянці кола може відрізнятись (від джоулевої теплоти  $Q$ ) за рахунок теплоти Пельтьє та теплоти Томсона (будуть розглянуті у четвертому розділі).

**Приклад.** Нехай ми маємо два резистори з опорами  $R_1$  і  $R_2=2R_1$ . Покажемо, що кількість теплоти, які виділяються ними за певний час  $t$ , залежить від того, як сполучені резистори — послідовно чи паралельно.

⇒ Справді, якщо сполучення послідовне, то по кожному з резисторів проходить один і той самий струм  $I$ , і за формулою  $Q = I^2 R t$  маємо:  $Q_1 = I^2 R_1 t$ ,  $Q_2 = I^2 R_2 t = 2Q_1$ ; при паралельному сполученні напруга на кожному з резисторів одна і та сама, тому за формулою  $Q = \frac{U^2}{R} t$

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1} t, \quad Q_2 = \frac{U^2}{2R_1} t = \frac{Q_1}{2}.$$

## 2.10 КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

1. Означимо як корисну роботу, що виконується електричним струмом на зовнішній ділянці кола (робота, що виконується електростатичним полем, за наявності різниці потенціалів на цій ділянці кола):

$$A_k = qU,$$

$q$  — заряд перенесений через ділянку кола за деякий час. Затрачена робота — робота сторонніх сил

$$A_c = q\mathcal{E},$$

тобто к.к.д. кола

$$\eta = \frac{qU}{q\mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}}. \quad (2.10.1)$$

$U = IR$ ,  $\mathcal{E} = I(R+r)$ , тому

$$\eta = \frac{R}{R+r}, \quad (2.10.2)$$

тобто к.к.д. кола визначається відношенням зовнішнього опору до повного опору кола.

2. Залежність потужності  $N$ , що розвивається сторонніми силами на зовнішній ділянці кола, від сили струму

$$N = UI = (\mathcal{E} - Ir)I = \mathcal{E}I - I^2r \quad (2.10.3)$$

показує, що при збільшенні сили струму від нуля до максимального значення (рівного  $\mathcal{E}/2r$ )  $N$  спочатку росте, а після досягнення максимуму спадає, і при  $R=0$  (коротке замикання) дорівнює нулю.

Потужність, яка виділяється на зовнішній ділянці, можна записати і у вигляді

$$N = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R. \quad (2.10.4)$$

Максимальна потужність, що виділиться, визначається з умови максимуму функції

$$y(x) = \frac{\mathcal{E}x}{(x+r)^2},$$

де  $x=R$ . Маємо:

$$y'(x) = 0 \Rightarrow R = r.$$

Отже, максимальна потужність, що виділиться на зовнішній ділянці кола

$$N_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$$

(максимальна при  $R=r$ ). При цьому к.к.д. електричного кола  $\eta = 50\%$ ; друга половина потужності джерела струму йде на нагрівання джерела струму.

## 2.11 ПРАВИЛА КІРХГОФА

При розрахунку розгалужених електричних кіл (коли на схемі можна виділити декілька електричних кіл, як, наприклад, в схемі, показаній на рис. 2.20) пряме застосування законів Ома виявляється часто неефективним, —

розрахунок значно спрощується, якщо користуватися двома правилами Кірхгофа<sup>1)</sup>.

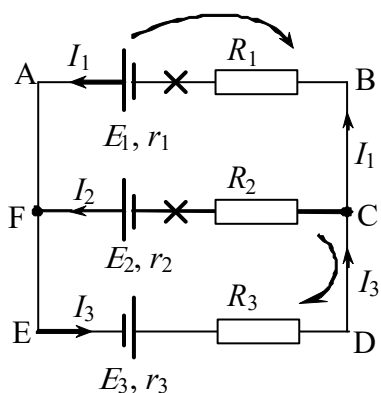


Рис. 2.20 — Приклад розгалуженого електричного кола

Перше правило Кірхгофа відноситься до вузлів електричного кола. Вузлом називається точка, в якій сходяться більше, ніж два провідники (на схемі це точки F і C). Струм, який тече до вузла, вважається додатнім, від вузла — від'ємним. За першим правилом Кірхгофа (правило вузлів) алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (2.11.1)$$

Так, для вузла F маємо:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Друге правило Кірхгофа (правило контурів) стосується будь-якого контура, виділеного в розгалуженому колі. Так, у даній схемі можна виділити три таких кола (ABDEA, ABCFA, FCDEF). Задамо напрям обходу контура (наприклад, за годинниковою стрілкою як показано стрілками на рисунку) і довільно позначимо напрями струмів на різних ділянках (справедливість чи несправедливість цих припущень буде, в підсумку, з'ясована). Якщо тепер записати закон Ома для різних ділянок розгалуженого кола, які містять е.р.с., а потім додати їх, то при додаванні відповідних виразів потенціали скорочуються і отримується рівняння:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_j \mathcal{E}_j \quad (2.11.2)$$

Це і є друге правило Кірхгофа: для довільного замкнутого контура розгалуженого кола алгебраїчна сума добутків сил струму на опори відповідних ділянок дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с., які діють у цьому контурі. При цьому сили струму і е.р.с. вважаються додатніми, якщо їх напрямок співпадає з

<sup>1)</sup> Вживається також термін «закони Кірхгофа»

<sup>2)</sup> Спробуйте отримати його

вибраним напрямком обходу контура і від'ємними, якщо вони напрямлені протилежно до нього. Так для контура ABCFA маємо:

$$-I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Число незалежних рівнянь, складених на основі правил Кірхгофа, дорівнює числу різних струмів, які течуть у розгалуженому колі. Тому, якщо задані опори і е.р.с. для всіх нерозгалужених ділянок, то можна знайти відповідні струми, або за заданими опорамі і струмами знайти е.р.с. Якщо в розгалуженому колі є  $k$  вузлів, то незалежні рівняння за першим правилом Кірхгофа можна скласти лише для  $k-1$  вузлів. Незалежні рівняння для контурів отримуються тоді, коли кожен новий контур містить хоча би одну ділянку кола, яка не входила б у попередні. Для кола на рис. 2.20 є три незалежні рівняння — одне, складене за формулою (2.11.1), два інших — за формулою (2.11.2) для контурів.

При використанні правил Кірхгофа рекомендується притримуватися такої послідовності.

1. Означити буквами (або цифрами) вузли та контури.
2. Обрати (довільно) напрями струмів.
3. Обрати напрям обходу контурів (наприклад, за годинниковою стрілкою).
4. При використанні першого правила Кірхгофа струми, які входять у вузол брати зі знаком плюс, які виходять із вузла — зі знаком мінус.
5. При використанні другого правила Кірхгофа добутки  $I_i R_i$  беруться зі знаком плюс, якщо напрям  $I_i$  співпадає з напрямом обходу контура.  $\mathcal{E}_i$  береться зі знаком плюс, якщо при обході контура потрібно йти всередині джерела е.р.с. від від'ємного полюса до додатнього, при входженні у додатній полюс е.р.с. береться зі знаком мінус.
6. Якщо при розв'язуванні отриманої системи для сил струмів отримуються від'ємні значення, то це означає, що дійсний напрям струму протилежний вибраному.

**Приклад.** Розрахуємо сили струмів  $I_1, I_2, I_3$ , які течуть у відповідних контурах за відомими опорамі і е.р.с. ( $\mathcal{E}_1=2$  В,  $\mathcal{E}_2=8$  В,  $\mathcal{E}_3=4$  В,  $R_1=4$  Ом,  $R_2=6$  Ом,  $R_3=8$  Ом,  $r_1=r_2=r_3=0,5$  Ом).

$\Rightarrow$  У колі є два вузли і три контури. Можна бачити, що тут існує три незалежних рівняння (для одного вузла і двох контурів); цього достатньо для знаходження трьох невідомих ( $I_1, I_2, I_3$ ). За рекомендаціями, викладеними вище, отримується система трьох рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ -I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \\ -I_2(R_2 + r_2) - I_3(R_3 + r_3) = -\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{cases}$$

(для вузла F та контурів ABCFA і FCDEF). Підставимо

$$I_2 = I_3 - I_1$$

у два останні рівняння. Маємо:

$$\begin{aligned} I_3(R_2 + r_2) - I_1(R_1 + R_2 + r_1 + r_2) &= -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \\ I_1(R_2 + r_2) - I_3(R_2 + R_3 + r_2 + r_3) &= -\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

Після підстановки сюди числових значень е.р.с. і опорів, маємо систему двох рівнянь для невідомих  $I_1$  і  $I_3$ . Розв'язуючи її, знаходимо:

$$I_1 = -0,10 \text{ А}, \quad I_2 = 0,85 \text{ А}, \quad I_3 = 0,75 \text{ А}.$$

Знак мінус для  $I_1$  означає, що справжній напрям струму протилежний обраному.

Правильність розрахунку доцільно перевірити рівняннями для контура ABCDEA, який не розглядався при отриманні системи рівнянь. Перевірка показує, що знайдені значення  $I_1, I_2, I_3$  задовільняють другому правилу Кірхгофа і в цьому випадку.

**Приклад:** послідовне і паралельне з'єднання джерел струму.

1. Послідовне з'єднання. Розглянемо простий приклад послідовно з'єднаних джерел (рис. 2.21). Виберемо напрям обходу контура за годинниковою стрілкою. Тоді за другим правилом Кірхгофа

$$IR + Ir_1 + Ir_2 + Ir_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3,$$

де  $r_1, r_2, r_3$  — внутрішні опори джерел струму. Звідси сила струму в колі

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{R + r_1 + r_2 + r_3}. \quad (2.11.3)$$

Це — закон Ома для розглядуваного кола.

Якщо джерела ідентичні (е.р.с.  $\mathcal{E}$ , внутрішній опір  $r$ ), то



$$I = \frac{3\mathcal{E}}{R + 3r} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{3}}$$

Якщо є  $n$  однакових джерел, то

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{n}}$$

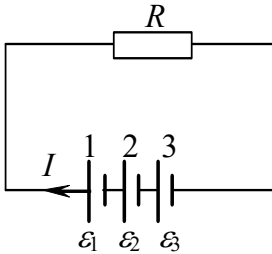


Рис. 2.21

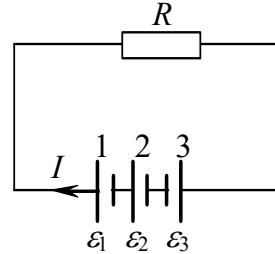


Рис. 2.22

Таке з'єднання доцільне для отримання великої сили струму за умови  $R \gg r$ .

Якщо джерела струму ввімкнені «зустрічно» (рис. 2.22), то результуюча е.р.с., яка діє в колі, — алгебраїчна сума окремих е.р.с. Тут замість формули (2.11.3) маємо

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{R + r_1 + r_2 + r_3} \tag{2.11.4}$$

Якщо при підстановці числових значень для  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$  виявиться, що  $I < 0$ , то це означає, що справжній напрям струму протилежний обраному.

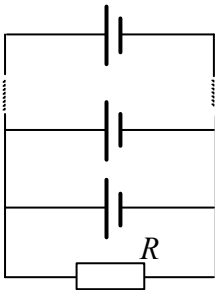


Рис. 2.23

«Зустрічне з'єднання» батарей реалізується, фактично, в зарядних пристроях, де джерело з вищою напругою (цьому на рис. 2.22 відповідає батарея двох джерел — 1 і 2) підзаряджає батарею з е.р.с.  $\mathcal{E}_3$  ( $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_3$ ).

2. При паралельному з'єднанні  $n$  джерел струму (рис. 2.23) закон Ома має вигляд

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}} \quad (2.11.5)$$

Паралельне з'єднання може виявитися доцільним для випадку  $r \gg R$  ( $r$  зменшується у  $n$  разів).

Можливе змішане з'єднання джерел струму, коли частина джерел струму ( $m$ ) сполучається послідовно, а потім  $n$  таких батарей сполучаються паралельно. За умови, що  $m$  дуже велике, а  $n$  у багато разів менше від  $m$ , можна в такий спосіб отримати в колі значний струм.

## 2.12 РОЗШИРЕННЯ МЕЖ ВИМІРЮВАННЯ АМПЕРМЕТРА І ВОЛЬТМЕТРА

На практиці часто виникає необхідність виміряти на ділянці кола силу струму або напругу за допомогою амперметра чи вольтметра, які розраховані на вимірювання слабших струмів і напруг. З цією метою при вимірюванні струмів використовують шунти<sup>2)</sup> (резистори з малим опором), а при вимірюванні напруг — додаткові резистори; використання їх дозволяє розширити межі вимірювальних приладів.

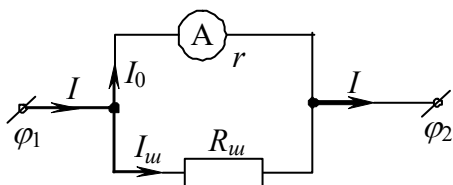


Рис. 2.24

1. Нехай постає задача вимірювання струмів до 10 А за допомогою амперметра, межа вимірювань якого 1 А. Вирішення задачі полягає у під'єднанні паралельно до амперметра резистора з малим опором (шунта) — рис. 2.24. Опір шунта підбирають та-

ким, щоб при проходженні струму  $I=10$  А відхилення стрілки було б максимальним (таким, як і при проходженні струму  $I_0=1$  А без шунта). Це означає, що в даному випадку через шунт йтиме 9 А, а через амперметр 1 А.

Оскільки

<sup>1)</sup> Формула отримується за допомогою правил Кірхгофа (див. п. 2.11), якщо виділити замкнутий контур, який містить одне джерело струму і взяти до уваги, що сила струму в ньому  $i=I/n$ .

<sup>2)</sup> Від англійського shunt — відгалуження

$$I = I_0 + I_u,$$

а за законом Ома для паралельно з'єднаних провідників

$$I_0 r = I_u R,$$

де  $r$  — опір амперметра,  $R$  — опір шунта, то шуканий опір

$$R = \frac{I_0 r}{I - I_0} = \frac{r}{\frac{I}{I_0} - 1}.$$

У даному випадку  $I/I_0=10$ , тому  $R=r/9$ . Зрозуміло, що результати вимірювань сили струму (за показами на шкалі амперметра), отримані за допомогою шунтованого амперметра, потрібно помножити на 10. Так, якщо стрілка відхилилася на половину шкали, то це означає, що на ділянці 1-2 сила струму 5 А (через амперметр пройде 0,5 А).

*Загальний випадок.* Якщо потрібно збільшити межу вимірювань амперметра в  $n$  разів, то опір шунта<sup>1)</sup>, як можна бачити,

$$R = \frac{r}{n-1}. \quad (2.12.1)$$

2. Для розширення меж вимірювання вольтметра послідовно до нього приєднують додатковий опір (рис. 2.25). Нехай потрібно виміряти напругу  $U$ , яка може досягти 10 В на резисторі  $R$ , за допомогою вольтметра, межа вимірювання якого  $U_0=1$  В. При максимальному відхиленні стрілки на шкалі падіння напруги на вольтметрі і додатковому опорі є відповідно

$$U_e = I_e r, \quad U_d = I_e R_d,$$

причому

$$U_e + U_d = U,$$

де  $U=\varphi_1-\varphi_2$  — спад напруги на резисторі  $R$ . За умовою задачі  $\frac{U}{U_e} = \frac{U}{U_0} = 10$ ,

тому

$$U_d = 9U_0$$

або

<sup>1)</sup> Проробіть самостійно нескладні розрахунки

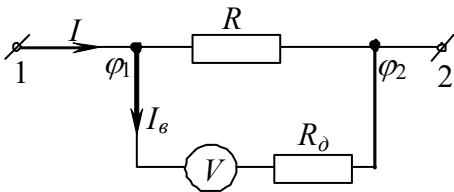


Рис. 2.25

$$I_g R_o = 9I_g r,$$

де  $r$  — внутрішній опір вольтметра. Таким чином, додатковий опір

$$R_o = 9r.$$

Тут, як і для випадку шунтів амперметра, результати вимірювань напруги (в межах до 10 В) потрібно помножити на 10; наприклад, при відхиленні стрілки вольтметра на половину шкали напруга на даній ділянці буде 5 В.

*Загальний випадок.* При збільшенні межі вимірювання вольтметра в  $n$  разів додатковий опір повинен бути в  $(n-1)$  разів більший від внутрішнього опору вольтметра:

$$R_o = (n-1)r. \quad (2.12.2)$$

## 2.13 КВАЗІСТАЦІОНАРНІ СТРУМИ. ЗАРЯДКА І РОЗРЯДКА КОНДЕНСАТОРА

### 1. Квazістаціoнaрні струми. 2. Зарядка конденсатора. 3. Розрядка конденсатора

#### 2.13.1 Квazістаціoнaрні струми

Розгляд електричних кіл, проведений вище на основі закону Ома (і наслідків з нього — правил Кірхгофа), справедливий, строго кажучи, лише для постійних струмів. Сила струму в колах постійного струму одна і та ж у різні моменти часу, на різних ділянках кола. Виявляється, проте, що в багатьох випадках закони постійного струму можна поширити і на струми, які змінюються в часі. Це можливо тоді, коли *миттєві* значення сили струму можна вважати одними і тими ж на всіх ділянках розглядуваного провідника або кола. Такі струми називаються *квazістаціoнaрними*<sup>1)</sup>. Отже електричні кола, в яких протікають квazістаціoнaрні струми, можна описувати законами постійного струму, якщо у відповідних законах постійного струму розуміти миттєві значення величин. Квazістаціoнaрними є струми при зарядці і розрядці конденсатора.

<sup>1)</sup> Змінні струми як квazістаціoнaрні розглядатимуться у розділі 11

**2.13.2 Зарядка конденсатора**

Зарядку і розрядку конденсатора можна здійснювати за схемою, показаною на рис.2.26

У процесі зарядки конденсатора ключ  $K_1$  ввімкнений, а ключ  $K_2$  — розімкнений; ми маємо коло, показане на рис.2.26 У такому колі електрони переміщатимуться від від’ємної клеми батареї до нижньої обкладки конденсатора, і далі — від верхньої обкладки конденсатора — до додатної клеми батареї. Так на нижній обкладці конденсатора накопичуватиметься від’ємний заряд, на верхній — додатний. При цьому напрям струму  $I$  (рух додатніх носіїв) буде такий, як показано на рис.2.26<sup>1)</sup>;

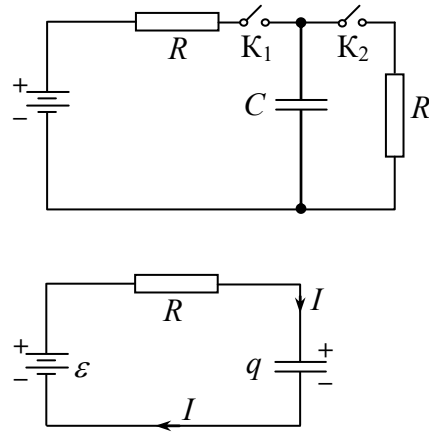


Рис. 2.26

$$I = \frac{dq}{dt} > 0$$

(заряд верхньої обкладки зростає).

Запишемо закон Ома для неоднорідної ділянки кола  $1 \ \mathcal{E}R2$ :

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \tag{2.13.1}$$

Зважаючи на розподіл зарядів на обкладках конденсатора, маємо, що

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$ , де  $C$  — ємність конденсатора. Отже, замість (2.13.1) маємо

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{R}.$$

Розділимо змінні в останньому рівнянні:

$$\frac{Rdq}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} = dt. \tag{2.13.2}$$

Проінтегруємо це рівняння:

<sup>1)</sup> Тут постає проблемне питання щодо струму в проміжку між обкладками конденсатора: яка його природа. В розділі 10, п. 10.2 на це питання дається відповідь: продовженням струму провідності  $I$  всередині конденсатора є *струм зміщення*

$$\int_0^q \frac{Rdq}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} = \int_0^t dt \Rightarrow -RC \ln\left(1 - \frac{q}{C\mathcal{E}}\right) = t; \quad (2.13.3)$$

тут використано, що в момент часу  $t=0$  (початок зарядки конденсатора) заряд конденсатора  $q=0$ . Із (2.13.3) отримуємо

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (2.13.4)$$

де  $q_m = C\mathcal{E}$ ,  $\tau = RC$ . Величина  $\tau$  має розмірність часу і характеризує швидкість зарядки конденсатора. Заряд конденсатора зростає від нуля при  $t=0$  до максимального значення  $q_m$  при  $t/\tau \rightarrow \infty$ . Остання умова, зрозуміло, недосяжна. Проте, вже при  $t/\tau=6,9$  заряд  $q$  складає 99,9%  $q_m$ , тобто  $q$  досить швидко прямує до  $q_m$ .

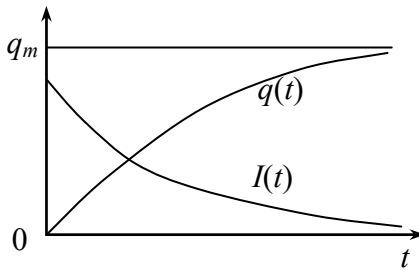


Рис. 2.27

Закон зміни сили струму в колі

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$(2.13.5)$$

При  $t=0$  (початок зарядки)  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ ,

$I \rightarrow 0$  при  $t/\tau \rightarrow \infty$ .

Графіки залежностей  $q(t)$  і  $I(t)$

показані на рис.2.27.

Наведені вище результати можна отримати і із аналізу закону збереження енергії (див. задачу 2.20).

**Приклад.** В колі на рис.2.26 повний опір  $R=500$  Ом; ємність конденсатора  $C=10$  мкФ, е.р.с. батареї 12 В. Знайдемо максимальний заряд конденсатора і час, за який заряд досягає 99,9% максимального заряду.

$\Rightarrow$  Максимальний заряд  $q_m = C\mathcal{E} = 12 \cdot 10^{-5}$  Кл. За рівнянням (2.13.4)

$$0,999q_m = q_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln(0,001),$$

звідки

$$t = 6,9\tau = 6,9RC \approx 34,5 \text{ мс.}$$

**2.13.3 Розрядка конденсатора**

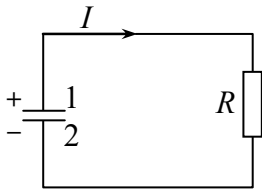


Рис. 2.28

Розрядка конденсатора почне відбуватися, якщо після зарядки у схемі, зображеній на рис.2.26, розімкнути ключ  $K_1$  і замкнути ключ  $K_2$ ; в цьому випадку буде електричне коло, показане на рис.2.28.

Струм виберемо додатнім, якщо він тече від додатної обкладки конденсатора до від’ємної, тому

$$I = -\frac{dq}{dt} > 0 \tag{2.13.6}$$

(заряд додатної обкладки зменшиться:  $dq < 0$ ). Закон Ома для ділянки  $1R2$ :

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow IR = U.$$

Врахуємо (2.13.6) і що  $U = \frac{q}{C}$ . Тоді

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}.$$

Інтегруємо останнє рівняння:

$$\int_{q_m}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q = q_m e^{-\frac{t}{RC}} = q_m e^{-\frac{t}{\tau}}; \tag{2.13.7}$$

тут  $q$  — заряд конденсатора в момент часу  $t$ ,  $q_m$  — початковий заряд конденсатора (в момент часу  $t=0$ ),  $\tau = RC$ .

Залежність сили струму при розрядці конденсатора:

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{2.13.8}$$

де  $I_0 = \frac{q_m}{\tau}$  — сила струму в момент часу  $t=0$ .

Залежність  $q(t)$  показана на рис.2.29. Залежність  $I(t)$  має подібний вигляд.

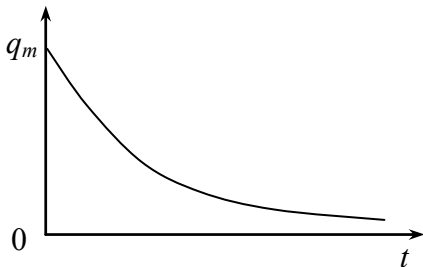


Рис. 2.29

## 2.14 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 2.14.1 Запитання і задачі

1. У деякому електростатичному полі потенціал точки А вищий, ніж потенціал точки В (так поблизу поверхні Землі різниця потенціалів між двома точками на відстані 1 м, розміщеними по вертикалі складає приблизно 130 В). Проте, якщо помістити в це поле провідник, то струм по ньому не буде йти. Чому?

2. На ділянках АЕД і ВFC, зображених на рис.2.30, струм відсутній. З'єднаємо точки Е і F провідником. Чи потече струм по ньому?

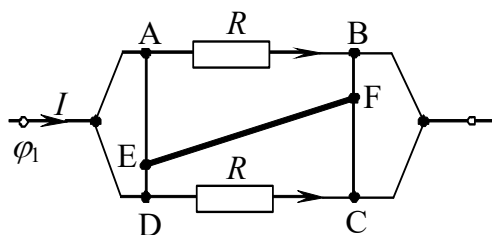


Рис. 2.30

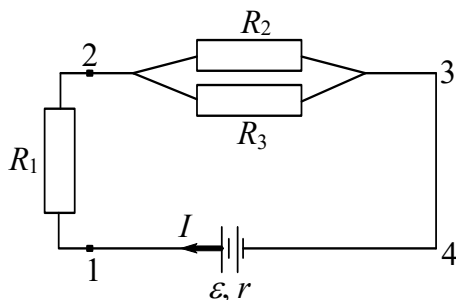


Рис. 2.31

3. На рис. 2.31 зображено електричне коло, в якому два елементи, кожен з яких має е.р.с.  $\mathcal{E}=1,5$  В, з'єднані послідовно. Їх внутрішні опори однакові і дорівнюють  $r=0,1$  Ом. Опори  $R_1=R_2=R_3=2$  Ом. Знайти силу струму в колі, а також напругу між точками 1 і 2 (двома способами — за законом Ома для однорідної ділянки кола 1– $R_1$ –2 і за законом Ома для неоднорідної ділянки кола 2– $R_2$ –3–4– $\mathcal{E}$ –1).

4. Закон Ома у загальній формі можна встановити і з таких міркувань. Теплота, яка виділяється на неоднорідній ділянці кола, є проявом дії електростатичних і сторонніх сил. Використання при цьому закону збереження енергії приводить до закону Ома для ділянки кола, на якій діє е.р.с. Отримати вираз для закону Ома.

5. Із ніхромового дроту (питомий опір  $\rho=1,2$  Ом·мм<sup>2</sup>/м) з площею поперечного перерізу  $S=0,2$  мм<sup>2</sup> виготовлений нагрівач, який за 5 хв доводить



500 г води від 20°C до кипіння. Втрати теплоти 30%. Напруга в колі  $U=120$  В. Якої довжини потрібно взяти дріт для нагрівача?

6. Що покаже вольтметр на ділянці 1-2 (рис. 2.32) — різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  чи напругу  $\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$ ?

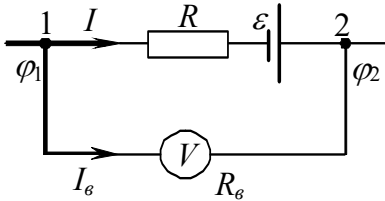


Рис. 2.32

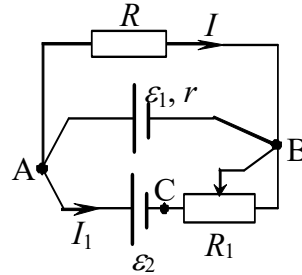


Рис. 2.33

7. Чому не можна точно виміряти е.р.с. елемента безпосередньо вольтметром?

8. Є необмежена кількість однакових батарейок для кишенькового ліхтаря. Чи можна за допомогою їх створити дуже сильний струм у колі?

9. Студент А: лампочка перегоряє від більшої сили струму, бо потужність  $P$ , яка виділяється на деякому опорі  $R$  дорівнює  $I^2 R$ . Студент Б: лампочка перегоряє від більшої напруги, бо  $P=U^2/R$ . Де правда?

10. Розглянемо електричне коло, яке показано на рис. 2.33. За якої умови струм  $I$  не залежатиме від опору реостата  $R_1$ ?

11. Знайти відношення різниці потенціалів на клеммах джерела до його е.р.с., якщо опір кола  $R+r$  в  $k$  разів більший від внутрішнього опору  $r$  ( $R$  — опір зовнішньої ділянки кола).

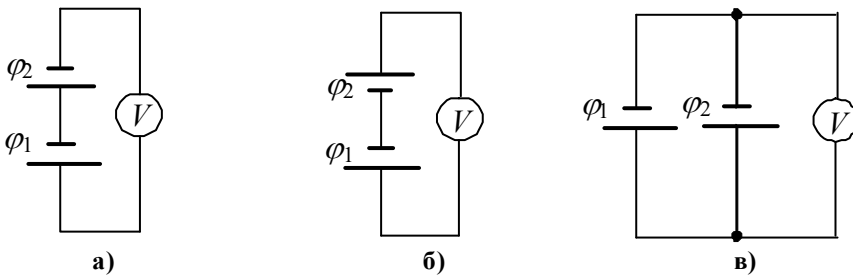


Рис. 2.34

12. Два гальванічних елементи об'єднали в батарею (рис. 2.34). Яку напругу покаже вольтметр для випадків а), б), в), якщо е.р.с. кожного елемента 1,5 В? Опір вольтметра вважати великим, а внутрішній опір джерел і з'єднувальних провідників — рівним нулю.

13. Коло складається із  $n$  послідовно з'єднаних джерел з е.р.с.  $\mathcal{E}$  і внутрішнім опором  $r$ . Покладемо, що опір з'єднувальних провідників рівний нулю і будемо вважати, що струм через вольтметр не йде. Що покаже вольтметр, під'єднаний до клем одного із джерел (рис. 2.35).

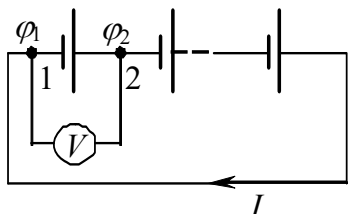


Рис. 2.35

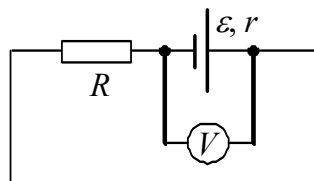


Рис. 2.36

14. В електричному колі, показаному на рис. 7 ( $R=10$  Ом,  $\mathcal{E}=8$  В,  $r=1$  Ом) напруга на затискачах джерела вимірюється вольтметром, опір якого  $R_V=200$  Ом. Знайти відносну похибку показів вольтметра, зумовлену врахуванням скінченного опору вольтметра (при вимірюванні напруги «ідеальним» вольтметром, опір якого безмежно великий, не вноситься змін в електричне коло).

15. На ділянці кола з опором  $R=(2,0\pm 0,1)$  Ом потрібно виміряти потужність струму  $P=7,1$  Вт з відносною похибкою, не більшою 7%. Якого класу точності потрібно вибрати амперметр з верхньою межею вимірювання 2 А?

16. Електричну лампочку, розраховану на максимальну напругу  $U_m$ , приєднали до джерела струму з е.р.с.  $\mathcal{E}$ , причому  $\mathcal{E} > U_m$ . Виявилось, що лампочка не тільки не перегоріла, а й не засвітилася. Чому?

17. Невеличка гідроелектростанція має витрату води  $V=180$  м<sup>3</sup> за хвилину. Висота стовпа води  $h=3$  м. Скільки електричних ламп потужністю у 100 Вт може обслужити гідроелектростанція? К.к.д. гідровузла  $\eta=75\%$ .

18. Вивести формулу (2.9.4) (закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі).

19. Пояснити, за рахунок чого виникає згин ліній напруженості у провіднику (рис. 2.3, б)?

20. Розгляньте процес зарядки конденсатора з енергетичної точки зору. Аналіз закону збереження енергії повинен привести Вас до рівняння (2.13.2).

### 2.14.2 Відповіді

1. Для проходження постійного струму у замкнутому колі необхідна дія сторонніх сил — сил неелектростатичного походження.

2. Потече, бо потенціал точки Е вищий, ніж потенціал точки F.

3. 1) Опір  $R_{23}$  двох паралельно з'єднаних резисторів визначається з умови

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1 \text{ Ом.}$$

2) Опір зовнішньої ділянки кола

$$R = R_1 + R_{23} = 3 \text{ Ом.}$$

3) Сила струму в колі

$$I = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2r} \approx 0,94 \text{ А.}$$

Таким буде показ амперметра, ввімкнутого між точками 3 і 4 кола.

4) Різниця потенціалів між точками 1 і 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2r} R_1 \approx 1,9 \text{ В}$$

таку напругу зафіксує вольтметр, під'єднаний до точок 1 і 2. Цю ж різницю потенціалів можна знайти, розглядаючи ділянку кола 2– $R_{23}$ –3–4– $\mathcal{E}$ –1 як неоднорідну ділянку за узагальненою формою закону Ома. Це, звичайно, громіздкий розрахунок, але корисний для розуміння принципів розрахунку електричних кіл. Маємо:

$$I(R_{23} + 2r) = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E}$$

(опір на ділянці 2–1 є  $R_{23} + 2r$ ). Далі:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_{23} + 2r} \Rightarrow I(R_1 + R_{23} + 2r) = -IR_1 + \mathcal{E}.$$

Отже,

$$-IR_1 + \mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = IR_1 \approx 1,9 \text{ В.}$$

4. На ділянці за час  $t$  виділяється теплота  $Q = I^2 R t$ , де  $R$  — загальний опір ділянки. За законом збереження енергії  $I^2 R t = q \mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2)$ , де  $q$  — заряд, що переноситься за час  $t$ ,  $\mathcal{E}_{12}$  — е.р.с., що діє на даній ділянці,  $\varphi_1 - \varphi_2$  — різниця потенціалів на цій ділянці (див., для прикладу, рис. 2.9). Оскільки  $q = It$ , то

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}.$$

5. Оскільки к.к.д. нагрівача  $\eta = 0,7$ , то

$$0,7 \frac{U^2}{R} t = cm \Delta T,$$

де  $R$  — опір,  $m$  — маса води,  $c$  — питома теплоємність води,  $\Delta T = 80$  К. Маємо

$$R = \frac{0,7 U^2 t}{cm \Delta T},$$

звідки

$$R = \frac{0,7 \cdot 120^2 \cdot 300}{0,5 \cdot 4200 \cdot 80} \text{ Ом} = 18 \text{ Ом.}$$

За формулою  $R = \rho \frac{l}{S}$  знаходимо шукану довжину:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{18 \cdot 0,2}{1,2} \text{ м} = 3 \text{ м.}$$

6. Вольтметр показуватиме різницю потенціалів. Справді, за законом Ома для ділянки кола, по якій йде струм  $I_e$ ,  $I_e R_e = \varphi_1 - \varphi_2$ . Звідси

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_e}.$$

Показ вольтметра визначається відхиленням стрілки вольтметра, а це відхилення пропорційне  $I_e$ , яка в свою чергу пропорційна  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

7. При вмиканні вольтметра утворюється електричне коло, і тому виміряна напруга на клеммах елемента  $U = \mathcal{E} - Ir$ , де  $I$  — сила струму в колі,  $r$  — внутрішній опір.

8. Можна, якщо сполучити батарейки змішаним способом: з'єднаємо послідовно  $m$  батарейок, а потім  $k$  таких батарей з'єднаємо паралельно. Оскільки е.р.с. утвореного таким чином джерела струму буде  $m\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}$  — е.р.с. однієї батарейки), а внутрішній опір  $mr/k$ , то струм в колі із зовнішнім опором  $R$

$$I = \frac{m\mathcal{E}}{R + \frac{mr}{k}}.$$

Якщо  $m$  буде дуже велике, а  $R \gg mr/k$ ,  $I > m\mathcal{E}/R$ .

При послідовному з'єднанні

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}$$

( $n$  — число батарейок), тобто  $\mathcal{E} < \mathcal{E}/r$ .

При паралельному з'єднанні

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}};$$

тут  $I < \mathcal{E}/R$ . Ні один із цих способів не дає можливості створити наперед заданий струм (на відміну від змішаного з'єднання).

9. Обидві відповіді некоректні. Лампочка перегорає внаслідок надмірного виділення теплоти в одиницю часу, тобто внаслідок різкого зростання потужності струму. Таке зростання може бути зумовлено як зміною струму, так і напруги, або опору. Вирази  $U^2/R$  і  $I^2R$  еквівалентні; це вказує на некоректність окремого розгляду струму і напруги (хоча б тому, що  $P=IU$ ); потрібно розглядати три взаємозв'язані величини — силу струму, напругу, опір.

10. Нехай на ділянці АСВ тече струм  $I_1$ . За законом Ома для цієї ділянки  $I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B - \mathcal{E}_2$ . Струм  $I$  не буде залежати від опору  $R_1$ , якщо  $I_1 = 0$ ; умова цього  $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2$ . Оскільки (при  $I_1 = 0$ )

$$\varphi_A - \varphi_B = IR = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r} R,$$

то шуканою умовою є рівність:

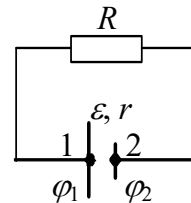


Рис. 2.37

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R+r} R.$$

11. Із закону Ома для кола маємо  $\mathcal{E} = IR + Ir$ ,  $\mathcal{E}$  — е.р.с.,  $IR = \varphi_1 - \varphi_2$  — різниця потенціалів на клеммах джерела (рис. 2.37). Маємо:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{r}{R+r} = 1 - \frac{k}{1+k} = \frac{1}{1+k}.$$

12. За законом Ома для ділянки, на якій діє е.р.с.  $\mathcal{E}$ ,

$$\varphi_1 - \varphi_2 + Ir = \mathcal{E};$$

$\varphi_1 - \varphi_2 = U$  — напруга, вимірювана вольтметром,  $I$  — сила струму на даній ділянці,  $r$  — внутрішній опір. За умовою  $I=0$  (опір вольтметра дуже високий). Вольтметр показуватиме різницю потенціалів, яка в даному випадку визначається електрорушійною силою. Для трьох випадків, показаних на рис. 2.34, маємо відповідно  $\varphi_1 - \varphi_2 = 3$  В (послідовне сполучення джерел), 0 і 1,5 В (паралельне сполучення джерел струму).

13. За законом Ома для неоднорідної ділянки кола (між точками 1-2)

$$Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  — різниця потенціалів між точками 2 і 1 ( $\varphi_1 < \varphi_2$ ). Оскільки сила струму в колі

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

(послідовне з'єднання  $n$  джерел струму), то напруга на затискачах

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r} r = 0.$$

Вольтметр не зафіксує різниці потенціалів.

14. Позначимо показ реального вольтметра через  $U$ , а вольтметра з безмежно великим опором  $U_0$ . Шукана похибка

$$\delta U = \frac{U_0 - U}{U_0}.$$

Якщо струм через вольтметр не йде, то

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

і напруга

$$U_0 = I_0 R = \frac{\mathcal{E}}{R+r} R.$$

Якщо ж в колі є вольтметр з опором  $R_V$ , то сила струму в колі

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r},$$

де  $R_1 = \frac{R_1 R_V}{R_1 + R_V}$  — опір паралельно сполучених резистора і вольтметра. Та-

ким чином,

$$U = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} R_1 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R R_V}{R + R_V} + r} \cdot \frac{R R_V}{R + R_V}.$$

Для відносної похибки  $\delta U$  маємо

$$\delta U = \frac{U_0 - U}{U_0} = 1 - \frac{R_V (R + r)}{(R + R_V) r + R R_V} = 1 - \frac{R_V (R + r)}{(R + r) R_V + r R} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{r R}{(R + r) R_V}}.$$

Наслідки звідси: якщо  $R_V \gg R$  (така умова має виконуватися) і  $R > r$ , то наближення

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad (x \ll 1)$$

дає

$$\delta U = \frac{r R}{(r + R) R_V}.$$

Видно, що чим більший опір вольтметра в порівнянні із зовнішнім опором, тим менша похибка вимірювання. За умови  $R_V \gg r$  похибка також мала (при цьому зовнішній опір може бути як завгодно великий (подумайте, чому це так?).

Для величин, заданих в умові задачі маємо (оскільки  $R_V \gg R$ ,  $R_V \gg r$ ):

$$\delta U = \frac{1 \cdot 10}{(1+10) \cdot 200} \approx 0,0045,$$

тобто складає всього 0,45%. У цьому випадку вплив вольтметра на параметри кола незначний.

15.  $N = I^2 R$ , тому для відносних похибок маємо:

$$\frac{\Delta N}{N_c} = 2 \frac{\Delta I}{I_c} + \frac{\Delta R}{R_c},$$

де  $\Delta N/N=0,07$ ,  $\Delta R/R=0,05$ , індексом  $c$  позначені середні значення.  $I_c$  знаходимо за формулою

$$I_c = \sqrt{\frac{N_c}{R_c}} \approx 1,9 \text{ А.}$$

Тому,

$$0,07 = \frac{2\Delta I}{1,9} + \frac{0,1}{2},$$

звідки  $\Delta I \approx 0,02$ . Відношення цієї величини до межі вимірювання, виражене у %, дає клас точності

$$KT = \frac{0,02}{2} \cdot 100 = 1.$$

16. Оскільки напруга на лампочці  $U = \mathcal{E} - Ir$ , то за рахунок достатньо великого опору елемента (наприклад, внаслідок тривалого зберігання елемента, зменшується  $\mathcal{E}$  і збільшується  $r$ )  $U$  може стати помітно меншим від  $U_m$ .

17. Електричні лампи включаються у мережу паралельно, тому сила струму в колі  $nI$  ( $n$  — кількість лампочок,  $I$  — струм який проходить через одну лампу). Потужність, яка споживається лампами,  $N = nIU = nN_0$  (де  $N_0 = 100$  Вт).

З іншого боку, потужність станції

$$N = \frac{mgh}{t} \eta = \frac{V\rho gh}{t} \eta,$$

тут  $m = V\rho$ ,  $\rho$  — густина води,  $g$  — прискорення вільного падіння,  $t = 60$  с. Таким чином,

$$nN_0 = \frac{V\rho gh}{t} \eta,$$

звідки, отримується

$$n = \frac{V\rho gh}{N_0 t} \eta \approx 660.$$



18. Виділимо в провіднику циліндричний об'єм  $\Delta V = S\Delta l$ , опір якого  $R = \rho \frac{\Delta l}{S}$ . За законом Джоуля-Ленца за час  $\Delta t$  в цьому об'ємі виділятиметься теплота

$$\Delta Q = I^2 R \Delta t = (jS)^2 \rho \frac{\Delta l}{S} \Delta t = \rho j^2 S \Delta l \Delta t = \rho j^2 \Delta V \Delta t.$$

Кількість теплоти, що виділиться в одиниці об'єму за одиницю часу

$$w = \frac{\Delta Q}{\Delta V \Delta t} = \rho j^2.$$

Оскільки  $j = \sigma E$ ,  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ , то

$$w = jE = \sigma E^2$$

— закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі (2.10.3).

19. Згин ліній напруженості виникає тому, що вздовж зовнішньої границі провідника і по кутах з'являються невеликі некомпенсовані заряди. Таким чином «корегується» електричне поле у провіднику і воно є сталим у різних місцях провідника (рис. 2.3, б).

20. Робота, виконана джерелом струму, йде на зарядку конденсатора і на нагрівання резистора. Маємо:

$$dq\mathcal{E} = I^2 R dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right);$$

тут  $dq$  — заряд перенесений на конденсатор за час  $dt$ ,  $\frac{q^2}{2C}$  — миттєве значення енергії конденсатора. Зробимо очевидні перетворення:

$$\begin{aligned} Idt\mathcal{E} &= I^2 R dt + \frac{2q}{2C} dq \Rightarrow \mathcal{E} = IR + \frac{q}{C} \Rightarrow \\ \mathcal{E} - \frac{q}{C} &= R \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} = dt \end{aligned}$$

(використано, що  $Idt = dq$ ). Отже, ми отримали рівняння (1.32), яке описує зарядку конденсатора.

## РОЗДІЛ 3

### ОСНОВИ ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕОРІЇ МЕТАЛІВ

*Електрон — носій найменшого спостережуваного електричного заряду в Природі. Характеризується власним моментом імпульсу (спіном) і власним магнітним моментом. Електрон проявляє як властивості частинки, так і хвильові властивості. Електропровідність, магнетизм, хімічний зв'язок — все це — «діяльність електрона». Відкритий у 1897 р. англійським фізиком Томсоном. Назва «електрон» походить від грецького слова **electron** — буристин. Як і заряд наелектризованого буристину, заряд електрона домовилися вважати від'ємним.*

**Електричний струм** в металах — впорядкований рух електронів провідності («зовнішніх» електронів атомів, які в металі «колективізуються» — стають спільними для всього металічного провідника). Для пояснення багатьох властивостей металів достатньо ефективною виявляється модель, за якою електрони в металі поводять себе як своєрідний електронний газ. Є два підходи до розгляду електронного газу в металі — класичний<sup>1)</sup> і квантовий. Нижче будуть викладені основи обох підходів, на основі чого будуть обґрунтовані основні закони постійного струму — закони Ома і Джоуля-Ленца та розглянуто ряд наслідків, які впливають з електронної теорії провідності металів.

#### 3.1 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА БАЗА ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕОРІЇ МЕТАЛІВ

Численними дослідженнями доведено, що провідність металів зумовлена електронами. Вкажемо на два з них.

---

<sup>1)</sup> Тут «класичний» означає «доквантовий»

У досліді Рікке (1901 р.) електричний струм пропускався протягом року через три поставлених один на одного циліндри — мідний, алюмінієвий і знову мідний. Хоча за цей час через провідник пройшов заряд  $\approx 4 \cdot 10^6$  Кл, не було помічено жодного переносу речовини між циліндрами, не змінилася і маса циліндрів. Це був серйозний аргумент на користь того, що носіями струму в металі є електрони (відкриті чотири роки перед тим Томсоном).

Другий класичний дослід був поставлений Толменом і Стюартом у 1916 р.; він дозволив визначити відношення заряду електрона до його маси. Була взята котушка із провідника довжиною 500 м, яка приводилася у швидке обертання навколо її осі (лінійна швидкість обертання досягала 300 м/с) (рис. 3.1). При різкому гальмуванні котушки кінці її замикались на гальванометр, який реєстрував короткочасний струм. Виникнення струму можна пояснити існуванням носіїв струму, які продовжували (за інерцією) рух після зупинки котушки. За відхиленням стрілки гальванометра можна було визначити напрям струму, а звідси і знак заряду носіїв; він виявився від'ємним.

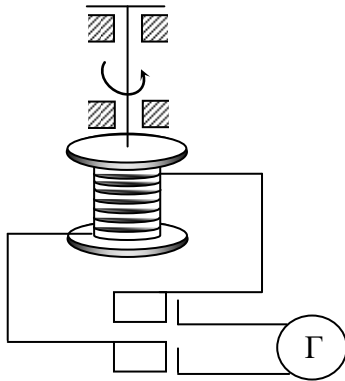


Рис. 3.1

Результати дослідів дозволяють знайти відношення заряду носія до його маси наступним способом.

За законом збереження енергії зменшення кінетичної енергії носіїв при гальмуванні котушки ( $dE_k$ ) дорівнюватиме теплоті, яка виділяється провідником за законом Джоуля-Ленца за час  $dt$ :

$$-dE_k = I^2 R dt, \quad (3.1.1)$$

де  $I$  миттєве значення сили струму,  $R$  — повний опір кола (котушка — гальванометр). Миттєве значення сили струму

$$I = jS,$$

де  $j$  — густина струму,  $S$  — площа поперечного перерізу провідника. Оскільки зміна кінетичної енергії

$$-dE_k = -d\left(\frac{m g^2}{2} N\right) = -d\left(\frac{m g^2}{2} nSl\right) \quad (3.1.2)$$

( $m$  — маса носія струму,  $\mathcal{Q}$  — його швидкість,  $N$  — загальне число носіїв в котушці,  $n$  — концентрація носіїв,  $l$  — довжина провідника), а

$$j = nq\mathcal{Q}, \quad (3.1.3)$$

де  $q$  — заряд носія (див. задачу 1 в п. 3.6), то для відношення  $q/m$  отримується (див. задачу 2 в п. 3.6)

$$\frac{q}{m} = \frac{\mathcal{Q}_0 l}{RQ}, \quad (3.1.4)$$

де  $\mathcal{Q}_0$  — початкова швидкість носія струму (кінцева дорівнює нулю),  $Q$  — заряд, який пройшов в колі за час гальмування (визначається так званим балістичним гальванометром).

Результати досліду дали:

$$\frac{q}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

В дослідах Томсона (1897 р.) з катодними променями (потік електронів) було отримано, що відношення заряду електрона до його маси  $e/m_e$  близьке до цієї величини. Збіг відношення  $q/m$  із відношенням  $e/m_e$  доводить, що носії струму в металах — електрони.

Результати досліду Толмена і Стюарта, а також те, що струм в металах викликає і дуже мала різниця потенціалів, дозволяють стверджувати, що електрони в металі переміщуються практично вільно (звідси термін — «вільні електрони»). Ці та інші досліди переконливо доводять, що носії струму в металах — вільні електрони.

Якщо вважати, що кожен атом в металі «постачає» один вільний електрон, то концентрація вільних електронів у металах  $n = 10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$  (див. задачу 3 в п. 3.6). Досліди по визначенню заряду електрона і його маси дають:

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

## 3.2 ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕОРІЇ МЕТАЛІВ

Базою класичної електронної теорії металів (основи її закладені Друде і Лоренцом) є представлення про електронно-іонну будову речовини (схематичне зображення моделі показане на рис. 3.2). Іони утворюють кристалічну ґратку, вільні електрони рухаються між іонами за законами молекулярно-кінетичної теорії газів. При цьому приймається:

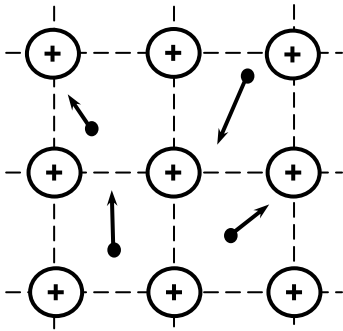


Рис. 3.2

⊕ – іони, ● – вільні електрони.

Іони утворюють кристалічну ґратку

1. Електрони поведуть себе як одноатомні молекули ідеального газу. Якщо електричне поле відсутнє, то електрони рухаються хаотично. Зіткнення електронів з іонами приводить до теплової рівноваги між електронною та іонною підсистемами. Середня швидкість електрона при температурі  $T$  за молекулярно-кінетичною теорією є

$$\langle g \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (3.2.1)$$

( $k$  — стала Больцмана,  $m$  — маса електрона). Для кімнатної температури  $\langle g \rangle \approx 10^5$  м/с.

Середня енергія електрона

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

2. Якщо електрон рухається в електричному полі з напруженістю  $E$ , то між двома послідовними зіткненнями його рух буде рівноприскорений (діє сила  $F = eE$ ). При зіткненні енергія, набута електронем, повністю передається іону (кристалічній ґратці), внаслідок чого провідник нагрівається. Електричний струм за електронною теорією — впорядкований рух електронів із деякою середньою швидкістю  $\langle u \rangle$ ; таким чином, накладаються два рухи — хаотичний (тепловий) рух електронів із середньою швидкістю  $\langle g \rangle$  і впорядкований — із швидкістю  $\langle u \rangle$ .

Оцінимо швидкість  $\langle u \rangle$  на основі формули (3.1.3). Для нашого випадку вона набуде вигляду

$$j = en\langle u \rangle. \quad (3.2.2)$$

Візьмемо достатньо високу густину струму  $j=10^7$  А/м<sup>2</sup> (10 А/мм<sup>2</sup>)<sup>1)</sup>. Тоді при концентрації вільних електронів  $n=10^{29}$  м<sup>-3</sup> (для міді)  $\langle u \rangle \approx 10^{-3}$  м/с. Таким чином, навіть при дуже великих силах струму швидкість впорядкованого руху

<sup>1)</sup> Це гранично допустима за технічними нормами густина струму для мідних дротів

електронів значно менша від середньої швидкості їх хаотичного руху ( $\langle \mathcal{G} \rangle \approx 10^5$  м/с).

На основі цих положень класичної електронної теорії вдається вивести основні закони постійного струму — закон Ома і закон Джоуля-Ленца.

**Закон Ома.** Нехай після зіткнення електрона з йоном його швидкість дорівнює нулю. Тоді під дією поля (поле вважаємо однорідним) він отримує прискорення

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m},$$

і його максимальна швидкість перед наступним зіткненням

$$u_{max} = \frac{eE}{m} \langle t \rangle,$$

де  $\langle t \rangle$  — середній час між двома послідовними зіткненнями електрона з йонами. Оскільки швидкість хаотичного руху електронів набагато більша від швидкості впорядкованого руху (в  $\frac{10^5 \text{ м/с}}{10^{-3} \text{ м/с}} = 10^8$  разів), то саме вона і ви-

значає час між зіткненнями:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle \mathcal{G} \rangle}, \quad (3.2.3)$$

де  $\langle l \rangle$  — середня довжина вільного пробігу електрона. Таким чином, середня швидкість впорядкованого руху електронів між двома послідовними зіткненнями є

$$\langle u \rangle = \frac{0 + u_{max}}{2} = \frac{eE \langle l \rangle}{2m \langle \mathcal{G} \rangle}. \quad (3.2.4)$$

З врахуванням цього

$$j = en \langle u \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle \mathcal{G} \rangle} E.$$

Позначимо

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle \mathcal{G} \rangle}. \quad (3.2.5)$$

Тоді

$$j = \sigma E.$$

Це — закон Ома у диференціальній формі (див. формулу (2.5.4)); питома провідність  $\sigma$  означена виразом (3.2.5). Для питомого опору ( $\rho=1/\sigma$ ) маємо

$$\rho = \frac{2m\langle v \rangle}{ne^2\langle l \rangle}. \quad (3.2.6)$$

Видно, що опір провідника зменшується із збільшенням середньої довжини пробігу електрона; це означає збільшення часу  $\langle \Delta t \rangle$  між двома послідовними зіткненнями.

**Закон Джоуля-Ленца.** Перед зіткненням електрон має додаткову кінетичну енергію, зумовлену впорядкованим рухом електрона,

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{m u_{max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle v \rangle^2} E^2$$

(використана формула (3.2.4)). Кожен електрон за 1 с стикається з іонами  $z$  разів, причому

$$z = \frac{1}{\langle t \rangle} = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}$$

(використана формула (3.2.3)). Якщо концентрація електронів  $n$ , то в одиниці об'єму за 1 с відбулося  $zn$  зіткнень і кристалічній ґратці передається енергія

$$w = zn \langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2 = \sigma E^2; \quad (3.2.7)$$

така енергія виділяється в одиниці об'єму провідника за 1 с. (3.2.7) — закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі (див. формулу (2.35)).

Електронна теорія Друде-Лоренца була поширена і на розгляд інших проблем фізики металів. При цьому з'ясувалося, що, поряд із безсумнівними успіхами, електронна теорія має вади, які, як виявилось згодом, є принциповими. Вкажемо на деякі з них.

1. За формулою (3.2.1)  $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ , тому опір провідника (формула (3.2.6))  $\rho \sim \sqrt{T}$  (зважаючи на незалежність  $\langle l \rangle$  і  $n$  від температури). Цей результат суперечить експериментальним даним, з яких  $\rho \sim T$  у широкому інтервалі температур.

2. Якщо у формулу (3.2.5) для провідності  $\sigma$  підставити числові значення  $n$ ,  $e$ ,  $m$ ,  $\langle v \rangle$ , то для узгодження отриманого значення  $\sigma$  із експериментальним потрібно взяти для довжини вільного пробігу  $\langle l \rangle \sim 10^{-8}$  м, що в сотні разів

зів перевищує міжіонні віддалі в металі; це суперечить класичній теорії, за якою середня довжина вільного пробігу є величиною порядку міжіонної віддалі.

3. Розгляд теплопровідності металів за класичною теорією (подібно до розгляду теплопровідності газів за молекулярно-кінетичною теорією) приводить до висновку, що коефіцієнт теплопровідності  $\kappa = C\sigma T$ , де  $C$  — стала величина,  $\sigma$  — питома провідність,  $T$  — абсолютна температура. Це знаходиться у згоді із дослідними даними:  $\kappa/\sigma$  — величина стала (закон Відемана-Франца). Проте, як з'ясувалося згодом, отриманий правильний результат є наслідком компенсації двох проміжних помилкових розрахунків.

4. Електронна теорія не може дати послідовного пояснення термоелектричних явищ (термоелектричні явища — п. 4.3 четвертого розділу).

5. В рамках класичної теорії не можна зрозуміти і явище надпровідності.

Цей перелік можна було б продовжити. Хибність ряду наслідків з класичної теорії металів пов'язана, як виявилось, з незастосовністю до електронного газу в металі молекулярно-кінетичної теорії. Послідовний опис властивостей металів можливий лише на базі квантової теорії металів, основи якої були закладені в 20-х–30-х роках ХХ століття.

Перейдемо до викладу основ квантової теорії металів.

### 3.3 ЕЛЕКТРОННИЙ ГАЗ В МЕТАЛІ ЗА КВАНТОВОЮ ТЕОРІЄЮ

**1. Модель «потенціальної ями» для вільних електронів. 2. Електронний газ у потенціальній ямі. Енергія Фермі. 3. Електронний газ при  $T \neq 0$ . Розподіл Фермі-Дірака.**

Квантова теорія металів ґрунтується на квантовій механіці та квантовій статистиці — фізичних теоріях, в яких сформульовані способи опису мікрооб'єктів (зокрема електронів та іонів) та систем мікрооб'єктів. Принципова відмінність квантової теорії від класичної полягає в тому, що у квантовій теорії врахована подвійна (корпускулярно-хвильова) природа мікрооб'єктів та фундаментальний закон природи — принцип Паулі, який стверджує, що певний квантовий стан може бути зайнятий лише одним електроном.



### 3.3.1 Модель «потенціальної ями» для вільних електронів

Той факт, що при звичайних температурах електрони поза металом практично відсутні, можна пояснити існуванням електростатичних сил, які протидіють переходу електрона із металу за його межі. Образно це можна пояснити так: електрони знаходяться в «потенціальній ямі», вийти з якої без зовнішніх впливів (нагрівання, дія світла, електричного поля) електрон не може.

Перейдемо до детальнішого розгляду проблеми.

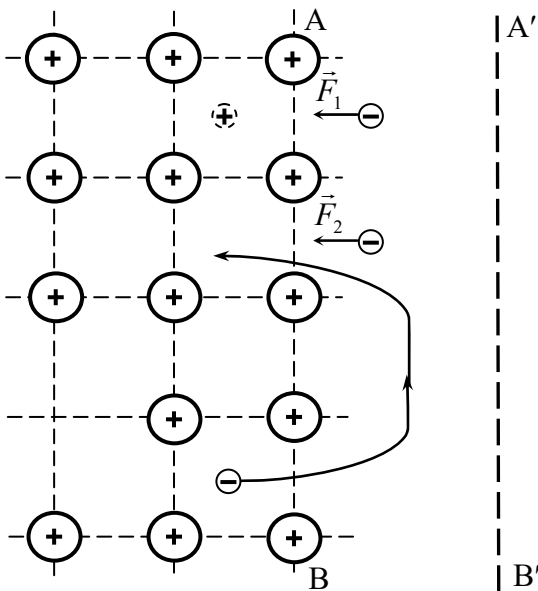


Рис. 3.3

Нехай електрон за рахунок своєї кінетичної енергії виходить за межі металу (за площину АВ на рис. 3.3). Тоді він індукує всередині А' металу додатній заряд. З'являється сила  $\vec{F}_1$ , під дією якої електрон повертається у метал. В додаток до цього електрони, які покинули метал, створюють своєрідну електрично заряджену область навколо поверхні металу (на рис. 3.3 це область АВА'В'). Виникає подвійний електричний шар товщиною  $d \approx 10^{-10}$  м, поле якого подібне до поля конденсатора (додатна «обкладинка» створюється іонами і від'ємна — електронами); поза подвійним електричним шаром поле практично відсутнє. На новий електрон, який появляється в області АВА'В' діє сила, яка повертає його в метал.

Таким чином, на електрон, який попадає в область АВА'В', діятиме, крім сили  $\vec{F}_1$ , і сила  $\vec{F}_2$  (на рис. 3.3 ці сили зображені окремо). Ці сили і змушують електрон після його виходу за межі металу, повертатися назад у метал; характер руху електрона відображено на рис. 3.3.

Виникає подвійний електричний шар товщиною  $d \approx 10^{-10}$  м, поле якого подібне до поля конденсатора (додатна «обкладинка» створюється іонами і від'ємна — електронами); поза подвійним електричним шаром поле практично відсутнє. На новий електрон, який появляється в області АВА'В' діє сила, яка повертає його в метал.

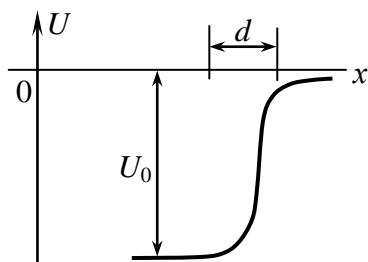


Рис. 3.4

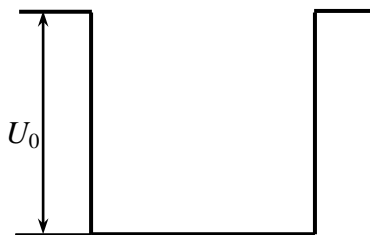


Рис. 3.5

Прослідкуємо тепер за зміною потенціальної енергії електрона при його переході за межі металу. Оскільки поле подвійного електричного шару ззовні його (за поверхнею  $A'B'$ ) практично відсутнє, то можна прийняти, що потенціальна енергія електрона при переході через поверхню  $A'B'$  прямує до нуля. Всередині металу потенціальна енергія повинна бути нижчою (тобто від'ємною) і достатньо великою за величиною (щоб протидіяти виходу електронів із металу). Означимо її  $-U_0$ . Зміна потенціальної енергії (від  $-U_0$  до 0) відбувається на проміжку  $d$ ; це відображено на рис. 3.4. Оскільки  $d$  дорівнює одній-двом міжіонним віддалям, то приймемо, що всередині металу потенціальна енергія електрона дорівнює  $-U_0$ , а поза металом — нуль; це відображено на рис. 3.5. Це — модель металу у вигляді прямокутної потенціальної ями<sup>1)</sup>: всередині металу потенціальна енергія кожного електрона одна і та ж (і дорівнює  $-U_0$ ), ззовні металу потенціальна енергія електрона дорівнює нулю.

Перейдемо до вивчення електронного газу, що знаходиться у потенціальній ямі.

### 3.3.2 Електронний газ у потенціальній ямі. Енергія Фермі

Нехай маємо  $N$  вільних електронів у потенціальній ямі при абсолютному нулі температур.

За класичною теорією всі вони будуть знаходитися у стані з найменшою енергією — на дні потенціальної ями; кожен з них матиме кінетич-

<sup>1)</sup> Термін «потенціальна яма» походить від вигляду графіка, який демонструє залежність потенціальної енергії електрона від його положення в просторі

ну енергію рівну нулю і потенціальну енергію  $-U_0$ . Принципово інша ситуація буде із квантовим електронним газом.

За квантовою теорією  $N$  вільних електронів у потенціальній ямі розмістяться на  $N/2$  близько розташованих енергетичних рівнях. Для розуміння закономірностей розподілу електронів по цих рівнях з'ясуємо важливе поняття квантової фізики — спін електрона<sup>1)</sup>. Спін електрона — власний момент імпульсу електрона<sup>2)</sup>. Це внутрішня властивість електрона (подібно до його маси і заряду). Проекція спіна на фіксований напрям може приймати два значення  $\pm \hbar/2$  ( $\hbar = h/2\pi$ , де  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — стала Планка). В подальшому наявність у електрона двох можливих значень спіну відобразиться (на рисунку) так:  $\uparrow$  (електрон зі спіном  $\hbar/2$ ),  $\downarrow$  (електрон зі спіном  $-\hbar/2$ ). У відповідності із принципом Паулі у стані із заданою енергією може знаходитися один або два (у цьому випадку проекції спінів — протилежні) вільних електрони.

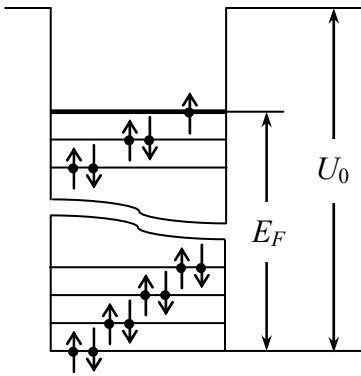


Рис. 3.6 — Заповнення енергетичних рівнів електронами

Прослідкуємо тепер за заповненням енергетичних рівнів. На найнижчому енергетичному рівні, якому відповідає кінетична енергія  $E_k=0$ , знаходяться (за принципом Паулі) два електрони з протилежними спінами; за класичною електронною теорією у цьому стані знаходилися би всі  $N$  електронів! На наступних (вищих) енергетичних рівнях знаходяться знову по два електрони. Таким чином заповняються  $N/2$  рівні; найвищий енергетичний рівень буде заповнений одним або двома електронами (рис. 3.6).

<sup>1)</sup> Спін походить від англ. *spin* — обертання. Назва виникла тому, що напочатку спін трактувався як властивість електрона обертатися навколо своєї осі. Така трактовка спіну, як з'ясувалося, некоректна

<sup>2)</sup> Нагадаємо, що момент імпульсу тіла у класичній механіці  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ , де  $J$  — момент інерції тіла,  $\vec{\omega}$  — його кутова швидкість

Отже, при абсолютному нулі всі стани з енергіями, нижчими від деякого значення  $E_F$  — зайняті, а стани з енергіями  $E > E_F$  — незайняті (вакантні). Енергетичний рівень, який відповідає енергії  $E_F$ , називається рівнем Фермі, а енергія  $E_F$  — енергією Фермі;  $E_F$  — максимальна кінетична енергія, яку можуть мати електрони при  $T=0$ .

Енергія Фермі при  $T=0$  визначається кількістю електронів  $N$  в даному об'ємі  $V$  (тобто концентрацією електронів  $n=N/V$ ):

$$E_F = \frac{h^2}{2me} \left( \frac{3n}{8\pi^2} \right)^{2/3}; \quad (3.3.1)$$

тут  $h$  — стала Планка,  $m$  — маса електрона,  $e$  — його заряд.

Оцінімо  $E_F$ . Якщо взяти для  $n$  значення  $10^{29} \text{ м}^{-3}$  (близьке до концентрації електронів у міді), то

$$E_F = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 10 \text{ еВ}$$

( $h=6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ,  $m=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ). Тут використана широко вживана одиниця вимірювання енергії електронів — електрон-вольт (еВ); 1 еВ — це енергія яку набуває електрон, що пройшов різницю потенціалів 1 В; 1 еВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Енергії Фермі відповідає швидкість електронів на рівні Фермі  $\mathcal{G}_F$ :

$$E_F = \frac{m \mathcal{G}_F^2}{2}; \quad \mathcal{G}_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}.$$

Середня кінетична енергія електронів (енергії електронів лежать при  $T=0$  в межах від нуля до  $E_F$ ) визначається за формулою

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{5} E_F.$$

Для міді, наприклад,  $\langle \mathcal{E} \rangle = 6 \text{ еВ}$ .

Порівняємо  $\langle \mathcal{E} \rangle$  із середньою кінетичною енергією класичного електронного газу при кімнатній температурі (при  $T=0$  енергія дорівнює нулю).

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT \approx \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ еВ},$$

що в  $10^2$  разів менше, ніж кінетична енергія за квантовою теорією. Відмітимо ще, що така велика кінетична енергія «квантових» електронів — нетеплового походження (її «генерує» принцип Паулі!).

### 3.3.3 Електронний газ при $T \neq 0$ . Розподіл Фермі-Дірака

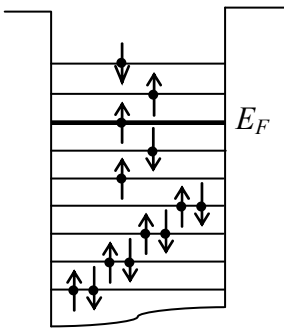


Рис. 3.7

При температурі, не рівній абсолютному нулю, електрони будуть переходити із станів з енергіями  $E < E_F$  у стан з енергіями  $E_i > E_F$  за умови, що у стані з енергією  $E_i$  відсутні електрони, або знаходиться один електрон з іншим спіном. Внаслідок цього зреалізується ситуація, яка схематично відображена на рис. 3.7. Середнє число електронів  $\langle n_i \rangle$ , які знаходяться на рівні з енергією  $E_i$  (ймовірність заповнення цього стану) дається формулою

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right) + 1}; \quad (3.3.2)$$

тут  $k$  — стала Больцмана,  $T$  — абсолютна температура,  $\exp(x) = e^x$  ( $e \approx 2,72$  — основа натуральних логарифмів). Вираз (3.3.1) називається розподілом Фермі-Дірака<sup>1)</sup>.

Формулі (3.3.2) можна надати вигляду

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}; \quad (3.3.3)$$

функція  $f(E)$  називається функцією розподілу електронів за енергіями. Зауважимо, що хоча для енергії електронів приймаються лише певні (дискретні) значення, середня «відстань» між сусідніми енергетичними рівнями практично дорівнює нулю (див. задачу 7 в п. 3.6), тому можна вважати, що  $E$  змінюється неперервно.

Функція  $f(E)$  при  $T=0$  поводить себе так:

$$\begin{aligned} f(E) &= 1, & \text{якщо } E < E_F; \\ f(E) &= 0, & \text{якщо } E > E_F. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

<sup>1)</sup> На честь Е.Фермі і П.Дірак

Це відображено на рис. 3.8: при абсолютному нулі температур енергії всіх електронів знаходимо нижче рівня Фермі (відповідає розподілу електронів, зображеному на рис. 3.6).

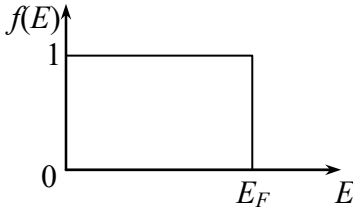


Рис. 3.8

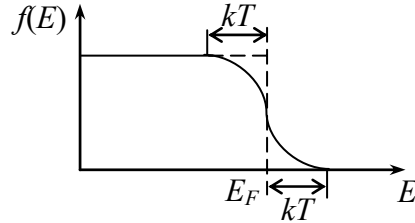


Рис. 3.9

Якщо  $T \neq 0$ , то графік функції  $f(E)$  має вигляд, показаний на рис. 3.9 (відображає рис. 3.7). Помітне відхилення від графіка, зображеного на рис. 3.8 ( $T=0$ ), спостерігається лише в області  $\approx 2kT$ . Це пояснюється наступним. Оскільки енергії, які отримують електрони при нагріванні  $\sim kT$ , причому  $kT \ll E_F$  (див. оцінку цих величин у п. 3.3.2), то переходить у незайняті стани, з енергіями, більшими від  $E_F$  будуть лише електрони, які лежать в енергетичній смузі шириною  $\approx kT$  нижче рівня Фермі. Вище рівня Фермі ширина енергетичної смуги, зайнятої електронами також буде приблизно дорівнювати  $kT$ . Електрони більш глибоких рівнів практично не беруть участі у переходах на енергетичні рівні, вищі від  $E_F$ , оскільки енергія порядку  $kT$ , яку вони отримують, недостатня для цього.

Розрахунки показують (див. задачу 3.9), що відношення числа електронів  $\Delta N$ , що займають при температурі  $T$  стани з енергіями вищими від  $E_F$ , до числа всіх електронів  $N$  є

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{kT}{2E_F}.$$

Навіть при  $T=1000$  К число електронів, які знаходяться над рівнем Фермі складає всього 1% від загального числа електронів. Це означає, що і при високих температурах розподіл електронів за енергіями мало відрізняється від розподілу при  $T=0$ .

Енергія Фермі, яка входить у розподіл Фермі-Дірака є функцією температури. За умови  $E_F \gg kT$  отримується, що

$$E_F(T) = E_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right), \quad (3.3.5)$$

де  $E_F$  дається виразом (3.3.1). Видно, що за умови  $E_F \gg kT$  залежність енергії Фермі від температури дуже слабка і нею можна нехтувати. Разом з тим при розгляді деяких фізичних явищ (напр., при з'ясуванні природи виникнення термоелектрорушійної сили (п. 4.3.2 четвертого розділу)), цю залежність потрібно враховувати.

### 3.4 КРИСТАЛІЧНА ГРАТКА ЗА КВАНТОВОЮ ТЕОРІЄЮ. ФОНОНИ

По іншому, ніж у класичній електронній теорії, описується в квантовій теорії і йонна підсистема металу (кристалічна гратка).

Найхарактерніша ознака кристалічної гратки — наявність коливань іонів відносно положень рівноваги — вузлів кристалічної гратки. При підвищенні температури амплітуда коливань зростає, при пониженні температури — зменшується. Коливний рух не зникає і при абсолютному нулі: при  $T=0$  існують так звані нульові коливання (квантове явище, яке не має аналогів у класичній фізиці).

Йони пов'язані між собою силами, які протидіють зміщенню іонів від положень рівноваги (з певним наближенням ці сили можна вважати пропорційними зміщенню), тому рух одного іона буде викликати рух сусідніх і т.д. — по кристалічній гратці поширюватимуться пружні хвилі з різними частотами. Внаслідок обмеженості сил міжйонної взаємодії існує максимальна частота пружних коливань кристалічної гратки — дебаївська<sup>1)</sup> частота  $\omega_D$ , яка визначається через число атомів в одиниці об'єму  $n$  і усереднену швидкість звуку  $\langle u \rangle$  в даному металі:

$$\omega_D = u(6\pi^2 n)^{1/3}. \quad (3.4.1)$$

За квантовою теорією пружні хвилі можна трактувати як сукупність квазічастинок<sup>2)</sup> — фононів. Фонони — кванти поля пружних коливань (елементарні порції енергії коливного руху гратки). Як і звичайні частинки (електрони, протони, фотони) вони характеризуються енергією та імпульсом, про-

<sup>1)</sup> На честь П. Дебая

<sup>2)</sup> Квазічастинка — як частинка (псевдо частинка)

те на відміну від перших не можуть існувати у вакуумі, вони є проявом коливного руху іонів, пов'язаних між собою силами взаємодії. Особливістю імпульса фонона є те, що при взаємодії фононів їх імпульс може не зберігатися, тому говорять про квазіімпульс фонона.

Енергія фонона

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad (3.4.2)$$

де  $\omega$  — циклічна частота,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

Імпульс фонона

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.4.3)$$

Число фононів  $n_\varepsilon$  з енергією  $\varepsilon$  (з даною частотою) при температурі  $T$  визначається формулою

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1}. \quad (3.4.4)$$

Якщо  $T \rightarrow 0$ , то і  $n_\varepsilon \rightarrow 0$ ; при високих температурах  $\left(\frac{\varepsilon}{kT} \ll 1\right)$

$$n_\varepsilon = \frac{kT}{\varepsilon}; \quad (3.4.5)$$

тут використана формула  $e^x \approx 1 + x$ , якщо  $x \ll 1$ .

Порівняння (3.4.4) з формулою (3.3.3), яка описує розподіл електронів за енергіями, показує принципову різницю між обома розподілами: 1) у стані із заданою енергією може знаходитися довільна кількість фононів, в той час як для випадку електронів справедливий принцип Паулі; 2) при  $T=0$  розподіл (3.3.3) поводить себе за умовою (3.3.4), а  $n_\varepsilon$  (за формулою (3.4.4)) прямує до нуля при  $T \rightarrow 0$  (це означає зникнення фононів при абсолютному нулі).

Розподіл фононів за енергіями (3.4.4) є окремим випадком розподілу Бозе-Ейнштейна, справедливого для частинок (або квазічастинок), спин у яких відсутній (як у фонона), або дорівнює цілому числу (для фотона — кванта електромагнітного поля, спин дорівнює одиниці). Частинки (квазічастинки), розподіл яких за енергіями описується розподілом Бозе-Ейнштейна, називаються бозонами; електрони, протони, нейтрони — ферміони (вони роз-



поділені за енергіями за законом Фермі-Дірака). Для ферміонів справедливий принцип Паулі, для бозонів — ні. Формально різниця між обома розподілами (формули 3.3.2 і 3.4.4) полягає у наявності  $\pm 1$  у знаменниках цих формул.

Можна підрахувати загальну кількість фононів  $N_\phi$ , які відповідають коливанням всіх частот (від 0 до  $\omega_D$ ) при заданій температурі. За умови, що

$\theta_D \gg T$ , де  $\theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$  ( $k$  — стала Больцмана)  $N_\phi \sim \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3$ ; це область низьких

температур. Якщо  $T \gg \theta_D$  (область високих температур), то  $N_\phi \sim \frac{T}{\theta_D}$ .  $\theta_D$  —

температура Дебая, характерна для кожного металу.

Використовуючи поняття фононів, стан кристалічної ґратки можна трактувати як газ фононів, що знаходиться в межах металу. Фонони взаємодіють як з електронами, так і між собою. Взаємодія електронів з фононами — основний механізм електроопору металів; з іншого боку, за рахунок електрон-фононної взаємодії існує надпровідний стан (див. далі).

### 3.5 ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ МЕТАЛІВ

1. З'ясуємо механізм виникнення електричного опору в металі за квантовою теорією.

Один із вражаючих висновків квантової механіки наступний: у випадку ідеальної ґратки, коли всі іони знаходяться у вузлах кристалічної ґратки і нерухомі, електрони будуть рухатися без жодного опору. З такою ґраткою електрони просто не взаємодіють! Це є наслідком хвильових властивостей електрона. Електронна хвиля, довжина якої  $\lambda$  визначається за формулою де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m\mathcal{G}},$$

де  $m$  — маса електрона,  $\mathcal{G}$  — його швидкість, не реагує на ідеальну ґратку (подібно до поширення світла в однорідному ідеально прозорому середовищі). Це є принциповий момент: у класичній електронній теорії сам факт існування кристалічної ґратки зумовлював електроопір.

Ідеальних ґраток, проте, не існує. У металі неминучі відхилення від строгої періодичності. Чинником, який приводить до неоднорідності кристалічної ґратки є теплові коливання ґратки (наявність фононів). Важливо відмітити, що коливання іонів є негармонічними (рух іонів навколо незмінних положень рівноваги), а ангармонічними (наслідком цього є теплове розширення тіла). Неоднорідність в металі зумовлені також домішками та механічними напруженнями. Якщо скористатись аналогією з поширенням світла, то рух електронів в кристалічній ґратці можна порівняти з поширенням світлової хвилі у мутному середовищі, в якому вона поглинається і розсіюється.

Відповідно до цього опір металічного провідника  $\rho$  можна подати у вигляді

$$\rho = \rho_T + \rho_c, \quad (3.5.1)$$

де  $\rho_T$  — опір, зумовлений тепловими коливаннями ґратки (з іншої точки зору — взаємодія електронів з фононами),  $\rho_c$  — опір, зумовлений структурними неоднорідностями.

Оскільки при прямуванні температури до абсолютного нуля кількість фононів  $N_\phi \rightarrow 0$ , то при  $T=0$  опір провідника повністю визначається взаємодією (розсіюванням) електронів на структурних неоднорідностях; це приводить до існування залишкового опору  $\rho_3$  (п. 2.7 другого розділу). При достатньо високих температурах (кімнатних), коли  $T > \theta_D$  (в цьому випадку  $N_\phi \sim \frac{T}{\theta_D}$ ) внесок  $\rho_T$  стає домінуючим і  $\rho_T$  стає пропорційним до  $T$ ; цим пояснюється експериментально спостережувана залежність опору від температури.

## 2. За квантовою теорією закон Ома

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

містить питому провідність

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle l_F \rangle}{m^* \langle u_F \rangle} \quad (3.5.2)$$

(яка ззовні подібна на відповідний вираз у класичній електронній теорії). Величини у формулі (3.5.2) мають наступний зміст:  $n$  — концентрація електронів провідності,  $e$  — заряд електрона,  $\langle l_F \rangle$  — середня довжина вільного про-

бігу електрона, який має енергію Фермі<sup>1)</sup>,  $\langle u_F \rangle$  — середня швидкість руху електронів біля рівня Фермі. Величина  $m^*$  називається ефективною масою електрона провідності. Поява цієї величини замість маси вільного електрона  $m$  пояснюється тим, що електрон в металі рухається в періодичному полі, утвореному кристалічною ґраткою (а не в потенціальній ямі з плоским дном). Ефективна маса електрона може бути як більша, так і менша від маси вільного електрона.

Як вже відзначалося, серйозним недоліком класичної електронної теорії є неможливість узгодити спостережувану величину питомої провідності із розрахованою (для чого потрібно було б взяти «аномально» великі з точки зору теорії значення середньої довжини вільного пробігу). У квантовій теорії електрон колективізований, середня довжина його вільного пробігу визначається не міжатомною віддаллю, а пов'язана з «неоднорідностями» кристалічної ґратки і може бути у сотні разів більша від міжатомних віддалей у кристалі. За цих умов із формули (3.5.2) отримуються значення, близькі до спостережуваних.

**3.** Квантова теорія дала ключ і до розв'язання однієї із найскладніших проблем фізики — з'ясування природи надпровідності (п. 2.7 другого розділу).

Оскільки теорія надпровідності дуже складна, обмежимося викладом основних її положень.

1. Між електронами поряд з кулонівськими силами відштовхування існують і сили притягання, які виникають внаслідок непрямой взаємодії між електронами через кристалічну ґратку. «Натяк» на можливість такої взаємодії міститься в самій природі електронно-іонної системи: в такій системі електрон виглядає як від'ємний заряд, «оточений» додатньо зарядженою «хмарою» (внаслідок притягання іонів); ця хмара супроводжує рух електрона. До такої додатньо зарядженої системи і буде притягуватися інший електрон. На квантовій мові притягання між електронами зумовлене обміном між ними фононами.

---

<sup>1)</sup> Нагадаємо, що за квантовою теорією «активні» (беруть участь в електро- і теплопровідності) електрони в металі ті, енергії яких близькі до енергії Фермі

2. За умови, що притягання між електронами переважає кулонівське відштовхування, два електрони із протилежними спінами і протилежними імпульсами утворюють *куперівську пару*<sup>1)</sup>. Заряд пари дорівнює  $-2e$ . Спін пари дорівнює нулю. Розмір куперівської пари (віддаль між електронами в парі)  $\approx 10^{-4}$  см, що в десяток тисяч разів перевищує міжатомну віддаль. Для розриву пари необхідно затратити певну енергію (електромагнітну, теплову).

3. Куперовські пари є квазічастинки з нульовим спіном (бозони), вони не підкоряються принципу Паулі, тому при  $T=0$  всі куперовські пари будуть знаходитися в одному і тому ж (найнижчому) енергетичному стані. Такий стан (конденсат) характеризується певною енергетичною стабільністю: система може бути виведена із цього стану лише за рахунок зовнішніх впливів (електромагнітний, тепловий, звуковий).

4. З підвищенням температури концентрація пар зменшується (відбувається розрив пар) і при певній температурі  $T_c$  вони зникають, — зникає надпровідний стан. При температурі  $T > T_c$  маємо нормальний метал.

Відсутність опору в надпровідному стані наочно можна зрозуміти з наступного. Нехай один із електронів (другий знаходиться дуже далеко за атомними мірками) пари «стикається» з дефектом кристалічної ґратки (тим або іншим типом неупорядкованості кристалічної ґратки). Для цього електрона розсіяння на дефекті означає розрив пари, а це вимагає затрати енергії. Таким чином, електрон буде «обминати» неоднорідність, тобто буде рухатися так, ніби опір відсутній; виглядає так, ніби другий електрон пари не дає можливості першому зіткнутися з дефектом; насправді «підтримка» ще сильніша: розриву пари протидіють і всі інші пари.

5. Повертаючись тепер до відзначених у п. 3.2 недоліків класичної електронної теорії, можна твердити, що квантова теорія їх повністю усуває (щодо термоелектричних явищ — див. наступний розділ). Більше того, квантова теорія передбачила низку нових фізичних явищ, які згодом знаходили своє експериментальне підтвердження<sup>2)</sup>.

---

<sup>1)</sup> На честь Л.Купера, який теоретично передбачив (1956 р.) можливість існування таких пар електронів

<sup>2)</sup> І не тільки у застосуванні до металів. Створення транзистора (1946 р.) — один з наслідків застосування квантової теорії до напівпровідників

### 3.6 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

#### 3.6.1 Запитання і задачі

1. Показати, що густина струму  $j = nq\langle\mathcal{G}\rangle$ , де  $n$  — концентрація носіїв струму,  $q$  — заряд носія,  $\langle\mathcal{G}\rangle$  — середня швидкість впорядкованого руху носіїв.

2. Продовжити міркування, викладені напочатку у п. 1 і показати, що відношення заряду електрона до його маси дається формулою (3.1.4).

3. Знайти концентрацію вільних електронів у металі (число електронів в одиниці об'єму). Вважати, що кожен атом «постачає» один вільний електрон. Порівняти отримане значення з табличним для міді. Який висновок можна зробити з цього порівняння?

4. Два циліндричні провідники із одного матеріалу з'єднані основами. Довжини провідників однакові, але площа поперечного перерізу одного вдвічі більша, ніж площа поперечного перерізу іншого. Як пов'язати між собою напруженості електричних полів в обох провідниках?

5. Навіть при дуже великих силах струму швидкість впорядкованого руху електронів складає всього декілька міліметрів на секунду (див. оцінку цієї величини після формули (3.2.2)). Як тоді пояснити факт майже миттєвого встановлення струму після включення електричного кола?

6. Оцінити швидкість електронів на рівні Фермі для міді.

7. Знайти середню енергетичну «відстань» між двома сусідніми енергетичними рівнями в розподілі Фермі-Дірака. Які висновки можна зробити з цього?

8. В чому принципова різниця між класичним електронним газом і квантовим в потенціальній ямі?

9. Показати, що відношення числа електронів, що займають при температурі  $T$  енергетичні рівні з енергіями, вищими від  $E_F$ , до числа всіх електронів

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{kT}{2E_F},$$

де  $k$  — стала Больцмана. Оцінити цю величину при кімнатних температурах.

10. Металекий диск, радіус якого  $R=15$  см, рівномірно обертається з частотою  $\nu=50$  об/с. Знайти різницю потенціалів між центром і краями диску.

### 3.6.2 Відповіді

1. Нехай кількість носіїв в об'ємі провідника  $\Delta V$  є  $\Delta N$ ; тоді концентрація носіїв  $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ . За час  $\Delta t$  через переріз  $S$  переноситься заряд  $\Delta Q = q\Delta N = qn\Delta V = qnS\langle \vartheta \rangle \Delta t$ .

Сила струму

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnS\langle \vartheta \rangle.$$

Звідки

$$j = \frac{I}{S} = qn\langle \vartheta \rangle.$$

2. Зміна (зменшення) кінетичної енергії носіїв струму при гальмуванні котушки

$$-d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}nSl\right)$$

(див. п.3.1) дорівнюватиме приросту енергії кристалічної ґратки за час  $dt$  (тепловій енергії у згоді із законом Джоуля-Ленца):

$$-d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}nSl\right) = I^2 R dt,$$

де  $I$  — миттєве значення сили струму,  $R$  — повний опір кола. Оскільки  $I = qnS\vartheta$ , то

$$-mld\vartheta = qIRdt = qRdQ,$$

де  $dQ$  — заряд, який пройшов через гальванометр за час  $dt$ . Інтегруючи, маємо:

$$-ml \int_{\vartheta_0}^0 d\vartheta = Rq \int_0^Q dQ,$$

звідки

$$\frac{q}{m} = \frac{\mathcal{G}_0 l}{RQ}.$$

3. Якщо від кожного атома відокремлюється один електрон, то концентрація електронів дорівнює концентрації атомів  $n$ :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{mN_A}{\mu V} = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

де  $m$  — маса металу,  $\mu$  — молярна маса,  $N_A$  — число Авогадро,  $\rho$  — густина. Оцінимо  $n$  для міді ( $\rho$  і  $\mu$  беремо з таблиць,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>):

$$n = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} \approx 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Табличне значення концентрації електронів  $1,1 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$ . Порівняння цих двох значень показує, що насправді кожен атом міді «виділяє»  $\approx \frac{1,1}{0,8} \approx 1,3$  електрона.

4. Провідники з'єднані між собою послідовно, тому сили струмів в них однакові:  $ne_1 S_1 = ne_2 S_2$ , де  $n$  — концентрація електронів (одна і та ж в обох провідниках);  $\mathcal{G}_1$  і  $\mathcal{G}_2$  — середні швидкості впорядкованого руху електронів,  $S_2/S_1 = 2$  за умовою. Таким чином, відношення густин струмів в обох провідниках

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{\sigma E_1}{\sigma E_2} = 2$$

( $\sigma$  — провідність). Тому напруженість електричного поля в тоншому провіднику вдвічі більша.

5. Переміщення електронів здійснюється під дією електричного поля. Це поле, створене джерелом струму, виникає практично одночасно по всьому колу (швидкість поширення електричного поля  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). Тому і на довільній ділянці кола електрони набувають середньої швидкості впорядкованого руху одночасно.

6.  $E_F = \frac{m \mathcal{G}_F^2}{2}$  ( $m$  — маса електрона,  $\mathcal{G}_F$  — його швидкість на рівні Фе-

рмі), звідки

$$g_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}.$$

Для міді  $E_F \approx 10$  еВ (див. оцінку  $E_F$  після формули (3.3.1)).

$$g_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,9 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

7. Енергія Фермі не залежить ні від об'єму, ні від форми металічного тіла, а визначається лише концентрацією  $n$  електронів в ньому. Електрони займають попарно всі енергетичні рівні від нуля до рівня Фермі (вважаємо, що  $T=0$ ). Розглянемо одиницю об'єму металу; тоді номер верхнього рівня (рівня Фермі) буде дорівнювати половині числа електронів в одиниці об'єму ( $n/2$ ). Середня енергетична відстань між двома сусідніми рівнями буде

$$\Delta E = \frac{E_F}{\frac{N}{2}} = \frac{2E_F}{N}.$$

Оцінимо  $\Delta E$  для міді ( $E_F \approx 10$  еВ,  $n \approx 1,1 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ):

$$\Delta E = \frac{2 \cdot 10}{1,1 \cdot 10^{23}} \approx 1,8 \cdot 10^{-22} \text{ еВ.}$$

Це означає, що енергетичні рівні розташовані настільки густо, що можна вважати зміну  $E$  (від 0 до  $E_F$ ) неперервною. Цим обґрунтовується перехід від форми розподілу Фермі-Дірака (3.3.2) до формули (3.3.3).

8. Розглянемо метал при температурі абсолютного нуля. За класичною теорією всі електрони знаходяться на дні потенціальної ями; їх кінетичні енергії дорівнюватимуть нулю. За квантовою теорією електрони займатимуть енергетичні стани (по два електрони з протилежними спінами на кожному енергетичному рівні), починаючи з найнижчого (з нульовою кінетичною енергією) і до найвищого (відповідає енергії Фермі). При  $T \neq 0$  розподіл «класичних» електронів за енергіями описується розподілом Больцмана-Максвела, а «квантових» електронів – розподілом Фермі-Дірака.

9. В енергетичній смузі шириною  $kT$  є  $kT/\Delta E$  рівнів ( $\Delta E$  — «відстань» між сусідніми рівнями). У задачі 3.7 отримано, що

$$\Delta E = \frac{2E_F}{n}$$



( $n$  — концентрація електронів). Число електронів, які можуть заселити ці рівні,  $\epsilon$  (за умови  $kT \ll \Delta E$ )

$$\Delta n = 2 \cdot \frac{kT}{\Delta E} = \frac{2kT \cdot n}{2E_F} = \frac{kT}{E_F} \cdot n$$

(на кожному рівні може бути два електрони з протилежними спінами). Прийmemo, що половина цих електронів (при температурі  $T$ ) переходить у стани із  $E > E_F$ . Тоді відносне число таких електронів

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{kT}{2E_F}.$$

При кімнатній температурі ( $T \approx 300$  К) і  $E_F = 10$  еВ  $\Delta N/N \sim 10^{-3}$ ; це означає, що концентрація електронів над рівнем Фермі незначна

10. У системі відліку, пов'язаною з диском, вільні електрони переміщуються від центра диска до периферії під дією відцентрової сили  $\vec{F}$ . Переміщення електронів буде до тих пір, доки сила  $\vec{F}$  не зрівноважиться силою  $\vec{F}_{el}$ , створеною перерозподілом зарядів:

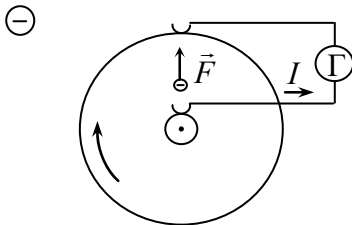


Рис. 3.10

$$F = F_{el} \Rightarrow m\omega^2 R = eE,$$

де  $m$  — маса електрона,  $e$  — його заряд,  $\omega$  — кутова швидкість диска,  $E$  — напруженість електричного поля. Оскільки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = ER, \quad \mathcal{G} = \omega R = 2\pi\nu R,$$

то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{m}{e} \mathcal{G}^2 = 4\pi^2 \nu^2 R^2 \frac{m}{e} \approx 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ В.}$$

Якщо до осі і до краю диска підвести ковзаючі контакти, то через гальванометр потече струм (рис. 3.10). Такий струм зафіксувати надзвичайно важко.

## РОЗДІЛ 4

### КОНТАКТНІ, ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНІ ТА ЕМІСІЙНІ ЯВИЩА

*Електрон, — він і в Африці електрон.*

*Почуте у Клубі винахідливих  
і кмітливих<sup>1)</sup>*

Контактні явища в металах — це електричні явища, які виникають внаслідок контакту двох металів; прояв цих явищ — наслідок наявності в металах вільних електронів. У місці контакту виникає контактна різниця потенціалів. Наявність контактної різниці потенціалів зумовлює, зокрема, існування так званих термоелектричних явищ. Під дією зовнішніх впливів (нагрівання, електромагнітне поле) виникає емісія (випускання) електронів з металу; це проявляється у низці емісійних явищ. Контактні, термоелектричні та емісійні явища знаходять широке практичне використання<sup>2)</sup>.

#### 4.1 РОБОТА ВИХОДУ ЕЛЕКТРОНА

Продовжимо розгляд питання, пов'язаного із виходом електронів за межі металу (п. 3.3.1), і з'ясуємо важливе поняття *робота виходу електрона*.

Зобразимо електрони у потенціальній ямі за допомогою рис. 4.1<sup>3)</sup>. Тут  $E_0$  відповідає енергії електрона з кінетичною енергією, рівною нулю, поза металом (у вакуумі); приймемо, як і раніше,  $E_0=0$ .  $U_0$  — глибина потенціальної ями (п. 3.3.1),  $E_F$  — енергія Фермі.

---

<sup>1)</sup> Гуморист, думаю, мав на увазі ось що: і в контактних, термоелектричних та емісійних явищах *Електрон* — визначальний чинник. Вислів, мабуть, має і глибший зміст: де б не знаходився електрон, — в тілах на Землі, чи в метеоритах, які прийшли з глибин Всесвіту, — він має однакові масу, заряд; це одна із таємниць Природи: кожен електрон у Всесвіті на «обліку»

<sup>2)</sup> У цьому розділі йтиметься про контакти метал-метал. Широке коло контактних явищ і технічних застосувань пов'язане з контактами між металом і напівпровідником та між напівпровідниками. Ці питання будуть викладені окремо

<sup>3)</sup> Тут і далі ми не відображаємо знаходження електронів на відповідних рівнях (на кожному з них знаходиться два електрони)

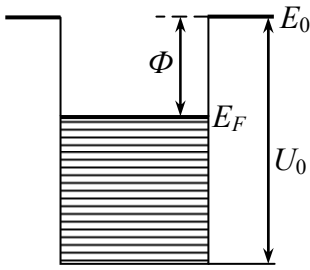


Рис. 4.1

Роботою виходу електрона  $\Phi$  називається найменша робота, яку потрібно виконати, щоб перемістити електрон за межі металу. Ця робота виконується проти сил, які утримують електрон у металі (п. 3.3.1). Із рис. 4.1 видно, що

$$\Phi = U_0 - E_F. \quad (4.1.1)$$

З іншого боку,  $\Phi = e(\varphi - \varphi_0)$ , де  $e$  — заряд електрона (абсолютна величина),  $\varphi$  — потенціал всередині металу,  $\varphi_0$  — поза металом. Приймаємо  $\varphi_0=0$ , тому

$$\Phi = e\varphi. \quad (4.1.2)$$

Величина  $\varphi$  називається потенціалом виходу електрона. Зазначимо, що потенціальна енергія електрона в металі ( $-e\varphi$ ) від'ємна, а потенціал  $\varphi$  — величина додатня.

Величина роботи виходу електрона (різна для різних металів) сильно залежить від чистоти поверхні та інших факторів. Для чистих металів величина  $\Phi$  складає декілька електрон-вольт (для Fe  $\Phi \approx 4,3$  еВ, для Cu  $\Phi \approx 4,4$  еВ). Величина  $\Phi$  визначається дослідним шляхом.

Робота виходу електрона — одна із основних характеристик поверхні, яка визначає закономірності електронної емісії (вихід електронів за межі металу під дією зовнішніх впливів). Різниця робіт виходу електрона визначає і контактну різницю потенціалів.

## 4.2 КОНТАКТНА РІЗНИЦЯ ПОТЕНЦІАЛІВ

**1. Контакт двох різнорідних металів. 2. Зовнішня і внутрішня контактні різниці потенціалів. 3. Закон послідовних з'єднань Вольта**

### 4.2.1 Контакт двох різнорідних металів

Нехай ми маємо два різнорідних метали, енергетичні діаграми яких показано на рис. 4.2, а). Робота виходу електрона для першого металу  $\Phi_1$ , для другого  $\Phi_2$  ( $\Phi_1 < \Phi_2$ ). Енергії Фермі металів позначимо через  $F_1$  і  $F_2$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Замість  $E_{F1}$  і  $E_{F2}$  (для лаконічнішого запису)

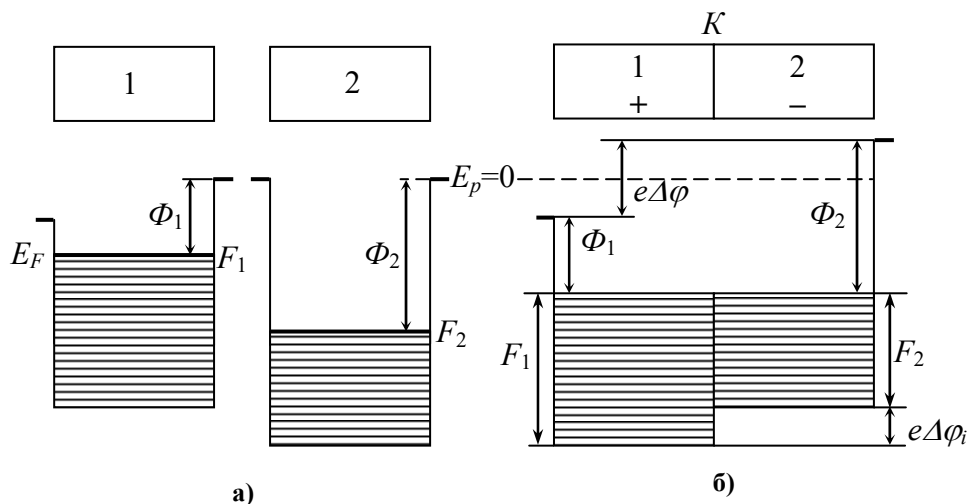


Рис. 4.2

Приведемо тепер їх в тісний контакт<sup>1)</sup> (рис. 4.2, б). Тоді через поверхню контакту  $K$  вони почнуть обмінюватися електронами: відбуватиметься дифузія електронів від металу 1 до металу 2 і в протилежному напрямку. Більше число електронів переходитиме з тіла, робота виходу якого менша, до тіла з більшою роботою виходу; електрони переходитимуть з вищих енергетичних рівнів (першого металу) до нижчих енергетичних рівнів (другого металу). При цьому всі енергетичні рівні першого металу зміщуються вниз, а другого металу — вгору. Рівновага настає тоді, коли співпадуть рівні Фермі обох металів (рис. 4.2, б)

У результаті перший метал набуває додатнього заряду, другий — від'ємного. Потенціал провідника, який отримав додатній заряд, підвищується відносно нульового рівня  $E_p=0$  (як на поверхні, так і всередині металу), а потенціальна енергія електронів понижується. Потенціал другого провідника (отримав від'ємний заряд) понизився, потенціальна енергія його зростає. Таким чином приходимо до енергетичної діаграми, зображеної на рис. 4.2, б.

Внаслідок перерозподілу зарядів, в навколишньому середовищі і в області контакту виникають електричні поля і відповідні різниці потенціалів. На рис. 4.3, а) зображені розподіл заряду на поверхні провідників і дві екіпотенціальні поверхні, які проходять у безпосередній близькості від поверх-

<sup>1)</sup> Лютуванням (спаюванням), зварюванням або пришліфовуванням

ні. Лінії напруженості виходять з додатньо зарядженого тіла та закінчуються на від'ємно зарядженому тілі (див. задачу 4.1). Поверхні провідників також є еквіпотенціальними поверхнями.

В області контакту утворюється подвійний електричний шар (контактний шар) з товщиною, яка співрозмірна з міжіонними віддальми в металі ( $\approx 10^{-10}$  м) (рис. 4.3, б). Зміна концентрації електронів  $\Delta n$  в області контактного шару, в порівнянні з концентрацією  $n_0$  електронів в об'ємі металів, незначна:  $\Delta n/n_0 \sim 10^{-2}$  (задача № 4 у п. 4.5). Це означає, зокрема, що наявність контакту не впливає на електричну провідність з'єднаних металів.

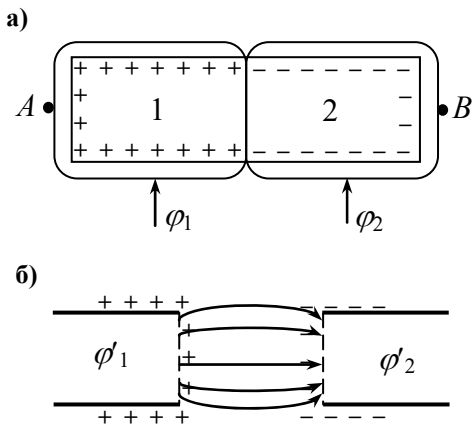


Рис. 4.3

Потенціали  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  відповідають еквіпотенціальним поверхням, які проходять поблизу поверхонь обох провідників; точки  $A$  і  $B$  належать цим поверхням. У випадку б) зображений подвійний електричний шар в області контакту («збільшення» – в сто мільйонів разів).

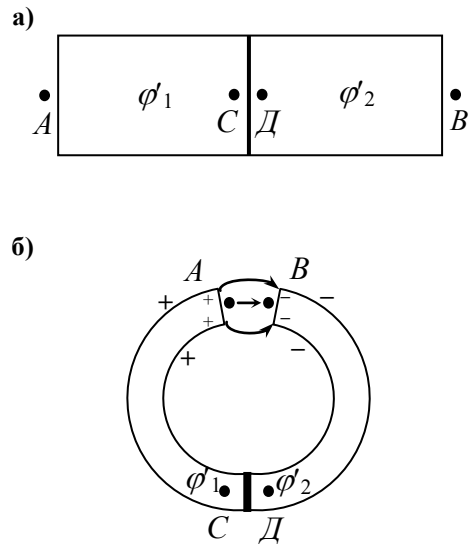


Рис. 4.4

Випадок б) зображає провідники 1 і 2, з'єднані кільцем. Лінії зі стрілками зображають електричне поле між вільними кінцями провідників

### 4.2.2 Зовнішня і внутрішня контактні різниці потенціалів

У згоді з існуванням електричного поля як поза провідниками, так і в контактному шарі, виникають зовнішня і внутрішня контактні різниці потенціалів.

1. Виберемо точки  $A$  і  $B$ , які лежать за межами провідників поблизу їх поверхонь, і  $C$  і  $D$  всередині провідників (рис. 4.4). Цим точкам відповідають потенціали  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  та  $\varphi'_1$  і  $\varphi'_2$ .

Із рис. 4.2, б видно, що, оскільки потенціальна енергія електрона поблизу першого металу (точка  $A$ ) менша на  $\Phi_2 - \Phi_1 = e(\varphi_2 - \varphi_1)$ , ніж поблизу другого металу, то потенціал  $\varphi_1$  вищий від потенціалу  $\varphi_2$  на величину  $\Delta\varphi$ , де

$$\Delta\varphi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{e}. \quad (4.2.1)$$

Величина  $\varphi\Delta$  і є різницею потенціалів між першим та другим металами. Це — *зовнішня контактна різниця потенціалів*. Нагадаємо, що потенціальна енергія електрона і потенціал мають протилежні знаки.

Таким чином, зовнішня контактна різниця потенціалів (часто називається просто контактна різниця потенціалів) зумовлена різницею робіт виходу електрона із металів. Величина  $\Delta\varphi$  для різних пар металів має значення від декількох десятих вольт до декількох вольт і сильно залежить від стану поверхні та її чистоти.

2. Між внутрішніми точками металів існує різниця потенціалів, яка називається *внутрішньою контактною різницею потенціалів*; це різниця потенціалів зумовлена різними енергіями Фермі в контактуючих металах. Із рис. 4.3 видно, що в даному випадку ( $F_1 > F_2$ ) потенціал  $\varphi'_1$  (першого металу) більший від потенціалу  $\varphi'_2$  (другого металу) на величину

$$\Delta\varphi' = \frac{F_1 - F_2}{e},$$

тобто

$$\varphi'_1 - \varphi'_2 = \frac{F_1 - F_2}{e}. \quad (4.2.2)$$

На таку величину зменшується потенціал при переході із першого металу до другого; якщо  $F_1 < F_2$ , то вищим буде потенціал  $\varphi'_2$ ; тоді

$$\varphi'_2 - \varphi'_1 = \frac{F_2 - F_1}{e}, \quad (4.2.3)$$

і потенціал при переході (із першого металу у другий) зростатиме на величину, означену останнім виразом.

Різниця потенціалів, означена виразом (4.2.2) (або виразом (4.2.3)), називається *внутрішньою контактною різницею потенціалів*.

Оскільки енергія Фермі визначається концентрацією електронів за формулою (3.3.1) (при  $T=0$ ), то

$$\Delta\varphi' = \frac{h^2}{2me} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} (n_1^{2/3} - n_2^{2/3}), \quad (4.2.4)$$

тобто причиною виникнення внутрішньої контактної різниці потенціалів є відмінність концентрацій електронів (що і приводить до дифузії електронів у напрямку зменшення концентрації електронів).

Якщо у формулу (4.2.4) підставити значення величин (значення концентрацій електронів в металах  $n=10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3}$ ), то для  $\Delta\varphi_i$  отримується величина від декількох сотих вольт до одного вольт.

Різниця потенціалів за виразом (4.2.4) записана для випадку абсолютного нуля. При  $T \neq 0$  енергія Фермі дається формулою (3.3.5); вона показує, що і внутрішня контактна різниця потенціалів залежить від температури. Хоча ця залежність і дуже слабка ( $U_i$  пропорційна малим величинам  $(kT/E_F)^2$ ), вона є принципово важливою для пояснення виникнення термоелектрорушійної сили (наступний параграф).

#### 4.2.3 Закон послідовних з'єднань Вольта

Як встановив Вольта в кінці XVIII ст., різниця потенціалів між кінцями послідовно з'єднаних металічних провідників (що знаходяться при однаковій температурі) не залежить від того, якими проміжними металами ці крайні провідники розділені. Вона дорівнює контактній різниці потенціалів, яка виникає при безпосередньому з'єднанні крайніх провідників. Це закон послідовних з'єднань Вольта (його називають і другим законом Вольта<sup>1)</sup>). Проілюструємо цей закон Вольта.

Приведемо в тісне стикування декілька різнорідних провідників, які мають ту саму температуру (рис. 4.5). Із рис. 4.5, а маємо, що сума внутрішніх контактних різниць потенціалів

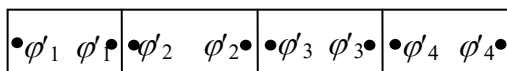
$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) + (\varphi'_2 - \varphi'_3) + (\varphi'_3 - \varphi'_4) = \varphi'_1 - \varphi'_4,$$

а використання формули (4.2.2) дає

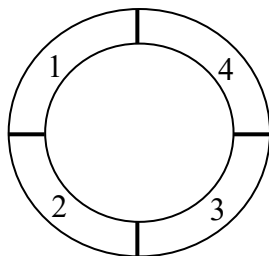
<sup>1)</sup> Перший закон Н. Вольта стверджує, що контактна різниця потенціалів залежить лише від хімічного складу контактуючих тіл і від температури; саме про це і йшла мова вище

$$\varphi'_1 - \varphi'_4 = \frac{F_1 - F_4}{e},$$

тобто внутрішня контактна різниця потенціалів задовільняє закону Вольта.



а)



б)

Рис. 4.5. а) – лінійне з'єднання чотирьох різнорідних провідників; б) – з'єднання провідників у кільце

Подібним чином можна переконатися, що і зовнішня контактна різниця потенціалів задовільняє закону Вольта.

З'єднаємо вільні кінці провідників 1 і 4 в кільце (рис. 4.5, б). Маємо, що існуюча до сполучення першого і четвертого провідників різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_4$  буде компенсуватися різницею потенціалів  $\varphi_4 - \varphi_1$  в контактній ділянці між цими провідниками. Звідси маємо, що електрорушійна сила (як сума напруг на різних ділянках).

$$\mathcal{E} = \Delta\varphi'_{14} + \Delta\varphi'_{41} = \varphi'_1 - \varphi'_4 + \varphi'_4 - \varphi'_1 = 0,$$

тобто електричний струм в такому колі буде відсутній. Цей результат є, фактично, наслідком закону збереження енергії. Відмітимо ще раз, що провідники, з'єднані за схемою, показаною на рис. 4.5, мають однакові температури.

Ситуація принципово змінюється, якщо температури спаїв (контактів) є різними. В цьому випадку в електричному колі виникають так звані термоелектричні явища, до розгляду яких і переходимо.

### 4.3 ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНІ ЯВИЩА

**1. Явище Зеебека. 2. Термоелектрорушійна сила. 3. Практичні застосування явища Зеебека. 4. Явище Пельтьє. 5. Явище Томсона.**

У колі, складеному із двох різнорідних провідників, електричний струм відсутній за умови, що температура у всіх точках кола одна і та ж. Якщо ж в місцях контактів температури різні, то в колі виникає електричний струм. На-



впаки, при проходженні струму в колі, складеному з різнорідних провідників відбувається нагрівання одного спаю і охолодження іншого. Проходження струму по нерівномірно нагрітому провіднику приводить до виділення теплоти (в додаток до теплоти у відповідності із законом Джоуля-Ленца). Це — прояви термоелектричних явищ (Зеебека, Пельтьє, Томсона).

#### 4.3.1 Явище Зеебека

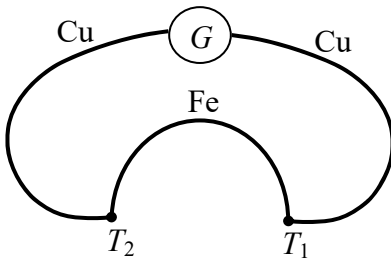


Рис. 4.6.  $T_2$  – температура гарячого спаю,  $T_1$  - холодного

Складемо електричне коло із двох різнорідних провідників (наприклад, Cu та Fe) і будемо підтримувати температури контактів (спаїв) різними (наприклад, один нагрівати, а другий тримати у воді з танучим льодом) (рис. 4.6). Гальванометр  $G$  зареєструє електричний струм у цьому колі. Це — явище Зеебека (ефект Зеебека), відкрите німецьким фізиком Зеебеком у 1821 р. Струм, який виникає в колі,

складеному з різних матеріалів, за умови, що місця контактів підтримуються при неоднакових температурах, називається термоелектричним струмом. Коло, складене з двох різнорідних провідників, називають термоелементом або термопарою. Електрорушійна сила, яка зумовлює термоелектричний струм, називається термоелектрорушійною силою (термо-е.р.с.). Термо-е.р.с. термопари не змінюється при послідовному включенні в коло інших провідників за умови, що нові місця контактів підтримуються при однаковій температурі.

Для підтримання постійного термоелектричного струму необхідно підтримувати постійною різницю температур (до більш нагрітого спаю потрібно неперервно підводити теплоту, а від холодного — неперервно відводити). У відповідності із другим законом термодинаміки тут відбувається перехід внутрішньої енергії системи в електричну.

#### 4.3.2 Термоелектрорушійна сила

1. З'ясуємо природу термо-е.р.с.

Існують три механізми виникнення термо-е.р.с.

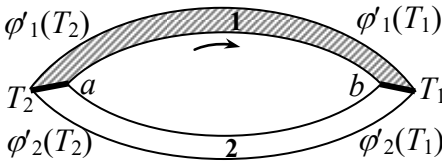


Рис. 4.7  
Стрілкою позначений напрям обходу контура

із двох різнорідних металів 1 і 2, контакти яких знаходяться при температурах  $T_1$  і  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) (рис. 4.7), діє термо-е.р.с., яка визначається як сума змін потенціалів на контактах  $a$  і  $b$ :

$$\mathcal{E}' = \phi'_2(T_2) - \phi'_1(T_2) + \phi'_1(T_1) - \phi'_2(T_1).$$

За формулою (4.2.3)

$$\phi'_2(T_2) - \phi'_1(T_2) = \frac{F_2(T_2) - F_1(T_2)}{e},$$

$$\phi'_1(T_1) - \phi'_2(T_1) = \frac{F_1(T_1) - F_2(T_1)}{e};$$

$F_1(T)$ ,  $F_2(T)$  — енергії Фермі в першому і другому металах при температурі  $T$ . Маємо:

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{e} (F_2(T_2) - F_2(T_1) + F_1(T_1) - F_1(T_2)).$$

Для довільної функції  $y(x)$

$$\int_a^b \frac{dy}{dx} dx = y(b) - y(a),$$

тому вираз для  $\mathcal{E}'$  можна записати і так:

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dF_2}{dT} dT + \frac{1}{e} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dF_1}{dT} dT = \frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dF_2}{dT} dT - \frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dF_1}{dT} dT. \quad (4.3.1)$$

Якщо розглядається область температур (між  $T_1$  і  $T_2$ ), для яких  $kT \ll F_1$  і  $kT \ll F_2$ , то для  $F_1$  і  $F_2$  можна скористатися виразом (3.3.5). У цьому випадку

$$\mathcal{E} \sim (T_2^2 - T_1^2)$$

(див. задачу 4).

Перший. Формула (4.2.2) показує, що внаслідок залежності енергії Фермі від температури залежить від температури і внутрішня різниця потенціалів (дається формулою (4.2.4)), а температурна залежність енергії Фермі визначається за формулою (3.3.5). За рахунок цього в електричному колі

Таким чином, за рахунок температурної залежності внутрішньої контактної різниці потенціалів (за рахунок температурної залежності енергії Фермі) виникає термо-е.р.с.

Два інших механізми. Для їх з'ясування розглянемо окремо один із елементів термопари і зобразимо його у вигляді стержня, кінці якого підтримуються при температурах  $T_1$  і  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ).

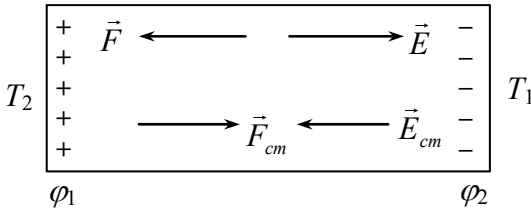


Рис. 4.8

Сила  $\vec{F}$  зумовлена дією на електрон електричного поля внаслідок перерозподілу зарядів, сила  $\vec{F}_{cm}$  — дією сторонніх сил; в стані рівноваги  $e\vec{E} = -e\vec{E}_{cm}$

Оскільки  $T_2 > T_1$ , то біля лівого кінця стержня концентрація електронів з енергіями, більшими від енергії Фермі, буде вища, ніж біля правого кінця, а концентрація електронів з енергіями  $E < E_F$  буде більшою біля менш нагрітого кінця (тут корисно згадати оцінку (3.3.5) для числа електронів, збуджених у стани з енергіями  $E > E_F$ , при температурі  $T$ ). Різниця концентрацій швид-

ких електронів ( $E > E_F$ ) і повільних електронів ( $E < E_F$ ) викличе дифузійні потоки електронів у протилежних напрямках; за певний проміжок часу більше електронів переміститься з лівого кінця до правого. Внаслідок цього біля правого кінця стержня виникне надлишок електронів (він зарядиться негативно), біля лівого — їх недостача (цей кінець стержня зарядиться позитивно).

На додаток до цього виникає результуючий потік електронів у цьому ж напрямку (від  $T_2$  до  $T_1$ ), пов'язаний із взаємодією електронів з фононами. Число фононів, які рухаються від більш нагрітого кінця стержня до менш нагрітого, буде більшим, ніж у протилежному напрямку, тому виникає результуючий фононний потік зліва направо. Фонони при зіткненні з електронами передають їм відповідні енергії і імпульси, внаслідок чого виникає потік електронів, знову ж таки, — зліва направо; виглядає так: потік фононів «захоплює» електрони і вони переміщуються разом з цим потоком (звідси і назва цього ефекту — *ефект захоплення електронів фононами*). Це, як і в дифузійному механізмі переносу, призводить до перерозподілу зарядів: біля правого кінця стержня буде надлишок електронів, біля лівого — їх недостача.

Обом цим процесам — дифузійному і фононному можна поставити у відповідність існування електричного поля сторонніх сил з напруженістю  $\vec{E}_{cm}$  (рис. 4.8); сила, яка діє на електрон у цьому випадку  $\vec{F}_{cm} = -e\vec{E}_{cm}$ , спрямована протилежно до  $\vec{E}_{cm}$ .

Надлишок електронів біля правого кінця стержня і їх недостача біля лівого (лівий кінець стержня заряджений додатньо, правий — від'ємно) приводить до існування електричного поля з напруженістю  $\vec{E}$ , спрямованою в напрямку спадання температури (рис. 4.8). Напруженість  $\vec{E}$  наростатиме до тих пір, доки не зрівняється за величиною з  $\vec{E}_{cm}$ . За умови  $\vec{E} = -\vec{E}_{cm}$  ( $e\vec{E} = -\vec{F}_{cm}$ ) встановиться стаціонарний режим, коли за одиницю часу через поперечний переріз провідника у протилежних напрямках проходитиме однакове число електронів. При цьому виникне певна різниця потенціалів між лівим і правим кінцями стержня.

Будемо характеризувати зміну потенціала вздовж стержня величиною

$$\beta = \frac{d\varphi}{dT}, \quad (4.3.2)$$

де  $\beta$  є характеристикою тіла, залежною, в загальному випадку, і від температури.  $\beta > 0$ , оскільки  $d\varphi$  і  $dT$  мають однакові знаки (за умов, відображених на рис. 4.8, ці величини від'ємні в напрямку зліва направо, а в протилежному напрямку — додатні).

Із останнього виразу маємо:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{T_1}^{T_2} \beta dT,$$

звідки різниця потенціалів між гарячим кінцем стержня ( $T_1$ ) і холодним ( $T_2$ )

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{T_2}^{T_1} \beta dT. \quad (4.3.3)$$

Якщо є не один провідник, а два, з'єднані у термопару (як на рис. 4.7), то внесок в термо-е.р.с. від дифузійного та фононного механізмів буде визначатися як сума спадів потенціалів вздовж обох провідників:

$$\mathcal{E}'' = \varphi_1(T_2) - \varphi_1(T_1) + \varphi_2(T_1) - \varphi_2(T_2).$$

Скористаємося формулою (4.3.3). Тоді

$$\mathcal{E}'' = -\int_{T_2}^{T_1} \beta_1 dT - \int_{T_1}^{T_2} \beta_2 dT ;$$

при  $\beta_1$  і  $\beta_2$  — величини, які характеризують зміну потенціалу вздовж провідників із зміною температури (за формулою (4.3.2)) у першому і другому провідниках. Перепишемо останню формулу у вигляді

$$\mathcal{E}'' = \int_{T_1}^{T_2} \beta_1 dT - \int_{T_1}^{T_2} \beta_2 dT . \quad (4.3.4)$$

Це — внесок у термо-е.р.с., який виникає за рахунок дифузійного переносу електронів від більш нагрітого контакту до менш нагрітого та ефекту захоплення електронів фононами. Об'єднаємо його з внеском у термо-е.р.с., зумовленим температурною залежністю енергій Фермі в обох металах від температури.

Отже, приходимо до виразу для термо-е.р.с.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' = \frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dF_2}{dT} dT - \frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dF_1}{dT} dT + \int_{T_1}^{T_2} \beta_1 dT - \int_{T_1}^{T_2} \beta_2 dT .$$

Введемо величини

$$\alpha_1 = \beta_1 - \frac{1}{e} \cdot \frac{dF_1}{dT}, \quad \alpha_2 = \beta_2 - \frac{1}{e} \cdot \frac{dF_2}{dT}$$

і подамо вираз для електрорушійної сили  $\mathcal{E}$  у вигляді

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_1 dT - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_2 dT ,$$

або

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{12} dT , \quad (4.3.5)$$

де

$$\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2 . \quad (4.3.6)$$

Величини  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  (залежні від температури) називаються коефіцієнтами термоелектрорушійної сили, а величина  $\alpha_{12}$  — питомою електрорушійною силою (або диференціальною термоелектрорушійною силою). Одиниця вимірювання цих величин — 1 В/К.

2. Якщо  $\alpha_{12}$  слабо залежить від температури в певному інтервалі температур<sup>1)</sup>, то термо-е.р.с. термопари в цьому інтервалі температур дається виразом

$$\mathcal{E} = \alpha_{12}(T_2 - T_1). \quad (4.3.7)$$

Для ряду пар металів і сплавів така залежність виконується в доволі широкому інтервалі температур.

Величину  $\alpha_{12}$  можна подати у вигляді

$$\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2 = (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_3),$$

де  $\alpha_3$  — коефіцієнт термо-е.р.с. третього металу, по відношенню до якого зручно визначати  $\alpha_1 - \alpha_3$  і  $\alpha_2 - \alpha_3$ ; таким третім металом беруть Рв.

У таблиці наведені значення  $\alpha$  деяких металів і сплавів по відношенню до Рв в інтервалі температур 0°C–100°C. Знак біля  $\alpha$  введений для означення напрямку термоелектричного струму: в нагрітому спаї струм тече від металу з меншим (алгебраїчно) значенням  $\alpha$  до металу з більшим значенням  $\alpha$ .

Таблиця значень  $\alpha$  дозволяє знайти питому термо-е.р.с., для довільної пари металів або сплавів. Так, для пари залізо-мідь  $\alpha_{12} = 15 - 3,2 = 11,8$  мкВ/К, для пари константан-залізо  $\alpha_{12} = 15 - (-38) = 53$  мкВ/К.

**Таблиця 4.1 — Значення коефіцієнтів термо-е.р.с. для деяких металів і сплавів**

Матеріал	$\alpha$ , мкВ/К	Матеріал	$\alpha$ , мкВ/К
Стибій	+43	Свинець	0
Залізо	+15	Олово	-0,2
Молібден	+7,6	Алюміній	-0,4
Вольфрам	+3,6	Нікель	-20,8
Мідь	+3,2	Вісмут	-6,8
Золото	+2,9	Хромель	+24
Срібло	+2,7	Ніхром	+18
		Константан	-38

<sup>1)</sup> Для деяких термопар залежність  $\alpha_{12}$  від температури доволі складна ( $\alpha_{12}$  може стати рівною нулю, змінити знак)

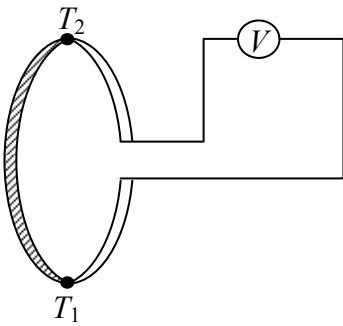


Рис. 4.9

Користуючись таблицею, можна зробити висновок, що струм в умовах досліду, представленому на рис. 4.9, спрямований в гарячому спаї (з температурою  $T_2$ ) від міді ( $\alpha=+3,2$ ) до заліза ( $\alpha=+15$ ). В термопарі залізо-константан струм в гарячому спаї був би спрямований від константану ( $-38$ ) до заліза ( $+15$ ). Провідник, до якого йде струм через більш нагрітий спай, називається позитивним, другий — негативним. Перший відіграє роль анода, другий — катода (анод характеризується тим, що рух електронів у зовнішньому колі спрямований від нього; для катода — навпаки). У термопарі мідь-залізо залізо — анод, мідь — катод.

Схема підключення термопарі до вимірювального приладу (мікрвольтметра) для визначення термо-е.р.с. показана на рис. 4.9.

#### 4.3.3 Практичні застосування явища Зеебека

З таблиці видно, що максимальна питома термо-е.р.с. для металічних термопар складає  $\approx 5 \cdot 10^{-5}$  В<sup>1)</sup>, тому навіть при значній різниці температур  $T_1$  і  $T_2$  термо-е.р.с. окремої термопарі мала. Для отримання значних напруг термопарі з'єднують послідовно у термобатарей (рис. 4.10): усі непарні спаї підтримуються при одній температурі, парні — при іншій. У термобатарей е.р.с. окремих термопар додаються.

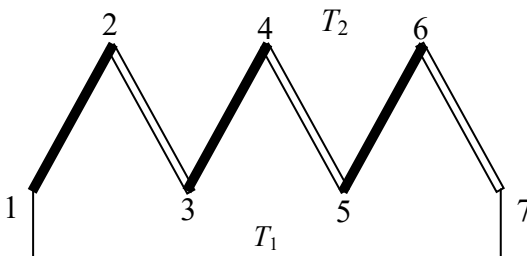


Рис. 4.10

Термобатарей можна розглядати як робоче тіло, яке обмінюється теплотою з нагрівником і холодильником. К.к.д. такої машини малий (біля 0,1%), бо є значні втрати теплоти, отримані від нагрівника, внаслідок теплопровідності і виділення джоулевого тепла. (Якби не було цих втрат к.к.д. термопарі дорівнював би

<sup>1)</sup> Значно вища величина  $\alpha_{12}$  у термопарі з напівпровідникових матеріалів

$\frac{T_2 - T_1}{T_2}$ )<sup>1)</sup>. Саме через малий к.к.д. (велика вартість термоелектроенергії)

термобатарей не мають широкого поширення, хоча потрібно відмітити їх привабливі риси — вони не містять рухомих частин, надійні і прості в експлуатації.

Явище Зеебека знайшло широке практичне застосування при вимірюванні температур. Методика вимірювання наступна. Один із спаїв термопари підтримується при сталій температурі  $T_1$  (наприклад, при температурі плавлення льоду), другий поміщається в середовище, температуру якого  $T_2$  потрібно виміряти. За даним коефіцієнтом  $\alpha_{12}$  термопари і показами мікрвольтметра знаходять температуру  $T_2$  (за допомогою формули (4.3.7)):

$$T_2 = \frac{\mathcal{E} + \alpha_{12}T_1}{\alpha_{12}} = \frac{\mathcal{E}}{\alpha_{12}} + T_1. \quad (4.3.8)$$

При цьому шкалу мілівольтметра градуують безпосередньо в кельвінах. Такий термоелектричний термометр надзвичайно чутливий (фіксує, наприклад, теплове випромінювання руки на віддалі десятка метрів), застосований при належному виборі термопари в широкому діапазоні температур, дає можливість вимірювати температуру у важкодоступних місцях (наприклад, в доменній печі). Термобатарей широко використовуються в дистанційних засобах контролю та в автоматичних пристроях. Важливою ділянкою використання термобатарей є генерація електричного струму шляхом прямого перетворення сонячної енергії в електричну.

**Приклад.** Для визначення температури печі всередину її вводять один із спаїв мідь-константан, з'єднаної послідовно з гальванометром. Внутрішній опір гальванометра  $R=2 \cdot 10^3$  Ом, ціна поділки  $c=10^{-7}$  А/под. При температурі холодного спаю  $17^\circ\text{C}$  стрілка гальванометра відхилилася на  $n=50$  поділок. Визначити температуру печі.

$\Rightarrow$  Шукана температура дається формулою (4.3.8); тут е.р.с.  $\mathcal{E}$  знаходиться за показами гальванометра:

$$\mathcal{E} = IR = ncR$$

<sup>1)</sup> Тут знову варто зазначити значно вищу ефективність напівпровідникових термобатарей



(опором термопари знехтувати).  $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$  знаходиться з таблиці, наведеної у п. 4.3.2:  $\alpha_{12}=3,2-(-38)=41,2$  мкВ/К.  $T_1=(273+17)$  К. Отже,

$$T_2 = \frac{50 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^3}{41,2 \cdot 10^{-6}} \text{ К} + 290 \text{ К} \approx 533 \text{ К}.$$

#### 4.3.4 Явище Пельтьє

1. Якщо у замкнутому колі, яке складається із двох різнорідних провідників, проходить струм від стороннього джерела (рис. 4.11), то один із спайів буде нагріватися, а другий — охолоджуватися. Це — явище Пельтьє (ефект Пельтьє), відкрите французьким фізиком Пельтьє 1834 р.

Кількість теплоти, яка виділяється в контакті, або поглинається

$$Q_{\Pi} = \Pi_{12} I t, \quad (4.3.9)$$

де  $\Pi_{12}$  — коефіцієнт Пельтьє, величина, яка залежить від природи матеріалів, які контактують, та від їх температури; індекси вказують, що струм тече від провідника 1 до провідника 2.  $I$  — сила струму,  $t$  — час. Тепло  $Q_{\Pi}$  вважається додатнім, якщо воно виділяється і від'ємним, якщо воно поглинається. При зміні напрямку струму знак теплоти  $Q_{\Pi}$  змінюється.

Між коефіцієнтом Пельтьє і питомою термо-е.р.с. провідників  $\alpha_{12}$  існує зв'язок

$$\Pi_{12} = \alpha_{12} T. \quad (4.3.10)$$

Нагрівання або охолодження спаю залежить від того, збільшується чи зменшується енергія електрона при переході через межу розділу двох провідників. Якщо електрон після проходження спаю потрапляє в область з меншою енергією, то надлишок енергії електрона передається кристалічній ґратці, внаслідок чого спай нагрівається. При проходженні другого спаю електрон переходить з області з меншою середньою енергією в область з більшою енергією. Це буде супроводжуватися втратою енергії кристалічною ґраткою і спай буде охолоджуватися. При цьому має місце наступна закономірність: якщо напрям електричного струму  $I$  співпадає з напрямом термоелектричного струму, який виникав би за умови  $T_a > T_b$  ( $T_a$  і  $T_b$  — температури спаїв  $a$  і

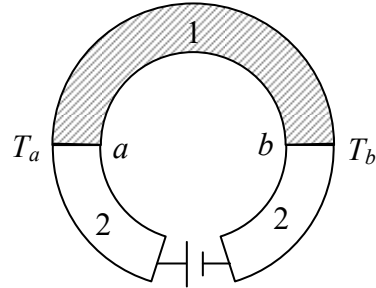


Рис. 4.11

*b*), то відбувається нагрівання спаю *b* і охолодження спаю *a*. При зміні напрямку струму *I* спай *a* буде нагріватися, а спай *b* — охолоджуватися.

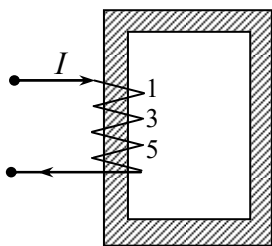


Рис. 4.12

2. Явище Пельтьє може бути використане для створення холодильного пристрою. Розмістимо термобатарей так, щоб одні спаї термобатарей (наприклад непарні) знаходилися у холодильній камері, а інші ззовні (рис. 4.12). При певному напрямку струму спаї термопари, що знаходяться всередині холодильної камери, будуть охолоджуватися, а спаї, що ззовні — нагріватися: маємо холодильник. Холодильник, який працює за рахунок ефекту Пельтьє в металах має малу практичну цінність. Значно ефективніші холодильні пристрої, в яких робочими елементами є не метали, а напівпровідники. Термоелектричні охолоджуючі пристрої мають значні переваги в порівнянні з іншими методами охолодження: простота пристрою, надійність роботи, безшумність, висока точність регулювання температури, довговічний термін використання. Вони застосовуються для охолодження й підтримання сталої температури елементів радіоелектронної і оптичної апаратури, у побутових та транспортних холодильниках і т.і.

#### 4.3.5 Явище Томсона

Поряд з ефектами Зеебека і Пельтьє існує третій термоелектричний ефект — ефект Томсона<sup>1)</sup> (явище Томсона). Явище Томсона полягає в тому, що при проходженні струму по нерівномірно нагрітому провіднику (вздовж провідника існує градієнт температури) виділяється або поглинається тепло.

Кількість теплоти, яка виділяється (при певному напрямку струму) за одиницю часу елементом провідника довжиною  $\Delta l$  дорівнює

$$\Delta Q = \tau I \frac{dT}{dl} \Delta l; \quad (4.3.11)$$

$I$  — сила струму,  $dT/dl$  — градієнт температури (градієнт додатний в напрямку зростання температури),  $\tau$  — коефіцієнт Томсона. При зміні напрямку струму теплота буде поглинатися.

<sup>1)</sup> Явище відкрите англійським фізиком Дж.Томсоном 1851 р.

Відзначимо, що при достатньо малих силах струму теплота Томсона може виявитися більшою, ніж теплота Джоуля (теплота Томсона  $\sim I$ , а теплота Джоуля  $\sim I^2$ ).

Необхідність виділення або поглинання теплоти нерівномірно нагрітим провідником можна бачити з наступних міркувань.

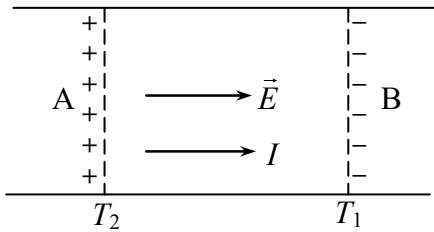


Рис. 4.13

Розглянемо ділянку АВ провідника, по якому тече струм (рис. 4.13). Нехай градієнт температури спрямований від точки В до точки А ( $T_2 > T_1$ ). Виникне дифузія електронів від перерізу А до перерізу В; це зумовить зменшення концентрації електронів в точці А і збільшення концентрації електронів в точці В. Наслідком цього

є виникнення електричного поля  $\vec{E}$ , спрямованого проти градієнта температури. Якщо по провіднику проходить струм в напрямку від А до В, тобто електрони рухатимуться проти поля, то поле буде прискорювати їх ( $\vec{F} = -e\vec{E}$ ); обмін енергіями між цими електронами і кристалічною ґраткою призведе до виділення теплоти на ділянці АВ. Якщо струм проходитиме у зворотньому напрямку, то відбудеться охолодження ділянки АВ.

## 4.4 ЕМІСІЙНІ ЯВИЩА

### 1. Термоелектронна емісія. 2. Інші емісійні явища.

**Емісія електронів** — випускання електронів металами у вакуум або інше середовище. Виникає внаслідок нагрівання тіла, під впливом сильного електричного поля або електромагнітного випромінювання.

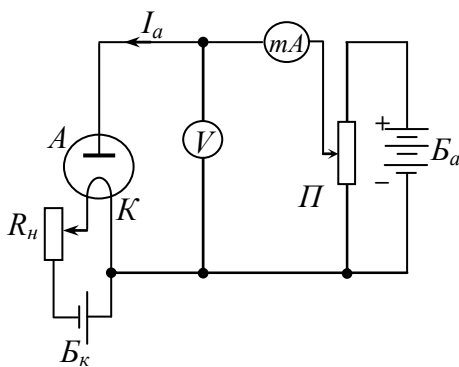
#### 4.4.1 Термоелектронна емісія

1. Навіть при кімнатних температурах у металі є електрони, кінетичні енергії яких достатні для виходу за межі металу (більші від роботи виходу електрона з металу); з підвищенням температури їх кількість збільшується (у

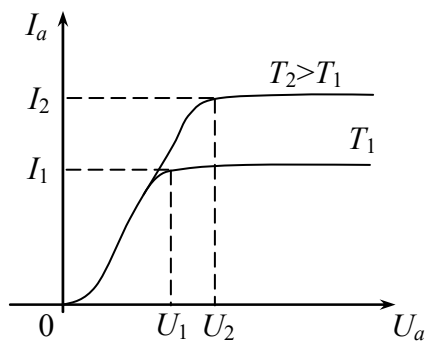
відповідності з розподілом Фермі-Дірака). Явище випускання електронів нагрітими тілами називається явищем термоелектронної емісії<sup>1)</sup>.

Термоелектронну емісію можна досліджувати за допомогою вакуумної лампи-діода, ввімкненої в електричне коло так, як показано на рис. 4.14, а). Ламповий діод являє собою скляний балон з трьома вводами. Два нижніх підводять електричний струм до катода К (металічна нитка, смужка, циліндр), а третій з'єднаний з металічною пластинною А, яка є анодом. Перед запаюванням у лампі створюється високий вакуум.

Катод нагрівається електричним струмом від батареї розжарення  $B_a$ . Зміна струму розжарення, який проходить через катод, приводить і до зміни температури катода. Електрони, що вилітають з катода, рухаються в напрямку до анода і далі у зовнішнє коло; виникає термоемісійний струм. Сила термоемісійного струму в колі вимірюється за допомогою міліамперметра (напрямок струму і напрям руху електронів протилежні). Величину напруги між анодом і катодом  $U_a$  можна змінювати за допомогою потенціометра П і вимірювати вольтметром  $V$ .



а)



б)

Рис. 4.14

Зростання анодної напруги  $U_a$  змінює силу струму в колі (рис. 4.14, б))<sup>2)</sup>. При малих  $U_a$  сила струму зростає повільно. Це є наслідком утворення

<sup>1)</sup> Відкрите знаменитим американським винахідником Едісоном (1882 р.)

<sup>2)</sup> Детальніше дослідження залежності  $I(U)$  показує, що термоемісійний струм існує і при  $U_a=0$  і навіть при малих від'ємних значеннях  $U_a$  (див. у цьому зв'язку задачу № 12 у п. 4.5) Це зумовлено тим, що в частини термоелектронів є достатня кінетична енергія для подолання затримуючого поля

біля катода об'ємного від'ємного заряду (електронної хмари). Цей об'ємний заряд екранує дію анода і намагається повернути електрони в катод; до анода доходить лише частина електронів, які випустив катод. Із зростанням  $U_a$  зростають і швидкості електронів, а об'ємний заряд зменшується. Тому із збільшенням  $U_a$  струм починає зростати швидше.

У цій області (малі значення  $U_a$ ) залежність термоелектричного струму від анодної напруги дається «законом трьох других» Богуславського-Ленгмюра:

$$I_a = AU_a^{3/2}, \quad (4.4.1)$$

де  $A$  — коефіцієнт, який залежить від форми, розмірів і взаємного розташування електродів.

При напрузі  $U_a=U_n$  зростання струму припиняється: всі електрони, які вилітають з катода, досягають анода (явище насичення термоемісійного струму).

Максимальна величина термоемісійного струму (при даній температурі) називається *струмом насичення*  $I_n$ , а відповідна напруга  $U_n$  — *напругою насичення* (рис. 4.14, б).

Із підвищенням температури катода (збільшенням струму розжарення катода) зростає сила струму насичення зростає (рис. 4.14, б). За квантовою теорією густина струму насичення

$$j_n = BT^2 e^{-\Phi/kT}, \quad (4.4.2)$$

де  $B$  — емісійна стала, величина, яка залежить від матеріалу катода і стану його поверхні,  $T$  — абсолютна температура катода,  $\Phi$  — робота виходу електрона із катода,  $k$  — стала Больцмана. Формула (4.4.2) добре узгоджується із дослідними залежностями. Це — формула Дешмана-Річардсона.

Для отримання більшої густини струму насичення потрібно (як видно із формули (4.4.2)) брати матеріал з якомога меншою роботою виходу. З цієї точки зору більш ефективними, зокрема, є не катоди із чистого металу (вольфраму, талію, ніобію), а сплави, або катоди, покриті відповідними матеріалами. Цим можна досягнути збільшення густини струму насичення в тисячі разів.

Можна бачити, що лампові діоди мають односторонню провідність (якщо потенціал анода менший від потенціалу катода, то струму в зовніш-

ньому полі не буде). Цю властивість використовують для випрямлення змінного струму.

Явище термоелектронної емісії використовується в електронних лампах, електронно-променевих та  $X$ -променевих трубках, електронних мікроскопах і т.д.

#### 4.4.2 Інші емісійні явища

1. *Автоелектронна емісія*. Електронну емісію із металу може зумовити і сильне електричне поле. Явище виходу електронів із металу під дією сильного електричного поля називається *автоелектронною або холодною емісією*<sup>1)</sup>. Її можна спостерігати у вакуумній трубці, катодом в якій служить металічне загострення, а анодом — вигнута поверхня. При прикладанні напруги між анодом і катодом біля поверхні катода виникає сильне електричне поле; так при напрузі  $\approx 10^3$  В можна отримати електричне поле напруженістю до  $10^7$  В/м. Поява електричного струму, зумовленого автоелектронною емісією, починається при напруженостях  $\sim 10^5$ - $10^6$  В/м, і сила струму швидко зростає із зростанням величини електричного поля. Густина струму можуть досягати максимальних величин  $10^8$ - $10^{10}$  А/см<sup>2</sup>; такі великі густини струмів руйнують емітер.

При не високих температурах густина струму автоелектронної емісії

$$j = A \left( \frac{E^2}{\Phi} \right) \exp \left( -B \frac{\Phi^{3/2}}{E} \right),$$

де  $\Phi$  — робота виходу електронів,  $A$  і  $B$  коефіцієнти, які слабко залежать від напруженості електричного поля  $E$ .

При достатньо високих температурах виникає термоавтоелектронна емісія, яка з пониженням  $E$  і ростом температури переходить у термоелектронну емісію.

Застосування автоелектронної емісії пов'язане з можливістю отримання великих значень  $j$ , створення електронних пучків великої інтенсивності. Використовується автоелектронна емісія в електровакуумних приладах, в приладах надвисокочастотної техніки, електронної мікроскопії і т.д. Наприклад,

<sup>1)</sup> Явище відкрите американським фізиком Вудом 1897 р.

автоемісійний діод з люмінесцентним екраном (анод) являє собою електронний мікроскоп, який дає збільшення в мільйони разів.

2. *Вторинна електронна емісія* полягає у випусканні електронів (вторинних) металами (емітерами) при опромінюванні їх електронами (первинними), іонами. В достатньо тонких емітерах довжина пробігу електрона може перевищувати товщини емітера; в цьому випадку вторинна електронна емісія буде спостерігатися з поверхні, яка бомбардується електронами, так і з протилежної поверхні. Потік вторинних електронів складається із електронів, які відбиті поверхнею, і власне вторинних електронів — електронів, вибитих із металу первинними електронами (вторинні електрони отримують енергію, достатню для виходу за межі металу).

Кількісно вторинна електронна емісія характеризується коефіцієнтом вторинної електронної емісії

$$\sigma = I_2 / I_1,$$

де  $I_1$  і  $I_2$  — струми, створені первинними і вторинними електронами.

Явище вторинної електронної емісії використовується у так званих фотоелектронних помножувачах — пристроях для підсилення слабких електричних струмів.

3. *Фотоелектронна емісія* — емісія електронів з металу під дією електромагнітного випромінювання (зокрема світла). Інша назва явища — зовнішній фотоефект<sup>1)</sup>.

Пояснення явища наступне<sup>2)</sup>. За квантовою теорією поширення електромагнітного випромінювання — фотонів — це потік, частинок, які є квантами (порціями) електромагнітного випромінювання. Енергія фотона, яка відповідає електромагнітному випромінюванню з частотою  $\nu$ ,  $\varepsilon = h\nu$  ( $h$  — стала Планка). Якщо фотон попадає в метал, то електрон в металі може повністю поглинути фотон. Внаслідок цього енергія електрона зростає на величину  $h\nu$ . Цей надлишок енергії може бути достатній для виходу електрона із потенціальної ями; за умови  $h\nu > \Phi$  ( $\Phi$  — робота виходу) електрон покине ме-

---

<sup>1)</sup> Явище відкрите німецьким фізиком Г. Герцом 1887 р.

<sup>2)</sup> Його дав 1905 р. А. Ейнштейн. Від М. Планка, який вперше (1900 р.) ввів у фізику формулу  $E=h\nu$  (в дещо іншому зв'язку), і А. Ейнштейна йдуть витоки сучасної квантової теорії

тал (володіючи за межами металу і кінетичною енергією). Кількість електронів (фотоелектронів), які покинуть метал, буде пропорційна кількості фотонів, які попадають в метал, тобто інтенсивності електромагнітного випромінювання. Так виникає фотоемісія електронів.

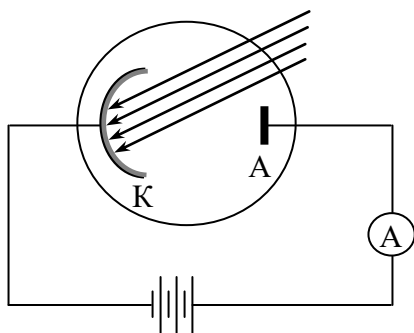


Рис. 4.15

підвищення чутливості вакуумного фотоелемента в балон вводять додатково розріджений газ (наприклад, аргон). В газонаповнених фотоелементах сила струму значно зростає за рахунок електронів, які утворилися в результаті ударної іонізації<sup>1)</sup>. Фотокатодом є світлочутливий шар, нанесений на відповідну поверхню, а анодом металічне кільце або сітка. Світловий потік, який падає на фотокатод, викликає фотоелектронну емісію.

Якщо замкнути коло фотоелемента (рис. 4.15), в колі протікатиме фотострум. Сила фотоструму буде пропорційна інтенсивності електромагнітного випромінювання.

Фотоелементи знаходять широке застосування в техніці, зокрема, в засобах автоматизації і контролю.

## 4.5 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 4.5.1 Запитання і задачі

1. Яка напруженість електричного поля біля поверхні металу (в подвійному електричному шарі)? Для оцінки взяти: робота виходу  $\Phi=1$  еВ, товщина шару  $\Delta l=2 \cdot 10^{-8}$  см.

<sup>1)</sup> Явище ударної іонізації розглядатиметься в наступному розділі



2. Доповнити рис. 4.3, а) додатковими екіпотенціальними поверхнями (за межами провідників) і дати картину ліній вектора напруженості електричного поля.

3. Два провідники (1 і 2) з'єднані в кільце з проміжком між вільними кінцями провідника (рис. 4.16); К — область контакту (спай) провідників. Зобразити (графічно) зміну потенціалу вздовж контура, який проходить через точки, вказані на рис. 4.16. Точки  $A$  і  $B$  лежать безпосередньо біля поверхні провідників. Вважати, що  $\Phi_1 < \Phi_2$ ,  $F_1 > F_2$  ( $\Phi$  — робота виходу,  $F$  — енергія Фермі, індекси 1 і 2 відносяться до першого і другого металів відповідно).

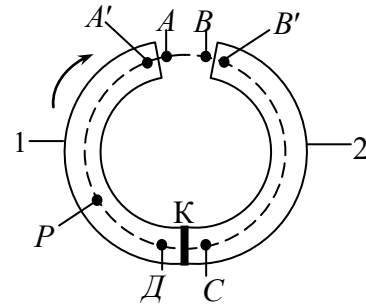


Рис. 4.16

4. Оцінити зміну концентрації електронів в області контактного шару. Товщина шару  $\Delta l = 3 \cdot 10^{-10}$  м. Для внутрішньої контактної різниці потенціалів взяти  $\Delta\phi = 1$  кВ.

5. Показати, що в моделі вільних електронів складова термо-е.р.с.  $\mathcal{E}'$ , яка зумовлена температурною залежністю внутрішньої контактної різниці потенціалів, за умови  $F_1 \gg kT_2$ ,  $F_2 \gg kT_2$  ( $k$  — стала Больцмана,  $T_2$  — абсолютна температура гарячого спаю  $F_1$  — енергія Фермі першого провідника,  $F_2$  — енергія Фермі другого провідника).  $\mathcal{E}' \sim (T_2^2 - T_1^2)$

6. Напруженість електричного поля сторонніх сил, які зумовлені дифузійним і фононним механізмами, можна означити через градієнт температури  $dT/dl$  так:  $E_{cm} = -\beta \frac{dT}{dl}$ ; знак «мінус» вказує, що напруженість спрямована проти градієнта температури. Користуючись цим виразом і означенням е.р.с. (через напруженість поля сторонніх сил), отримати внесок в термо-е.р.с., зумовлений сторонньою силою ( $\mathcal{E}''$ ).

7. Залізо-константанова термопара використовується для контролю температури у певному середовищі. З цією метою один із спаїв поміщений в це середовище, а інший знаходиться в танучому льоді. Яка температура середовища, якщо стрілка гальванометра відхилилася на 10 поділок? Ціна поділки

гальванометра  $c=3 \cdot 10^{-5}$  А/под, загальний опір в колі (термопара-гальванометр) становить 2 Ом.

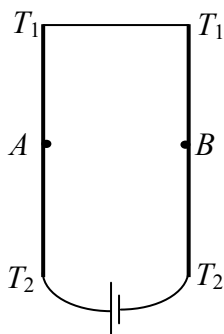


Рис. 4.17

8. До складу електричного кола входять два стержні, які розміщені паралельно один до одного (рис. 4.17). Кінці цих стержнів попарно підтримуються при різних температурах ( $T_2 > T_1$ ). Що можна сказати про температури симетрично розташованих точок ( $A, B$ ) в обох провідниках?

9. Струм проходить вздовж стержня довжиною 20 см і поперечним перерізом  $5 \text{ мм}^2$  від більш нагрітого кінця ( $t_1=30^\circ\text{C}$ ) до менш нагрітого ( $t_2=20^\circ\text{C}$ ). Питомий опір сплаву, із якого виготовлений стержень,  $\rho=5 \cdot 10^{-6}$  Ом·см, а коефіцієнт Томсона  $\tau=5 \cdot 10^{-6}$  В/К. Знайдіть відношення теплоти, яка виділяється за ефектом Томсона, до теплоти, яка виділяється за ефектом Джоуля-Ленца, якщо величина струму  $I=0,5$  мА.

10. Визначити силу струму насичення в електронній лампі з вольфрамовим катодом, якщо довжина нитки розжарення  $l=3$  см, діаметр  $d=0,1$  мм, температура нитки  $T=2700$  К. Робота виходу  $\Phi=4,5$  В, стала у формулі Дешмена-Річардсона  $B=6 \cdot 10^5$  А/( $\text{м}^2 \cdot \text{К}^2$ ).

11. Записати закон збереження енергії для фотоэффекту, пов'язуючи енергію фотона, роботу виходу та кінетичну енергію, яку матиме електрон за межами металу.

12. Вольт-амперна характеристика (залежність між силою струму і напругою) при термоелектронній емісії або при фотоэффекті має вигляд, показаний на рис. 4.18. Видно, що струм не зникає при  $U=0$  (відсутня напруга між анодом і катодом) і навіть при від'ємних значеннях  $U$  (джерело ввімкнуте так, що на катод подається «плюс», а на анод «мінус»). Як це пояснити?

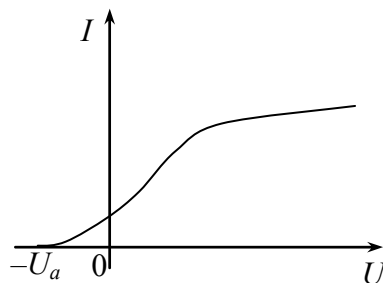
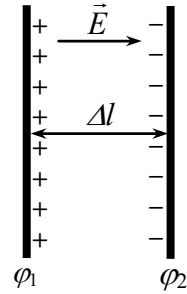


Рис. 4.18

**4.5.2 Відповіді**

1. Прийемо, що подвійний електричний шар можна розглядати як конденсатор із зарядами (дода-тніми і від’ємними), розподіленими на площинах, що знаходяться на віддалі  $\Delta l$  (насправді електрони роз-поділені по всьому об’єму між «обкладинками кон-денсатора»)¹). Будемо вважати, що в такому конден-саторі електричне поле однорідне і напруженість його (рис. 4.19)



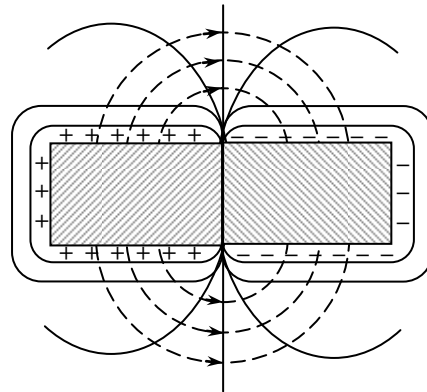
**Рис. 4.19**

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l}.$$

Робота виходу електрона  $\Phi = e(\varphi_1 - \varphi_2)$ , де  $e$  — заряд електрона;  $\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi / e$ . Маємо:

$$E = \frac{\Phi}{e\Delta l} = \frac{1 \text{ еВ}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}} = 5 \cdot 10^9 \text{ В/м}.$$

2. На рис. 4.20 екіпотен-ціальні поверхні зображено су-цільними лініями, лінії вектора напруженості електричного по-ля – пунктиром (силові лінії пе-рпендикулярні до екіпотенці-альних поверхонь).



**Рис. 4.20**

3. При переході із першо-го металу (точка  $A'$ ) за його ме-жі ( $A$ ) потенціал зменшується на величину  $\Phi_1/e$  (потенціал вихо-ду); перехід із точки  $B'$  у точку  $B$  супроводжується зменшенням потенціалу на величину  $\Phi_2/e$ . Різниця поте-нціалів  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{e}$  (зовнішня контактна різниця потенціалів) —

¹) Якщо звернутися до рис. 3.3 третього розділу, то «обкладки» конденсатора — площини  $AB$  і  $A'B'$

додатня величина ( $\Phi_2 > \Phi_1$  за умовою). Для всіх точок, які лежать всередині першого провідника потенціал один і той самий ( $\phi'_1$ ), а для точок всередині другого провідника потенціал є  $\phi'_2$ . При переході електрона із другого провідника до першого потенціал зростає на величину  $\frac{F_1 - F_2}{e}$  ( $F_1 > F_2$ ). Із врахуванням зроблених зауважень хід потенціалу вздовж контура (від точки  $P$ ) має вигляд (рис. 4.21).

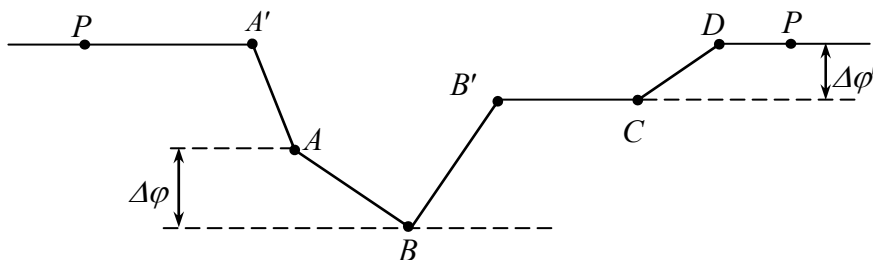


Рис. 4.21

4. Будемо розглядати контактний шар як плоский конденсатор товщиною  $\Delta l$  (див. рис. 4.3). Ємність такого конденсатора

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \phi},$$

де  $\Delta q$  — заряд «обкладки» конденсатора; він зумовлений зміною концентрації вільних електронів у контактному шарі. Зробимо наступні перетворення:

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \phi} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 S}{\Delta l} = \frac{\Delta q}{\Delta \phi} \Rightarrow \frac{\Delta q}{S} = \frac{\varepsilon_0 \Delta \phi}{\Delta l} \Rightarrow \frac{\Delta q}{S \Delta l} = \frac{\varepsilon_0 \Delta \phi}{\Delta l^2} \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 \Delta \phi}{\Delta l^2},$$

тут  $\Delta V$  — об'єм контактного шару. Якщо  $\Delta q / \Delta V$  поділити на заряд одного електрона  $e$ , то ми знайдемо зміну концентрації вільних електронів  $\Delta n$ , які зумовили заряд  $\Delta q$ . Маємо:

$$\Delta n = \frac{\varepsilon_0 \Delta \phi}{e \Delta l^2} \approx 0,6 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}.$$

Отже, зміна концентрації вільних електронів у контактному шарі складає менше одного відсотка від концентрації вільних електронів ( $10^{24} \text{ м}^{-3}$ ).

5. Якщо енергія Фермі  $E_F \gg kT$ , то енергія Фермі при температурі  $T$  (формула (3.3.5))

$$E_F(T) = E_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right),$$

де  $E_F$  — енергія Фермі при  $T=0$ ,  $k$  — стала Больцмана. У вираз для складової термо-е.р.с.  $\mathcal{E}'$  входять похідні  $\frac{dE_F(T)}{dT}$  (взяті для обох контактуючих провідників):

$$\frac{dF_1(T)}{dT} = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{k^2 T}{F_1^2} = -C_1 T, \quad \left( C_1 = \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{k}{F_1} \right)^2 \right),$$

$$\frac{dF_2(T)}{dT} = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{k^2 T}{F_2^2} = -C_2 T, \quad \left( C_2 = \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{k}{F_2} \right)^2 \right).$$

Після підстановки цих похідних, маємо:

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} C_1 T dT + \frac{1}{e} \int_{T_1}^{T_2} C_2 T dT;$$

тобто

$$\mathcal{E}' \sim (T_2^2 - T_1^2) \sim (T_2 + T_1)(T_2 - T_1).$$

Такий простий результат отримується за умови, що електрони вільні. Насправді електрони рухаються в полі кристалічної ґратки; це дещо видозмінює результати. Крім того, умова  $kT \ll E_F$  виконується не завжди. Разом з цим, отриманий результат вказує на принципову можливість існування термо-е.р.с. за рахунок температурної залежності енергії Фермі. При цьому отримуються два важливі висновки:  $E'=0$  при  $T_1=T_2$  і  $E'$  змінює знак при зміні знаку  $(T_2-T_1)$ .

6. Розглянемо термопару, в якій гарячий спай ( $A$ ) підтримується при температурі  $T_2$ , холодний ( $B$ ) — при температурі  $T_1$  (рис. 4.22). На ділянці  $AB$  перший провідник дає термо-е.р.с. в напрямку, показаному стрілкою на рис. 6:

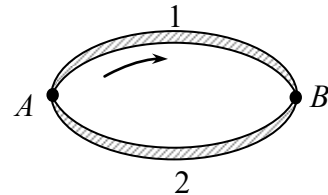


Рис. 4.22

$$\mathcal{E}_1'' = -\int_A^B \beta_1 \frac{dT}{dl} dl = -\int_{T_2}^{T_1} \beta_1 dT = \int_{T_1}^{T_2} \beta_1 dT.$$

На ділянці  $BA$  другого провідника діє термо-е.р.с.

$$\mathcal{E}_2'' = - \int_A^B \beta_2 \frac{dT}{dl} dl$$

або

$$\mathcal{E}_2'' = \int_{T_1}^{T_2} \beta_2 dT .$$

Внесок у термо-е.р.с. термопари

$$\mathcal{E}'' = \int_{T_1}^{T_2} (\beta_1 - \beta_2) dT .$$

Якщо вважати, що  $\beta_1 - \beta_2$  слабко залежать від температури, то  $\mathcal{E}'' = (\beta_1 - \beta_2)(T_2 - T_1)$ .

7. Терморушійна сила  $\mathcal{E} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_2 - T_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T$ , де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — коефіцієнти термо-е.р.с. заліза і нікелю,  $\Delta T$  — різниця температур. З іншого боку  $\mathcal{E} = IR$ , де  $I$  — сила струму в термопарі,  $R$  — загальний опір. Маємо:

$$\Delta T = \frac{IR}{\alpha_1 - \alpha_2} .$$

З таблиці, наведеної в п. 4.3.2 знаходимо  $\alpha_1 - \alpha_2 = 15 - (-38) = 53 \cdot 10^{-6}$  В/К. Маємо:

$$\Delta T = \frac{10 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ А} \cdot 2 \text{ Ом}}{53 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}} \approx 11 \text{ К} ;$$

температура середовища  $11^\circ\text{C}$ .

8. У лівому стержні струм іде від гарячого кінця до холодного, у правому — навпаки. Тому внаслідок ефекту Томсона лівий стержень нагріватиметься, а правий охолоджуватиметься. Таким чином, гарячішою буде точка  $A$ .

9. Якщо по стержню проходить струм  $I$  (від більш нагрітого кінця до менш нагрітого), то завдяки ефекту Томсона виділяється теплота (за одиницю часу)

$$Q_T = dI \frac{dT}{dl} \cdot dl .$$

За законом Джоуля-Ленца виділена теплота (за одиницю часу)  $Q_D = I^2 R$ . Маємо:

$$\frac{Q_D}{Q_T} = \frac{I^2 R}{\pi l \frac{dT}{dl} \Delta l} = \frac{I \rho \frac{\Delta l}{S}}{\tau \frac{dT}{dl} \Delta l} = \frac{I \rho}{\tau \frac{dT}{dl} S}.$$

Підставимо числові значення величин. Маємо:

$$\frac{Q_D}{Q_T} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ В/К} \cdot \frac{10 \text{ К}}{20 \text{ см}} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2} = 2.$$

10. Шукана сила струму  $I = jS$ , де  $j = BT^2 \exp(-\Phi/kT)$  – густина струму насичення,  $S$  – площа поверхні катода. Прийmemo, що емісія відбувається з бокової поверхні прямої нитки довжиною  $l$ . Тоді  $I = \pi dl BT^2 \exp(-\Phi/kT)$ . Розрахунок дає  $I \approx 0,1$  А.

11. Якщо енергія кванта світла  $h\nu$ , і її отримує електрон, що знаходиться біля рівня Фермі (в цьому випадку енергія, яка потрібна для виходу електрона за межі металу, дорівнює роботі виходу  $\Phi$ ), то  $h\nu = \Phi + \frac{m\mathcal{G}^2}{2}$ , де  $\frac{m\mathcal{G}^2}{2}$  – кінетична енергія електрона поза металом.

12. Наявність струму при  $U=0$ , або при невеликих від'ємних значеннях  $U$ , пояснюється тим, що існують електрони (при термо- і фотоемісії), які мають достатню кінетичну енергію для проходження від катода до анода і в цьому випадку.

## РОЗДІЛ 5 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ В ЕЛЕКТРОЛІТАХ

*Король помер, —  
Хай живе король!<sup>1)</sup>*

Електроліти — водні розчини кислот, солей, лугів, розплави солей; існують і тверді електроліти. Носії струму в електролітах — додатно і від’ємно заряджені іони. Явища, які відбуваються при проходженні електричного струму в електролітах, знаходять широке застосування.

### 5.1 ЕЛЕКТРОЛІТИ. ЕЛЕКТРОЛІТИЧНА ДИСОЦІАЦІЯ

1. Складемо електричне коло із батареї елементів, гальванометра і посудини з дистильованою водою, в яку опущені металічні електроди (рис. 5.1).

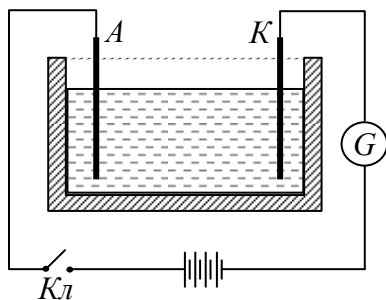


Рис. 5.1

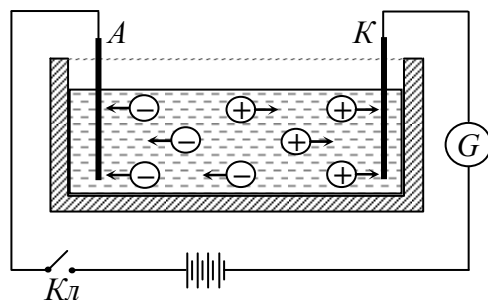


Рис. 5.2

**А** – анод (електрод, з’єднаний з додатнім полюсом батареї), **К** – катод (електрод, з’єднаний з від’ємним полюсом батареї)

Якщо замкнути коло, то гальванометр не зафіксує електричного струму. Це доводить, що чиста дистильована вода — дуже добрий діелектрик.

Додамо тепер до води у посудині кілька відсотків кухонної солі. Гальванометр тепер виявить електричний струм.

<sup>1)</sup> Так повідомлялося у Франції з вікон королівського палацу про відхід одного короля і прихід іншого. Тут цей крилатий вислів має суто фізичний підтекст: провідність електролітів зумовлена *не електронами* (як в металах), а *іонами*



Виникнення струму пояснюється появою у розчині додатньо і від'ємно заряджених іонів, які переміщуються у протилежних напрямках: від'ємно-заряджені — до анода, додатньо-заряджені — до катода (рис. 5.2). *Провідники, в яких носіями струму є лише іони, називаються електролітами.* До електролітів відносять, насамперед, розчини кислот, солей, лугів. Іонна провідність характерна і для розплавлених солей. Існують і твердотільні електроліти (наприклад, галогено-срібні солі).

2. З'ясуємо механізм виникнення іонів у електроліті.

Припустимо, що у воді знаходиться молекула соляної кислоти  $\text{HCl}$ . Ця молекула складається з іона  $\text{H}^+$  та іона  $\text{Cl}^-$ , які утримуються в молекулі силами кулонівського притягання. Молекула  $\text{HCl}$ , як і молекули води, що її оточують, є дипольними. Тому в розчині кожену молекулу  $\text{HCl}$  оточують молекули води так, як показано на рис. 5.3<sup>1)</sup>. Молекули води ніби намагаються «розірвати» молекулу на дві частини. Цьому сприяє і тепловий рух — коливання атомів в молекулі. Внаслідок цього молекули  $\text{HCl}$  (будь-якої кислоти або солі) розпадаються на позитивні іони (*катіони*) і від'ємні іони (*аніони*);  $\text{H}^+$  — катіон,  $\text{Cl}^-$  — аніон. Аніони і катіони перебувають в оточенні молекул розчинника (рис. 5.4); це оточення називається *сольватною оболонкою*, а комплекс іон+сольватна оболонка — *сольвентом*. Подібним чином розпад молекул розчиненої речовини буде відбуватися і для інших солей та кислот; так  $\text{NaCl} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{CuSO}_4 \rightarrow \text{Cu}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$ . При цьому іони водню і всіх металів заряджені позитивно.

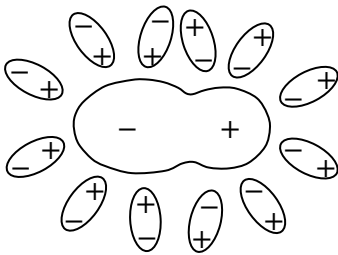


Рис. 5.3

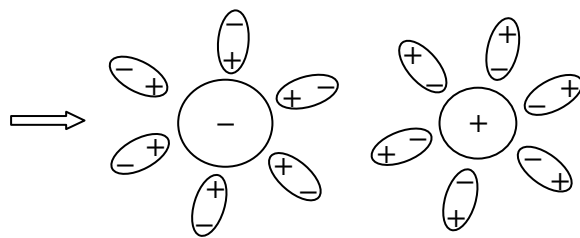


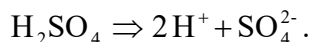
Рис. 5.4

<sup>1)</sup> На рис. 5.3 дипольний характер розподілу заряду в молекулі  $\text{H}_2\text{O}$  зображений у спрощеній формі (див. п. 1.7 першого розділу)

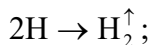
Розпад молекул розчиненої речовини під дією розчинника називається *електролітичною дисоціацією*. Величина, яка показує, яку частину всіх молекул розчиненої речовини складають молекули, що розпалися, називається *коефіцієнтом дисоціації  $\alpha$* . При малій концентрації розчину значення  $\alpha$  близьке до одиниці, тобто дисоціація повна — практично всі молекули розпалися на іони. При збільшенні концентрації розчину  $\alpha$  зменшується. При підвищенні температури ступінь дисоціації збільшується.

## 5.2 ЕЛЕКТРОЛІЗ

Розглянемо докладніше проходження струму через електроліт. Нехай в посудині (рис. 5.1) знаходиться розчин сірчаної кислоти у воді (посудину з електролітом називають електролітичною ванною). Дисоціація молекул  $\text{H}_2\text{SO}_4$  здійснюється за схемою:



Замкнемо електричне коло. Під дією електричного поля, що виникло в електроліті, між електродами, катіони ( $\text{H}^+$ ) будуть переміщуватися до катода, аніони ( $\text{SO}_4^{2-}$ ) — до анода. Іони  $\text{H}^+$  при потраплянні на катод приєднують до себе один із електронів пластинки і перетворюються в нейтральні атоми водню. Аніони  $\text{SO}_4^{2-}$  при потраплянні на анод віддають свої зайві електрони і на аноді виділяються молекули  $\text{SO}_4$ . Утворення атомів водню і молекул  $\text{SO}_4$  — результат електролізу на першому етапі. Далі починаються *вторинні реакції при електролізі*. Атоми водню з'єднуються в молекулу і виділяються на катоді:



стрілка  $\uparrow$  показує, що молекулярний водень виділяється із розчину. Молекули  $\text{SO}_4$  (на аноді) є нестійкі і розпадаються за схемою:  $\text{SO}_4 \rightarrow \text{SO}_3 + \text{O}$ . Отримані в такий спосіб атоми кисню об'єднуються в молекули:  $2\text{O} \rightarrow \text{O}_2^{\uparrow}$ . Взаємодія молекул  $\text{SO}_3$  з водою приводить до утворення молекули сірчаної кислоти



Отже, із електроліту виділяються складники молекул води, а складники молекул кислоти залишаються в розчині. Наслідком цього є те, що з часом

(при проходженні струму) кількість води в розчині зменшується, а концентрація розчину збільшується. Описаний процес називається іноді *розкладом води* електричним полем на водень і кисень.

Із розглянутого видно, що проходження електричного струму через електроліт супроводжується перетворенням речовини, і на електродах виділяються продукти розкладу розчину.

Проходження електричного струму через електроліти, яке супроводжується хімічними перетвореннями речовини і виділення її на електродах, називається *електролізом*.

У наведеному вище прикладі речовина (водень і кисень) виділялася на обох електродах. Так відбувається тоді, коли анод — *неактивний* (не розчиняється в електроліті). На практиці для такого електролізу використовують графітові або вуглецеві електроди; такі електроди не реагують з електролітом.

Інший тип електролізу, який знаходить широке технічне використання, полягає у тому, що анод є *активним* — реагує з електролітом. Якщо в електролітичну ванну налити розчин солі тієї речовини, з якої зроблений анод, то речовина виділяється тільки на катоді, а анод при цьому розчиняється. Прикладом такого електролізу є очищення металів від домішок, який називається *рафінуванням металів*. Так, рафінування срібла за допомогою електролізу полягає у наступному.

В електролітичну ванну з розчином азотнокислого срібла ( $\text{AgNO}_3$ ) опускають срібні електроди. Катодом є тонка срібна пластинка, анодом — товста пластинка із срібла, що містить домішки. При електролізі відбувається перехід срібла з анода на катод, а домішки опадають на дно посудини. Механізм його такий. Іони срібла ( $\text{Ag}^+$ ), що з'являються при дисоціації молекули  $\text{AgNO}_3$ , потрапляють на катод (тонку пластинку) і, приєднуючи електрон, осідають на катоді (як нейтральні атоми  $\text{Ag}$ ); отже, на катоді накопичуються атоми срібла, маса катода зростає.

Подібно до цього проводиться рафінування міді, цинку, алюмінію, золота та інших металів.

Відзначимо й інші важливі технічні застосування електролізу.

*Гальваностегія*. Покриття металічних предметів тонким шаром іншого металу з допомогою електролізу називається *гальваностегією*. Це здійсню-

ють як для запобігання іржавінню, так і з декоративною метою та для виготовлення прикрас (позолочення, посріблення).

Предмет, який має бути покритий стійким металом, добре очищають, полірують і поміщають в електролітичну ванну як катод. Анодом служить метал, яким покривають предмет, а як електроліт використовують водний розчин солі того ж металу, який є анодом; так, для нікелювання використовують сірчаноокислий нікель ( $\text{NiSO}_4$ ).

*Гальванопластика.* Гальванопластикою називається спосіб отримання за допомогою електролізу точних рельєфних металічних копій. В такий спосіб виготовляють кліше для друкування грошей, матриці для друкування книг, журналів, газет (при великих їх тиражах). Гальванопластика використовується при виготовленні прес-форм для виробів із металу, пластмаси, гуми.

*Електролітичне полірування поверхні.* Оскільки електричне поле поблизу виступів і загострень сильніше, ніж біля інших місць поверхні електрода, то при електролізі на поверхні активного анода в першу чергу зникають виступи — поверхня анода полірується. В такий спосіб відбувається полірування поверхні за допомогою електролізу.

*Принцип роботи гальванічних елементів і акумуляторів* базується на процесах, пов'язаних із взаємодією металів з електролітами.

### 5.3 ЗАКОНИ ФАРАДЕЯ

**1. Перший закон Фарадея. 2. Другий закон Фарадея. 3. Об'єднаний закон електролізу**

#### 5.3.1 Перший закон Фарадея

1834 р. Фарадей на основі дослідів відкрив два закони електролізу, які носять його ім'я.

Вивчаючи величину заряду, що пройшов через електроліт, та масу катода до і після проходження струму, Фарадей встановив: *маса речовини, що виділилася при електролізі, прямо пропорційна величині заряду, який пройшов через електроліт:*

$$m = kq . \quad (5.3.1)$$

Формула (5.3.1) є математичним виразом першого закону Фарадея. Коефіцієнт пропорційності  $k$  називається *електрохімічним еквівалентом* речовини. Електрохімічний еквівалент дорівнює масі речовини, що виділилася на електроді при проходженні через електроліт одиниці заряду. Одиницею вимірювання  $k$  є 1 кг/Кл.

На досліді можна визначити електрохімічні еквіваленти з великою точністю, так, наприклад, для срібла  $k=1,118 \cdot 10^{-6}$  кг/Кл, для міді  $k=0,329 \cdot 10^{-6}$  кг/Кл.

Обґрунтуємо перший закон Фарадея. Іон, що розряджається на катоді, перетворюючись в нейтральний атом, приєднує до себе певне число електронів (іон срібла — один, іон двовалентної міді — два). Отже, заряд, перенесений через електроліт при проходженні струму, буде пропорційний кількості іонів, що розрядилися. Маса іонів певного типу однакові, тому маса  $m$ , що виділилася на електроді, повинна бути пропорційна до заряду  $q$ , що пройшов через електроліт. Оскільки маси іонів різного типу різні (наприклад, маса іона  $\text{Ag}^+$  більша від маси іона  $\text{Cu}^{2+}$  приблизно у 1,7 раз), то і маси виділених речовини повинні відрізнятись.

Якщо через електроліт протікає постійний струм  $I$  протягом часу  $t$ , то  $q = It$  і рівняння (5.3.1) записується у вигляді

$$m = kIt . \quad (5.3.2)$$

### 5.3.2 Другий закон Фарадея

Другий закон Фарадея: *електрохімічні еквіваленти елементів пропорційні хімічним еквівалентам.*

Хімічним еквівалентом елемента називають відношення молярної маси  $M$  речовини до його валентності  $z$ . Отже, за другим законом Фарадея

$$k = C \frac{M}{z} . \quad (5.3.3)$$

Коефіцієнт  $C$  є універсальною сталою для всіх елементів. Величина, обернена до  $C$ , називається числом Фарадея:

$$F = \frac{1}{C} . \quad (5.3.4)$$

Із врахуванням цього другий закон Фарадея набуде форми

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z}. \quad (5.3.5)$$

### 5.3.3 Об'єднаний закон електролізу

Підставимо (5.3.3) у рівності (5.3.1) і (5.3.2) і маємо закон електролізу, що об'єднує обидва закони Фарадея

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} q, \quad (5.3.6,а)$$

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} It. \quad (5.3.6,б)$$

Ці вирази означають об'єднаний закон електролізу (або об'єднаний закон Фарадея).

Перепишемо (5.3.6, а) у вигляді

$$F = \frac{M}{zm} q.$$

Якщо  $m = \frac{M}{z}$ , то  $F = q$ . Це означає, що стала Фарадея чисельно дорівнює заряду, який необхідно пропустити через електроліт для отримання  $1/z$  моль речовини. Це число не залежить від виду речовини — ні від його молярної маси, ні від валентності; для будь якого електроліту це одна і та ж величина. Дослідами встановлено, що  $F = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль.

Обґрунтування формул (5.3.6) можна провести за допомогою наступних простих міркувань.

Маса, перенесена іонами на електрод,

$$m = m_i N_i,$$

де  $m_i$  — маса іона,  $N_i$  — кількість іонів.  $m_i = \frac{M}{N_A}$  ( $M$  — молярна маса,  $N_A$  —

число Авогадро),  $N_i = \frac{q}{q_i} = \frac{q}{ez}$  ( $q_i$  — заряд одного іона,  $e$  — величина заряду

електрона,  $z$  — валентність іона). Маємо:

$$m = m_i N_i = \frac{M}{N_A} \cdot \frac{q}{ez} = \frac{1}{eN_a} \cdot \frac{M}{z} q = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} q. \quad (5.3.7)$$

Отже, ми отримали об'єднаний закон електролізу.

Ланцюжок рівностей (5.3.7) пояснює «походження» експериментально відкритого закону (5.3.6). При цьому число Фарадея  $F$  набуває конкретного змісту:

$$F = eN_A;$$

$eN_A$  — заряд, перенесений іонами моля одновалентної речовини.  $F = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль} \approx 9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$  (співпадає з величиною, встановленою на досліді).

**Приклад.** Нікелювання металічної деталі з поверхнею  $S=300 \text{ см}^2$  тривало 12 год при силі постійного струму  $I=0,50 \text{ А}$ . Електроліт — водний розчин сірчаноокислого нікелю ( $\text{NiSO}_4$ ); тут валентність нікелю  $z=2$ . Знайдемо товщину покриття деталі.

⇒ Масу нікелю, що виділився на деталі, знайдемо за законом Фарадея (5.3.6):

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} It,$$

де (для нікелю)  $M=58,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $z=2$ . Товщина шару  $\delta$  знайдеться з умови

$$m = V\rho \Rightarrow m = \delta S\rho \Rightarrow \delta = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} \cdot \frac{It}{\rho S}$$

( $\rho=8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ). Після підстановки числових значень маємо  $\delta \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

## 5.4 ПРОВІДНІСТЬ В ЕЛЕКТРОЛІТАХ. ЗАКОН ОМА В ЕЛЕКТРОЛІТАХ

1. Електричний струм в рідинах — впорядкований рух іонів під дією електричного поля; отже необхідною умовою електропровідності є наявність іонів. Додатньо заряджені іони рухаються до катода, від'ємно заряджені до анода.

Прослідкуємо за переміщенням катіона. На нього діятиме кулонівська сила  $\vec{F}_e = q_+ \vec{E}$ , де ( $q_+$  — заряд катіона, а  $\vec{E}$  — напруженість поля в електроліті), а також сила «опору середовища», пов'язана з протидією руху даного іона зі сторони інших іонів і молекул. Цю силу можна розглядати як своєрідну «силу тертя»  $F_m$ . Оскільки протидія спрямована проти напрямку руху іона і зростає із збільшенням швидкості іона, то можна припустити, що  $\vec{F}_m = -r\vec{v}$ ,

де  $r$  — коефіцієнт «тертя» (з подібними силами ми зустрічаємося у механіці при розгляді руху тіл у в'язкому середовищі). Отже, на іон діятиме сила  $\vec{F}_e + \vec{F}_m$  (рис. 5.5).

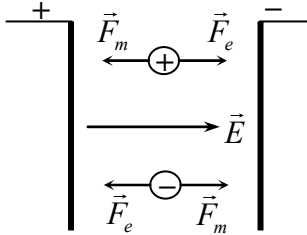


Рис. 5.5

За другим законом Ньютона

$$m_+ \vec{a}_+ = \vec{F}_e + \vec{F}_m, \quad (5.4.1)$$

де плюси біля маси іона і прискорення іона означають, що розглядається додатній іон. Сили  $\vec{F}_e$  і  $\vec{F}_m$  протилежно спрямовані, причому  $F_m$  зростає із збільшенням швидкості іона. Тому після початкового прискорення руху іона, його швидкість набуває певного

значення  $\mathcal{G}_+$ , яке визначається з умови

$$0 = \vec{F}_e + \vec{F}_m \Rightarrow 0 = q_+ E - r_+ \mathcal{G}_+ \quad (5.4.2)$$

( $r_+$  — коефіцієнт «тертя» додатньо зарядженого іона). Маємо:

$$\mathcal{G}_+ = \frac{q_+ E}{r_+}. \quad (5.4.3)$$

Швидкість  $\mathcal{G}_+$  приймають за середню швидкість усталеного руху іона у напрямку електричного поля — швидкість дрейфу іона. Величина  $u_+ = \frac{\mathcal{G}_+}{r_+}$  на-

зивається *рухливістю іона*. Тому

$$\mathcal{G}_+ = u_+ E.$$

Як видно із цієї формули, рухливість чисельно дорівнює швидкості дрейфу іона під дією поля, напруженість якого дорівнює одиниці.

Густина струму, зумовленого рухом додатніх іонів,

$$j_+ = q_+ n_+ \mathcal{G}_+ = q_+ n_+ u_+ E \quad (5.4.4)$$

(див. п. 3.2 третього розділу); тут  $n_+$  — концентрація додатніх іонів.

Аналогічно до цього густина струму, утвореного рухом негативних іонів у напрямку проти поля,

$$j_- = q_- n_- u_- E. \quad (5.4.5)$$

Рух негативних зарядів справа наліво еквівалентний руху позитивних зарядів зліва направо, тому повна густина струму

$$j = j_+ + j_- = (q_+ n_+ u_+ + q_- n_- u_-) E. \quad (5.4.6)$$



У цілому електроліт нейтральний, тому

$$q_+ n_+ = q_- n_- ,$$

і густина іонного струму

$$j = q_+ n_+ (u_+ + u_-) E .$$

2. Позначимо

$$\sigma = q_+ n_+ (u_+ + u_-) . \quad (5.4.7)$$

Тоді формула (5.4.7) набуде форми закону Ома у диференціальній формі:

$$j = \sigma E , \quad (5.4.8)$$

де  $\sigma$  — питома електропровідність електроліту.

Якщо  $q_+ = q_- = q$ , то концентрація позитивних і негативних іонів однакові ( $n_+ = n_- = n$ ). У цьому випадку  $n = \alpha n_0$  ( $\alpha$  — коефіцієнт дисоціації,  $n_0$  — концентрація молекул розчиненої речовини) і закон Ома для електроліту набуде вигляду

$$j = q \alpha n_0 (u_+ + u_-) E ; \quad (5.4.9)$$

тут  $q = ze$  ( $z$  — валентність,  $e$  — заряд електрона). При цьому питома провідність

$$\sigma = q \alpha n_0 (u_+ + u_-) . \quad (5.4.10)$$

Вона тим вища, чим більший коефіцієнт дисоціації  $\alpha$  і чим більша рухливість іонів.

Питомий опір електроліту

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q \alpha n_0 (u_+ + u_-)} . \quad (5.4.11)$$

З підвищенням температури електроліту електропровідність  $\sigma$  збільшується. Це зумовлено двома причинами: збільшенням коефіцієнта дисоціації і зменшенням в'язкості розчину (за рахунок цього зростає рухливість молекул). Електропровідність електролітів за рахунок цих факторів може зростати в тисячі разів.

Залежність провідності від концентрації  $n_0$  складна. Для чистого розчинника ( $n_0=0$ )  $\sigma=0$ ; із збільшенням  $n_0$   $\sigma$  зростає, досягає максимуму, а потім спадає, оскільки зменшується коефіцієнт дисоціації  $\alpha$  і рухливість іонів. Експериментальна крива для водного розчину  $H_2SO_4$  показана на рис. 5.6.

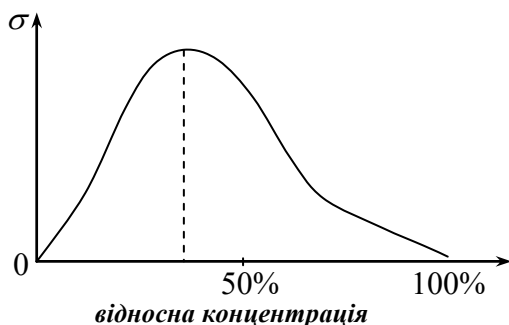


Рис. 5.6

Залежність електропровідності  $\sigma$  від концентрації розчину  $\text{H}_2\text{SO}_4$  у воді

лекулу в одиниці об'єму)

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \cdot \frac{m}{M} N_A,$$

де  $M$  — молярна маса солі,  $m$  — маса солі ( $m=5$  г),  $N_A$  — число Авогадро,  $V$  — об'єм ( $V=10^{-3}$  м<sup>3</sup>). Концентрація пар іонів ( $\text{Na}^+$  і  $\text{Cl}^-$ )

$$n = \alpha n_0 = \frac{\alpha m N_A}{MV},$$

де  $\alpha=0,3$ .

Провідність електроліту

$$\sigma = \alpha n_0 e (u_+ + u_-) = \frac{\alpha m N_A e}{MV} (u_+ + u_-).$$

Підставимо числові дані:

$$\sigma = \frac{0,3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{58 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} (45 + 68) \cdot 10^{-9} \approx 0,28 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}.$$

## 5.5 ГАЛЬВАНІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ І АКУМУЛЯТОРИ

**1. Взаємодія металу з електродом. Перетворення хімічної енергії в електричну. 2. Гальванічні елементи. 3. Акумулятори**

Явища, розглянуті вище, дозволяють пояснити роботу хімічних джерел струму — гальванічних елементів і акумуляторів.

**Приклад.** При розчиненні 5 г кухонної солі у 1 л води дисоційовано 30% всіх розчинених молекул солі. Визначимо електропровідність цього електроліту, якщо рухливість іона  $\text{Na}^+$   $u_+=45 \cdot 10^{-9} \frac{\text{м/с}}{\text{В/м}}$ , а рухливість іона  $\text{Cl}^-$   $u_-=68 \cdot 10^{-9} \frac{\text{м/с}}{\text{В/м}}$ .

⇒ Концентрація молекул  $\text{NaCl}$  в розчині (число мо-

### 5.5.1 Взаємодія металу з електродом. Перетворення хімічної енергії в електричну

Якщо в розчин, що містить іони, помістити металічну пластинку, то метал електризується — між пластинкою і розчином виникає різниця потенціалів. Пояснимо це на прикладі цинкової пластинки, опущеної в слабкий розчин сірчаної кислоти.

Іони цинку  $Zn^{2+}$  під впливом заряджених іонів  $SO_4^{2-}$  будуть відриватися від поверхні металу і переходити в шар рідини, який прилягає до пластинки. При цьому цинк зарядиться від'ємно, а відповідний шар води — позитивно. На межі розділу пластинка — розчин виникає *подвійний електричний шар* (подібно до виникнення подвійного електричного шару біля поверхні металу за рахунок виходу електронів з металу — п. 3.3 третього розділу). Напруженість електричного поля в цьому шарі буде направлена від води до пластинки. Під дією поля починається перехід іонів  $Zn^{2+}$  назад на пластинку. При досягненні певної різниці потенціалів між цинком і розчином встановиться динамічна рівновага між двома процесами — виходом іонів  $Zn^{2+}$  із пластинки та їх поверненням до пластинки.

Подібне спостерігатиметься, якщо цинкову пластинку помістити в розчин цинкового купоросу ( $ZnSO_4$ ). У цьому розчині пластинка також зарядиться від'ємно, проте різниця потенціалів між пластинкою і розчином у цьому випадку буде меншою, оскільки наявність додаткових іонів  $Zn^{2+}$  у розчині (які виникли внаслідок дисоціації молекули  $ZnSO_4$ ) буде сприяти переходу іонів  $Zn^{2+}$  із розчину в метал і протидіяти зворотному переходу. Звернемо увагу на таке: метал при взаємодії з розчином солі того ж металу не завжди заряджається від'ємно. Так, наприклад, мідна пластинка у мідному купоросі ( $CuSO_4$ ) заряджається позитивно; іони  $Cu^{2+}$  осаджуються на пластинці. При цьому відбувається і зміна напрямку поля у подвійному електричному шарі — воно буде спрямоване від міді до розчину.

Отже, на межі метал-розчин утворюється подвійний електричний шар і виникає різниця потенціалів між металом і розчином. Вона залежить від роду металу і розчину. Саме тут лежить ключ до перетворення хімічної енергії в електричну: якщо в один і той самий розчин опустити пластини із двох різних металів, то між пластинами виникає різниця потенціалів, за рахунок якої може виникнути і електричний струм в зовнішній ділянці електричного кола.

### 5.5.2 Гальванічні елементи

Гальванічний елемент — джерело електричної енергії, в якому хімічна енергія перетворюється в електричну.

Перший гальванічний елемент створений італійським вченим А.Вольта в кінці XVIII ст.<sup>1)</sup>

Суттєвим для отримання електричної енергії за рахунок хімічної є наявність двох різнорідних провідників з електронною провідністю, які знаходяться у середовищі з іонною провідністю.

*Елемент Вольта* (рис. 5.7) складається із слабого розчину сірчаної кислоти у воді, у який занурені мідна і цинкова пластинки. Мідна пластинка, як і цинкова, при взаємодії з даним розчином заряджається *від'ємно* відносно розчину. Мідний електрод означається як *від'ємний* відносно розчину, але як *додатний* відносно цинку. Отже, за рахунок роботи хімічних сил отримується різниця потенціалів між мідним і цинковим електродами (тобто полюсами *розімкнутого* джерела струму); так виникає е.р.с. джерела  $\mathcal{E} = \varphi_{Cu} - \varphi_{Zn}$ . Розподіл потенціалів в розімкненому елементі Вольта показаний на рис. 5.8; тут потенціали міді  $\varphi_{Cu}$  і цинку  $\varphi_{Zn}$  відраховуються від потенціалу розчину  $\varphi=0$ .

Замкнемо електроди на зовнішній споживач і прослідкуємо за процесами, які відбуваються всередині гальванічного елемента і які забезпечують протікання електричного струму в колі. У зовнішньому колі струм потече від мідного електрода (анода) до цинкового електрода (катода); потенціал мідного електрода  $\varphi_{Cu}$  понизиться. При цьому електрони переміщуються від цинкового електрода до мідного. Зменшення концентрації електронів на цинковій пластинці порушить рівновагу між пластинкою і розчином (потенціал  $\varphi_{Zn}$  підвищиться), і для її відновлення з пластинки в розчин починають надходити нові іони  $Zn^{2+}$ ; наслідком цього є поява кожного разу двох «нових» електронів на цинковій пластинці. У свою чергу, зменшення додаткового від'ємного заряду на мідному катоді буде компенсуватися появою на елект-

---

<sup>1)</sup> Хімічні джерела струму були названі гальванічними елементами за іменем італійського вченого Л. Гальвані, який помітив дію електричного струму на лапку жаби. Намагання назвати ці елементи вольтаїчними (за іменем Вольта) виявилися невдалими

роді іонів водню  $\text{H}^+$  (струм всередині елемента йде в протилежному напрямку до руху іона  $\text{H}^+$  при електролізі). Внаслідок описаних процесів між пластинами і розчином встановиться новий стан рівноваги, якому відповідатимуть потенціали  $\phi'_{\text{Cu}}$  і  $\phi'_{\text{Zn}}$ . Виникає різниця потенціалів  $U = \phi'_{\text{Cu}} - \phi'_{\text{Zn}}$  (рис. 5.8) — напруга між полюсами ввімкненого джерела струму.

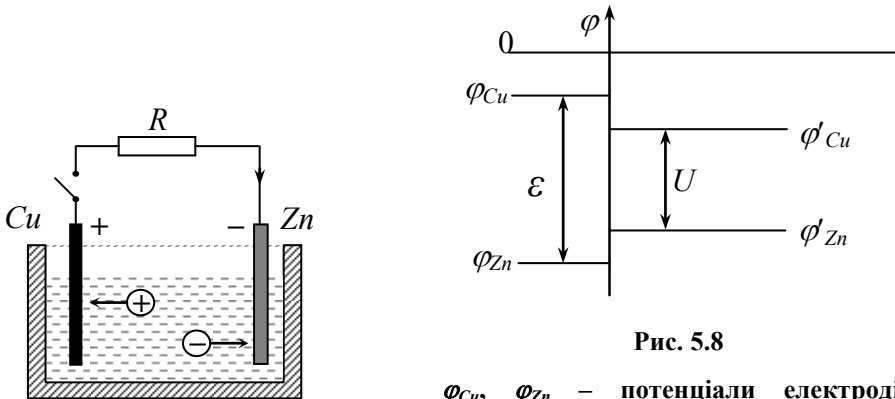


Рис. 5.7

⊕ – іон  $\text{H}^+$ , ⊖ – іон  $\text{SO}_4^{2-}$

Рис. 5.8

$\phi_{\text{Cu}}$ ,  $\phi_{\text{Zn}}$  – потенціали електродів розімкненого кола;  $\phi_{\text{Cu}} - \phi_{\text{Zn}} = E$ .

$\phi'_{\text{Cu}}$ ,  $\phi'_{\text{Zn}}$  – потенціали електродів замкнутого кола;  $\phi'_{\text{Cu}} - \phi'_{\text{Zn}} = U$ .

Підсумуємо викладене. Між електродами з міді та цинку, встановленими у водний розчин сірчаної кислоти, виникає різниця потенціалів. При цьому мідний електрод (анод) заряджається додатньо по відношенню до цинкового електрода (катода); виникає різниця потенціалів між електродами. У випадку розімкнутого кола ця різниця потенціалів і є електрорушійною силою джерела струму. При замкненні кола на зовнішнє навантаження (рис. 5.7) електрони перемістяться з катода до анода. Зменшення від'ємних зарядів на катоді компенсується переходом іонів  $\text{Zn}^{2+}$  у розчин (так «постачаються» електрони на цинковий електрод). Від'ємні заряди, що надходять на анод, нейтралізуються іонами  $\text{H}^+$ , які надходять з розчину; внаслідок цього утворюються атоми водню  $\text{H}$  (які можуть об'єднуватися в молекулі  $\text{H}_2$  і виділятися як газ). Різниця потенціалів  $U$  між полюсами елемента, ввімкненого в коло з навантаженням, буде менша від е.р.с. При роботі елемента Вольта на додатньому полюсі виділяється водень, а на від'ємному — розчиняється цинк.

Відзначимо, що у даному випадку відбувається процес електролізу сірчаної кислоти, внаслідок чого на мідному електроді іони  $H^+$  отримують електрони, а на цинковому електроді від'ємні іони  $SO_4^{2-}$  віддають свої зайві електрони. Наслідком вторинних реакцій на електродах є виділення молекулярних кисню (на цинковій пластинці) і водню (на мідній пластинці).

*Принцип роботи елемента Вольта реалізується і в інших типах гальванічних елементів (Даніеля, Лекланше, Вестона).*

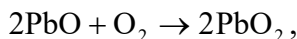
### 5.5.3 Акумулятори

До хімічних джерел струму належать і акумулятори<sup>1)</sup>. Гальванічні елементи є джерелами одноразової дії; при їх використанні запас хімічної енергії в них необоротно використовується для підтримки електричного струму. Акумулятори відрізняються від гальванічних елементів своєю оборотністю і можуть використовуватися багатократно. Перезарядка гальванічних елементів неможлива або економічно не вигідна, акумулятори ж дозволяють здійснювати сотні і тисячі зарядно-розрядних циклів. В акумуляторах запас хімічної енергії відновлюється через пропускання струму протилежного напрямку від зовнішнього джерела.

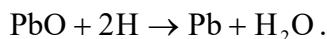
Розглянемо роботу свинцевого (або кислотного) акумулятора.

В електролітичну ванну з розчином  $H_2SO_4$  занурюються дві однакові свинцеві пластини (рис. 5.9), покриті оксидом свинцю ( $PbO$ ). Оскільки хімічні процеси на обох пластинках однакові, то різниця потенціалів між ними дорівнює нулю.

Ввімкнемо зовнішнє джерело струму. В процесі проходження через акумулятор *струму зарядки* буде відбуватися електроліз сірчаної кислоти. Внаслідок електролізу і його вторинних реакцій на аноді виділятиметься кисень, а на катоді — водень. Кисень викличе *окислення* (на аноді):



а водень — *відновлення* (на катоді):




---

<sup>1)</sup> Акумулятори відносять іноді до типу гальванічних елементів (акумулятори – вторинні гальванічні елементи)

Отже, внаслідок зарядки акумулятора електроди стають різнорідними, виникає різниця потенціалів. Акумулятор стає джерелом струму.

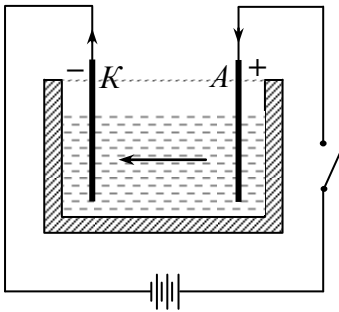


Рис. 5.9

Схема зарядки акумулятора

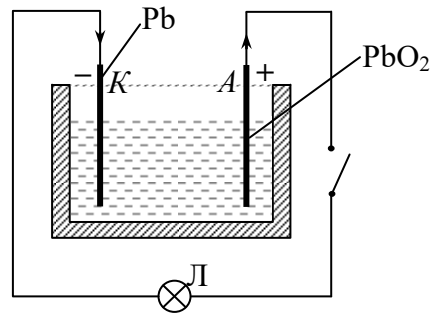


Рис. 5.10

Схема розрядки акумулятора

Відключимо джерело струму і замість нього приєднаємо лампу розжарення (рис. 5.10). Лампа загоряється при замиканні кола, отже, акумулятор сам став джерелом струму. В колі проходить *струм розрядки* акумулятора. При розрядці акумулятора хімічні реакції йдуть в протилежному напрямку і через певний час пластинки набувають початкового стану — акумулятор розрядиться. Тепер можна знову приєднати акумулятор до зовнішнього джерела струму і повторити всі описані процеси; це означає, що процеси, що відбуваються в акумуляторі — оборотні.

Акумулятори характеризуються к.к.д., ємністю і е.р.с. Коефіцієнтом корисної дії акумулятора є відношення енергії, отриманої при розрядці, до енергії, яка затрачена на його зарядку:

$$\eta = \frac{A_p}{A_z}$$

Ємністю акумулятора називається заряд, який можна від нього отримати:

$$Q = It$$

Як правило, ємність акумуляторів вимірюється в ампер-годинах. Нехай, наприклад, ємність акумулятора 100 А·год. Це означає, що від нього можна отримувати струм силою 1 А протягом 100 год., або струм силою 0,5 А протягом 200 год. і т.д.

Акумулятори бувають кислотні чи лужні. Вище був описаний кислотний (або свинцевий) акумулятор. Його е.р.с. складає біля 2 В, а к.к.д. біля 80%. Недолік кислотних акумуляторів той, що вони псується при короткому замиканні, виділяють шкідливі випаровування і газу. Лужні акумулятори позбавлені вказаних недоліків, вони легші від кислотних, проте їх е.р.с. менша (1,3 В), а к.к.д. не перевищує 60%.

## 5.6 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 5.6.1 Запитання і задачі

1. Чи зміниться струм в електричному полі, якщо один гальванічний елемент замінити іншим того ж типу, але з більшим розміром пластин?
2. Чи можна обмежитися однією посудиною для виготовлення батареї паралельно сполучених гальванічних елементів?
3. Лужні акумулятори легші від кислотних, не бояться короткого замикання. Проте перевагу (при використанні в автомобілях) віддають кислотним, бо лужні акумулятори мають великий внутрішній опір (є й інші вади). Який негативний вплив цього фактору?
4. Перед зарядкою акумулятора помітили, що рівень електроліту нижчий від нормального. Що потрібно зробити — додати електроліту чи долити дистильованої води?
5. Добре відомо, що не можна торкатися неізольованих електричних дротів голими руками. Чому?
6. При нікелюванні анодом є нікелева пластинка. Чи буде відкладатися нікель із розчину нікелевого купоросу ( $\text{NiSO}_4$ ), якщо анод замінити іншим металом?
7. Для того, щоб визначити, чи існує між електродами гальванічного елемента напруга, два провідники від гальванічного елемента опускають в стакан води з крану. Що має спостерігатися?
8. Чи впливає із законів Фарадея, що для виділення однакових мас потрібно затратити однакову кількість енергії струму?
9. У двох електролітичних ваннах, з'єднаних послідовно, знаходиться розчин мідного купоросу  $\text{CuSO}_4$  і розчин хлористої міді  $\text{CuCl}$ . Чи однакова кількість міді виділиться в обох ваннах?



10. Виразити заряд іона  $z$ -валентної речовини через число Фарадея.
11. Дві електролітичні ванни з розчином сульфату міді ( $\text{CuSO}_4$ ) і нітрату срібла ( $\text{AgNO}_3$ ) з'єднані послідовно. У якій ванні виділиться більше металу й у скільки разів.
12. В умові попередньої задачі знайти зв'язок між кількістю атомів срібла і міді, які виділяються.
13. Дві електролітичні ванни з розчинами мідного купоросу ( $\text{CuSO}_4$ ) і цинкового купоросу ( $\text{ZnSO}_4$ ) з'єднані послідовно. Скільки виділиться цинку за той час, протягом якого виділиться мідь з масою  $m_1$ ?
14. Через розчин мідного купоросу пропускають струм, що змінюється за законом  $I = (10 - 0,01t)$  А. Скільки міді виділиться на катоді через 10 хв після того, як струм почав змінюватися?

### 5.6.2 Відповіді

1. Е.р.с. елемента при цьому не зміниться, але зміниться опір кола, тому струм у колі збільшиться.
2. Так. Така батарея відповідає одному гальванічному елементу, площа електродів якого дорівнює сумі площ електродів складових елементів.
3. При ввімкненні стартера споживається великий струм (сотні ампер), тому при великому внутрішньому опорі була б велика втрата напруги всередині генератора струму.
4. Якщо електроліт вилився, то його потрібно додати, якщо він випарувався, то достатньо додати дистильованої води.
5. Волога на руках завжди містить розчини різних солей і є електролітом. Вона і створює контакт між дротом та шкірою.
6. Буде. Використання нікелю потрібно для того, щоб не зменшувати концентрацію нікелю у розчині.
7. Якщо між провідниками є постійна напруга, то у воді (де є завжди солі) почнеться електроліз, і на кінцях провідників, опущених у воду, будуть виділятися бульбашки кисню і водню.
8. Ні. Маса виділеної речовини залежать тільки від величини заряду, а величина енергії, крім цього, і від різниці потенціалів.
9. У мідному купоросі мідь двовалентна ( $\text{Cu}^{2+}$ ), а у хлористій міді — одновалентна. За законом Фарадея маса, що виділилася, обернено пропор-

ційна до валентності  $z$ :  $m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} q$ . Отже, із розчину хлористої міді виділиться вдвічі більше міді, ніж із мідного купоросу.

10. Для одновалентної речовини заряд іона чисельно дорівнює заряду електрона  $e = \frac{F}{N_A}$ , для  $z$ -валентної речовини заряд іона  $q = \frac{zF}{N_A}$ .

11. Запишемо об'єднані закони електролізу для срібла (індекс  $c$ ) і для міді (індекс  $m$ ):

$$m_c = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_c}{z_c} q, \quad m_m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_m}{z_m} q$$

(оскільки через обидві ванни пройшов один і той самий заряд  $q$ ). Звідси

$$\frac{m_c}{m_m} = \frac{z_m}{z_c} \cdot \frac{M_c}{M_m} = \frac{2 \cdot 107,86}{1 \cdot 63,55} \approx 3,4.$$

12. Заряди, що пройшли через розчин срібла і міді, однакові, тому

$$q = eN_c, \quad q = 2eN_m,$$

(срібло одновалентне, а мідь — двовалентна). Звідси  $N_c = 2N_m$ .

13. Електролітичні ванни з'єднані послідовно, тому через них пройдуть однакові струми, а, отже, і заряди. Із об'єданого закону електролізу маємо:

$$m_1 = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_1}{z_1} q, \quad m_2 = \frac{1}{F} \cdot \frac{M_2}{z_2} q$$

(індекси 1 і 2 відносяться відповідно до міді і цинку). Звідси

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow m_2 = \frac{M_2 z_1}{M_1 z_2} \cdot m_1 = \frac{65,38 \cdot 2 \cdot m_1}{63,55 \cdot 2} \approx 1,03 m_1.$$

14. За першим законом Фарадея  $m = kq$ .

$I = \frac{dq}{dt}$ , тому заряд, що пройшов через електроліт за час  $\tau = 10 \text{ хв} = 600 \text{ с}$ ,

$$q = \int_0^{\tau} (10 - 0,01t) dt = \left( 10\tau - 0,01 \frac{\tau^2}{2} \right) \text{ Кл} = 4200 \text{ Кл}.$$

Отже,

$$m = 0,329 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{Кл}} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \text{ Кл} \approx 1,4 \text{ г}.$$

## РОЗДІЛ 6 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ У ГАЗАХ

*За українською міфологією блискавка — прояв волі Перуна — бога грому і блискавки, Володаря Неба — наймогутнішого із богів<sup>1)</sup>; більш прозаїчне пояснення природи блискавки у п. 6.4.3.*

*Гази за звичайних умов є ізоляторами. Вони складаються із електрично нейтральних атомів та молекул і не містять вільних електричних зарядів<sup>2)</sup>. Під дією зовнішніх впливів (ультрафіолетового, рентгенівського, радіоактивного випромінювань, нагрівання і т.і.) газ іонізується — з'являються носії електричного струму (електрони та іони). Іонізований газ є провідником електричного струму. Проходження електричного струму в газах називається газовим розрядом. Розрізняють несамотійні газові розряди і самотійні газові розряди.*

### 6.1 ІОНІЗАЦІЯ ГАЗУ. РЕКОМБІНАЦІЯ ІОНІВ

1. Іонізація газу — відокремлення (відрив) електронів від атомів або молекул, що приводить до утворення вільних електронів і додатних іонів у газі.

Атоми і молекули — енергетично стійкі системи заряджених частинок (електронів і атомних ядер). Щоб відокремити електрон від атома або молекули потрібно затратити енергію. Величина цієї енергії іонізації залежить від хімічної природи газу і енергетичного стану електрона в атомі (ті електрони, які знаходяться ближче до ядра атома, сильніше зв'язані з атомом, ніж електрони, більш віддалені від ядра атома). Найслабше зв'язані з ядром зовнішні

---

<sup>1)</sup> «Можливості» Перуна не можуть не вражати: блискавки «виробляють»  $\approx 6 \cdot 10^{19}$  Дж енергії за рік, що втричі більше світового виробництва електроенергії (див. задачу 6)

<sup>2)</sup> Дія космічного випромінювання, а також природна радіоактивність, зумовлюють дуже малу концентрацію електронів і додатних іонів; це є причиною незначної електропровідності газів за звичайних умов

(валентні) електрони, тому для відриву валентного електрона потрібно затратити енергію меншу, ніж для відриву інших (не валентних) електронів. Відрив одного електрона від атома (або молекули) приводить до утворення додатньо зарядженого іона. Для відділення другого електрона потрібно затратити енергію, значно більшу, ніж для відриву першого електрона від атома, третього — ще більшу; в цьому випадку утворюються іони із зарядами  $2e$ ,  $3e$  ( $e$  — величина заряду електрона). Мінімальне значення енергії, необхідне для відриву електрона від атома (молекули, іона), називається енергією іонізації  $E_i$ . Наведемо значення  $E_i$  для деяких атомів і молекул:  $H$  (13,5 eВ),  $H_2$  (15,8 eВ),  $O$  (13,6 eВ),  $O_2$  (12,1 eВ). Різниця потенціалів, яку повинен пройти електрон, щоб набути енергії, яка дорівнює  $E_i$ , називається *потенціалом іонізації або іонізаційним потенціалом* (атома, молекули, іона)  $\varphi_i$ ;

$$\varphi_i = \frac{E_i}{e} \quad (6.1)$$

( $e$  — величина заряду електрона). Відрив одного електрона від атома (молекули) характеризується першим потенціалом іонізації атома (молекули), відрив другого електрона — другим потенціалом іонізації атома або молекули (або першим потенціалом іонізації іона) і т.д.; другі потенціали іонізації значно більші від перших потенціалів іонізації. Формулу (6.1) подають і у вигляді  $A_i = e\varphi_i$ , де  $A_i$  — *робота іонізації*.

2. Іонізація газу зумовлюється різними зовнішніми впливами — ультрафіолетовим випромінюванням,  $X$ -променями, потоком швидких частинок (електронів, іонів, атомів), дією сильних електричних полів, нагріванням газу, радіоактивним випромінюванням.

Розглянемо коротко механізми іонізації, пов'язані із цими факторами.

1) *Іонізація випромінюванням (фотонна іонізація)*. Якщо атом поглинає фотон з енергією  $h\nu$  ( $h$  — стала Планка,  $\nu$  — частота електромагнітного випромінювання), то іонізація можлива за умови

$$h\nu \geq E_i,$$

або, оскільки  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  ( $c$  — швидкість світла,  $\lambda$  — довжина хвилі), фотонна іонізація (фотоіонізація) може бути викликана електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda$ , яка задовольняє умові

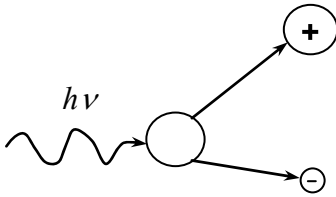


Рис. 6.1

- – зображення атома,
- ⊕ – зображення додатнього йона,
- ⊖ – зображення електрона,
- ↪ – зображення фотона

виникає внаслідок радіоактивності). Схематично процес фотоіонізації зображений на рис. 6.1.

2) *Іонізація потоком швидких частинок.* Цей вид іонізації зумовлений швидкими частинками (електронами, іонами, атомами) при їх зіткненні з нейтральними атомами або молекулами. Схематично ударна іонізація зображена на рис. 6.2.

Якщо енергії швидких частинок дуже великі, то можливе утворення не тільки одноступінчастих, але і багатоварядних іонів. При зіткненні швидких атомів та іонів з нейтральними атомами і молекулами може відбуватися й іонізація налітаючих частинок. Можливий і обернений процес: захоплення налітаючими частинками електронів від нейтральних атомів і молекул.

Щоб відбулася ударна іонізація кінетична енергія іонізуючої частинки повинна задовольняти умові

$$\frac{m_1 g^2}{2} \geq E_i \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right),$$

де  $E_i$  — енергія іонізації,  $m_1$  — маса іонізуючої частинки,  $m_2$  — маса атома, що іонізується (див. задачу №9).

$$\lambda \leq \frac{hc}{E_i}.$$

Для молекулярного водню ( $E_i = 15,8$  еВ), наприклад, іонізація може бути здійснена за умови, що

$$\lambda \leq \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{15,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ м}; \quad \lambda \leq 78 \cdot \text{нм}.$$

Отже, іонізація молекул водню може бути викликана лише ультрафіолетовим, X-випромінюванням або  $\gamma$ -випромінюванням (електромагнітне випромінювання, яке

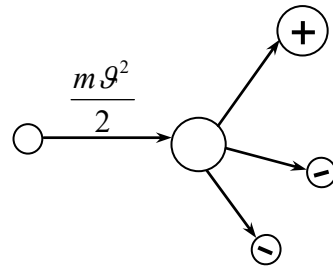


Рис. 6.2

3) *Ударна іонізація*. При достатньо сильному електричному полі в газі починаються процеси *самоіонізації*. Механізм самоіонізації полягає в тому, що під дією електричного поля електрони і іони набувають кінетичної енергії, яка достатня для іонізації нейтральних атомів і молекул газу. Утворені при зіткненнях нові електрони і іони також прискорюються електричним полем і далі іонізують нейтральні атоми і молекули. Цей тип іонізації, який зумовлений ударами електронів і іонів, розігнаних тим самим електричним полем, що викликає електричний струм через газ, називається ударною іонізацією.

4) *Іонізація нагріванням (термічна іонізація)*. При нагріванні газу збільшується середня кінетична енергія атомів і молекул. Якщо кінетична енергія при зіткненні більша від енергії іонізації, то можлива іонізація (за схемою, показаною на рис. 6.2). Із збільшенням температури зростає і ступінь іонізації газу (відношення числа іонізованих атомів або молекул до числа нейтральних частинок). Залежність ступеня іонізації  $\alpha$  від температури  $T$  і тиску  $p$  дається формулою

$$\alpha \sim \frac{T^{5/4}}{p} e^{-E_i/2kT},$$

( $k$  — стала Больцмана,  $E_i$  — енергія активації). При цьому приймається, що є три сорти частинок — нейтральні атоми або молекули, однократно заряджені іони і електрони.

Додамо до цього, що вільні електрони, які виникли внаслідок іонізації, можуть захоплюватися нейтральними атомами або молекулами, наслідком чого є утворення від'ємних заряджених іонів. При цьому може поглинатися або виділятися енергія.

3. Процесом, зворотнім до іонізації, є *рекомбінація іонів* — утворення нейтральних атомів і молекул за рахунок присєднання електронів до додатньо заряджених іонів. Цей процес йде одночасно із процесом іонізації. В результаті встановлюється рівноважний стан, який характеризується певною концентрацією іонів і електронів, величина якої залежить від потужності іонізатора; ця потужність визначається числом пар (іонів і електронів), створених іонізатором за 1 с в 1 см<sup>3</sup> газу. При звичайних температурах газ внаслідок рекомбінації швидко переходить в неіонізований стан після припинення дії

іонізатора. Із зростанням ступеня іонізації зростає також інтенсивність рекомбінації.

## 6.2 НЕСАМОСТІЙНИЙ ГАЗОВИЙ РОЗРЯД

Загальні закономірності газового розряду (проходження електричного струму в газах) зручно досліджувати за допомогою установки, схема якої наведена на рис. 6.3.

Тут проміжок між обкладками конденсатора (К і А) освітлюється ультрафіолетовим випромінюванням, сила струму в колі вимірюється за допомогою чутливого гальванометра  $mA$ , а напруга між електродами, яку можна змінювати за допомогою потенціометра  $\Pi$ , — вольтметром  $V$ .

Якщо підвищувати напругу  $U$  між обкладками конденсатора і вимірювати силу струму  $I$ , то отримується вольт-амперна характеристика газового розряду при дії постійного іонізатора (рис. 6.4). Оскільки напруженість електричного поля у проміжку між електродами  $E = \frac{U}{d}$  ( $d$  — віддаль між обкладками конденсатора, поле вважається однорідним), то рис. 6.4 відображає також залежність сили струму від напруженості електричного поля в міжелектродному проміжку.

Отримана залежність  $I(U)$  пояснюється наступним чином.

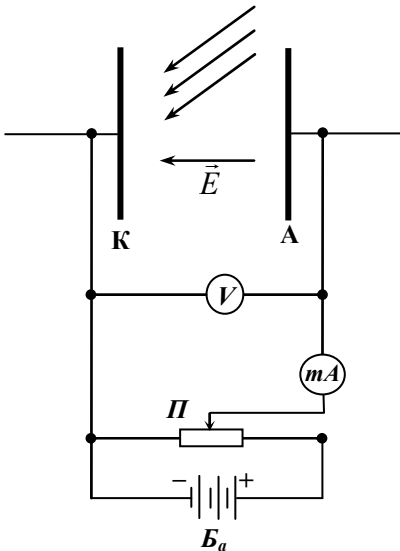


Рис. 6.3

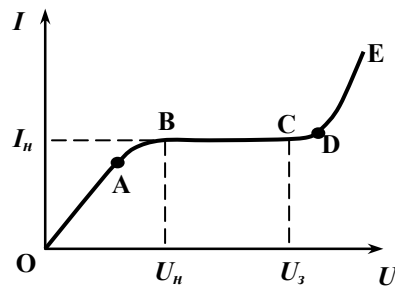


Рис. 6.4

Коли напруга  $U$  мала, носії струму (електрони й іони) під дією електричного поля рухаються повільно, більшість з них рекомбінуює, не дійшовши до обкладок; тут можна вважати, що кількість іонів в одиниці об'єму — величина стала (і визначається потужністю іонізатора). При невеликих напругах виконується закон Ома (ділянка OA на рис. 6.4); його можна записати у вигляді, аналогічному до випадку електролітів:

$$\vec{j} = en_0(u_+ + u_-)\vec{E}, \quad (6.2)$$

де  $j$  — густина струму,  $e$  — заряд електрона,  $n_0$  — кількість пар іонів в одиниці об'єму,  $u_+$  і  $u_-$  — рухливості позитивних і негативних іонів газу.

Із збільшенням напруги зростає швидкість руху носіїв струму під дією електричного поля, а ймовірність їх рекомбінації не зменшується. Внаслідок цього за одиницю часу все більша кількість електронів й іонів встигають потрапити на електроди (електрон і від'ємно заряджені іони на додатний, а додатньо заряджені іони на від'ємний). При цьому іони розряджаються на електродах і перетворюються в нейтральні молекули або атоми, з яких вони утворилися, а електрони поглинаються додатним електродом. При збільшенні напруги концентрація іонів зменшується, і тому лінійна залежність сили струму від напруги порушується (ділянка AB).

Якщо напруга на обкладках буде неперервно зростати, то, починаючи з певної напруги ( $U_n$  на рис. 6.4), рекомбінація повністю припиниться і сила струму досягне максимального значення  $I_n$  (ділянка BC). Це означає, що всі електрони та іони, створені іонізатором, досягають електродів. Максимальна сила струму  $I_n$  при даній інтенсивності іонізатора називається струмом насичення;

$$I_n = eN_0,$$

де  $e$  — заряд електрона, а  $N_0$  — кількість пар одновалентних іонів, які утворюються під дією іонізатора за 1 с. Струм насичення, як видно, можна розглядати як міру іонізуючої дії іонізатора. Якщо вимкнути іонізатор (для будь-якого значення  $U$  на ділянці OC), то припиниться і газовий розряд. Розряд, який існує лише під дією зовнішнього іонізатора, називається *несамостійним* газовим розрядом.



### 6.3 САМОСТІЙНИЙ ГАЗОВИЙ РОЗРЯД

При досягненні певної напруги  $U_3$  (рис. 6.4) сила струму різко зростає із збільшенням напруги (ділянка CD). Якщо тепер забрати зовнішній іонізатор, то розряд не зникає.

Газовий розряд, який не зникає після припинення дії зовнішнього іонізатора, називається *самостійним газовим розрядом*. Напруга  $U_3$ , при якій виникає самостійний газовий розряд, називається *напругою запалювання газового розряду або напругою пробою*. Перехід від несамостійного розряду до самостійного розряду називається електричним пробоем газу.

Для існування самостійного розряду необхідно, щоб під час газового розряду утворювалися вільні електричні заряди; зростання струму на ділянці CD і DE (рис. 6.4) зумовлене саме появою нових (в додаток до створюваних зовнішнім іонізатором) носіїв струму. Основним джерелом їх виникнення є ударна іонізація; розігнані досить сильним електричним полем (велика напруга  $U$ ) електрони іонізують атоми і молекули газу.

Внаслідок іонізації атома чи молекули виникає додатний іон і ще один електрон. Прискорюючись електричним полем, обидва електрони набувають на довжині вільного пробігу енергію, необхідну для іонізації наступних двох атомів. При цьому виникають ще два електрони. Після третьої іонізації число електронів, здатних іонізувати, зростає до восьми (і т.д.). Виникає «лавина» електронів, які рухаються до анода, і «лавина» додатних іонів, що рухаються до катода.

Утворення електронних та іонних лавин є необхідною, але не достатньою умовою існування самостійного розряду. Необхідне (при відключенні зовнішнього іонізатора) ще неперервне «відтворення» електронів у проміжку між катодом і анодом (замість тих електронів, які пішли на анод). Ці «вторинні» електрони з'являються при бомбардуванні поверхні катода додатними іонами; це — явище вторинної електронної емісії. Два фактори — утворення електронних й іонних лавин та вторинна електронна емісія — і забезпечують «самостійність» газового розряду.

Звернемо увагу на наступну обставину, важливу для практики. Напруженість електричного поля між катодом і анодом, яка викликає іонізацію

ударом, обернено пропорційна середній довжині вільного пробігу електрона, а вона, в свою чергу, обернено пропорційна до тиску газу.

Чим менший тиск газу, тим при меншій напруженості електричного поля виникає ударна іонізація (тим менша і величина напруги запалювання  $U_3$ ). Напруженість електричного поля, при якій виникає пробій у сухому повітрі при нормальних умовах,

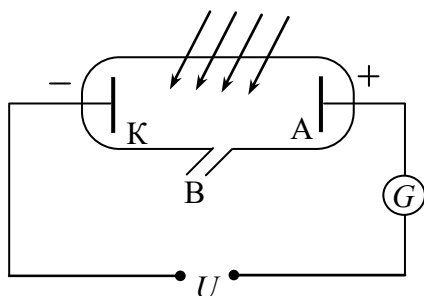


Рис. 6.5

**B** – вивід із розрядної трубки, через який можна відкачувати газ (а при потребі подавати у трубку той або інший газ)

трубку).

складає  $\approx 3 \cdot 10^8$  В/м. Тому перехід від несамостійного до самостійного розряду і самостійний розряд досліджують в газорозрядних трубках, в яких можна понижувати тиск; відповідна схема пристрою показана на рис. 6.5 (модифікація схеми, наведеної на рис. 6.3 — замість конденсатора маємо газорозрядну

## 6.4 ВИДИ САМОСТІЙНИХ РОЗРЯДІВ

**1. Коронний розряд. 2. Іскровий розряд (іскра). 3. Блискавка. 4. Дуговий розряд. 5. Тліючий розряд.**

Розрізняють наступні типи самостійного розряду: коронний, китчастий, іскровий, дуговий і тліючий. В залежності від прикладеної напруги, тиску газу, конфігурації електродів реалізується певний вид розряду.

### 6.4.1 Коронний розряд

Якщо при атмосферному тиску створити різко неоднорідне електричне поле, наприклад, за допомогою електродів, один з яких загострений, а другий плоский, то напруженість електричного поля буде більша біля загостреного електрода (електрода з поверхнею більшої кривизни). Коли напруженість поля біля загострення досягає порядку 30 кВ/см спостерігається неповний пробій газу: поблизу загострення виникає свічення, яке нагадує в деяких ви-

падає корону (звідси назва розряду — *коронний*). Електрод, біля якого виникає корона, називається коронуючим. Корonoю можуть бути оточені і обидва електроди.

Значну неоднорідність електричного поля можна отримати і за допомогою двох електродів з різко відмінними площами поверхонь. Таке поле реалізується, наприклад, між тонкою дротиною всередині металічного циліндра, радіус якого значно більший від діаметра дротини (рис. 6.6). Силкові лінії електричного поля найгустіші біля дротини, тут і найбільше значення електричного поля. Коли воно досягає пробійного значення, між дротом і циліндром виникає розряд (в колі з'являється струм, який фіксується міліамперметром). Навколо дротини з'являється свічення, яке має вигляд оболонки або корони (подібної до корони навколо Сонця) — рис. 6.7.

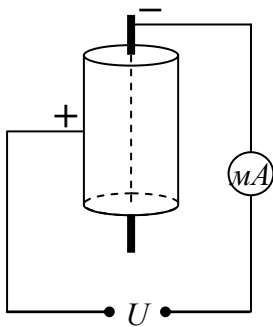


Рис. 6.6

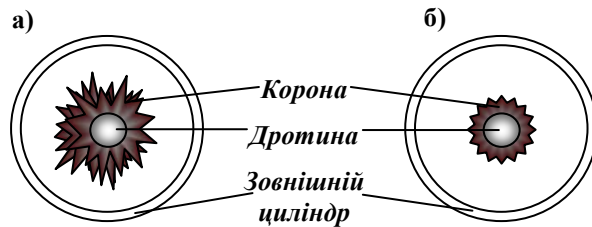


Рис. 6.7

додатня корона

Рис. 6.8

від'ємна корона

Відзначимо, що роль зовнішнього циліндра можуть відігравати і оточуючі дротину заземлені предмети.

У природних умовах коронний розряд може виникнути біля тонких дротів у лініях електропередач, біля вершин веж, дерев<sup>1)</sup> (під впливом атмосферної електрики).

Корона, що виникає біля катода, називається негативною, а та, що виникає біля анода, — позитивною. Якщо коронують обидва електроди, то коронний розряд називається двополярним.

Охарактеризуємо процеси, які відбуваються при коронному розряді.

<sup>1)</sup> Це так звані вогні святого Ельма

Іонізація молекул і їх збудження проходить не у всьому міжелектродному просторі, а лише всередині корони. Позитивні іони вибивають із катода електрони, які прискорюються електричним полем; утворюються електронні лавини, які поширюються у напрямку до анода. Молекули іонізуються і збуджуються; виникає свічення, зумовлене переходом молекул в незбуджений стан. Електрони емітуються із катода і за рахунок фотоефекту. За межами корони електричне поле недостатнє для надання електронам енергії, необхідної для іонізації і збудження молекул. Електрони дрейфують під дією поля у напрямку до анода. Частина з них захоплюється молекулами і до анода рухаються як електрони, так і від'ємнозаряджені іони. Струм поза короною зумовлений цими від'ємнозарядженими частинками. У цій області — розряд несамостійний.

Якщо корона позитивна, то електронні лавини, які зароджуються біля зовнішньої границі корони і спрямовані до анода, виникають за рахунок фотоіонізації (зумовленої свіченням корони). Носії струму поза короною — позитивні іони, які дрейфують під дією поля до катода.

Товщина коронуючого шару зростає зі збільшенням напруги.

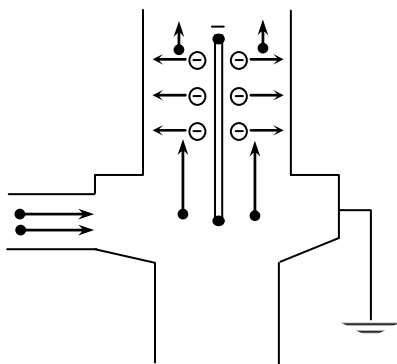


Рис. 6.9

Коронний розряд знаходить застосування в пристроях для очищення промислових газів від твердих і рідких домішок — електрофільтрах. Принцип дії електрофільтра ілюструє схема, наведена на рис. 6.9. Газ, який очищується, рухається в трубі знизу догори. По осі циліндра розміщено від'ємний коронуючий електрод (тонку дротину). Газ в трубі є сильно іонізований, тому частина від'ємно заряджених іонів осідає на частинках до-

мішок. Заряджені частинки рухаються під дією електричного поля до зовнішнього циліндра, де нейтралізуються й осідають. Періодичними ударами по трубі осадок відділяється й осідає в спеціальний збірник. Подібні електрофільтри використовуються не тільки для очищення диму, вони використовуються при виробництві сірчаної кислоти, в цехах виробництва кольорових металів. За їх допомогою отримують значну кількість цінних матеріалів.

### 6.4.2 Іскровий розряд (іскра)

Зростання напруги між електродами зумовлює утворення більш потужних електронних лавин в області корони, і при певній напрузі з'являється пучок іскр (китиця), які виходять із корони, з'являються світні гілочки. Коронний розряд переходить в *китчастий*. Зі зростанням напруги гілки китчастого розряду стають все довшими і, накінець, перекидаються від одного електрода до іншого — відбувається пробій всього проміжку між електродами. Виникає іскровий розряд (іскра).

Іскровий розряд може виникнути і без попереднього формування коронного розряду. Якщо взяти два плоских електрода із заокругленими кінцями або дві кулі достатніх розмірів (в цьому випадку електричне поле між електродами не буде надто неоднорідне) і поступово збільшувати напругу, то при деякій напрузі (яка відповідає пробивній напруженості електричного поля в газі) виникає електрична іскра. Іскра являє собою пучок яскравих із розгалуженнями від тонкого каналу смужок. Вони швидко пронизують розрядний простір, гаснуть, потім виникають знову.

Відразу після пробою розрядного проміжку напруга на ньому (різниця потенціалів між електродами) падає протягом дуже короткого часу (як наслідок виникнення провідності). Це призводить до призупинення (згасання) розряду. Якщо після згасання напруга знову зростає до величини напруги пробою, то іскровий розряд повторюється, тобто іскровий розряд має переривчастий характер. У природних умовах іскровий розряд спостерігається у вигляді блискавок. З невеликими іскровими розрядами ми маємо справу у випадку несправного електроз'єднання, при випадковому наближенні двох провідників, що йдуть від акумулятора і т.і.

Механізм іскрового розряду пояснюється стримерною теорією. *Стримери* — це вузькі канали іонізованого газу, які виникають у газі під дією сильного електричного поля при тисках, близьких до атмосферного; стримери утворюються безпосередньо перед електричним пробоем. Стримери виникають як внаслідок утворення електронних лавин через ударну іонізацію, так і внаслідок фотоіонізації. Після виникнення стримери видовжуються з великою швидкістю, яка значно перевищує швидкість руху заряджених частинок між електродами, і з'єднують електрода світними провідними каналами з розгалуженнями. Сила струму різко зростає, кожен із каналів швидко розши-

рюється. Унаслідок цього на границях каналу стрибком збільшується тиск і виникає ударна хвиля; вона породжує звук, який сприймається як «тріск» іскри (грім у випадку блискавки), Газ у іскровому проміжку нагрівається до дуже високих температур ( $\approx 10^4$  К).

Іскровий розряд знаходить різноманітне застосування у техніці. З його допомогою здійснюється запалення газової суміші у двигунах внутрішнього згорання, використовують у іскрових розрядниках (для запобігання перевантаження електричних ліній передач, наприклад, телефонних ліній). Іскровий розряд може зумовити руйнування анода; це явище використовується в електроіскровому способі точної обробки металу (різання, свердління).

### 6.4.3 Блискавка

Блискавка являє собою гігантський електричний розряд. Довжина каналу іскри у блискавці може сягати 10 км, діаметр каналу — до 40 см, сила струму коливається від десятків тисяч ампер до сотень тисяч ампер, напруга між хмарою і землею перед виникненням блискавки складає  $10^8$ - $10^9$  В. Тривалість окремого розряду (імпульсу) дуже мала (біля  $10^{-4}$  с). Заряд, що переноситься окремим імпульсом, складає  $1 \div 200$  Кл. Кожна блискавка складається із послідовності розрядів, які йдуть один за одним по одному і тому самому каналі; число таких розрядів може сягати декількох десятків. Тривалість блискавки (разом із проміжками між імпульсами) може досягати декількох секунд.

Основні процеси в блискавці подібні до тих, що відбуваються в коротких лабораторних іскрах, проте тут є певні особливості. Зупинимось на них.

Встановлено, що у хмарі є додатні і від'ємні заряди, які розміщені у різних частинах хмари. Найчастіше заряди розподілені так: у нижній частині (основі) знаходиться деяка частина додатних зарядів, середина містить значний від'ємний заряд, а вершина — значний додатний заряд (рис. 6.10, а). Спостерігається і більш складний розподіл зарядів. Заряди, що знаходяться у хмарі, викликають появу індукованих зарядів на землі (рис. 6.10, а).

Електричні заряди у хмарах і створюють електричні поля в атмосфері. Коли електричне поле стає достатньо великим, виникає іскровий розряд — блискавка.

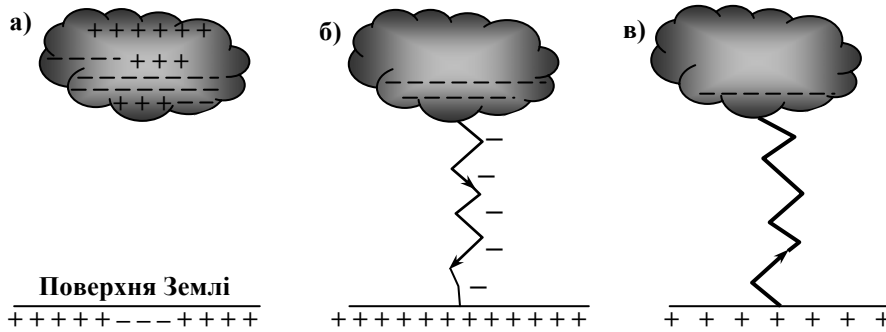


Рис. 6.10

а) розподіл заряду в хмарі перед виникненням блискавки; б) поширення лідера до землі; в) поширення основного розряду

Спочатку виникає розряд між додатньо зарядженою основою хмари і її від'ємно зарядженою серединою; внаслідок цього електрони переходять до основи хмари. Далі із хмари з'являється слабо світний клубочок — скупчення іонізованого газу (стрімер), і починає формуватися світний канал — *лідер*, який поширюється у напрямку до Землі. Лідер поширюється стрибкоподібно зі швидкістю порядку десятків тисяч кілометрів за секунду, зупиняючись після кожного «стрибка» (довжиною до 50 м) на декілька десятків мілісекунд; такий лідер відрізняється від «стрілчатого», який поширюється без зупинки. При цьому іонізаційні процеси в лідері сильно активізуються (виникають потужні електронні лавини), електропровідність каналу зростає, канал розширюється. Кожен раз електрони переміщуються в нижню частину створеного лідером каналу. Виникає досить яскраве свічення. Світиться лише нижня частина лідера, проте розряд відбувається настільки швидко, що світним здається весь канал. Рух лідера по ламаній лінії зумовлюють місцеві скупчення додатніх зарядів у повітрі. Наближення лідера до земної поверхні супроводжується зростанням величини індукованого додатнього заряду. Час поширення лідера вниз  $\approx 20$  мс.

У момент, коли лідер досягає землі, виникає яскравий спалах. Далі ця область яскравого свічення рухається від землі до хмари по каналу, створеному лідером з величезною швидкістю ( $10^7$ - $10^8$  м/с); при такій великій швидкості руху світної області світним здається весь канал. Це — основна, найяскравіша частина розряду; вона називається *зворотним спалахом*. Поширення

зворотного спалаху від землі до хмари супроводжується сильним розігріванням повітря в каналі, яке призводить до збільшення тиску. Виникає ударна хвиля — грім. Гуркіт грому пояснюються багатократними відбиттями від хмар і інших тіл.

Упродовж поширення зворотного спалаху ( $\approx 100$  мкс) електрони, що знаходяться у провідному каналі між хмарою і землею, переходять у землю (лідер нейтралізується). Насамперед переходять електрони, що знаходяться внизу лідера. В цій області, залишеній електронами, виникає додатний заряд і сюди переміщуються електрони з вищих ділянок каналу; вони, як і попередні електрони, переходять у землю. Перехід електронів у землю буде тривати доти, доки від'ємний заряд певної ділянки хмари повністю не перейде у землю.

Якщо канал мав розгалуження (як звичайно і є), то головний розряд поширюється по всіх розгалуженнях.

Розряд блискавки звичайно призводить до спустошення електронами лише певної області хмари, і сюди переміщуються електрони з інших частин хмари. Тому, найчастіше, за першим ударом блискавки через невеликий проміжок часу (декілька сотих секунди), коли попередній головний розряд блискавки зник, по тому ж (іноді дещо деформованому) каналі проходять повторні удари блискавки (за механізмом описаним вище).

В атмосфері Землі щосекундно відбувається  $\approx 100$  розрядів блискавок. Негативні наслідки цього — порушення ліній зв'язку і електропередач, пожежі, ураження людей<sup>1)</sup>. З метою захисту споруд використовують *блискавковідводи (грозовідводи)*. Блискавковідводи — це загострені металічні стержні, добре з'єднані із землею і укріплені вище, ніж найвища точка споруди.

Ефективність дії блискавковідводу, особливо у випадках, коли блискавковідвід знаходиться на помітній висоті над поверхнею землі (телебашти, дуже високі будинки), зумовлена наступним. Коли лідер блискавки наближається до землі, то індуковані заряди створюють дуже велике електричне поле біля загостреного кінця блискавковідводу. Це поле може набути такої величини, що може відбутися електричний пробій. У цьому випадку назустріч

---

<sup>1)</sup> Див. у цьому зв'язку задачу № 5 у п.6.6 (в якій розглянуто питання захисту людини під час грози)



лідеру спрямовуються додатні заряди (зустрічний лідер). В області злиття обох лідерів виникає яскравий спалах, проміжок між хмарою і землею (прокладений лідерами) стає електропровідним каналом, по якому і відводяться в землю електрони, що знаходяться у цьому каналі.

У випадку невисоких блискавковідводів спрацьовує, мабуть, інший механізм. Коли напруженість електричного поля в атмосфері дуже велика, то внаслідок запалювання коронного розряду повітря навколо блискавковідводу сильно іонізується. Утворюється своєрідне провідне середовище, напруженість поля всередині якого стає меншою (як в провіднику!); це і зменшує імовірність виникнення блискавки. Сильну іонізацію повітря навколо загостреного кінця блискавковідводу може спричинити і ефект стікання заряду із загострення.

Існує статистика: захисна дія блискавковідводів поширюється в околі віддалі, яка приблизно дорівнює подвоєній його висоті.

#### 6.4.4 Дуговий розряд

Якщо після виникнення іскрового розряду поступово зменшувати віддалі між електродами (напруженість електричного поля між ними зростатиме), то розряд стає неперервним — виникає *дуговий розряд* (електрична дуга). Сила струму при цьому різко зростає (до сотень ампер), а напруга падає до декількох десятків вольт.

Дуговий розряд можна отримати і від джерела низької напруги (десятки вольт). Для цього електроди (із спресованого графітного порошку або просто вугільні) наближують до дотику. В утвореному електричному полі опір на ділянці стикування дуже високий і тут виділяється велика кількість теплоти ( $Q = I^2 R t$ !). Кінці електродів сильно нагріваються. Якщо тепер електроди розвести на невелику віддалі, то струм продовжуватиме йти між кінцями електродів через проміжок іонізованого повітря у вигляді яскравої дуги — виникає дуговий розряд. Свічення має форму дуги, бо нагріте повітря піднімається догори і змушує вигинатися світний шар повітря і розжарених частинок, що відокремилися від електродів.

Під час горіння дуги катод загострюється, а на аноді утворюється заглиблення — кратер (рис. 6.11). Температура катода досягає 3000 К (при атмосферному тиску), температура кратера — біля 4000 К. При тиску  $2 \cdot 10^6$  Па

температуру кратера можна довести до 7000 К (температура поверхні Сонця  $\approx 6000$  К). Температура газу між електродами становить 5000-7000 К.

Сила струму в дузі може досягати значень порядку  $10^3 \div 10^4$  А при напрузі у декілька десятків вольт.

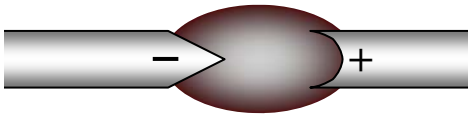


Рис. 6.11

Механізм виникнення дугового розряду є суттєво іншим, ніж механізм іскрового розряду. Основною причиною дугового розряду, його високої електропровідності, є інтенсивна термоелектронна емісія електронів з розжареного катода, а

також термічна іонізація молекул, зумовлена високою температурою газу в електронній дузі. Ударна іонізація не відіграє тут помітної ролі, оскільки електрони набувають порівняно невеликих швидкостей (мала різниця потенціалів між електродами). Розжарення катода до температури, при якій починається інтенсивна термоелектронна емісія, зумовлюється достатньою потужністю джерела струму.

Поряд із високотемпературними електричними дугами існують і дуги з холодними електродами. У них інтенсивну електронну емісію спричиняє не висока температура катода, а накопичення додатних іонів біля катода; створене ними електричне поле і викликає емісію електронів з катода.

Дуговий розряд використовують для зварювання і різання металів, освітлення (прожектори, проєкційна апаратура), в дугових печах для отримання високоякісних сталей, знаходять застосування в медицині (кварцові лампи — потужні джерела ультрафіолетового випромінювання).

#### 6.4.5 Гліючий розряд

Перейдемо тепер до розгляду електричного розряду в газі при пониженому (в порівнянні з атмосферним) тиску.

1. Якщо до електродів, впаяних у скляну трубку довжиною  $\approx 0,5$  м, прикласти напругу біля 1 кВ і відкачувати повітря, то спостерігатиметься наступне.

При атмосферному тиску прикладена напруга недостатня для виникнення розряду і трубка буде темною. При зменшенні тиску в деякій момент

(коли тиск  $p \approx 50$  мм рт.ст.) виникає розряд у вигляді тонкого звивистого шнура червонуватого кольору, який з'єднує катод і анод. Подальше пониження тиску призводить до поширення шнура, і при тиску  $p \approx 5$  мм рт.ст. червонувато-рожеве свічення заповнює всю трубку (можна підібрати таку суміш газів, яка випромінює світло, близьке за своїм спектральним складом до денного світла); виникає *тліючий розряд*. Для кожного тиску тліючий розряд має свій характерний вигляд. При тиску близько 0,1 мм рт.ст. він досягає свого повного розвитку і має вигляд, показаний на рис. 6.12. Основні ділянки розряду тут такі:

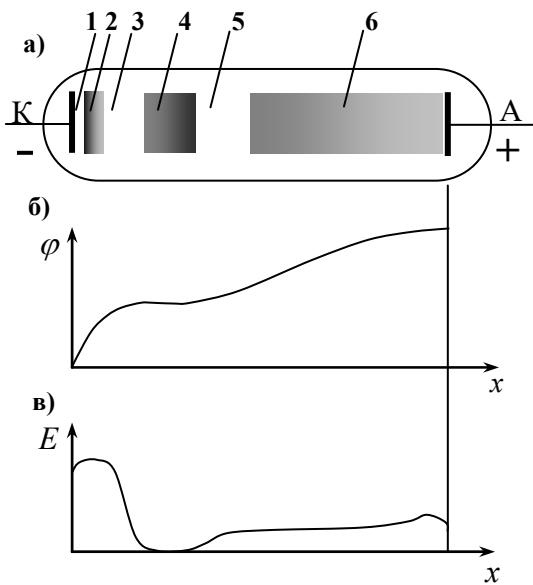


Рис. 6.12

1 — астонів<sup>1)</sup> темний простір,  
 2 — катодна плівка (тонкий світлий шар яскраво рожевого кольору),  
 3 — катодний темний простір,  
 4 — катодне (тліюче) свічення блідо-фіолетового кольору; шар має різку границю з боку катода і поступово щезає з боку анода,  
 5 — фарадеїв<sup>2)</sup> темний простір,  
 6 — позитивний стовп (область блідо-рожевого свічення).

В інших газах (а не в повітрі) характер розряду той самий, проте кольори інші. Неонові газорозрядні трубки дають червоне

свічення, аргонів — синювато-фіолетове і т.і. Зі збільшенням розрідження кольори бліднуть, область катодного свічення збільшується, а анодний стовп вкорочується. При тиску близько 0,01 мм рт.ст. окремі частини тліючого розряду вже не розрізняються, трубка випромінює ледь помітне голубувате світло, проте яскраво світяться (зеленим світлом) стінки трубки, які знаходяться проти катода. Потік електронів, які викликають це свічення, отримав назву

<sup>1)</sup> На честь Ф.Астона

<sup>2)</sup> На честь М.Фарадея

*катодні промені*<sup>1)</sup> (назва зумовлена суто історичними причинами). При подальшому розрідженні свічення, викликане зіткненням електронів із стінкою трубки, спочатку підсилюється, потім слабшає, а при тиску  $p \approx 0,001$  мм рт.ст. розряд в трубці зникає. Зникнення розряду пояснюється дуже малою концентрацією носіїв струму.

Особливе значення в тліючому розряді мають дві його складові — катодний темний простір і тліюче свічення. Інші ділянки розряду можуть бути і відсутні. Так, якщо в газорозрядній трубці зменшувати відстань від анода до катода (рухливий анод), то катодні ділянки спектру (1-4) залишаються незмінними, а скорочується позитивний стовп. Подальше наближення анода до катода призводить і до скорочення фарадеевого темного простору. Коли ж анод буде в області тліючого свічення, то і воно зникає. Проте розряд при цьому буде тривати. Розряд зникне, якщо електрод підійде до межі між темним катодним простором і тліючим свіченням. Подібне спостерігається і при зменшенні тиску в трубці.

Існування характерних областей тліючого розряду зумовлене розподілом потенціалу вздовж трубки (6.12, б). Видно, що спадання потенціалу майже повністю припадає на область катодного темного простору; різниця потенціалів  $U_k$  між катодом і межею тліючого свічення називається катодним спадом потенціалу. Розподіл потенціалу вздовж трубки визначають за допомогою додаткових електродів (зондів), впаяних у різних місцях трубки. Приєднуючи вольтметр з великим опором між катодом і зондом, знаходять зміну потенціалу вздовж трубки. За формулою

$$E = - \frac{d\varphi}{dl}$$

можна знайти і напруженість електричного поля на різних ділянках трубки. Найсильніше електричне поле в області перших двох ділянок, в області тліючого свічення воно відсутнє (на цій ділянці потенціал не змінюється), а далі повільно зростає (в напрямку до анода). Розподіл напруженості електричного поля по довжині показаний на рис. 6.12, в.

---

<sup>1)</sup> У другій половині XIX століття дослідження катодних променів були на передньому краї фізичної науки. Вагомий внесок в ці дослідження вніс Іван Пулюй, роботи якого і у цій галузі знайшли широке світове визнання

Охарактеризуємо процеси, які відбуваються при тліючому розряді.

Електрони, які вилітають з катода (під дією бомбардування його додатними іонами і внаслідок фотоефекту), прискорюються електричним полем у проміжку між катодом і катодною плівкою в області астонового простору. При зіткненні цих електронів з молекулами газу останні переходять у збуджені стани. Збуджений стан молекули нестійкий; повертаючись до початкового (незбудженого) стану молекула випромінює фотон. Наслідком цього є свічення катодної плівки. Ті електрони, які без зіткнень досягли області темного катодного простору, мають достатню енергію для ударної іонізації молекул. Утворюються позитивні іони й електрони. Оскільки енергія електронів витрачається на іонізацію молекул, а не на їх збудження, то інтенсивність свічення зменшується. Іони, що рухаються до катода, мають спочатку дуже малу швидкість, тому в темному катодному просторі виникає значний просторовий позитивний заряд. Це і зумовлює появу катодного спаду потенціалу.

В області тліючого свічення просторовий заряд відсутній, напруженість електричного поля практично дорівнює нулю. Тут висока концентрація електронів і іонів, тому поряд із іонізацією йде процес рекомбінації; наслідком цього і є тліюче свічення.

Між областями тліючого свічення і темного фарадеевого простору електричне поле дуже слабе, але є великий перепад концентрацій електронів і іонів. Відбувається дифузія електронів і іонів із області тліючого свічення у область темного фарадеевого простору. Оскільки концентрація заряджених частинок зменшується, то рекомбінаційні процеси сповільнюються; цим пояснюється існування другої темної ділянки у тліючому розряді.

У фарадеевому темному просторі вже є помітна зміна потенціалу. Знову електрони прискорюються і набувають енергії, необхідної для збудження й іонізації молекул на ділянці позитивного стовпа. В цій області концентрації електронів і іонів практично однакові; виникає стан газорозрядної плазми. Провідність на цій ділянці зумовлена як електронами, так і іонами. Свічення позитивного стовпа пояснюється наявністю збуджених молекул.

Важливим при цьому є наступне. Позитивні іони, що утворилися внаслідок іонізації електронними ударами (в області тліючого свічення і у позитивному стовпі) рухаються до катода. В області катодного спаду потенціалу вони набувають значної енергії. Зіткнення їх із катодом і приводить до появи

електронів (явище вторинної електронної емісії), які ініціюють далі іонізаційні процеси за схемою, описаною вище.

Підсумуємо. Тліючий розряд підтримується за рахунок двох основних процесів — ударної іонізації молекул газу швидкими електронами і вторинної електронної емісії електронів з катода під дією швидких іонів. Необхідною умовою набуття електронами та іонами необхідної енергії є існування катодного спаду потенціалу. Катодний спад потенціалу — найхарактерніша ознака тліючого розряду (яка відрізняє цей вид розряду від інших).

2. Тліючий розряд знаходить широке застосування. Наведемо приклади. Це, насамперед, лампи денного світла. Тут випромінювання газового середовища парів ртуті поглинається шаром спеціальних речовин, нанесених на поверхню трубки (*люмінофорів*), які під дією поглинутого випромінювання самі починають світитися. Підбираючи певні люмінофори, можна отримати газосвітні трубки, які випромінюють світло, близьке до денного. Такі трубки набагато економніші від звичайних ламп розжарювання.

Газосвітні трубки застосовують і для виготовлення світних надписів, реклам. Наповнюючи трубки різними газами можна отримати свічення різного забарвлення. Це — свічення позитивного стовпа тліючого розряду.

Катодне падіння потенціалу залежить від матеріалу катода. Користуючись цим, можна виготовити трубки (лампи) з дуже малою напругою запалювання (менше 100 В). Такі лампи працюють при ввімкненні у звичайну освітлювальну мережу.

При тліючому розряді відбувається розпилення матеріалу катода. В газорозрядних трубках — це шкідливе явище (з'являється металічне покриття на стінках трубки). Разом з тим воно знаходить і практичне застосування. Катодне розпилення використовують для нанесення дуже тонких покриттів на різні матеріали (метал, скло, тканину, папір), очищення поверхонь і т.д.

## 6.5 ПЛАЗМА

Плазма — сильно іонізований газ, у якому концентрації додатних і від'ємних зарядів практично однакові. Перехід газу у стан плазми відбувається за рахунок, насамперед, термічної іонізації, а також фотоіонізації і ударної іонізації.

Оскільки плазма квазінейтральна, то об'ємний заряд плазми дорівнює нулю; якщо в об'ємі, що займає плазма, виникають відхилення від квазінейтральності, то електричні поля, які при цьому виникають, відновлюють квазінейтральність.

Плазма характеризується ступенем іонізації  $\alpha$  — відношенням числа іонізованих атомів до їх повного числа в одиниці об'єму. Розрізняють слабо іонізовану плазму ( $\alpha$  — доли відсотка), помірно іонізовану ( $\alpha$  — декілька відсотків) і повністю іонізовану плазму, де  $\alpha \approx 1$ .

Середні кінетичні енергії частинок плазми (електронів, іонів, атомів) можуть відрізнитися між собою, тому плазму не можна охарактеризувати за допомогою одного певного значення температури. Це означає, що температура електронного газу  $T_e$  відрізняється від температури іонного газу  $T_i$ . Ще інша температура нейтральних атомів. Така плазма називається *неізотермічною*. Прикладом неізотермічної плазми є газорозрядна плазма, яка виникає при електричних розрядах в газах (дуговому, іскровому та тліючому розрядах), в процесах горіння. Хоча в неізотермічній плазмі і відбувається процес вирівнювання температур компонент плазми через обмін енергіями при зіткненнях, перепад температур між електронами й іонами весь час підтримується на певному рівні за рахунок ударної іонізації електронами, які прискорюються електричним полем.

Залежно від  $T_i$  розрізняють *високотемпературну плазму*, або *гарячу плазму* ( $T_i > 10^7$  К), і *низькотемпературну плазму*, або *холодну плазму*<sup>1)</sup> ( $T_i < 10^5$  К). Високотемпературна плазма, на відміну низькотемпературної плазми, є *ізотермічною*. Середні кінетичні енергії частинок в такій плазмі однакові. Рівноважний стан тут підтримується за рахунок термічної іонізації.

Кількісно перехід іонізованого газу у стан плазми оцінюється за допомогою величини, яка називається *дебаєвським радіусом екранування*  $D$ <sup>2)</sup>. Ця величина для випадку неізотермічної плазми з однозарядними іонами задається виразом

---

<sup>1)</sup> Цей умовний поділ (і термін «холодна плазма») пов'язаний із особливою важливістю температур  $T \approx 10^7 \div 10^8$  для здійснення керованого термоядерного синтезу

<sup>2)</sup> На честь П.Дебая

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_i}{n e^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)}},$$

де  $\varepsilon_0$  — електрична стала,  $k$  — стала Больцмана,  $n$  — концентрація електронів (дорівнює концентрації іонів),  $e$  — заряд електрона. Якщо лінійний розмір системи  $L$  (наприклад, радіус сферичної посудини) набагато більший від  $D$ , то система перебуватиме у плазмовому стані. Отже, щоб іонізований газ став плазмою, необхідно виконання умови  $L \gg D$ .

Фізичний зміст дебаєвського радіуса екранування можна зрозуміти із таких міркувань. Будь-який заряд плазми  $q$  (електрон, іон) оточений переважно частинками протилежного знаку. Це оточення екранує (зменшує) заряд  $q$ . Внаслідок цього потенціал заряду  $q$  на віддалі  $r$  від нього

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right)$$

на відміну від неекранованого потенціалу

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Екранований потенціал швидко зменшується із зростанням  $r$ . Можна вважати, що на віддалі порядку  $D$  від частинки електричне поле заряду  $q$  в плазмі повністю екранується, тобто практично зникає. Умова  $L \gg D$  і є умовою квазінейтральності плазми. Із цієї нерівності можна знайти мінімальну густину заряджених частинок, починаючи з якої можна говорити про плазму. Отже, плазму можна означити як квазінейтральну систему великого числа заряджених частинок, що займають область  $L \gg D$ .

Властивості плазми суттєво відрізняються від властивостей нейтрального газу; саме тому плазму розглядають як особливий, *четвертий, стан речовини*.

За характером електропровідності плазма близька до металів, причому електропровідність зумовлена, в основному, електронами (які набагато рухливіші від іонів). Проте, на відміну від металів, електропровідність плазми зростає зі збільшенням температури. Плазма має і високу теплопровідність. Наслідком цього є, зокрема, те, що плазма легко охолоджується (електрони й іони швидко віддають теплоту стінкам посудини). Забезпечення термоізоля-



ції плазми є важливою фізико-технічною задачею, пов'язаною, насамперед, із проблемою керованих термоядерних реакцій.

При вміщенні плазми в магнітне поле електрони та іони здійснюють рухи по певних траєкторіях. У цьому зв'язку постає задача створення таких полів, в яких електрони й іони плазми рухалися б по замкнених траєкторіях (і не виходили б за межі певного об'єму). Вирішення цієї задачі наблизило б розв'язання проблеми керованого термоядерного синтезу.

Особливості взаємодій між частинками в плазмі зумовлюють і впорядковані рухи (поряд з хаотичним тепловим рухом). В плазмі можуть поширюватися різноманітні коливання і хвилі (зокрема, звукові хвилі). Плазма — своєрідне пружне середовище.

Плазма — найбільш поширений у Всесвіті стан речовини. Зірки, в тому числі і Сонце — плазма. Земля оповита плазмовою оболонкою — іоносферою (наявність її, до речі, забезпечує можливість далекого радіозв'язку на Землі). Процесами у навколосезній плазмі зумовлені магнітні бурі, полярні сяйва, порушення радіозв'язку. В каналі блискавки — «низькотемпературна» плазма (температура  $\sim 10^4$  К).

Низькотемпературна плазма знаходить застосування в магнітогідродинамічних генераторах (п. 7.6.4 сьомого розділу), термоелектронних перетворювачах (термоелектронних генераторах) — пристроях, в яких відбувається пряме перетворення теплової енергії в електричну, зумовлене випромінюванням електронів нагрітими металами.

Плазма, в спеціальних газорозрядних пристроях, — плазмотронах, використовується для зварювання і різання металів, для отримання деяких хімічних сполук, які проблематично отримати іншими способами (наприклад, деяких сполук інертних газів) і т.д. Температура струменя «холодної» плазми із плазмотрона  $\sim 10^4$  К.

Дослідження в області гарячої плазми, основним об'єктом яких є високотемпературна плазма ( $\approx 10^8$  К), — один із центральних напрямків сучасної фізики, який відкриває принципову можливість здійснення керованого термоядерного синтезу. З реалізацією цього людство отримає практично необмежені джерела енергії.

## 6.6 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 6.6.1 Запитання і задачі

1. На відміну від дротів освітлювальної системи, дроти ліній високої напруги не покриті ізолюючою оболонкою. Чому?

2. Досвід показує, що зарядити тіло можна до певної межі: після того, як заряд на ньому досягне певної максимальної величини, що залежить від форми і розмірів тіла та стану повітря, яке оточує тіло, подальшого збільшення заряду добитися неможливо. Поясніть це.

3. Струм, породжений блискавкою, яка вдарила у дерево, може вразити людину, яка стояла під деревом (не торкаючись до нього). Дайте пояснення цьому.

4. До корпусу сільськогосподарських комбайнів прикріплюється масивний ланцюг, який волочиться по землі. Поясніть доцільність цього.

5. Як потрібно себе поводити від час грози?

6. Тривалість блискавки  $t \approx 0,001$  с, сила струму в ній  $I \approx 2 \cdot 10^4$  А, різниця потенціалів між її кінцями  $U \approx 10^9$  В. В атмосфері Землі відбувається, в середньому 100 блискавок за секунду. Оцініть «виробництво» енергії Перуном<sup>\*)</sup> за рік.

7. За яких умов громовідвід може бути небезпечним для будівлі?

8. Якщо балон неонові лампи потерти, то вона деякий час буде світитися. Як пояснити це?

9. Оцінити мінімальну кінетичну енергію, яку повинна мати частинка, щоб відбувалася ударна іонізація. Швидкість теплового руху атомів газу набагато менша від швидкості руху іонізуючої частинки (тобто можна вважати, що до зіткнення атом був нерухомий). Вказівка: скористатися законами збереження енергії та імпульсу; удар вважати непружним.

10. При якій найменшій швидкості іон кисню може спричинити іонізацію атома гелію? Потенціал іонізації гелію дорівнює 24,5 В. Вказівка: скористатися розв'язком попередньої задачі.

---

<sup>\*)</sup> У міфології східних слов'ян Перун — бог дощу, блискавки і грому

11. В  $1 \text{ см}^3$  повітря є в середньому 700 пар іонів. Рухливість додатних іонів  $u_+ = 1,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ , а від'ємних —  $u_- = 1,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . Визначити густину вертикального струму, зумовленого електричним полем Землі (напруженість поля Землі  $E=1,3 \text{ В/м}$ ). Вважати, що заряди всіх іонів однакові (дорівнюють по величині заряду електрона).

12. У газорозрядній трубці спостерігається тліючий розряд між плоскими електродами. Як буде мінятися картина розряду при зближенні електродів?

13. Чому для «запалювання» електричної дуги на її електроди подається висока напруга, а для підтримання струму в дузі достатньо меншої напруги?

14. Чому при контактному зварюванні виникають проблеми зі зварюванням мідних або срібних деталей?

15. Сукупність електронів і іонів у металі можна розглядати як низькотемпературну плазму. Чи є ця плазма ізотермічною?

16. Посудина з лінійними розмірами  $L=10 \text{ см}$  заповнена газом, в якому концентрації електронів і додатних іонів однакові ( $n=10^{14} \text{ м}^{-3}$ ) при температурі  $T=10^3 \text{ К}$ . Чи можна цей (ізотермічний) газ вважати плазмою?

### 6.6.2 Відповіді

1. У звичайних умовах повітря не є провідником струму.

2. При значній напруженості електричного поля ( $\sim 10^8 \text{ В/м}$ ) виникає розряд, повітря навколо тіла іонізується і втрачає свої діелектричні властивості, а тіло розряджається.

3. Електричний струм «обирає» ділянки з меншим опором. Тіло людини — провідник і струм може пройти крізь нього. Ураження людини може виникнути і під впливом електричних полів, які виникають в тілі людини при проходженні струму блискавки крізь мокре дерево.

4. У такий спосіб комбайн заземлюється. Цим можна запобігти небезпеці під час грози.

5. Надійним є перебування у добре заземленому приміщенні з металічним каркасом, в будівлях, які мають громовідводи. Якщо поблизу таких будівель немає, то менш небезпечно знаходитися в приміщеннях більших роз-

мірів; в них потрібно знаходитися якомога далі від провідників електрики. Якщо ж навколо відсутні будь-які приміщення, то потрібно уникати підвищених місць, копиць сіна, одиноких дерев, металічних споруд. Не можна працювати із застосуванням металічних інструментів.

6. Енергія, що виділяється при проходженні однієї блискавки

$$W_1 = UIt \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

За рік це складе енергію

$$W = W_1 \cdot 100 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \approx 6,3 \cdot 10^{19} \text{ Дж.}$$

Світове виробництво електроенергії приблизно втричі менше.

7. Якщо він погано заземлений.

8. Для свічення газу в неоновій лампі, потрібно створити в ній електричне поле. При терті виникають електричні заряди на склі лампи; вони і створюють електричне поле, достатнє для короткочасного свічення лампи.

9. За законом збереження імпульсу

$$m_1 \mathcal{G} = (m_1 + m_2) u,$$

де  $m_1$  — маса іонізуючої частинки,  $\mathcal{G}$  — її швидкість до зіткнення,  $m_2$  — маса атома,  $u$  — швидкість частинки і атома після удару. При цьому вважаємо, що швидкість електрона, вибитого з атома, також дорівнює  $u$ .

За законом збереження енергії

$$\frac{m_1 \mathcal{G}^2}{2} = E_i + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Після підстановки  $u$  із першої формули маємо шукану мінімальну кінетичну енергію, необхідну для здійснення ударної іонізації:

$$\frac{m_1 \mathcal{G}^2}{2} = E_i \frac{m_1 + m_2}{m_2} = E_i \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

10. Якщо нехтувати тепловим рухом атомів гелію, то мінімальна енергія, необхідна для іонізації атома гелію, визначається співвідношенням:

$$\frac{m_1 \mathcal{G}_{\min}^2}{2} = E_i \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right),$$

де  $E_i = e\varphi_i$  — робота іонізації,  $m_1$  — маса атома кисню,  $m_2$  — маса атома гелію.

$$m_1 = \frac{A_1}{N_A}, \quad m_2 = \frac{A_2}{N_A},$$

де  $N_A$  — число Авогадро,  $A_1$  і  $A_2$  — атомні маси атомів кисню і гелію;  $N_A=6 \cdot 10^{23}$  1/моль,  $A_1=16 \cdot 10^{-3}$  кг/моль,  $A_2=4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Отже,

$$g_{min} = \sqrt{\frac{2e\varphi_i N_A}{A_1} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)} \approx 3,8 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$$

11. Густина струму за законом Ома

$$j = \sigma E = qn_0(u_+ + u_-)E.$$

Підставимо сюди числові дані:  $q=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $n_0=7 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}$ ,  $E=1,3 \text{ В/м}$ ,  $u_+$ ,  $u_-$ ; знаходимо  $j=4,8 \cdot 10^{-10} \text{ А/м}^2$ . Такий струм дуже важко зафіксувати.

12. Відповідь можна знайти у п. 6.4.5.

13. Для запалювання дуги потрібно забезпечити необхідну ступінь іонізації газу, яка створюється сильним електричним полем між електродами. У працюючій дузі іони утворюються і за рахунок термічної іонізації.

14. Питомий опір цих металів дуже малий і кількість теплоти, виділена в місці контакту, недостатня для зварювання нагрівом.

15. Так, оскільки умова  $L \gg D$  виконується.

16. Дебаєвський радіус, за умови, що температури електронів та іонів однакові,

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T}{2 n e^2}} = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{14} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}} \text{ м} \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Умова  $L \gg D$  виконується; отже, газ — плазма.

## РОЗДІЛ 7 МАГНЕТИЗМ

*З проявами магнітних сил ми стикаємося у повсякденній практиці, коли маємо справу з постійними магнітами, електромагнітами, котушками індуктивності, електричними реле, електромоторами, кінескопами в телевізорах і т.і.*

*Дж. Орір*

Магнетизм — сукупність явищ, які пов'язані із рухом заряджених частинок, взаємодією між провідниками зі струмом і магнітами, між магнітами, між провідниками зі струмом.

У цьому розділі викладені основи фізики магнітних явищ.

### 7.1 ПРОЯВИ МАГНІТНИХ ВЗАЄМОДІЙ. МАГНІТНЕ ПОЛЕ

#### 1. Магніти. Магнітне поле. 2. Прояви магнетизму струмів

##### 7.1.1 Магніти. Магнітне поле

1. **Магніт** (*постійний магніт*) — тіло, здатне притягувати до себе або відштовхувати від себе деякі тіла (характеризується *намагніченістю*).

Зазначимо загальні властивості магнітів.

- Якщо магніт у вигляді стержня підвісити на нитці у горизонтальному положенні, то він почне обертатися так, щоб встановитися у напрямку північ-південь; так поводить себе стрілка компаса. Кінець стержня, який спрямований на північ, називається північним полюсом магніта  $N$  (North), протилежний кінець стержня — південним полюсом  $S$  (South).

- Магніти або притягуються один до одного, або відштовхуються. Місця магніта, в яких найсильніший прояв магнітної сили, є *полюсами магніта*. Для стержневих і підковоподібних магнітів, *полюси* — це торці магніта, хоча полюси магніта можуть знаходитися у довільному місці. Це залежить від способу виготовлення магніта. Може бути декілька пар полюсних областей. Однойменні полюси відштовхуються, різнойменні — притягуються (рис.

7.1). Стрілка компаса, піднесена до одного із полюсів магніта, займає одне із положень, показаних на рис. 7.2. Магніти поводять себе так, ніби на полюсах магніта зосереджені додатні і від'ємні «магнітні заряди».

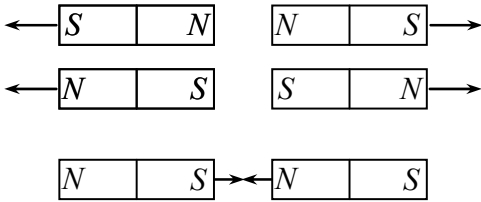


Рис. 7.1

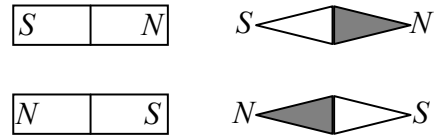


Рис. 7.2

- Полюси магніта не можна розділити. Якщо магніт розділити на дві частини, то утвориться два магніти (з двома полюсами) — рис. 7.3. Цей дослід (як і інші) дозволяє стверджувати, що полюси магніта не є фізичною реальністю: «магнітних зарядів» у природі не існує<sup>1)</sup>; властивості магніта пояснюються «мікрострумами», які циркулюють у речовині (про це йтиметься у наступному розділі).

- Земля — величезний магніт. Саме тому і відбувається певна орієнтація магнітної стрілки.

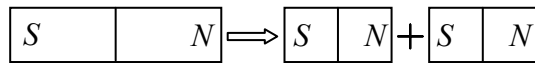


Рис. 7.3

Оскільки притягуються протилежні полюси, то означивши як північний полюс стрілки, полюс, спрямований на північ, ми тим самим приймаємо за південний магнітний полюс Землі той, що знаходиться поблизу північного географічного полюса (детальніше про магнітне поле Землі йтиме в кінці п. 7.3).

2. Описані вище взаємодії між магнітами здійснюються через магнітне поле (подібно до того, як взаємодія між електричними зарядами здійснюється через електричне поле): навколо магніта існує фізичне середовище, яке чинить силову дію на інший магніт, внесений у це середовище.

Джерелами магнітного поля є провідники зі струмом та рухомі електричні заряди.

<sup>1)</sup> Така категоричність не властива науці. Точніше: так звані магнітні монополі не знайдені, хоча для їх виявлення фізики приклали значні зусилля

Провідники зі струмом, рухомі заряджені частинки, що знаходяться у магнітному полі, як і магніти, реагують на магнітне поле — виникає взаємодія між цими об'єктами і магнітним полем (приклади наведені нижче).

### 7.1.2 Прояви магнетизму струмів

Сучасний етап вчення про магнетизм починається з 1820 р., коли датський фізик Ерстед виявив магнітну дію провідника зі струмом; цим було продемонстровано взаємозв'язок між електричними і магнітними явищами.

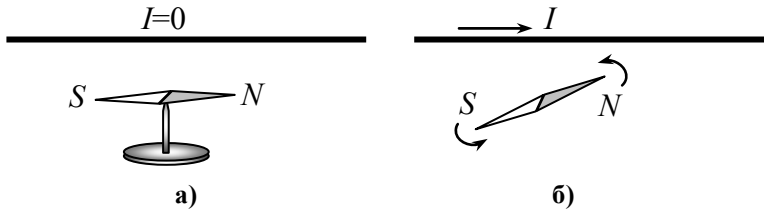


Рис. 7.4

Схема досліду Ерстеда показана на рис. 7.4. На рис. 7.4, а) відображений провідник, при відсутності струму в ньому, розміщений над компасом паралельно до стрілки компаса (яка зорієнтована «на північ»). Якщо тепер по провіднику потече електричний струм, то магнітна стрілка почне обертатися, і її вісь займе положення, перпендикулярне до початкового (рис. 7.4, б). При зміні напрямку струму в провіднику орієнтація стрілки зміниться на  $180^\circ$ . З'ясувалося, отже, що електричний струм чинить на магніт (магнітну стрілку) таку ж дію, як і інший магніт!

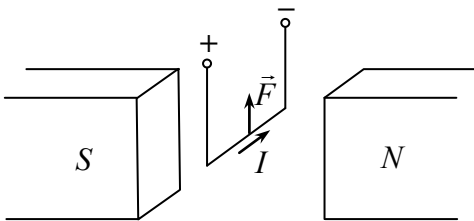


Рис. 7.5

Ерстед встановив і зворотний ефект — дію магніта на провідник зі струмом (рис. 7.5)<sup>1)</sup>. В подальшому Фарадей, досліджуючи цей ефект, встановив, що рамка зі струмом, поміщена між полюсами магніта, буде обертатися; так була створена лабораторна модель електродвигуна.

<sup>1)</sup> У цьому випадку провідник виштовхується із проміжку між полюсами з силою  $\vec{F}$ , спрямованою вгору. Загальний вираз для сили дається формулою (5.3)



Відкриття Ерстеда стало поштовхом до наступних великих відкриттів у фізиці магнітних явищ.

- Вже того ж 1820 р. французький фізик Ампер показав, що струми взаємодіють не тільки з магнітами, але і між собою. Так, два паралельні провідники притягаються, якщо напрямки струмів у них однакові (паралельні струми) і відштовхуються, якщо напрямки струмів протилежні (антипаралельні струми) — рис. 7.6.

Як дослід Ерстеда, так і дослід Ампера, можна інтерпретувати за допомогою поняття *магнітне поле*: електричний струм у провіднику створює магнітне поле і воно діє на магніт (дослід Ерстеда), або на інший провідник зі струмом (дослід Ампера).

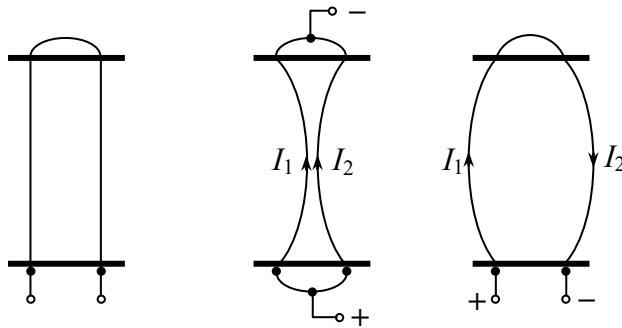


Рис. 7.6 — Схема досліду Ампера

- Ще одне відкриття Ампера — висновок, що *соленоїд* — котушка зі струмом — створює таку ж магнітну дію, як і постійний магніт.

Оскільки електричний струм в провідниках — потік електронів, то можна зробити і наступний висновок: 1) рухомі електрони створюють магнітні поля, 2) магнітні поля діють на рухомі заряди. Доки заряджена частинка (тіло) нерухома, навколо неї є лише електричне поле, якщо ж вона почне рухатися, — крім електричного поля виникає і магнітне поле. Електричне поле діє як на нерухомі, так і рухомі заряди, магнітне поле діє лише на рухомі заряди.

## 7.2 МАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

### 1. Магнітний момент контура зі струмом. 2. Магнітна індукція

#### 7.2.1 Магнітний момент контура зі струмом

Магнітне поле виявляють і досліджують за його дією на магніти, провідники зі струмом або рухомі заряди. При цьому особливо зручно використо-

увати плоский контур<sup>1)</sup> зі струмом (рамку), розміри якого малі в порівнянні з відстанню до струмів, поля яких досліджуються. Таку рамку підвішують на тонкій нитці у досліджувану ділянку магнітного поля, і вона (рамка) орієнтується певним чином (детально про поведінку рамки у магнітному полі див. у п. 7.7).

Орієнтуючу дію магнітного поля на рамку зі струмом зручно з'ясувати за допомогою важливого поняття — *магнітного моменту*. Магнітний момент контура

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (7.2.1)$$

де  $I$  — сила струму, що протікає в контурі,  $S$  — площа контура,  $\vec{n}$  — одиничний вектор додатньої нормалі до поверхні рамки (рис. 7.7); напрям  $\vec{n}$  визначається за правилом правого гвинта (напрямок  $\vec{n}$  збігається з напрямом поступального руху гвинта, основа якого обертається у напрямку струму).

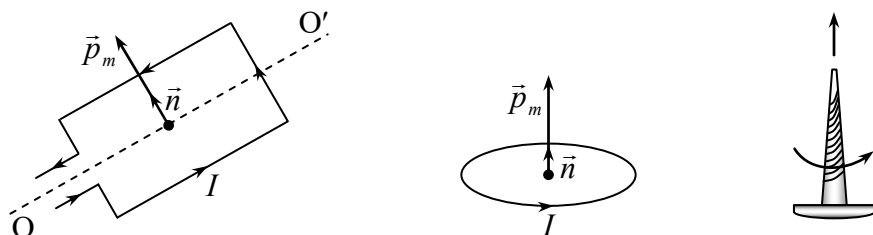


Рис. 7.7 — Напрямок магнітного моменту контура визначається за правилом правого гвинта

Контур, що може обертатися навколо осі  $OO'$ , внесений у магнітне поле, буде орієнтуватися подібно до орієнтації магнітної стрілки. Так, якщо у досліді Ерстеда (рис. 7.4) магнітну стрілку замінити рамкою зі струмом, підвішеною на нитці, то рамка займе таке положення, що її площина проходить через провідник, а нормаль до рамки (магнітний момент  $\vec{p}_m$ ) буде перпендикулярною до провідника (рис. 7.8). Подібно до магнітної стрілки рамка орієнтується і в магнітному полі між полюсами магніта (рис. 7.9).

<sup>1)</sup> Контур — провідник, зігнутий у формі прямокутника або кола

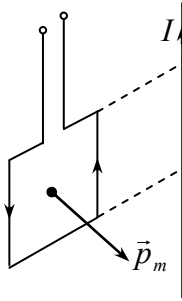


Рис. 7.8

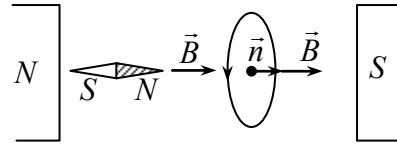


Рис. 7.9

Ці досліди (як і інші) доводять повну еквівалентність дії магнітного поля на магніти і на провідники зі струмом, а також те, що контур зі струмом проявляє всі ознаки магніта. Рамка зі струмом (контур зі струмом) — найпростіший електромагніт.

### 7.2.2 Магнітна індукція

Момент сил, що зумовлює обертання рамки і фіксує її рівноважне положення, визначається за формулою<sup>1)</sup>

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] \Rightarrow M = p_m B \sin \alpha, \quad (7.2.2)$$

де  $\vec{B}$  — вектор індукції магнітного поля — основна характеристика магнітного поля, а  $\alpha$  — кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ . Обертальний момент залежить як від магнітного моменту контура зі струмом  $\vec{p}_m$ , так і від величини і напрямку магнітної індукції  $\vec{B}$ .

У рівноважному положенні кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  дорівнює нулю (це положення відображене на рис. 7.9), тому  $M=0$ ; якщо ж  $\alpha=\pi/2$ , то обертальний момент (який і змушує рамку зайняти рівноважне положення) — максимальний ( $M_{max}$ ). Виявляється, що хоча на різні контури (різні  $p_m$ ), вміщені в дане магнітне поле, і діють різні моменти сил, відношення  $M_{max}/p_m$  є однаковим для різних контурів. Відношення

$$B = \frac{M_{max}}{p_m} \quad (7.2.3)$$

— магнітна індукція, — є кількісною характеристикою магнітного поля.

<sup>1)</sup> Детально про рух рамки зі струмом в магнітному полі йтиме в п. 7.7

Отже, магнітна індукція в даному місці магнітного поля визначається через максимальний обертальний момент, що діє на рамку з одиничним магнітним моментом.

Одиниця магнітної індукції в СІ — тесла (Тл). Один тесла — це індукція такого магнітного поля, в якому на рамку з магнітним моментом  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$  діє максимальний момент сили  $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ :

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

• Магнітна індукція може бути означена і як максимальна сила<sup>1)</sup>, що діє на прямолінійний провідник довжиною  $L$ , по якому тече струм  $I$ :

$$B = \frac{F_{\max}}{IL} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}. \quad (7.2.4)$$

Формули (7.2.3) і (7.2.4) — еквівалентні.

Отже, магнітна індукція — силова характеристика магнітного поля.

Напрямок вектора  $\vec{B}$  в даній точці — напрям нормалі до рамки, що знаходиться у рівновазі, — приймається за напрям магнітного поля; це також напрям дії сили на північний полюс магнітної стрілки, що зайняла положення рівноваги (рис. 7.9).

Для магнітного поля, як і для електричного, справедливий принцип суперпозиції: магнітна індукція поля, створеного декількома провідниками або магнітами, дорівнює векторній сумі магнітних індукцій магнітних полів, створюваних окремими провідниками або магнітами:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

**Приклади:** Порядок величин магнітних полів, які оточують людину:

Джерело	$B$ , Тл
Поле прямолінійного провідника зі струмом 10 А на віддалі 1 м	$2 \cdot 10^{-6}$
Струми серця	$10^{-14}$
Телевізійний сигнал	$10^{-11}$
Струм 100-ватної лампи на відстані 3 м	$10^{-8}$
Між полюсами лабораторного магніта	$10^{-2} - 10^{-1}$

<sup>1)</sup> Сила, що діє на провідник зі струмом, вміщений у магнітне поле, — сила Ампера

### 7.3 ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ. ЛІНІЇ МАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ

Магнітне поле графічно зображають за допомогою *ліній магнітної індукції* (*магнітних силових ліній*) подібно до того, як електростатичне поле зображають лініями напруженості електричного поля. Лінія магнітної індукції — лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає із напрямом вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  в цій точці (рис. 7.10).

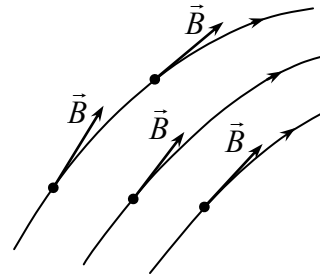


Рис. 7.10

Лініям магнітної індукції приписують напрям, що співпадає на даній ділянці з напрямом  $\vec{B}$ .

Густота силових ліній свідчить про величину поля; чим більша густота ліній, тим поле сильніше. Якщо в даній області об'єму густота ліній однакова, то говорять про однорідне магнітне поле.

Наведемо приклади графічних зображень магнітного поля.

- Картини ліній магнітної індукції *стрижневого магніта* і *соленоїда* (довгої котушки зі струмом) повністю ідентичні (рис. 7.11). Лінії магнітної індукції виходять з північного ( $N$ ) полюса і входять в південний ( $S$ ). Густота силових ліній всередині магніта і соленоїда однакова; це означає, що поле тут однорідне ( $\vec{B} = const$ ). При цьому північний полюс соленоїда збігається з тим кінцем соленоїда, в якому струм тече проти стрілки годинника. Картина силових ліній дозволяє означити магнітні полюси як площини поділу однорідної і неоднорідної ділянок магнітного поля соленоїда.

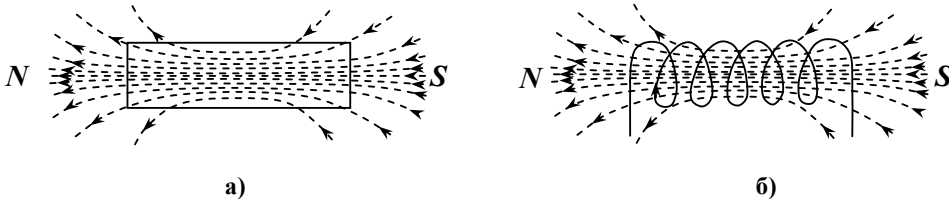


Рис. 7.11

Лінії магнітної індукції можна «відтворити» за допомогою дрібних залізних ошурків, розсипаних навколо магнітів чи провідників зі струмом; во-

ни будуть розташовуватися у зовнішньому полі подібно до магнітних стрілок.

Ідентичність полів магнітів і електромагнітів привела Ампера до гіпотези про «молекулярні струми» у постійних магнітах, які зумовлюють їх магнітні властивості.

- *Прямолінійний провідник зі струмом (прямолінійний струм)*. Із аналізу поведінки рамки зі струмом або магнітної стрілки, які розташовані в площинах, перпендикулярних до провідника, видно, що поблизу провідника нормаль до рамки (магнітна стрілка) орієнтується перпендикулярно до радіус-вектора, проведеного від осі провідника до місця розташування рамки (магнітної стрілки). Звідси маємо: у випадку довгого провідника лінії магнітної індукції мають вигляд кіл, що лежать у площинах, перпендикулярних до провідника (рис. 7.12).

Напрямок ліній магнітної індукції визначається за *правилом правого свердлика* (гвинта): якщо вкручувати гвинт за напрямком струму в провіднику, то напрям обертання основи гвинта покаже напрям ліній магнітної індукції.

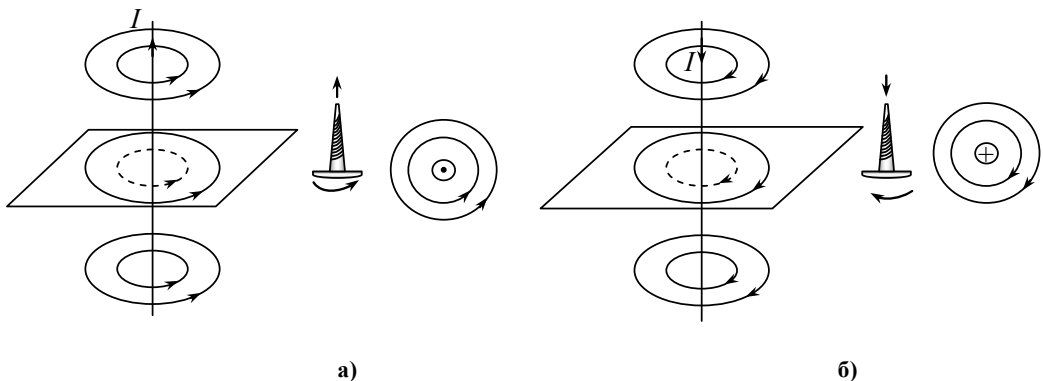


Рис. 7.12  
Лінії магнітної індукції прямолінійного провідника зі струмом

Лінії магнітної індукції завжди замкнуті та охоплюють провідник зі струмом (вихровий характер магнітного поля на відміну від потенціального характеру електростатичного поля).

- *Магнітне поле колового струму і його відповідність полю постійного магніту* показана на рис. 7.13, а) (поле колового струму в площині, перпендикулярній до площини рисунка) та на рис. 7.13, б) (коловий струм в площині рисунка).

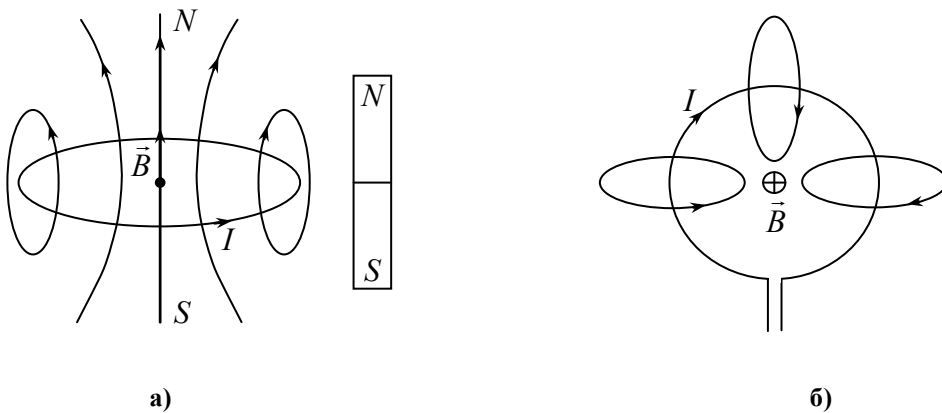


Рис. 7.13

а — коловий струм в площині, перпендикулярній до площини рисунка;  
 б — коловий струм в площині рисунка

• *Магнітне поле Землі.* Загальна картина магнітного поля Землі (геомагнітного поля) зображена на рис. 7.14, а; наближено можна вважати, що магнітне поле Землі подібне до поля намагніченої кулі. Вісь, яка проходить через магнітні полюси Землі нахилена, на кут, що приблизно дорівнює  $12^\circ$  відносно осі обертання Землі. Магнітна стрілка, що може вільно обертатися, встановлюється у напрямку дотичної до лінії магнітної індукції магнітного поля Землі (в даній географічній точці). На магнітних полюсах Землі вектор магнітної індукції має вертикальний напрям (на полюсах магнітна стрілка, що може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, займає вертикальне положення). Північним називають той магнітний полюс, де лінії  $\vec{B}$  виходять із Землі (поблизу Південного географічного полюса), а південним магнітним полюсом — той, де вони входять у Землю (поблизу Північного географічного полюса).

В кожній точці простору геомагнітне поле можна охарактеризувати вектором магнітної індукції  $\vec{B}$ , величину і напрям якого визначають за трьома параметрами (рис. 7.14, б): горизонтальною складовою вектора магнітної індукції  $B_r$ , *магнітним нахиленням*  $\theta$  (кут між  $\vec{B}$  і площиною горизонту) і *магнітним схиленням* (кут між  $\vec{B}_r$  і площиною географічного меридіана). Магнітна стрілка, що може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, встановлюється під кутом  $\theta$  до горизонту. На магнітному екваторі  $\theta=0$ ,  $B=B_r$  (магні-

тна стрілка, займає горизонтальне положення). Із збільшенням широти значення  $\theta$  зростає до  $90^\circ$  (в магнітних полюсах магнітна стрілка займає вертикальне положення). Значення  $B$  змінюється від  $B=0,42 \cdot 10^{-4}$  Тл на екваторі до  $B=0,70 \cdot 10^{-4}$  Тл на полюсах. На широті Тернополя  $B \approx 0,50 \cdot 10^{-4}$  Тл.

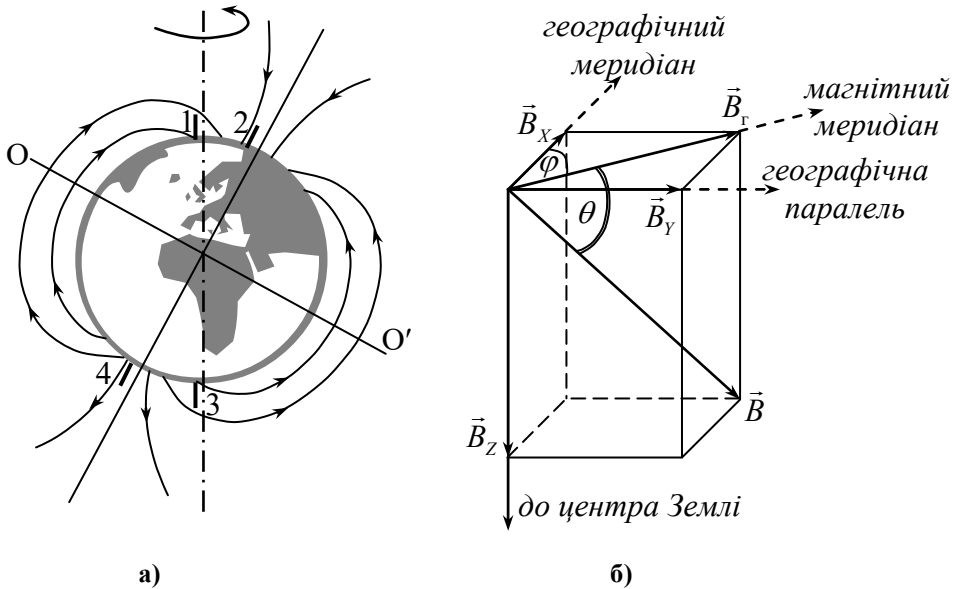


Рис. 7.14

а) Земля — великий магніт  
 1 – північний географічний полюс Землі;  
 2 – південний магнітний полюс Землі;  
 3 – південний географічний полюс Землі;  
 4 – північний магнітний полюс Землі;  
 $OO'$  – лінія магнітного екватора

б) Вектори  $\vec{B}_x$ ,  $\vec{B}_y$ ,  $\vec{B}_z$  — складові  $\vec{B}$ , спрямовані відповідно на північ, схід і до центра Землі

Геомагнітне поле можна означити і трьома складовими  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  в прямокутній системі координат (рис. 7.14, б).

Земний магнетизм пов'язують із переміщенням мас у рідкому металічному ядрі Землі.

Геомагнітне поле зазнає збурень ззовні (космічні випромінювання, потік корпускулярного випромінювання Сонця). Магнітні збурення, які охоплюють всю Землю і тривають від одного до декількох днів, називаються *магнітними бурями*. Вони зумовлені зміною параметрів сонячного корпускулярного випромінювання.



## 7.4 ЗАКОН БІО-САВАРА-ЛАПЛАСА

### 1. Загальна форма закону Біо-Савара-Лапласа. 2. Приклади на застосування закону Біо-Савара-Лапласа

#### 7.4.1 Загальна форма закону Біо-Савара-Лапласа

Експериментальні дослідження магнітних полів, створюваних провідниками зі струмом, проведені французькими вченими Ж. Біо і Ф. Саваром (1820 р.), дозволили їх співвітчизнику П. Лапласу сформулювати основний закон магнетизму, який дозволяє розраховувати магнітну індукцію провідників зі струмами.

Цей закон, — закон Біо-Савара-Лапласа (у вакуумі), записується у вигляді

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}, \quad (7.4.1)$$

де  $d\vec{l}$  — вектор, що за модулем дорівнює довжині  $dl$  елемента провідника, та співпадає за напрямом зі струмом,  $\vec{r}$  — радіус-вектор, проведений від елемента  $dl$  в точку поля  $O$ , в якій визначається магнітна індукція  $d\vec{B}$  (рис. 7.15, випадок прямолінійного провідника зі струмом),  $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнітна стала. Модуль вектора магнітної індукції  $d\vec{B}$ <sup>1)</sup> у вакуумі задається виразом

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (7.4.2)$$

де  $\alpha$  — кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}$  (рис. 7.15).

Якщо провідник розміщений у однорідному магнітному середовищі, то закон Біо-Савара-Лапласа записується так:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}; \quad (7.4.3)$$

модуль  $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2};$$

<sup>1)</sup> Замість виразу «модуль вектора магнітної індукції» вживаються коротші вирази: «індукція магнітного поля», «магнітна індукція»

у цих формулах  $\mu$  — магнітна проникність середовища — величина, яка показує у скільки разів посилюється (у феромагнітних та парамагнітних матеріалах) або послаблюється (у діамагнітних матеріалах) магнітне поле у середовища у порівнянні з вакуумом<sup>1)</sup>.

Напрямок  $d\vec{B}$  визначається векторним добутком  $[\vec{dl}\vec{r}]$  і може бути знайдений за правилом правого свердлика; цей напрямок перпендикулярний до векторів  $\vec{dl}$  і  $\vec{r}$  (тобто перпендикулярний до площини, в якій вони лежать, і збігається з дотичною до лінії магнітної індукції). На рис. 7.15 магнітна індукція в точці  $O$ , створена елементом струму  $I dl$ , спрямована перпендикулярно до площини рисунка «від нас». Справа від провідника лінії магнітної індукції мають напрям від читача, а зліва — до читача.

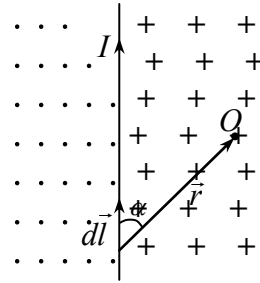


Рис. 7.15  
Вектор  $d\vec{B}$  спрямований за площину рис. «від нас»

Магнітна індукція  $\vec{B}$  в точці  $O$ , створена провідником скінченої довжини довільної форми, визначається за принципом суперпозиції:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{B}_i,$$

де  $\Delta\vec{B}_i$  — магнітна індукція, створена елементом провідника, довжиною  $\Delta l_i$ . Необмежено збільшуючи кількість ділянок, переходимо до границі, коли  $n \rightarrow \infty$ . Тоді  $\Delta B_i \rightarrow dB$  і

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I \sin \alpha dl}{r^2}, \quad (7.4.4)$$

де інтегрування ведеться по довжині всього провідника.

### 7.4.2 Приклади на застосування закону Біо-Савара-Лапласа

Розглянемо два приклади на розрахунок магнітного поля за допомогою формули (7.4.4).

<sup>1)</sup> Про магнітне поле у середовищі йтиме у Розділі 8

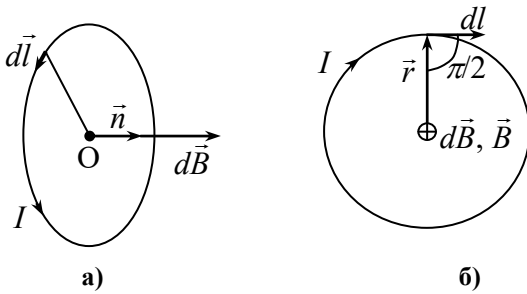


Рис. 7.16

1. *Магнітне поле колового струму.* Знайдемо магнітну індукцію в центрі колового провідника. Як видно із рис. 7.16, а) і рис. 7.16, б), всі елементи провідника створюють в центрі кола поле однакової спрямованості — вздовж

нормалі  $\vec{n}$  (рис. 7.16, а б)). Тому додавання векторів  $d\vec{B}$  можна замінити додаванням їх модулів. Маємо:

$$B = \int_L dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \sin \alpha dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \int_L dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I 2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (7.4.5)$$

(кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}$  дорівнює  $\pi/2$ ).

2. *Магнітне поле прямолінійного струму.* Знайдемо магнітну індукцію в довільній точці на віддалі  $R$  від тонкого провідника (рис. 7.17, а)). Виберемо вісь  $y$ , елемент  $dl$ , кут  $\alpha$  і  $r$  так, як показано на рис. 7.17, б). Початок координат — точка  $O$ .

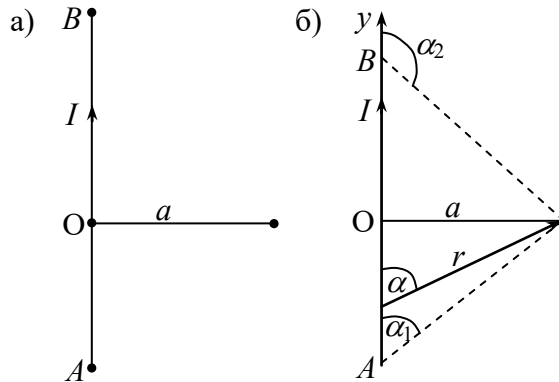


Рис. 7.17

Будемо інтегрувати за формулою (7.4.4) (по довжині провідника) вздовж осі  $y$ ;

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha dy}{r^2}. \quad (7.4.6)$$

Під інтегралом — дві змінні  $y$  і  $r$ ; вони пов'язані між собою, тому інтеграл зводиться до виразу (див. задачу № 23 у п. 7.11)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad (7.4.7)$$

тут  $a$  — найкоротша відстань від точки  $O$  до провідника.

Для випадку «безмежно довгого» провідника  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=\pi$ , і

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (7.4.8)$$

## 7.5 СИЛА АМПЕРА

**1. Закон Ампера. Сила Ампера. 2. Розрахунок взаємодії паралельних струмів. 3. Означення одиниці сили струму в СІ. Магнітна стала. Одиниця магнітної індукції**

### 7.5.1 Закон Ампера. Сила Ампера

Ампер встановив, що в магнітному полі на елемент провідника  $dl$  зі струмом  $I$  діє сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}], \quad (7.5.1)$$

де  $d\vec{l}$  — вектор довжини  $dl$ , напрямлений по дотичній до провідника в напрямку протікання струму,  $\vec{B}$  — вектор магнітної індукції в місці знаходження елемента провідника  $dl$ . Сила  $d\vec{F}$  називається *силою Ампера*. Векторний характер формули (7.1) відображений на рис. 7.18. Модуль сили Ампера визначається за формулою

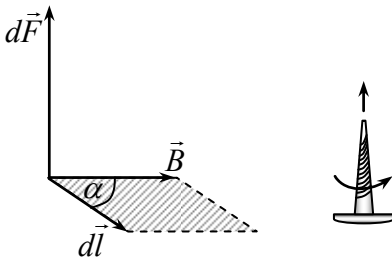


Рис. 7.18

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (7.5.2)$$

де  $\alpha$  — кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}$ . Напрямок  $d\vec{F}$  визначається за правилом свердлика.

Закон Ампера в магнетизмі відіграє таку ж роль, як і закон Кулона в електростатиці (записаний у формі  $\vec{F} = q\vec{E}$ ).

Якщо поле однорідне ( $\vec{B} = const$ ), то модуль сили, що діє на прямолінійний провідник довжиною  $L$ , дається формулою

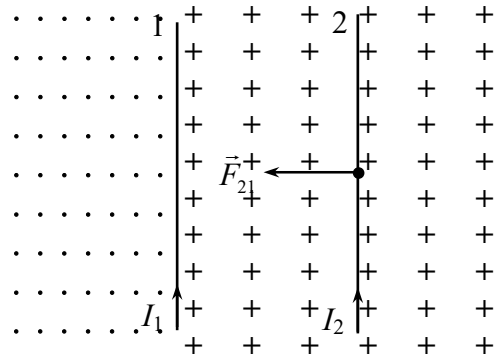
$$F = IBL \sin \alpha, \quad (7.5.3)$$

де  $\alpha$  — кут між напрямком струму і вектором  $\vec{B}$ .

Напрямок сили Ампера можна визначити і за *правилом лівої руки* (наслідок правил векторної алгебри): *Якщо долоню лівої руки розмістити так, щоб в неї входили лінії магнітної індукції (вектор  $\vec{B}$ ), а чотири витягнуті пальці вказували напрям струму, то відігнутий великий палець покаже напрям сили, що діє на провідник*; прояв правила лівої руки можна бачити, зокрема, на рис. 7.5 (лінії індукції виходять з  $N$ -полюса і входять у  $S$ -полюс).

**7.5.2 Розрахунок взаємодії паралельних струмів**

Застосуємо формулу (7.5.2) для пояснення взаємодії паралельних струмів. Розглянемо два нескінченних паралельних струми  $I_1$  і  $I_2$  (рис. 7.19). Притягання провідників пояснюється так. Правий провідник знаходиться у магнітному полі, створеному лівим провідником. Вектор  $\vec{B}_1$  цього поля спрямований перпендикулярно до площини рисунка «від нас». За правилом лівої руки знаходимо напрям сили Ампера  $\vec{F}_{21}$ ; провідник 2 притягується до провідника 1. Подібно до цього можна переконатися, що і провідник 1 притягується до провідника 2. Аналогічно можна пояснити і відштовхування антипаралельних струмів.



**Рис. 7.19**  
Справа від провідника 1 магнітне поле, створене цим провідником, спрямоване перпендикулярно до площини рисунка «від нас», зліва — «до нас»

Знайдемо величину сили  $F_{21}$ . За формулою (7.5.3) сила, що діє на ділянку другого провідника довжиною  $L_2$ , —

$$F_{21} = I_2 B_1 L_2 \sin \alpha = I_2 B_1 L_2,$$

де  $I_2$  — сила струму в провіднику 2,  $B_1$  — магнітна індукція поля, створеного провідником 1; тут  $\sin \alpha = 1$ , оскільки кут між напрямом струму  $I_2$  і напрямом вектора  $\vec{B}_1$  дорівнює  $\pi/2$ .

Індукція поля, створеного провідником 1 на віддалі  $R$  від нього, за формулою (7.4.8) дорівнює

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi R},$$

тому

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 L_2}{R}. \quad (7.5.4)$$

Сили  $F_{12}$  і  $F_{21}$ , розраховані на одиниці довжин відповідних провідників даються виразами

$$\frac{F_{21}}{L_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{R}, \quad \frac{F_{12}}{L_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{R}. \quad (7.5.5)$$

Порівняння двох останніх формул дає:

$$\frac{F_{12}}{L_1} = \frac{F_{21}}{L_2}.$$

**Приклад.** Знайдемо силу взаємодії двох паралельних смужок алюмінієвої фольги, по яких проходив струм 10 А (такий струм може забезпечити гальванічна батарея). Смужки мають довжину 50 см, віддаль між ними 5 мм.

⇒ Магнітна індукція поля, створеного однією із смужок на віддалі 5 мм від іншої,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \text{ А}}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

Тому сила, що діє на другий провідник,

$$F = IBl = 10 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

### 7.5.3 Означення одиниці сили струму в СІ. Магнітна стала. Одиниця магнітної індукції

На основі формули (7.5.5) встановлюється одиниця сили струму в СІ. Звідси отримується також числове значення магнітної сталої  $\mu_0$ . Закон Ампера (7.5.1) дозволяє означити і одиницю магнітної індукції  $B$ .

- Одиниця сили струму в СІ — *ампер* — сила постійного струму, який при проходженні по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і дуже малої товщини, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, зумовлює силу взаємодії між ними  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на кожен метр довжини.

У відповідності із цим за формулою (7.5.4) знаходимо магнітну сталу  $\mu_0$ :

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{R} \Rightarrow \mu_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ГН}}{\text{м}}.$$

• Нехай елемент провідника  $dl$  зі струмом  $I$  перпендикулярний до напрямку магнітного поля; у цьому випадку, як видно із формули (7.5.2), сила Ампера  $dF$  максимальна:  $dF_{\max} = IBdl$ . Маємо:

$$B = \frac{1}{I} \cdot \frac{dF_{\max}}{dl} \Rightarrow B = \frac{F_{\max}}{IL}.$$

Звідси отримується одиниця магнітної індукції — *тесла*: 1 Тл — магнітна індукція такого однорідного магнітного поля, яке діє із силою 1 Н на кожен метр довжини прямолінійного провідника, розміщеного перпендикулярно до напрямку поля, якщо по цьому провіднику проходить струм 1 А.

## 7.6 СИЛА ЛОРЕНЦА ТА ЇЇ ПРОЯВИ

**1. Сила Лоренца. 2. Рух зарядженої частинки у магнітному полі. 3. Ефект Холла. 4. Магнітогідродинамічний ефект. 5 Двигун Фарадея**

### 7.6.1 Сила Лоренца

Дослідами встановлено, що магнітне поле діє не тільки на провідники зі струмом, але і на *рухомі електричні заряди*. Сила, що діє на електричний заряд  $q$ , що рухається в магнітному полі зі швидкістю  $\vec{g}$ , називається силою Лоренца і дається формулою

$$\vec{F} = q[\vec{g}\vec{B}], \quad (7.6.1)$$

де  $\vec{B}$  — індукція магнітного поля<sup>1)</sup>. Модуль сили Лоренца дорівнює

$$F = qgB \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  — кут між векторами  $\vec{g}$  і  $\vec{B}$ .

Напрямок сили Лоренца для додатньо зарядженої частинки, як і напрямку сили Ампера, зручно визначати за правилом лівої руки (за умови, що в дано-

<sup>1)</sup> Цю силу  $\vec{F}$  означають також як *магнітну силу Лоренца*, а *силу Лоренца* — силу  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{g}\vec{B}]$ , де  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля

му випадку напрям чотирьох витягнутих пальців повинен вказувати напрям швидкості); для від'ємно зарядженої частинки напрям сили Лоренца протилежний до того, який був би для додатньо зарядженої частинки (рис. 7.20).

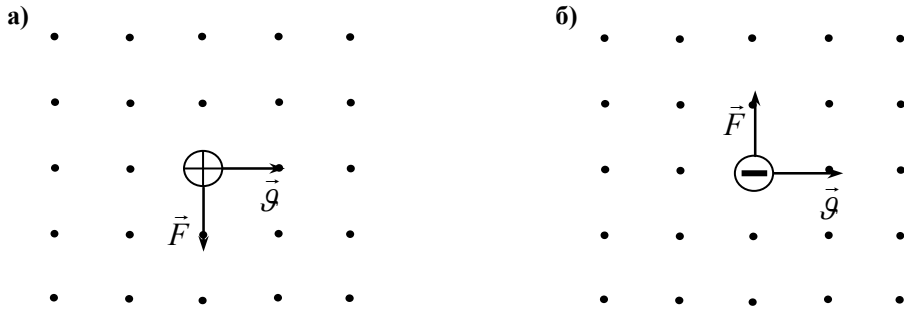


Рис. 7.20 — Лінії вектора  $\vec{B}$  спрямовані до нас

Як видно із формули (7.6.1), магнітна сила Лоренца перпендикулярна до швидкості частинки, тому вона змінює лише напрям швидкості, але не її величину. Наслідком цього є те, що ця сила не виконує роботи, кінетична енергія частинки при русі в магнітному полі не змінюється. Тут ми маємо принципову відмінність кулонівських (електростатичних) сил від магнітних: сила електростатичної взаємодії завжди спрямована у напрямку лінії напруженості магнітного поля, тоді як магнітна сила перпендикулярна до лінії магнітної індукції.

### 7.6.2 Рух зарядженої частинки у магнітному полі

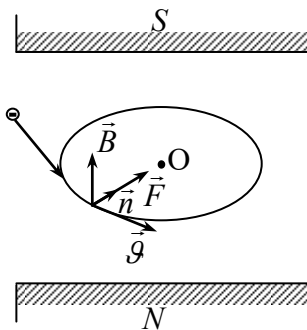


Рис. 7.21

Нехай електрон влітає зі швидкістю  $\vec{v}$  в однорідне магнітне поле, лінії магнітної індукції якого  $\vec{B}$  перпендикулярні до швидкості електрона (рис. 7.21). Оскільки сила Лоренца постійна за модулем і нормальна до швидкості електрона, то вона викликати лише нормальне прискорення; електрон рухатиметься по колу (в межах дії магнітного поля).

За другим законом Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow e[\vec{v}\vec{B}] = \frac{mv^2}{R}\vec{n} \Rightarrow e\mathcal{B}v = \frac{mv^2}{R},$$



де  $R$  — радіус кола (тут ми нехтуємо силою тяжіння). Маємо:

$$R = \frac{m\mathcal{G}}{eB}.$$

Період обертання електрона

$$T = \frac{2\pi R}{\mathcal{G}} = \frac{2\pi}{B} \cdot \frac{m}{e}.$$

Період обертання в однорідному магнітному полі не залежить від швидкості частинки (при  $\mathcal{G} \ll c$ )!

Якщо швидкість зарядженої частинки направлена під кутом  $\alpha$  до вектора  $\vec{B}$ , то можна показати, що частинка рухатиметься по гвинтовій лінії.

• Корисно порівняти рух зарядженої частинки в магнітному полі з її рухом у електричному полі (рис. 7.22); тут електрон влітає в проміжок між пластинами конденсатора зі швидкістю  $\vec{\mathcal{G}}_0$  паралельно до пластин конденсатора. У даному випадку

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow e\vec{E} = m\vec{a}_t \Rightarrow eE = ma \Rightarrow a = \frac{eE}{m};$$

з таким прискоренням електрон наблизитиметься до нижньої пластини. Віддаль  $l$  електрон подолає за час

$$t = \frac{l}{\mathcal{G}_0}$$

і опуститься на виході конденсатора на відстань

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{eEl^2}{2m\mathcal{G}_0^2}.$$

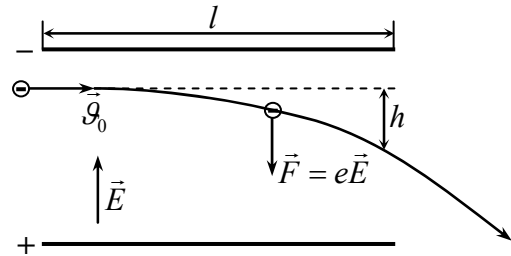


Рис. 7.22

### 7.6.3 Ефект Холла

Ефект Холла — явище виникнення в провіднику зі струмом, поміщеному у поперечне магнітне поле, електричного поля, перпендикулярного до струму і до вектора  $\vec{B}$ . Виникнення цього поля — *поля Холла*  $E_X$  (і відповід-

ної різниці потенціалів — холлівської різниці потенціалів  $U_X$ ) пояснюється дією сили Лоренца.

Нехай напрям струму і напрям магнітного поля, прикладеного до металеві пластинки такі, як показано на рис. 7.23. Оскільки густина струму  $\vec{j} = -ne\vec{g}$  ( $n$  — концентрація електронів,  $e$  — заряд електрона,  $\vec{g}$  — середня швидкість впорядкованого руху електронів, то швидкість електронів спрямована протилежно до струму.

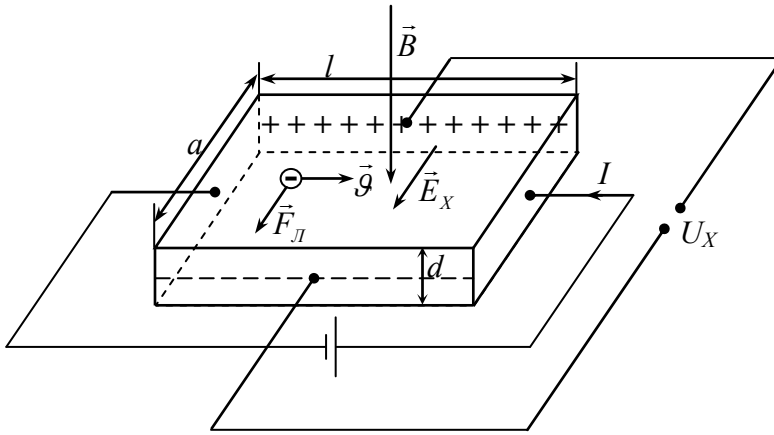


Рис. 7.23

Під дією сили Лоренца на передній грані пластинки накопичуватиметься надлишковий заряд електронів, на задній грані з'являється надлишковий додатній заряд (рис. 7.23). Між цими гранями і виникає холлівське електричне поле  $E_X$  і холлівська різниця потенціалів  $U_X$ ;  $E_X = U_X / a$ , де  $a$  — ширина пластинки. Це поле протидіятиме переміщенню електронів; відповідна сила  $\vec{F}_X = -e\vec{E}_X$  спрямована протилежно до сили Лоренца.

У стані рівноваги

$$F_L = F_X \Rightarrow e\mathcal{B} = eE_X,$$

звідки напруженість холлівського поля

$$E_X = \mathcal{B},$$

а холлівська різниця потенціалів

$$U_X = \mathcal{B}a.$$

Сила струму (саме ця величина, а не швидкість електрона, вимірюється у досліді)

$$I = jS = ne \mathcal{G}S = ne \mathcal{G}ad ,$$

тому середня швидкість впорядкованого руху електронів

$$\mathcal{G} = \frac{I}{nead} .$$

Отже, холлівська різниця потенціалів

$$U_X = \frac{IB}{ned} \Rightarrow U_X = R_X \frac{IB}{d}; \quad R_X = \frac{1}{ne} .$$

$R_X$  — величина, стала для даного провідника, — називається *сталю Холла*.

За вимірним значенням  $U_X$  можна визначити концентрацію носіїв струму у даному матеріалі. Знак сталої Холла визначається знаком носіїв заряду. Для більшості металів  $R_X$  — величина від'ємна. Для деяких матеріалів (насамперед, — для напівпровідників) стала Холла може бути і додатньою (це вказує на додатній заряд носіїв струму — дірок).

Ефект Холла широко використовується у багатьох галузях науки і техніки, зокрема у пристроях для вимірювання магнітної індукції (датчики Холла).

#### 7.6.4 Магнітогідродинамічний ефект

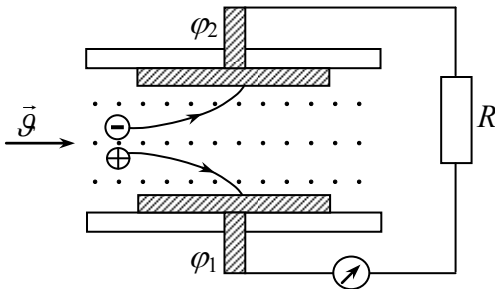


Рис. 7.24

Якщо створити потік газу або рідини, який містить заряди обох знаків, у магнітному полі, лінії індукції  $\vec{B}$  якого перпендикулярні до швидкості  $\vec{\mathcal{G}}$  зарядів, то під дією сили Лоренца відбудеться розділення зарядів (рис. 7.24) і між електродами виникає різниця потенціалів.

Викладена ідея лежить в основі роботи *магнітогідродинамічного генератора* (МГД-генератора). МГД-генератор — енергетичний пристрій, в якому енергія газоподібного або рідкого електропровідного середовища, що рухається у магнітному полі, перетворюється безпосередньо в електричну енергію. На практиці робочим тілом звичайно є низькотемпературна плазма. Під дією магнітного поля в плазмі відбувається просторовий розподіл електронів та іонів, які і попадають на

електроди; це приводить до виникнення різниці потенціалів і електричного струму у зовнішньому колі.

### 7.6.5 Двигун Фарадея

Прояв сили Лоренца можна спостерігати у пристрої Фарадея, в якому відбувається перетворення електричної енергії у механічну. Схема двигуна Фарадея показана на рис. 7.25.

Як видно із рисунка, при переміщенні електронів із периферії диска до його центру (до стержня) на кожен із них діятиме сила Лоренца

$$\vec{F}_L = -e[\vec{g}\vec{B}],$$

спрямована перпендикулярно до векторів  $\vec{g}$  і  $\vec{B}$ . Сумарна дія цих сил і зумовить обертання диска.

Потужність такого двигуна визначається за формулою

$$N = \pi \nu I B r^2,$$

де  $\nu$  — частота обертання,  $I$  — сила струму в колі,  $r$  — радіус диску,  $B$  — магнітна індукція (див. задачу № 19 у п. 7.11).

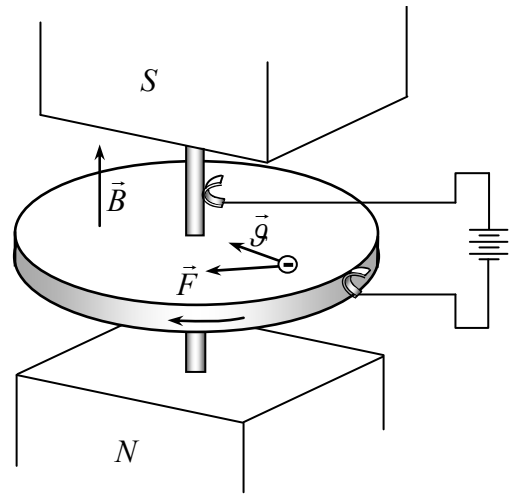


Рис. 7.25

## 7.7 КОНТУР ЗІ СТРУМОМ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

**1. Загальні закономірності. Момент сил Ампера. 2. Робота при обертанні контура зі струмом у магнітному полі. Потенціальна енергія контура в магнітному полі. 3. Контур у неоднорідному магнітному полі. 4. Електричний двигун постійного струму**

### 7.7.1 Загальні закономірності. Момент сил Ампера

Встановимо загальні закономірності поведінки контура зі струмом, поміщеного у магнітне поле.

- Покажемо, що орієнтуюча дія магнітного поля на контур зі струмом, описана у п. 7.2, і формула (7.2.2) для моменту сил, що діють на рамку у маг-

нітному полі, є проявом сили Ампера. На рис. 7.26 відображена прямокутна рамка, що підвішена на нитці між полюсами магніта, поле якого будемо вважати однорідним ( $\vec{B} = \text{const}$ ). За відсутності струму у рамці площина рамки співпадає з напрямом ліній  $\vec{B}$ . Якщо ж по рамці пропустити струм, то вона почне обертатися під дією сил Ампера навколо осі нитки (її ми вважаємо непружною) і займе положення, в якому її площина буде перпендикулярна до ліній вектора  $\vec{B}$  (штрихована лінія на рис. 7.26).

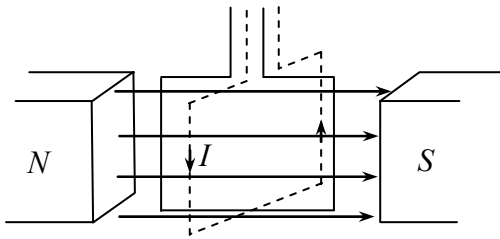


Рис. 7.26

На рис. не показано під'єднання рамки до джерела струму

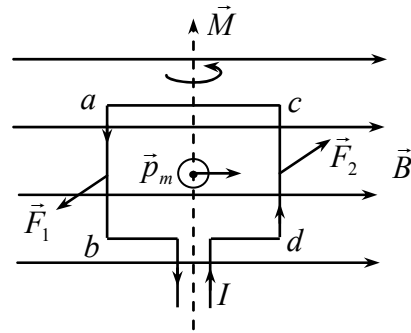


Рис. 7.27

Початкове положення рамки. Сила Ампера  $\vec{F}_1$  спрямована «до нас», сила Ампера  $\vec{F}_2$  — «від нас». Магнітний момент рамки  $\vec{p}_m$  спрямований «до нас»

У вихідному положенні вектор магнітного моменту  $\vec{p}_m$  був орієнтований перпендикулярно до ліній поля (рис. 7.27), в кінцевому — вздовж ліній поля.

• Прослідкуємо за обертанням рамки. У початковому положенні сторони  $ac$  і  $bd$  рамки паралельні до ліній вектора  $\vec{B}$ , тому на них сила Ампера не діє ( $\sin\alpha=0$  у формулі (7.5.2)). На сторону  $ab$  рамки діє сила  $\vec{F}_1$ , а на сторону  $cd$  — сила  $\vec{F}_2$ . Ці антипаралельні сили рівні за величиною:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F = I \cdot ab \cdot B = I \cdot cd \cdot B$$

(у формулі (7.5.2) потрібно взяти  $\sin\alpha=1$ ). Під дією пари сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  рамка буде повертатися. Момент цієї пари сил  $\vec{M}$  буде спрямований вздовж нитки вгору і чисельно дорівнюватиме добутку сили  $F$  на плече пари сил  $l = ac$ :

$$M_{max} = Fl = I \cdot cd \cdot B \cdot ac = ISB, \quad (7.7.1)$$

де  $S = ab \cdot ac$  — площа рамки. Оскільки  $IS = p_m$  — магнітний момент рамки, то

$$M_{max} = p_m B.$$

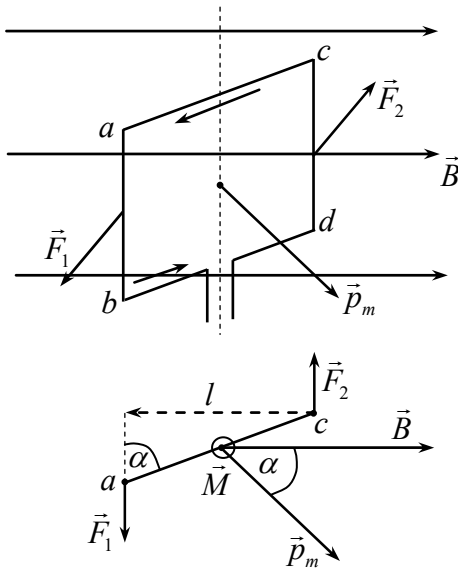


Рис. 7.28  
Внизу — вид на рамку зверху

Індекс *max* біля  $M$  означає, що це — максимальний обертовий момент, який виникає при обертанні рамки; при подальшому обертанні рамки він буде зменшуватися (до положення рівноваги).

Виразу у (7.7.1) можна надати і векторну форму:

$$\vec{M}_{max} = [\vec{p}_m \vec{B}]; \quad (7.7.2)$$

тут вектор  $\vec{p}_m$  на рис. 7.27 спрямований до нас,  $\vec{M}_{max}$  — вздовж нитки вгору (кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  дорівнює

$\pi/2$ ).

• Розглянемо тепер довільне положення рамки, коли кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  лежить в межах  $\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq 0$  (рис. 7.28). Тут, на відміну від початкового положення рамки (рис. 7.27), сили Ампера діятимуть і на сторони  $ac$  і  $dc$  рамки. Проте сила Ампера, що діє на сторону рамки  $ac$ , зрівноважується силою Ампера, що діє на сторону  $bd$  (струми на цих ділянках течуть у протилежних напрямках). Обертовий момент (зумовлений парою сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ ) дорівнює

$$M = lF = I \cdot cd \cdot B \cdot ac \sin \alpha ,$$

або

$$M = p_m B \sin \alpha . \quad (7.7.3)$$

У векторному вигляді

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] \quad (7.7.4)$$

(рис. 7.29). Якщо кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  дорівнює  $\pi/2$ , то ми приходимо до формул (7.7.1) і (7.7.2), які визначають максимальний обертовий момент.

- В положенні рівноваги  $\alpha=0$ ,  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$  і, отже,  $M=0$ . Це — стан *стійкої рівноваги*; при відхиленні рамки від цього положення виникає обертовий момент сил Ампера, який повертає рамку у початкове положення; чим більший кут  $\alpha$  (до  $\pi/2$ ), тим більший момент сил. Незавжди переконатися, що у випадку, коли вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  спрямовані протилежно, — стан рівноваги нестійкий: при незначному відхиленні рамки із цього положення сили Ампера викликають подальше відхилення рамки.

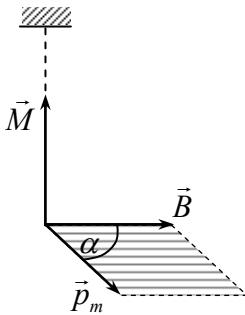


Рис. 7.29

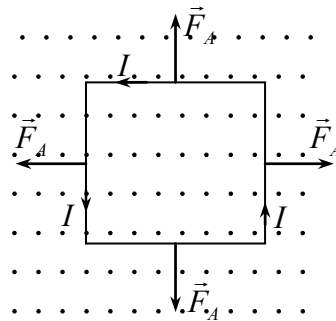


Рис. 7.30

Сили Ампера, що діють на ділянки рамки в положенні стійкої рівноваги

На всі ділянки рамки, які не паралельні вектору  $\vec{B}$ , діють сили Ампера; вони викликають деформацію рамки. На рис. 7.30 відображений стан стійкої рівноваги і діючі на сторони рамки сили.

Ці сили потрібно враховувати при розрахунках контурів, по яких проходять сильні струми і які знаходяться в сильних магнітних полях, на міцність ( $F_A \sim IB$ ).

- Результируюча сил, що діють на контур зі струмом, вміщений в *однорідне магнітне поле, дорівнює нулю*. Це справедливо не лише для випадку, зображеному на рис. 7.30, але і в загальному випадку для контура довільної форми і при довільному розміщенні контура у магнітному полі.
- Отримані вище закономірності справедливі для контурів довільної форми.

### 7.7.2 Робота при обертанні контура зі струмом (рамки зі струмом) у магнітному полі. Потенціальна енергія контура в магнітному полі.

Для того, щоб повернути рамку у бік збільшення кута  $\alpha$  (рис. 7.29) на  $d\alpha$ , потрібно виконати роботу проти сил Ампера

$$dA = Md\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha .$$

При обертанні на скінченний кут (від  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ ) робота

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_m B \sin \alpha d\alpha = p_m B (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (7.7.5)$$

(поле однорідне).

Ця робота йде на збільшення потенціальної енергії рамки:

$$A = U_2 - U_1 .$$

Навпаки, — повертаючись в початкове положення, контур вивільняє цю енергію. Відповідно робота

$$A' = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

(робота виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії контура).

Видно, що контуру можна поставити у відповідність потенціальні енергії

$$U_1 = -p_m B \cos \alpha_1 + C, \quad U_2 = -p_m B \cos \alpha_2 + C ,$$

де  $C$  — стала, яку покладаємо рівною нулю (у стані рівноваги, коли  $\alpha = \pi/2$ , потенціальна енергія  $U=0$ ).

Отже, потенціальна енергія контура, зумовлена взаємодією струму з магнітним моментом (формула (7.7.3)), дається виразом

$$U = -p_m B \cos \alpha . \quad (7.7.6)$$

Стан рівноваги ( $\alpha=0$ ,  $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$ ) відповідає мінімуму потенціальної енергії.

Відзначимо у цьому зв'язку, що положення контура і магнітної стрілки, зображені на рис. 7.9, відповідають мінімуму потенціальної енергії.



**Приклад.** Знайдемо роботу, яку потрібно виконати, щоб перевести контур із положення стійкої рівноваги у положення нестійкої рівноваги.

⇒ Скористаємося формулою (7.7.5). У стані стійкої рівноваги кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$   $\alpha_1=0$ , у стані нестійкої рівноваги вказаний кут  $\alpha_2=\pi$ . Тому

$$A = p_m B (\cos 0 - \cos \pi) = 2 p_m B.$$

### 7.7.3 Контур у неоднорідному магнітному полі

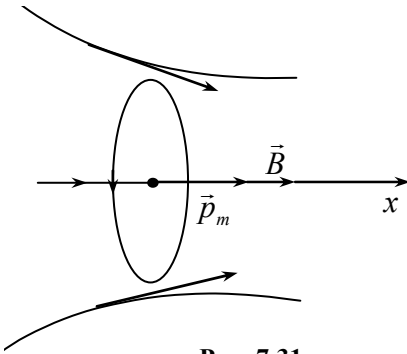


Рис. 7.31

Розглянемо тепер плоский контур вміщений у неоднорідне магнітне поле (рис. 7.31), в якому магнітна індукція змінюється найшвидше у напрямку осі  $x$ .

Будемо вважати, що орієнтація магнітного моменту  $\vec{p}_m$  відносно  $\vec{B}$  залишається сталою (у формулі (7.7.6)  $\alpha = \text{const}$ ). Тоді сила, що діє на контур у

напрямку осі  $x$ , визначиться із відомого співвідношення механіки, що зв'язує силу із зміною потенціальної енергії:

$$F_x = - \frac{\partial U(x)}{\partial x},$$

у даному випадку  $U(x) = -p_m B(x) \cos \alpha$  (формула (7.7.6)). Маємо:

$$F_x = p_m \frac{\partial B(x)}{\partial x} \cos \alpha \Rightarrow F_x = p_m \frac{\partial B(x)}{\partial x}.$$

Звідси маємо: на контур діятиме сила, спрямована в область поля з більшою магнітною індукцією. Зрозуміло, що при цьому також діятимуть сили, що деформують контур.

### 7.7.4 Електричний двигун постійного струму

Прояви сил, які діють у магнітному полі на провідники зі струмом або на рухомі заряджені частинки, можна спостерігати у багатьох пристроях і механізмах, зокрема, в електричних двигунах (моторах), в яких електрична енергія перетворюється у механічну роботу. Важливо, що при цьому саме

магнітне поле не втрачає своєї енергії; воно відіграє роль своєрідного посередника при цьому перетворенні.

Проілюструємо принцип роботи електричного двигуна постійного струму.

На рис. 7.32 наведена схема найпростішого двигуна постійного струму. Тут рамка, розміщена у сильному магнітному полі, може вільно обертатися навколо осі  $OO'$ . Принципова відмінність цієї схеми від зображеної на рис. 7.26 полягає в тому, що тут струм до рамки підводиться за допомогою колектора  $K$  (позначений на рис. 7.32 літерою  $K$ ), який складається з двох мідних напівкілець. Колектор обертається разом з рамкою. Струм до колектора підводиться через дві металічні пластини (щітки), які притискаються до напівкілець.

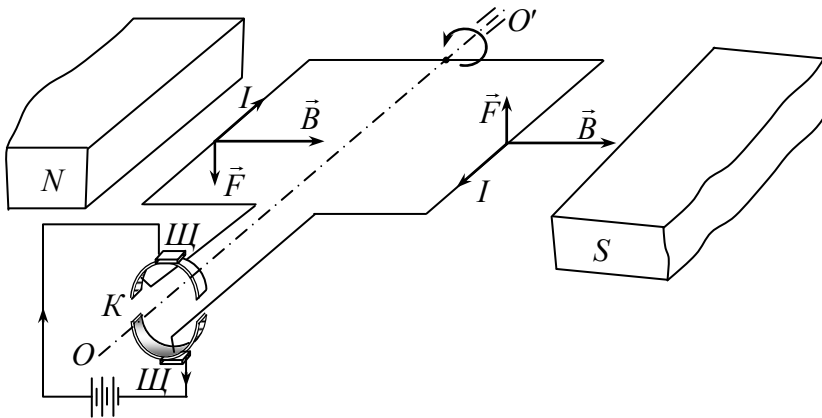


Рис. 7.32

Коли б не було напівкілець, рамка перейшла б із положення, показаного на рис. 7.32, у стан стійкої рівноваги, коли площина рамки була б перпендикулярна до ліній  $\vec{B}$ . За наявності напівкілець, в момент проходження рамкою (за інерцією) цього положення відбувається автоматична зміна напрямку струму у рамці. При цьому виникає пара сил, яка змушує рамку обертатися і далі у попередньому напрямку (проти годинникової стрілки). Так створюється неперервне обертання рамки.

Хоча промислові двигуни конструктивно і відрізняються від описаного (магнітне поле створюється електромагнітом, замість рамки використовується система витків, розміщених так, щоб отримати більш сталий обертовий

момент, витки намотані на залізне осердя для підсилення магнітного поля), принцип їх дії базується на простій моделі, описаній вище.

## 7.8 ТЕОРЕМА ПРО ЦИРКУЛЯЦІЮ МАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ У ВАКУУМІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

### 1. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції. 2. Застосування закону повного струму

Теорема про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  (закон повного струму для магнітного поля) стверджує важливі властивості магнітного поля. Вона є корисною при розрахунку магнітних полів провідників зі струмами.

#### 7.8.1 Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції

Циркуляцію вектора магнітної індукції<sup>1)</sup> по замкненому контуру  $L$  називається інтеграл

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (7.8.1)$$

де  $d\vec{l}$  — вектор елемента довжини контура, направлений вздовж обраного обходу контура,  $B_l = B \cos \alpha$  — проекція вектора  $\vec{B}$  на дотичну до контура (із врахуванням обраного напрямку обходу контура),  $\alpha$  — кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}$ .

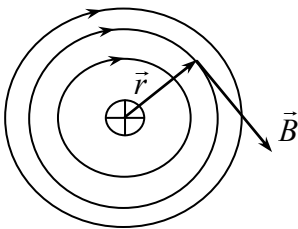


Рис. 7.33

Знайдемо циркуляцію вектора  $\vec{B}$  для випадку тонкого безмежно довгого прямолінійного провідника зі струмом вздовж кола, центр якого лежить на осі провідника, а площина його перпендикулярна до осі провідника. (рис. 7.33) Для даного випадку, як ми встановили (п. 7.3), лінії магнітної індукції співпадають з цим колом. Для всіх точок кола з радіусом  $r$  магні-

тна індукція  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , проекція вектора  $\vec{B}$  на напрям лінії магнітної індукції

<sup>1)</sup> Про циркуляцію вектора *напруженості електричного поля* йшлося у п. 1.4.1

(дотичної до кола)  $B = B \cos 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Отже, інтеграл (7.8.1) по контуру, який є колом з радіусом  $r$

$$\oint_L B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl,$$

$r$  — радіус магнітної силової лінії (лінії магнітної індукції). Тут  $\oint_L dl = 2\pi r$  є не що інше як довжина силової лінії. Отже,

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 I.$$

Інтегрування по колу іншого радіусу (вздовж іншої магнітної лінії) дасть той самий результат. Аналіз показує, що *результат інтегрування ( $\mu_0 I$ ) взагалі не залежить від форми контура*, важливо лише, щоб цей контур охоплював провідник зі струмом.

Отриманий результат є окремим випадком *загальної теореми про циркуляцію вектора  $\vec{B}$* : *Циркуляція вектора  $\vec{B}$  по довільному замкнутому контуру дорівнює добутку магнітної постійної  $\mu_0$  на алгебраїчну суму струмів, які охоплюються цим контуром. Тобто*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (7.8.2)$$

де  $n$  — число провідників зі струмами, які охоплюються контуром  $L$ . Кожний струм враховують стільки разів, скільки разів він охоплюється контуром. Додатнім вважається той струм, напрям якого пов'язаний із напрямом обходу контура правилом правого гвинта: головка гвинта обертається у напрямку обходу контура, а поступальний рух гвинта співпадає з напрямом струму; від'ємний струм відповідає поступальному руху гвинта у напрямку, протилежному до напрямку струму.

Теорему (7.8.2) називають також законом повного струму для магнітного поля у вакуумі.

Вкажемо на принципову відмінність результату (7.8.1) від випадку електричного поля (де циркуляція вектора  $\vec{E}$  дорівнювала нулю). Цим стверджується *вихровий характер магнітного поля на відміну від потенціального*

характеру електростатичного поля; електричне поле — потенціальне, магнітне — вихрове.

**Приклад.** Для двох струмів, показаних на рис. 7.34, закон повного струму має вигляд:

$$\oint_{L_1} \vec{B} d\vec{l} = I_1, \quad \oint_{L_2} \vec{B} d\vec{l} = I_1 - I_2.$$

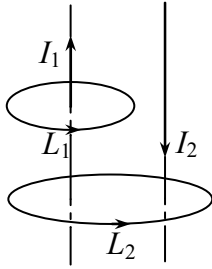


Рис. 7.34

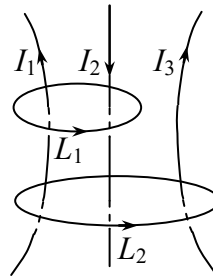


Рис. 7.35

Для трьох струмів (рис. 7.35) маємо:

$$\oint_{L_1} \vec{B} d\vec{l} = I_1 - I_2, \quad \oint_{L_2} \vec{B} d\vec{l} = I_1 + I_3 - I_2.$$

### 7.8.2 Застосування закону повного струму

Подібно до того, як в електростатиці електричні поля з симетричним розподілом електричних зарядів зручно розраховувати за допомогою теореми Гаусса, розрахунок магнітних полів, що характеризуються симетрією, досить просто здійснюється за допомогою теореми про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  (без використання закону Біо-Савара-Лапласа). Наведемо два приклади.

#### 1. Магнітне поле соленоїда.

Визначимо, користуючись законом повного струму, магнітну індукцію однорідного магнітного поля всередині довгого соленоїда. На рис. 7.36 зображений соленоїд довжиною  $l$ , який має  $N$  витків.

Розрахуємо циркуляцію вектора  $\vec{B}$  для прямокутного конту-

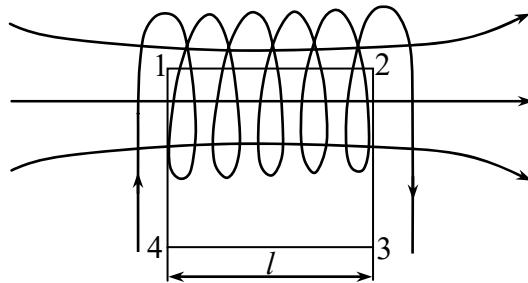


Рис. 7.36

ра  $L$ , показаного на рис. 7.36.

За законом повного струму

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I N_1,$$

оскільки контур  $L$  охоплює  $N_1$  витків. З іншого боку, —

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl.$$

Охарактеризуємо доданки останнього виразу. Якщо ділянка 3-4 проходить далеко від соленоїда, то тут можна покласти  $B=0$  (поле поза достатньо довгим соленоїдом практично відсутнє). Далі: ділянки 2-3 і 4-1 контура перпендикулярні до ліній магнітної індукції, тому відповідні інтеграли дорівнюють нулю (тут  $B_l=0$ ). Таким чином, приходимо до виразу

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl \Rightarrow B l_1 = \mu_0 I N_1,$$

де  $l_1$  — довжина ділянки 1-2. Звідси отримуємо:

$$B = \mu_0 I \frac{N_1}{l_1} = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 I n, \quad (7.8.3)$$

де  $n = \frac{N}{l}$  — кількість витків соленоїда, що припадають на одиницю довжини соленоїда. Якщо знехтувати краєвими ефектами в областях, близьких до торців соленоїда, то останній вираз можна прийняти за величину магнітної індукції всередині достатньо довгого соленоїда.

2. *Магнітне поле тороїда. Тороїд* — кільцева котушка, витки якої намотані на осердя, що має вигляд тора (рис. 7.37). Можна переконатися, що поле поза тороїдом відсутнє і лінії магнітної індукції є колами, центри яких лежать на осі тороїда. Радіуси цих кіл лежать в межах  $R_1 < R < R_2$ , де  $R_1$  і  $R_2$  — внутрішній і зовнішній радіуси тороїда. Із теореми (7.8.2) знаходимо *середню* магнітну індукцію в торі:

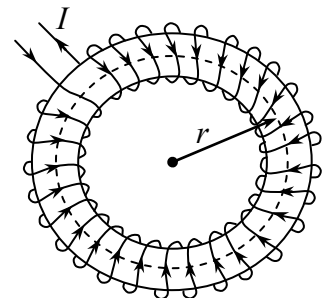


Рис. 7.37

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_i dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 IN,$$

де  $L$  — контур, що проходить по колу з радіусом  $R_{cp} = \frac{R_1 + R_2}{2}$  (і охоплює  $N$  провідників, струми в яких однаково напрямлені).

Із останньої формули маємо вираз для середнього значення магнітної індукції всередині тора:

$$B_{cp} 2\pi R_{cp} = \mu_0 IN \Rightarrow B_{cp} = \frac{\mu_0 IN}{2\pi R_{cp}},$$

де  $N$  — число витків.

## 7.9. ПОТІК ВЕКТОРА МАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ

### 1. Потік магнітної індукції. 2. Теорема Гаусса для магнітного поля

#### 7.9.1 Потік магнітної індукції

1. *Однорідне магнітне поле.* В однорідному полі потоком вектора магнітної індукції (магнітним потоком) через площадку  $S$  називається скалярна фізична величина, яка дорівнює

$$\Phi_B = BS \cos \alpha = \vec{B}\vec{S} = B_n S, \quad (7.9.1)$$

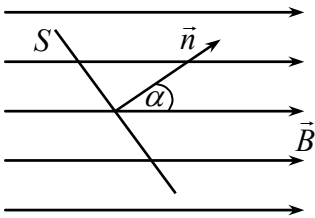


Рис. 7.38

$B_n = B \cos \alpha$  — проекція вектора  $\vec{B}$  на напрямок нормалі  $\vec{n}$  до площадки  $S$  (рис. 7.38),  $\alpha$  — кут між векторами  $\vec{n}$  і  $\vec{B}$ ,  $\vec{S} = S\vec{n}$ . Магнітний потік — величина алгебраїчна. Магнітний потік може бути як додатнім, так і від'ємним (залежно від кута  $\alpha$ ).

Якщо площадка розміщена перпендикулярно до вектора  $\vec{B}$ , то

$$\Phi_B = BS. \quad (7.9.2)$$

Одиницею магнітного потоку є *вебер* (Вб). Як видно із останньої формули, 1 Вб — магнітний потік, що проходить через плоску поверхню площею  $1 \text{ м}^2$ , яка розміщена перпендикулярно до однорідного магнітного поля, магнітна індукція якого дорівнює 1 Тл;  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

2. *Неоднорідне магнітне поле* (рис. 7.39).

У цьому випадку вихідною величиною є магнітний потік  $d\Phi$  через елементарну площадку  $dS$ :

$$d\Phi = B dS \cos \alpha = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS, \quad (7.9.3)$$

де  $B_n = B \cos \alpha$ ,  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ .

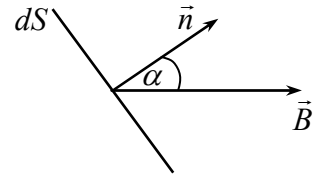


Рис. 7.39

Потік вектора магнітної індукції через довільну поверхню  $S$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (7.9.4)$$

Якщо поле однорідне, то з цієї формули отримується формула (7.9.2).

**Приклад.** Знайдемо магнітний потік через соленоїд, всередині якого поле можна вважати однорідним. За формулою (7.8.3)  $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$ , тому магнітний потік через один виток

$$\Phi = \frac{\mu_0 NI}{l} S,$$

де  $S$  — площа витка. Повний магнітний потік через соленоїд (потокозчеплення)

$$\Psi = \Phi N = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S.$$

### 7.9.2 Теорема Гаусса для магнітного поля

За законом Гаусса в електростатиці (п. 1.3.7) потік напруженості електричного поля через довільну замкнуту поверхню визначається алгебраїчною сумою зарядів, які охоплюються цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

В протилежність до цього *магнітний потік крізь довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю:*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (7.9.5)$$

Це — теорема Гаусса для магнітного поля. Теорема Гаусса відображає той факт, що магнітних зарядів не існує. Наслідком цього є замкнутість ліній ма-



гнітної індукції, тому скільки магнітних ліній ввійде в замкнуту поверхню, стільки ж із неї вийде. Якщо вважати лінії, які виходять із області, обмеженої поверхнею, додатніми, а лінії, що входять, — від'ємними, маємо, що потік ліній магнітної індукції дорівнює нулю.

**Приклад.** Проілюструємо справедливність (7.9.5) на прикладі замкнутої циліндричної поверхні (рис. 7.40), що знаходиться всередині соленоїда (де магнітне поле однорідне).

⇒ Потік вектора  $\vec{B}$  через зовнішню поверхню можна записати так:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{B} d\vec{S}_3.$$

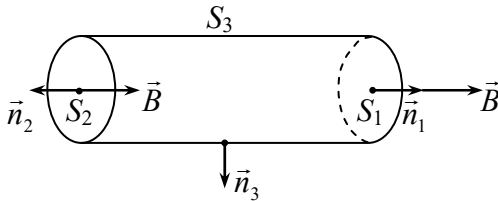


Рис. 7.40

Тут інтеграл зліва означає магнітний потік через всю поверхню циліндра, два перших інтеграли справа — потоки через основи циліндра, а третій — магнітний потік через бічну поверхню.

Оскільки вектор  $\vec{B}$  спрямований паралельно осі циліндра

( $\vec{B} \perp \vec{n}_3$ ), то останній інтеграл дорівнює нулю; дорівнює нулю і потік через основи циліндра:

$$\int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 = \int_S \vec{B} (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) dS = \int_S \vec{B} (\vec{n}_1 - \vec{n}_1) dS = 0$$

$$(\vec{n}_1 = -\vec{n}_2).$$

## 7.10 РОБОТА ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРОВІДНИКА ЗІ СТРУМОМ І КОНТУРА ЗІ СТРУМОМ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

1. На провідник зі струмом, поміщений у магнітне поле, діє сила Ампера. Якщо провідник переміщується, то при цьому буде виконуватися робота.

Знайдемо роботу, яка виконується при переміщенні провідника — рухомої перемички  $KL$  (рис. 7.41) вздовж двох направляючих провідників  $AB$  і  $CD$ .

Якщо магнітне поле, в якому знаходиться провідник, спрямоване так, як показано на рис. 7.41, то сила Ампера, напрям якої визначається за правилом лівої руки, при безмежно малому переміщенні провідника  $KL$  виконуватиме роботу

$$\delta A = F dx = I b l dx,$$

$l dx = dS$  — площа, перетнута

провідником,  $B dS$  — магнітний потік через площу  $dS$ . Отже,

$$\delta A = I d\Phi. \quad (7.10.1)$$

При скінченному переміщенні

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi.$$

Якщо сила струму — величина стала, то

$$A = I \Delta\Phi, \quad (7.10.2)$$

де  $\Delta\Phi$  — зміна магнітного потоку через контур. Із рис. 7.41 видно, що  $\Phi_1 = B a l$ ,  $\Phi_2 = B(a + b)l$ ,  $\Delta\Phi = B \Delta S$  ( $\Delta S$  — зміна площі контура, охопленого струмом).

## 2. Переміщення замкнутого контура зі струмом у магнітному полі.

В додаток до обертання контура у магнітному полі, розглянутого у п. 7.7, врахуємо і можливість його поступального переміщення. Нехай плоский контур зі струмом переміщується в площині рисунка 7.42 із положення зліва у положення справа (позначене штриховою лінією). Магнітне поле спрямоване перпендикулярно до площини рисунка — «від нас». В початковому положенні контур пронизує магнітний потік  $\Phi_1 = B_1 S$ , в кінцевому — магнітний потік  $\Phi_2 = B_2 S$ , де  $B_1$  — середнє значення магнітної індукції в початковому положенні контура,  $B_2$  — в кінцевому.

Можна показати, що і в даному випадку робота сили Ампера при переміщенні контура у магнітному полі дається також формулою (7.10.2) —

$$A = I \Delta\Phi,$$

де  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ .

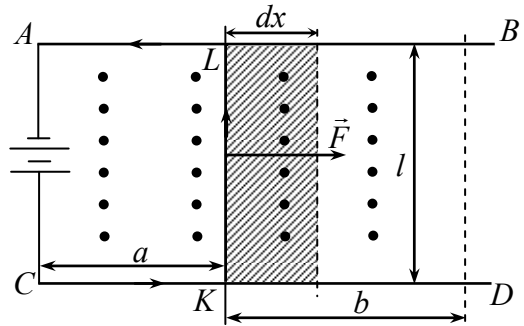


Рис. 7.41

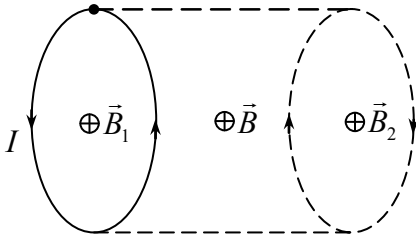


Рис. 7.42

Отже, робота по переміщенню замкнутого провідника зі струмом у магнітному полі дорівнює добутку сили струму в контурі на зміну магнітного потоку, крізь поверхню, обмежену контуром.

Формула (7.10.2) справедлива для контура будь-якої форми при довільному його переміщенні. Із цієї формули

зокрема, отримується формула для роботи, виконаної магнітним полем при обертанні рамки (див. задачу № 18 у п. 7.11).

Якщо робота виконується зовнішніми силами проти сил магнітного поля, то ця робота

$$A = -I \Delta \Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

де  $\Phi_1$  — початкове значення магнітного потоку,  $\Phi_2$  — кінцеве.

**Приклад.** Прямокутну рамку  $ABCD$  зі струмом, вміщену в однорідне магнітне поле з індукцією  $B$ , переводять у нове положення (рис. 7.43). Знайти роботу, виконану при цьому, якщо одного разу здійснюється паралельний перенос, а другий раз — поворот навколо сторони  $CD$ . Площа рамки  $S$ .

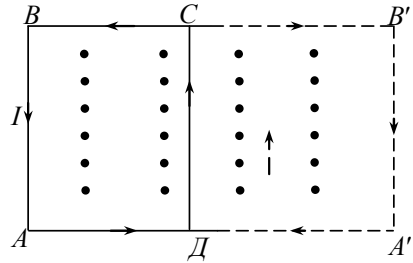


Рис. 7.43

Лінії  $\vec{B}$  спрямовані «до нас»

$\Rightarrow$  У першому випадку  $A=0$ , бо магнітний потік не змінюється (поле однорідне). У другому випадку

$$A = -\Delta \Phi = \Phi_1 - \Phi_2,$$

де  $\Phi_1 = BS$ ,  $\Phi_2 = -BS$  (додатня нормаль до контура співпадає із напрямком вектора  $\vec{B}$  — «до нас»).

Отже,

$$A = 2BIS.$$

Цей результат співпадає із отриманим у п. 7.7.2.

## 7.11 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 7.11.1 Запитання і задачі

1. На шліфувальних верстатах для обробки сталевих деталей використовують електромагнітний тримач замість механічного. В чому його перевага?

2. Як побудувати сильний електромагніт, якщо вимагається, щоб сила струму була порівняно слабкою?

3. Сильний підковоподібний магніт утримує тіло А (рис. 7.44). Підйомна сила магніта дещо більша від ваги тіла А. Якщо тепер замкнути магніт пластиною В, то тіло А впаде. Цей дослід ілюструє дію «магнітного» шунта. Поясніть явище.

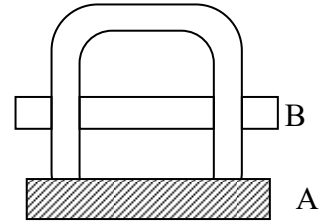


Рис. 7.44

4. Відомо, що залізні віконні ґрати з часом намагнічуються. Поясніть це явище.

5. По довгому прямому металевому дроті протікає електричний струм. Чи можна позбутися його магнітного поля, рухаючись вздовж дроту зі швидкістю, яка дорівнює середній швидкості впорядкованого руху електронів у ньому?

6. Як спрямована сила, з якою магнітне поле Землі діє на горизонтально розташований провідник зі струмом, якщо: 1) провідник розміщений у площині магнітного меридіана і струм протікає з півдня на північ? 2) провідник перпендикулярний до площини магнітного меридіана і струм протікає із заходу на схід?

7. Магнітне поле Землі спрямовує додатньо заряджені космічні частинки в одному напрямку, від'ємно заряджені частинки — в протилежному. Які ці напрямки? Будемо вважати, що всі частинки спочатку рухалися паралельно до площини екватора.

8. У досліді Ерстеда магнітна стрілка не притягується до провідника зі струмом і не відштовхується, а лише повертається. Тут проявляється важлива особливість магнітних сил. Яка?

9. Як буде орієнтуватися поплавок із соленоїдом, якщо кінці соленоїда під'єднані до цинкової та мідної пластин, що опущені у розчин сірчаної кислоти.

10. Спостерігається така ситуація: одна котушка при ввімкненні її в електричне коло притягує металеву пластинку, друга котушка, — ззовні така сама, — ні. Чому?

11. Знайдіть максимальний обертальний момент, що діє з боку магнітного поля Землі на котушку, яка має 100 витків і по якій тече струм 10 А. Діаметр котушки 5 см. Магнітна індукція поля Землі  $B=0,5 \cdot 10^{-4}$  Тл.

12. Нехай є два елементарних струми  $I_1 \Delta \vec{l}_1$  і  $I_2 \Delta \vec{l}_2$ . Сила Ампера  $\vec{F}_{12}$ , що діє на перший струм з боку другого визначається за формулою (7.5.1), в якій  $\vec{B}$  — магнітна індукція поля створеного елементом струму  $I_2 \Delta l_2$  (визначається за законом Біо-Савара-Лапласа). Запишіть формулу для сили  $\vec{F}_{12}$ , в яку в явній формі входив би вираз для  $\vec{B}$ .

13. Чи можна взаємодію провідників зі струмом розглядати як кулонівську взаємодію електричних зарядів?

14. Які сили діють на витки котушки, по якій проходить струм?

15. Покажіть, що вираз для сили Лоренца можна отримати із виразу для сили Ампера.

16. Рамка знаходиться у магнітному полі, створеному прямолінійним провідником зі струмом (рис. 7.45). Провідник і дві сторони рамки, паралельні до нього, лежать в одній площині. Знайти силу, з якою провідник діє на рамку. Взяти  $I_1=10$  А,  $I_2=5$  А,  $a=1$  см,  $l=50$  см.

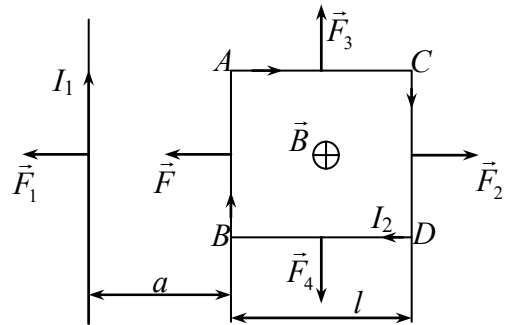


Рис. 7.45

17. По досить довгому нерухому провіднику М і паралельному до нього провіднику N довжиною  $l$  течуть протилежно спрямовані струми  $I_1$  і  $I_2$ . Як буде переміщатися провідник N із початкового положення (відстань від провідника М є  $r_1$ ) в кінцеве ( $r_2$ )?

18. Робота, що виконується при переміщенні провідника (або контура) за умови, що струм у провіднику сталий, дається формулою  $A = I \Delta \Phi$  (див.

п. 7.10). Як узгодити вираз для роботи, знайдений у попередній задачі, з цією формулою?

19. Визначити обертовий момент, що діє на диск двигуна постійного струму, описаного у п. 7.6.5, і потужність такого двигуна. Частота обертання диска  $\nu$ .

20. В центрі вертикально розташованого витка радіуса  $R$  знаходиться магнітна стрілка, що встановлена у горизонтальній площині і лежить у площині витка при відсутності струму у витку. Якщо по витку проходить струм  $I$ , то стрілка повертається на кут  $\alpha$ . Знайти горизонтальну складову магнітного поля Землі.

21. По дротині з перерізом  $S$ , зігнутої у формі кільця, протікає струм силою  $I$ , що зумовлює в центрі кільця магнітну індукцію  $B$ . Яка різниця потенціалів між кінцями провідника?

22. По тонкому кільцю радіусом  $r=10$  см, підвішеному між полюсами магніта, проходить струм  $I=2$  А. Максимальний момент сил, що діє на кільце  $M_{max}=6 \cdot 10^{-4}$  Н·м. Визначити магнітну індукцію  $\vec{B}$  між полюсами магніта.

23. Вивести формулу (7.4.7) для магнітної індукції прямолінійного струму.

### 7.11.2 Відповіді

1. По-перше, такий тримач не деформує деталь. По-друге він зручніший при зміні деталей.

2. Потрібно використати тонкий дріт і зробити велике число витків.

3. Кількість магнітних силових ліній, які будуть пронизувати тіло А зменшиться (частина їх буде замикатися пластинкою В).

4. Залізні предмети намагнічуються у магнітному полі Землі. Намагнічування як вертикально, так і горизонтально розташованих предметів, доводить, що магнітне поле Землі має як вертикальну, так і горизонтальну складові.

5. Не можна. Відносно спостерігача, що рухається так, як задано в умові, магнітне поле упорядкованого руху електронів справді зникне, проте упорядкований рух будуть здійснювати позитивні іони кристалічної ґратки провідника. Наслідком цього буде поява такою магнітного поля, як і для нерухомого провідника.

6. За правилом лівої руки знаходимо, що сила Ампера у першому випадку буде спрямована зі сходу на захід, у другому — буде спрямована дотула (перпендикулярна до напрямку магнітного меридіана).

7. За правилом лівої руки знаходимо, що сила Лоренца відхилятиме додатньо заряджені частинки на схід, а від'ємно заряджені — на захід.

8. На відміну від гравітаційних і кулонівських (центральных сил) магнітні сили мають вихровий характер. Магнітна індукція — силова характеристика провідника зі струмом викликає *лише обертання стрілки* (за умови, що поле створене провідником — однорідне). Цю особливість магнітного поля Ерстед охарактеризував так: «Із зроблених спостережень можна зробити висновок, що навколо провідника утворюється вихор». Математично вихровий характер магнітного поля стверджується теоремою про циркуляцію магнітної індукції.

9. По соленоїду піде струм, і він стане аналогом магнітної стрілки (підставка вільно обертатиметься у розчині). Отже, соленоїд (і поплавков) встановиться у напрямку північ-південь.

10. Друга котушка має так звану біфілярну обмотку, коли струм у двох сусідніх витках протилежно спрямований; магнітна дія одних витків компенсується дією інших. Таку котушку зі струмом можна розглядати як два, встановлені один в інший, магніти з протилежно спрямованими полюсами.

$$11. \vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] \Rightarrow M = p_m B \sin \alpha \Rightarrow M_{max} = p_m B,$$

$$p_m = ISN = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 100 \approx 2 \text{ А} \cdot \text{м}^2,$$

$$M_{max} = 2 \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 10^{-4} \text{ А} \cdot \text{м}.$$

Це — дуже мала величина і спостереження обертання такої котушки є не простою експериментальною задачею. З іншого боку, малість величини  $M_{max}$ , зумовленої магнітним полем Землі, дозволяє нехтувати цим впливом при дослідженні магнітних полів, створених постійними магнітами і провідниками зі струмом.

12. Елемент струму  $I_2 \vec{\Delta l}_2$  створює в місці знаходження елемента  $I_1 \vec{\Delta l}_1$  поле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R^3} [\vec{\Delta l}_2 \cdot \vec{R}],$$

де  $\vec{R}$  — вектор, спрямований від другого елемента до першого. Сила Ампера

$$\vec{F}_{12} = I_1 [\Delta \vec{l}_1 \cdot \vec{B}],$$

отже

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R^3} [\Delta \vec{l}_1 [\Delta \vec{l}_2 \cdot \vec{R}]].$$

Звідси, зокрема, можна отримати результати, викладені у п. 7.5 щодо взаємодії паралельних струмів. В цьому корисно перекоонатися самостійно; це буде непогана вправа і на розуміння правил векторної алгебри.

13. Ні. В провідниках приблизно однакова кількість позитивних і негативних зарядів (протонів і нейтронів), — вони електронейтральні.

14. Діють «поздовжні» і «поперечні» сили. Перші зумовлені притяганням паралельних струмів, — вони стягують котушку. Другі виникають внаслідок дії магнітного поля котушки на витки у радіальному напрямку (правило лівої руки!); ці сили намагаються розірвати витки.

15. Розглянемо ділянку провідника довжиною  $\Delta l$  і поперечним перерізом  $S$ . Число носіїв струму (електронів) на цій ділянці

$$N = nS\Delta l,$$

де  $n$  — концентрація носіїв. Сила струму

$$I = jS = qn\mathcal{G}S,$$

де  $q$  — заряд носія,  $\mathcal{G}$  — середня швидкість впорядкованого руху носіїв струму. Силу Ампера можна уявити як результат дії магнітного поля на  $N$  носіїв, тому

$$F_n = \frac{F_A}{N} = \frac{IB\Delta l \sin \alpha}{nS\Delta l} \Rightarrow F_n = q\mathcal{G}B \sin \alpha.$$

16. Тут поле, в якому знаходиться рамка, неоднорідне і лінії  $\vec{B}$  цього поля (створеного прямолінійним провідником зі струмом) спрямовані за площину рисунка «від нас».

На сторони  $AC$  і  $BD$  діють сили Ампера, які рівні за величиною, але протилежні за напрямом (бо струми тут протилежно спрямовані), тому  $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ . Результиуюча сила, під дією якої рамка буде наближатися до провідника,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow F = F_1 - F_2,$$



оскільки сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  протилежно спрямовані. За формулою (7.5.3)

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}, \quad F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(a+l)},$$

тому

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l^2}{a(a+l)}.$$

Чисельно

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 0,5^2}{2\pi \cdot 10^{-2} (0,5 + 0,01)} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

17. Провідник переміщається під дією сили Ампера, яка дорівнює

$$F = I_2 B l,$$

де  $B$  — магнітна індукція магнітного поля, створеного струмом  $I_1$ . Елементарна робота, виконана силою  $\vec{F}$ ,

$$d\vec{A} = \vec{F} d\vec{r} = F dr.$$

Повна робота

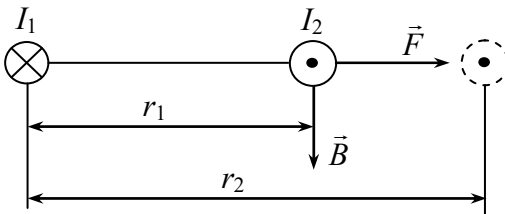


Рис. 7.46

Струми спрямовані перпендикулярно до площини рисунка. Вектор  $\vec{B}$  (магнітна індукція поля, створеного струмом  $I_1$ ) і вектор  $\vec{F}$  (сила Ампера) лежать в площині рисунка

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} I_2 B l dr.$$

Тут, на відміну від випадку однорідного поля,  $B$  не можна винести із під знака інтегралу, бо

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

— величина змінна. Після інтегрування маємо:

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

18. Протиріччя між формулами немає:

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = I_2 \left( \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln r_1 \right) = I_2 \Delta\Phi;$$

тут зміна магнітного потоку зумовлена зміною із віддаллю магнітного поля, створеного нерухомим провідником

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta r_1}{r_1}\right) \approx \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \cdot \frac{\Delta r}{r_1}$$

за умови  $\Delta r \ll r_1$  (тут використана наближена формула  $\ln(1+x) \approx x$ , яка справедлива при  $x \ll 1$ ). За цієї умови ( $\Delta r \ll r_1$ ) поле на проміжку  $\Delta r$  можна наближено вважати однорідним, тому

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l \cdot \Delta r}{2\pi r_1} = I_2 B \Delta S = I_2 \Delta\Phi,$$

де  $B$  — магнітна індукція, створена нерухомим провідником,  $\Delta\Phi$  — зміна магнітного потоку, зумовлена переміщенням рухомого провідника.

19. 1) На елемент струму  $I dl$ , що лежить на відстані  $l$  від осі обертання диска, діятиме сила Ампера (рис. 7.47)

$$dF = IB dl$$

і момент сили

$$dM = dF \cdot l = IB l dl.$$

Момент сил, що діятиме на диск,

$$M = \int_0^R IB l dl = IB \frac{R^2}{2}.$$

2) Робота, яка виконана двигуном при повороті диска на кут  $d\varphi$ ,

$$\delta A = M d\varphi = M \omega dt = M 2\pi \nu dt.$$

Потужність двигуна

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{2\pi \nu IB R^2}{2} = \pi \nu IB R^2.$$

20. При відсутності струму горизонтальна складова геомагнітного поля  $B_r$  лежить у площині витка (стрілка займає положення вздовж цієї складової). Індукція магнітного поля витка перпендикулярна до площини витка (і вектору  $\vec{B}_r$ ). За умови, що по витку проходить струм, магнітна стрілка встановлюється вздовж вектора  $\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_c$ , де  $B_c = \frac{\mu_0 I}{2R}$  — магнітна індукція, зумовлена струмом провідника в центрі контура. Із рис. 7.48 маємо:

$$B_r = B_c \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\mu_0 I}{2R} \operatorname{ctg} \alpha.$$

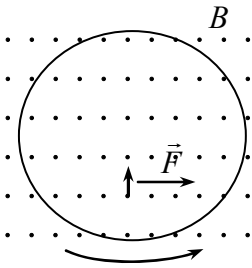


Рис. 7.47

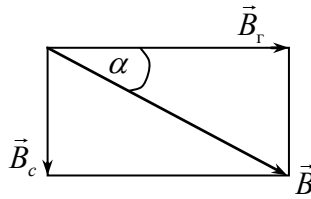


Рис. 7.48

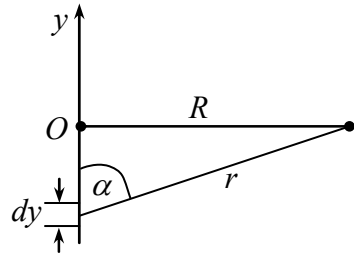


Рис. 7.49

21. За законом Ома для ділянки кола

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR = I\rho \frac{l}{S},$$

де  $l$  — довжина кільця,  $\rho$  — питомий опір провідника,  $S = \pi r^2$  ( $r$  — радіус кільця),

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi}{2l} = \frac{\mu_0 \pi l}{l}.$$

Знаходимо  $l$  з останньої формули і підставляємо у першу. Маємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mu_0 \pi l^2 \rho}{BS}.$$

$$22. \vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] \Rightarrow M = p_m B \sin \alpha \Rightarrow M_{\max} = p_m B, (\alpha = \frac{\pi}{2}!).$$

Обертвий момент

$$p_m = IS = \pi r^2 I,$$

тому

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} = \frac{M_{\max}}{\pi r^2 I} \approx 10^{-4} \text{ Тл.}$$

23. Величини  $\alpha$ ,  $r$  і  $y$  пов'язані між собою:  $y = -R \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $R = r \sin \alpha$ .

Тому

$$dy = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

і, отже,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha}{r^2} dy = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

## РОЗДІЛ 8

### МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ РЕЧОВИНИ

*Характерна риса магнітів — їх стать. Той сорт магніта, що був знайдений в Трої, має чорний колір і жіночу стать і, внаслідок цього, позбавлений притягуючої сили<sup>1)</sup>*

*Пліній, I ст.н.е.*

*Феромагнетизму суть з'ясована вже нині:*

*В обмінних силах вся причина.*

*Вони зумовлюють в доменах лад*

*І електронні спіни тут стоять*

*Шиковані, як військо на парад.*

*Так створює гармонію у світі*

*Мізерних сил сумарний результат.*

*Дж. Андайк*

Якщо в *магнітне поле*, утворене провідниками, внести ту або іншу речовину, поле зміниться. Це пояснюється тим, що будь-яке тіло є *магнетиком*, тобто здатне під дією зовнішнього магнітного поля створювати своє власне (внутрішнє) поле — намагнічуватися.

У цьому розділі будуть розглянуті загальні властивості магнітних полів, магнетиків та їх характеристики. Базовим при цьому є досліді Ерстеда і Ампера, гіпотеза Ампера про «молекулярні струми», які сучасна фізика пов'язує із неперервним рухом електронів у атомі<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Пліній, на жаль, не наводить аргументів на користь цього твердження

<sup>2)</sup> Якщо провести аналогію між атомом і Сонячною системою, то «обертання електрона по орбіті» навколо ядра і «власне обертання» електрона відповідають обертанню Землі навколо Сонця і добовому обертанню Землі; зауважимо: це дуже приблизна аналогія

## 8.1 МАГНІТНІ МОМЕНТИ ЕЛЕКТРОНІВ, АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

### 1. Орбітальний магнітний момент електрона. 2. Власний (спіновий) магнітний момент електрона. 3. Магнітні моменти атомів і молекул

1. Електрон, рухаючись навколо ядра по коловій орбіті радіусом  $r$ , за  $N$  обертів переносить заряд

$$q = eN,$$

де  $e$  — заряд електрона. Цьому можна поставити у відповідність силу струму

$$I = \frac{q}{t} = e \frac{N}{t} \Rightarrow I = e\nu,$$

де  $t$  — час, за який переноситься заряд  $q$ ,  $\nu$  — частота обертання (кількість обертів за секунду). Оскільки  $\nu = \frac{1}{T}$ , де  $T$  — період обертання, а  $T = \frac{2\pi r}{\vartheta}$  ( $\vartheta$  — швидкість обертання електрона),  $r$  — радіус орбіти електрона, то

$$I = \frac{e\vartheta}{2\pi r} = \frac{e\omega}{2\pi}, \quad (8.1.1)$$

де  $\omega$  — кутова швидкість (циклічна частота) обертання електрона.

Таким чином, електрону в атомі можна поставити у відповідність струм  $I$ , зумовлений неперервним обертанням електрона навколо атомного ядра. Цей струм можна характеризувати *орбітальним магнітним моментом* (див. п. 7.2)

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (8.1.2)$$

де  $S = \pi r^2$ . За напрямом вектор  $\vec{p}_m$  співпадає з напрямом додатньої нормалі до поверхні, обмеженої струмом  $I$  (рис. 8.1). Механічний обертовий момент (момент імпульсу) електрона  $\vec{L} = -m\vartheta r\vec{n}$  спрямований протилежно до вектора  $\vec{p}_m$ . Отже,

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

де величина  $-\frac{e}{2m}$  називається *гіромагнітним відношенням орбітальних моментів*.

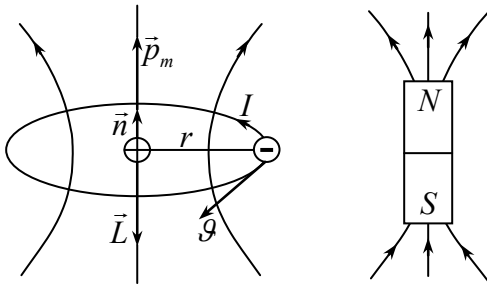


Рис. 8.1

Електрону, що рухається по орбіті навколо ядра, можна поставити у відповідність «елементарний магнітик» — (рис. 8.1). Цей магнітик може взаємодіяти із зовнішнім магнітним полем. Отже, за магнітним проявом електрон на орбіті — аналог колового струму.

У квантовій теорії атома поняття «орбітальний магнітний момент електрона» суттєво уточнюється. Виявляється, що величина орбітального магнітного момента, його проекція на напрям зовнішнього магнітного поля можуть набувати лише певних (квантованих) значень, які кратні одиниці магнітного момента електрона — *магнетону Бора* електрона  $\mu_B$  (або бути рівними нулю)

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (8.1.3)$$

де  $e$  і  $m$  — заряд і маса електрона,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$  — стала Планка). Числове значення магнетона Бора  $\mu_B \approx 9,27 \cdot 10^{-24}$  А·м<sup>2</sup>.

2. Електрон характеризується і *власним механічним моментом* — *спіном*. З «обертанням» електрона, як зарядженої частинки, навколо «власної» осі, пов'язане існування *власного (спінового) магнітного момента*  $\vec{p}_{ms}$ . Наявність у електрона власного магнітного момента ілюструють рис. 8.2 – 8.3. Наявність двох напрямів  $\vec{p}_{ms}$  можна пов'язати з «обертанням» електрона за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки.

Відзначимо при цьому, що «обертання електрона навколо власної осі» потрібно розуміти дуже умовно: насправді ж наявність власних механічного  $L_s$  і магнітного  $p_{ms}$  моментів електрона є невід'ємною властивістю електрона (подібно до того, як йому властиві маса  $m$  і заряд  $e$ ); власні механічний і магнітний моменти мають не класичну, а квантову природу<sup>1)</sup>.

За квантовою механікою

<sup>1)</sup> Див. у цьому зв'язку задачу № 8 у п. 8.9

$$\vec{p}_{ms} = -q_s \vec{L}_s,$$

де  $q_s = -\frac{e}{m}$  — гіромагнітне відношення спінових моментів. Модуль спіну електрона

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar;$$

модуль спінового магнітного моменту

$$p_{ms} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \cdot \frac{e}{m} = \sqrt{3} \mu_B.$$

Проекція  $\vec{p}_{ms}$  на напрям зовнішнього магнітного поля може набувати лише два значення  $+\mu_B$  і  $-\mu_B$ .

Таким чином, магнітний момент електрона складається із орбітального та спінового магнітних моментів.

3. Магнітний момент атома (іона, молекули)<sup>1)</sup> визначається сумарним магнітним моментом електронів і атомних ядер. Проте магнітні моменти ядер в тисячі разів менші магнітних моментів електронів і їх внеском можна нехтувати.

Отже, магнітний момент атома є сумою орбітальних та спінових магнітних моментів електронів, що входять до складу атома:

$$\vec{p}_{ma} = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}. \quad (8.1.4)$$

Магнетон Бора — найменше ненульове значення проекції магнітного моменту на напрям магнітного поля, тому можна стверджувати (на основі (8.1.4)), що проекція магнітного моменту атома на напрям магнітного поля або дорівнює нулю, або кратна  $\mu_B$ . При цьому може виявитися, що, внаслідок особливостей заповнення електронних станів в атомі, один із внесків може бути значно менший від іншого або навіть зникати. Може бути рівним нулю і результуючий момент  $\vec{p}$ . Так, наприклад, в атомах, які належать до діамаг-

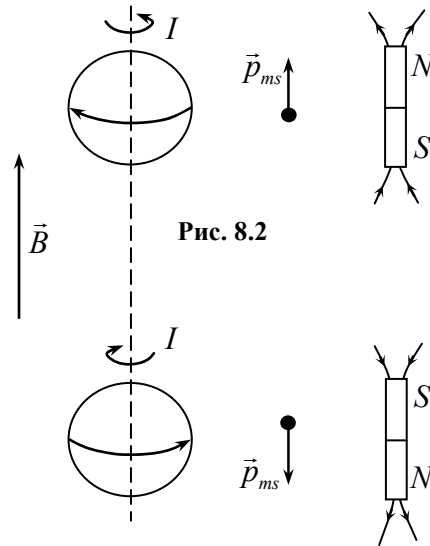


Рис. 8.2

Рис. 8.3

<sup>1)</sup> Надалі будемо вживати вираз *магнітний момент атома*

нітних речовин, магнітний момент атома дорівнює нулю, а в атомах перехідних елементів (група заліза), де є незаповнена  $3d$ -оболонка, основний внесок в магнітний момент атома дають спінові магнітні моменти.

**Приклад.** У атома заліза орбітальні магнітні моменти 26 електронів взаємно скомпенсовані. Скомпенсовані (спарені) і власні магнітні моменти цих електронів, за виключенням двох. Тобто магнітний момент атома заліза буде визначатися двома неспареними електронами. Їх власні магнітні моменти орієнтуються паралельно, тому атомний магнітний момент заліза  $p_m = 2\mu_B = 1,87 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , що узгоджується із спостережуваним значенням.

## 8.2 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МАГНЕТИКІВ

**1. Магнітне поле в магнетику. Магнітна проникність середовища. Типи магнетиків. 2. Магнітна сприйнятливість.**

### 8.2.1 Магнітне поле в магнетику. Магнітна проникність середовища. Типи магнетиків

Нехай всередині достатньо довгого соленоїда<sup>1)</sup> знаходиться осердя. Якщо при відсутності осердя магнітна індукція всередині соленоїда була  $\vec{B}_0$ , а з осердям стала рівною  $\vec{B}$ , то це означає, що осердя намагнітилося — створило своє магнітне поле з індукцією  $\vec{B}'$ ;

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (8.2.1)$$

Поле  $\vec{B}_0$  створене *макрострумами* (струмами, що течуть у провідниках), поле  $\vec{B}'$  зумовлене *мікрострумами* (орбітальним рухом електронів та «власним обертанням» електронів). Поміщуючи всередині соленоїда інші речовини, можна досліджувати прояв їх магнітного поля.

Величина  $\mu$ , що дорівнює відношенню магнітної індукції в даному середовищі до магнітної індукції у вакуумі, називається *магнітною проникністю середовища*:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \quad (8.2.2)$$

<sup>1)</sup> «достатньо довгого» щоб забезпечити однорідність магнітного поля



При цьому ми маємо на увазі, що однорідна та ізотропна речовина повністю заповнює область магнітного поля. Це реалізується, наприклад, для випадку речовини в тороїді або соленоїді.

У залежності від значення магнітної проникності  $\mu$  магнетики поділяються на феромагнетики, парамагнетики і діамагнетики. Для феромагнетиків  $\mu \gg 1$ , для парамагнетиків  $\mu > 1$ , для діамагнетиків  $\mu < 1$ ; деталізація їх властивостей буде приведена далі. Магнітні проникності деяких речовин наведені в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1

Речовина		$\mu$
Пермалой (78% Ni + 22% Fe)	Феромагнетик	до 50000
Смугове залізо		$\gg 5000$
Чавунне литво		$\gg 600$
Нікель		$\gg 300$
Тверда сталь		$\gg 200$
Платина	Парамагнетик	1,00026
Алюміній		1,000021
Ебоніт		1,000014
Повітря		1,0000004
Мідь	Діамагнетик	0,9999904
Скло		0,999987
Вісмут		0,999843

### 8.2.2 Магнітна сприйнятливість

1. Як встановлено на досліді, внутрішня магнітна індукція

$$\vec{B}' = \chi \vec{B}_0, \quad (8.2.3)$$

де  $\chi$  — безрозмірна величина, яка називається *магнітною сприйнятливістю*. Для діа- і парамагнетиків  $\chi$  величина стала (якщо зовнішнє поле не надто сильне), для феромагнетиків  $\chi$  — величина, залежна від  $B_0$ .

Із врахуванням (8.2.3) формула (8.2.1) набуде вигляду

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0. \quad (8.2.4)$$

Порівняння формул (8.2.2) і (8.2.4) дає зв'язок між магнітною проникністю середовища і магнітною сприйнятливістю:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (8.2.5)$$

Значення  $\chi$  для речовин, означених у таблиці значень  $\mu$ , можна знайти за допомогою цієї таблиці і формули (8.2.5).

Оскільки для діамagnetиків  $\mu < 1$ , то із формули (8.2.5) видно, що магнітна сприйнятливість діамagnetиків від'ємна. Діамagnetик, внесений у зовнішнє магнітне поле, послаблює його:

$$B = B_0 - |\chi|B_0.$$

2. *Намагніченість.* При внесенні магнетика у зовнішнє магнітне поле магнітні моменти атомів магнетиків набувають переважної орієнтації — речовина намагнічується<sup>1)</sup>, — виникає внутрішнє поле  $\vec{B}'$ .

Ступінь намагніченості магнетика  $J$  характеризується магнітним моментом одиниці об'єму:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{ma}}{\Delta V}, \quad (8.2.6)$$

де  $\vec{p}_{ma}$  — магнітний момент окремого атома (дається виразом (8.1.4)), сумування ведеться по всіх атомах, що містяться в об'ємі  $\Delta V$ . Намагніченість можна подати і в такій зручній формі:

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle,$$

де  $n$  — концентрація атомів (кількість атомів в одиниці об'єму), а  $\langle \vec{p}_m \rangle$  — середній магнітний момент атома. Якщо  $\langle \vec{p}_m \rangle = 0$ , то і намагніченість  $J$  і внутрішнє магнітне поле  $\vec{B}'$  дорівнюють нулю.

В електростатиці аналогічною до  $\vec{J}$  величиною є вектор поляризації  $\vec{P}$ .

Якщо у всіх елементарних областях вектор  $\vec{J}$  однаковий, то речовина намагнічена однорідно.

На досліді встановлено, що намагніченість  $\vec{J}$  пара- та діамagnetиків у слабких полях пропорційна індукції зовнішнього магнітного поля:

$$\vec{J} = \frac{\chi \vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (8.2.7)$$

<sup>1)</sup> Це доволі загальне твердження. Механізми намагнічування пара-, діа- та феромагнетиків суттєво відрізняються (мова про це йтиме далі)

У феромагнетиках  $\chi$  — величина, що змінюється із зміною  $\vec{B}_0$ . Оскільки  $\vec{B}' = \chi\vec{B}_0$  (формула (8.2.3)), то намагніченість

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}'}{\mu_0} \quad (8.2.8)$$

(визначається внутрішнім полем — полем мікрострумів).

Із врахуванням останньої формули вираз для магнітної індукції у магнетика (8.2.1) можна зобразити і так:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{J}. \quad (8.2.9)$$

4. *Напруженість магнітного поля.* Напруженістю магнітного поля називається величина

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}. \quad (8.2.10)$$

$\vec{H}$  — вектор, що має той самий напрям, що і  $\vec{B}$ , але у  $\mu_0\mu$  разів менший за модулем. Тут приймається, що речовина однорідна і заповнює все магнітне поле (як, наприклад, речовина, що заповнює тороїд). Одиницею напруженості магнітного поля є *ампер на метр*.

За допомогою формул (8.2.2), (8.2.9) звідси можна отримати наступні співвідношення

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{B}'}{\mu_0}; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (8.2.11)$$

У вакуумі  $\vec{B}' = 0$ ,  $\vec{J} = 0$  і  $H = \frac{B}{\mu_0}$ . Напруженість магнітного поля — вектор-

*на характеристика магнітного поля, утвореного макрострумами* (див. також наступний параграф).

Формули для  $\vec{H}$  отримуються із відповідних формул для  $\vec{B}$  за допомогою формули (8.2.10). Зокрема, закон Біо-Савара-Лапласа для  $\vec{H}$  не буде містити множника  $\mu_0\mu$ .

Зауважимо, що історично термін «напруженість магнітного поля» ввійшов в науку про магнетизм по аналогії з електростатичним полем. Пізніше з'ясувалося, що властивості обох полів суттєво відрізняються (насамперед через те, що електростатичне поле потенціальне, а магнітне — вихрове).

**Приклад.** Магнітна індукція і напруженість магнітного поля всередині довгого соленоїда заповненого магнетиком з магнітною проникністю  $\mu$ .

Нехай магнітна індукція всередині соленоїда у вакуумі  $\vec{B}_0$ , тоді напруженість магнітного поля

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu}.$$

За наявності магнетика магнітна індукція всередині соленоїда

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J},$$

а напруженість магнітного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}) - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0 \quad (8.2.12)$$

(використані формули (8.2.9), (8.2.11)). Отже, напруженість магнітного поля всередині магнетика дорівнює напруженості зовнішнього магнітного поля, створеного соленоїдом.

### 8.3 ЦИРКУЛЯЦІЯ ВЕКТОРА $\vec{B}$ І ЦИРКУЛЯЦІЯ ВЕКТОРА $\vec{H}$

**1. Циркуляція вектора магнітної індукції. 2. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля**

1. Узагальнимо теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  (формула (7.8.2) попереднього розділу) на випадок магнетика. Тут, в додаток до струмів провідності  $I$ , потрібно врахувати мікроструми  $I_m$ . Маємо:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \sum_i I_{im} \right), \quad (8.3.1)$$

де дві останні суми — алгебраїчні суми макро- та мікрострумів, що охоплюється заданим контуром  $L$ . Це закон повного струму для магнітного поля у магнетика.

2. При застосуванні теореми про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  до розрахунку магнітних полів у речовині, виникає проблема: справа у формулі (8.3.1) стоїть сума сил мікрострумів — величина, яка сама залежить від  $\vec{B}$ ! Цю трудність можна обійти, якщо виходити із теореми про циркуляцію напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  —

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl = \sum_i I_i ; \tag{8.3.2}$$

вона стверджує, що циркуляція напруженості магнітного поля в середовищі по довільному контуру дорівнює алгебраїчній сумі макрострумів, що охоплюються цим контуром. Отже, циркуляція вектора  $\vec{H}$  (але не вектора  $\vec{B}$ !) визначається макрострумами.

**Приклад.** Знайдемо, користуючись формулою (8.3.2), середню напруженість магнітного поля всередині тора.

⇒ Виберемо контур  $L$  вздовж «середньої лінії» тора кола з радіусом  $R_c$  (рис. 7.37). Для всіх точок цього кола напруженість стала за величиною і спрямована по дотичній до середньої лінії. Тому

$$\oint_L H_l dl = NI \Rightarrow H 2\pi R_c = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi R_c},$$

де  $N$  — число витків.

### 8.4 ЗАЛОМЛЕННЯ ЛІНІЙ МАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ І ЛІНІЙ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

**1. Умови для векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  на межі розділу двох магнетиків. 2. Магнітний захист. Згущення ліній магнітної індукції**

#### 8.4.1 Умови для векторів $\vec{B}$ і $\vec{H}$ на межі розділу двох магнетиків

На межі розділу двох середовищ з різними значеннями магнітної проникності лінії магнітної індукції і лінії напруженості магнітного поля заломлюються.

Для встановлення закономірностей, які виникають при заломленні векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ , використаємо формули

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I.$$

1. Уявімо, що на межі двох магнетиків з магнітними проникностями

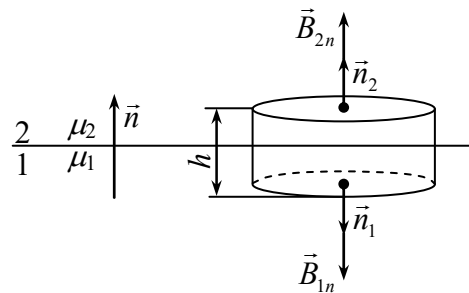


Рис. 8.4

$\mu_1$  і  $\mu_2$  розміщений прямий циліндр нескінченно малої висоти  $h$  (рис. 8.4).

У цьому випадку потоком вектора  $\vec{B}$  через бокову поверхню циліндра можна знехтувати, тому

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0$$

(нормалі  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$  протилежно спрямовані). Тут  $B_{1n}$  і  $B_{2n}$  — нормальні складові вектора магнітної індукції відповідно у першому і у другому середовищах. Отже,

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad (8.4.1)$$

— нормальні складові вектора магнітної індукції не змінюються при переході із одного середовища до іншого.

В протилежність до цього нормальні складові вектора  $\vec{H}$  в обох середовищах будуть різні:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (8.4.2)$$

( $B_{1n} = \mu_0\mu_1 H_{1n}$ ,  $B_{2n} = \mu_0\mu_2 H_{2n}$ ).

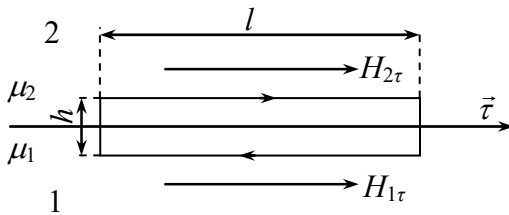


Рис. 8.5

2. Розглянемо тепер прямокутний контур з нескінченно малою висотою  $h$ , одна сторона якого лежить у середовищі 1, друга — у середовищі 2 (рис. 8.5). Маємо ( $h \rightarrow 0$ )

$$\oint_L H_l dl = H_{2\tau}l - H_{1\tau}l,$$

де  $H_{1\tau}$  і  $H_{2\tau}$  — тангенціальні складові напруженості магнітного поля до поверхні розділу обох середовищ. Якщо  $h \rightarrow 0$ , то прямує до нуля і сила струму, який проходить через виділену площадку. Отже,

$$lH_{2\tau} - lH_{1\tau} = 0,$$

і

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad (8.4.3)$$

— тангенціальні складові вектора напруженості магнітного поля не змінюються при переході через границю двох середовищ.

Для тангенціальних складових вектора  $\vec{B}$  маємо

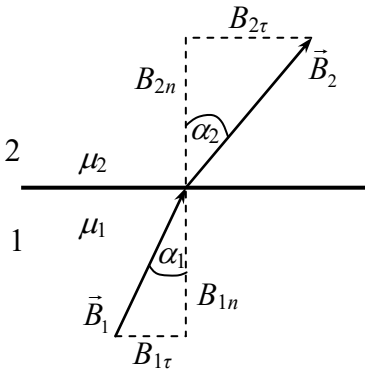


Рис. 8.6

$$\frac{B_{1r}}{B_{2r}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{8.4.4}$$

(бо  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ ); вони змінюються при переході через границю двох середовищ.

• Співвідношення (8.4.1)-(8.4.4) виражають *граничні умови* для магнітного поля. Вони показують, що лінії векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  при переході із одного середовища до другого заломлюються: складові  $\vec{B}_n$  і  $\vec{H}_r$  змінюються неперервно, а складові  $\vec{B}_r$  і  $\vec{H}_n$  — стрибкоподібно.

Із рис. 8.6 видно, що

$$\frac{\text{tg} \alpha_2}{\text{tg} \alpha_1} = \frac{\frac{B_{2r}}{B_{2n}}}{\frac{B_{1r}}{B_{1n}}} \tag{4.5}$$

Оскільки виконуються умови (8.4.1) і (8.4.4), то

$$\frac{\text{tg} \alpha_2}{\text{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{8.4.6}$$

Тут  $\mu_2 > \mu_1$ . Видно, що лінії  $\vec{B}$ , після входження у магнетик із більшим  $\mu$ , віддаляються від нормалі. Можна переконатися, що закон заломлення (8.4.6) справедливий і для вектора  $\vec{H}$ .

### 8.4.2 Магнітний захист. Згущення ліній магнітної індукції

Якщо  $\mu_2 > \mu_1$ , то лінії магнітної індукції згущуються у відповідності із законом (8.4.6) (рис. 8.7), якщо  $\mu_2 < \mu_1$ , то відбувається розрідження ліній  $\vec{B}$ . Це ілюструється рис. 8.8 і рис. 8.9, де зображена куля, внесена у однорідне магнітне поле. У першому випадку магнітна проникність речовини кулі більша, ніж в оточуючому середовищі, у

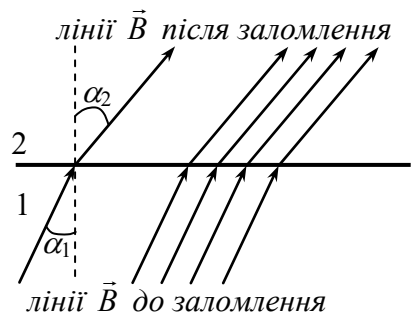


Рис. 8.7

другому — менша. В обох випадках лінії магнітної індукції всередині кулі — паралельні прямі; це означає, що поле всередині кулі — однорідне. При цьому постійні і напруженість магнітного поля  $H$  і намагніченість  $J$  (це означає, що куля намагнічена однорідно).

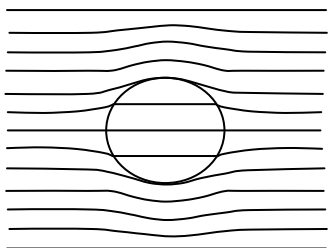


Рис. 8.8

Магнітна проникність кулі менша, ніж в оточуючому середовищі

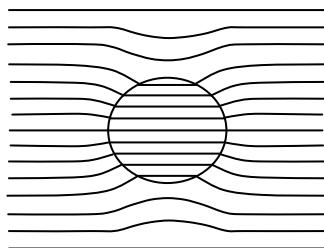


Рис. 8.9

Магнітна проникність кулі більша, ніж в оточуючому середовищі

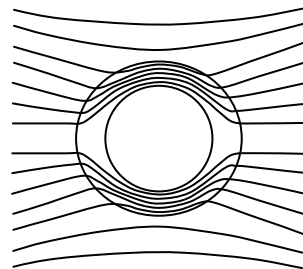


Рис. 8.10

На описаному явищі заломлення ліній індукції ґрунтується *магнітний захист*. Якщо в однорідне магнітне поле помістити порожнисте тіло, наприклад, циліндр із речовини, магнітна проникність якої значно більша, ніж в оточуючому середовищі, то лінії магнітної індукції будуть згущатися в оболонці (рис. 8.10). Всередині цієї оболонки (в порожнині циліндра) магнітне поле буде сильно послабленим у порівнянні із зовнішнім полем. Ця обставина використовується для захисту чутливих вимірювальних приладів від зовнішніх магнітних полів: прилад поміщають в замкнуту оболонку із феромагнітного матеріалу (*магнітний захист*). Таким способом можна послабити зовнішнє магнітне поле в тисячі разів, проте повністю виключити його не можна (на відміну від електростатичного захисту, розглянутого у п. 1.5.4).

## 8.5 ПАРАМАГНЕТИКИ

### 1. Загальні властивості парамагнетиків. 2. Модель парамагнетика. 3. Магнітне охолодження парамагнетика

Перейдемо тепер до більш детальної характеристики магнітних матеріалів. Почнемо з парамагнетиків.



### 8.5.1 Загальні властивості парамагнетиків

До парамагнетиків належать: лужні і лужноземельні метали, ряд сполук перехідних і рідкоземельних елементів; водні розчини солей, які містять іони перехідних елементів; кисень. В парамагнітний стан переходять і сильномагнітні магнетики (феро-, антиферо- і феримагнетики) при температурах, які вищі від певних, критичних, температур.

В парамагнетиках магнітний момент кожного атома за відсутності зовнішнього магнітного поля відрізняється від нуля, але внаслідок того, що ці моменти орієнтовані хаотично, намагніченість парамагнетика при  $B_0=0$  дорівнює нулю. Якщо парамагнетик вноситься у зовнішнє магнітне поле, атомні магнітні моменти орієнтуються за полем, виникає внутрішнє магнітне поле, яке підсилює зовнішнє, — парамагнетик намагнічується.

Як було встановлено у попередньому розділі, на систему, що характеризується магнітним моментом  $\vec{p}_m$ , діє момент сили  $\vec{M} = [p_m \vec{B}]$ , який буде намагатися орієнтувати намагнічене тіло так, щоб вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  були паралельні. В неоднорідному магнітному полі на тіло діє також сила, яка змушує тіло переміщатися в область більш сильного магнітного поля. Так, стержень із парамагнітного матеріалу, вміщений між полюсами магніта, буде повертатися так, щоб розміститися вздовж ліній магнітної індукції (рис. 8.11), а парамагнітна речовина втягуватиметься в магнітне поле (рис. 8.12).

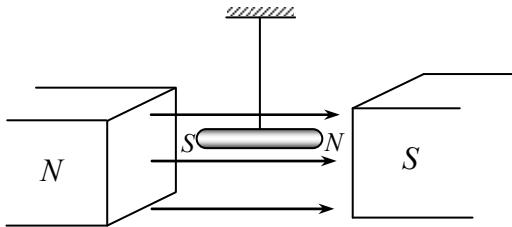


Рис. 8.11

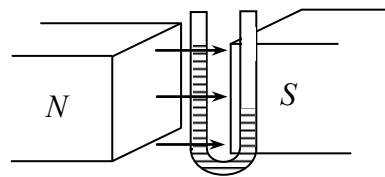


Рис. 8.12

*U*-подібна трубка з розчином хлориду заліза ( $FeCl_2$ ) у магнітному полі

Магнітна проникність парамагнетика  $\mu > 1$ , а магнітна сприйнятливість  $\chi \sim 10^{-3} \div 10^{-6}$ .

### 8.5.2 Модель парамагнетика

Властивості парамагнетика зручно інтерпретувати на основі наступної простої моделі.

1. Нехай маємо кристал, у вузлах якого знаходяться атоми (іони), кожен з яких має магнітний момент  $\vec{p}_{ma}$ , що дорівнює одному магнетону Бора. Для означеності приймемо, що магнітні моменти електронів — спінові. Магнітні моменти  $\vec{p}_{ma}$  можуть змінювати свою проекцію на напрям зовнішнього поля  $\vec{B}_0$  як під впливом цього поля (фактор впорядкування магнітних моментів), так і під впливом температури (підвищення температури — фактор розвпорядкування магнітних моментів). Приймемо, що електрони, які входять до складу атома (і з якими пов'язані спінові магнітні моменти) належать лише «своєму» атому (вони не можуть переміщатися по кристалу). Це — модель спінового парамагнетика (рис. 8.13, а).

За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти електронів орієнтовані хаотично, середній магнітний момент системи електронів  $\langle p_m \rangle = 0$ ; цей стан кристала відображений на рис. 8.13, а).

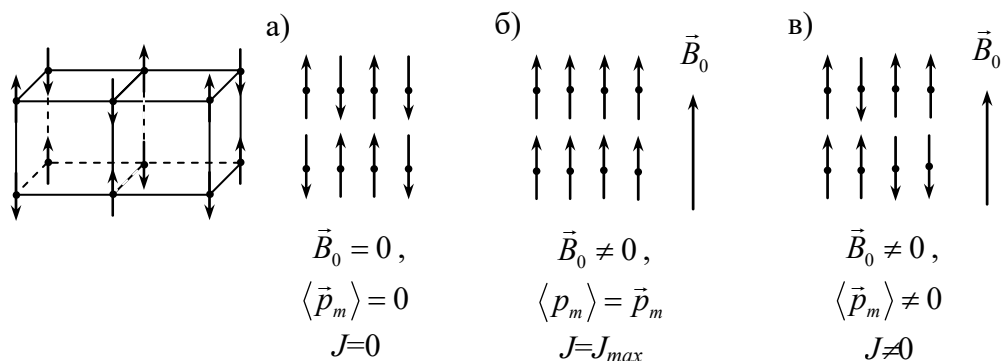


Рис. 8.13

Зліва модель спінового парамагнетика (при відсутності зовнішнього магнітного поля);

а), б), в) — стани парамагнетика в залежності від впливу зовнішнього магнітного поля

2. При внесенні парамагнетика у зовнішнє магнітне поле речовина намагнічується — магнітні моменти атомів набувають переважної орієнтації у напрямку поля, виникає результуючий магнітний момент; тепер середній ма-

магнітний момент атомів  $\langle p_m \rangle \neq 0$  і, отже, намагніченість  $J \neq 0$ . Магнітне поле  $\vec{B}'$ , що виникло, спрямоване у тому ж напрямку, що і зовнішнє поле  $\vec{B}_0$  (посилює зовнішнє поле).

Результуюче поле у парамагнетику

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \Rightarrow B = B_0 + B' = B_0 + \chi B_0 = B_0 + J \quad (8.5.1)$$

(тут використані співвідношення, встановлені у п. 8.2).

Охарактеризуємо, в загальних рисах, поведінку намагніченості  $J$  в залежності від двох факторів — впорядковуючого (зовнішнє магнітне поле) і розпорядковуючого (температурний вплив).

При абсолютному нулі температур ( $T=0$ ) і  $B_0 \neq 0$  кожен атомний магнітний момент буде зорієнтований у напрямку магнітного поля, тому намагніченість

$$J = n \langle p_m \rangle = n p_{ma} = n \mu_B, \quad (8.5.2)$$

де  $n$  — концентрація атомів,  $\mu_B$  — магнетон Бора, і ми прийняли, що кожен атом (іон) містить один некомпенсований спіновий магнітний момент. Цей стан парамагнетика відображений на рис. 8.13, б). Тут кожен атом матиме потенціальну енергію  $W_p = -p_a B_0 = -\mu_B B_0$  (енергія магнітного момента у магнітному полі), тому повна енергія спінового парамагнетика при  $T=0$  дорівнює

$$W = -p_a B N = -\mu_B B N,$$

де  $N$  — кількість атомів. В дослідах такий стан може спостерігатися при дуже низьких температурах в сильних магнітних полях.

Якщо ж  $T \neq 0$ , то з'являються і магнітні моменти, орієнтовані проти поля (рис. 8.13, в)). Зростання температури збільшує кількість магнітних моментів, орієнтованих проти поля, тобто в парамагнетиках середній магнітний момент атома  $\langle p_m \rangle$  (і намагніченість  $J$ ) обернено пропорційні до абсолютної температури:

$$\langle p_m \rangle \sim \frac{1}{T}, \quad J \sim \frac{1}{T}.$$

Навпаки, — посилення поля (при заданій температурі) зумовлює збільшення намагніченості:

$$\langle p_m \rangle \sim B_0, \quad J \sim B_0.$$

Дуже сильне поле може навіть призвести до явища *насиченості намагніченості*, коли намагніченість набуває максимального значення  $J_{max}$  і залишається незмінною при подальшому збільшенні  $\vec{B}$ . Значення  $J_{max}$  близьке до величини намагніченості за формулою (8.5.2).

3. Конкуруючу дію обох факторів, — впорядковуючого магнітні моменти і розпорядкуючого їх, — зручно характеризувати відношенням  $\alpha$  двох енергетичних параметрів —  $p_{ma}B$  і  $kT$ :

$$\alpha = \frac{p_{ma}B}{kT},$$

де  $k$  — стала Больцмана,  $p_{ma}B$  — абсолютна величина потенціальної енергії атома у магнітному полі (сприяє впорядкуванню), а  $kT$  — величина, що пропорційна середній кінетичній енергії теплового руху атома (фактор розвпорядкування).

Якщо  $p_{ma}B \gg kT$  ( $\alpha \gg 1$ ), то це означає, що намагніченість близька до насичення (кількість магнітних моментів, орієнтованих проти поля, мала). Стан насичення намагніченості може бути досягнутий лише при дуже низьких температурах (навіть у сильних магнітних полях).

Нехай, наприклад,  $\alpha \approx 1$ ,  $B=1$  Тл, тоді

$$\frac{p_{ma}B}{kT} \approx 1 \Rightarrow T \approx \frac{p_{ma}B}{k} = \frac{\mu_B B}{k} \approx \frac{9,27 \cdot 10^{-24} \cdot 1}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 0,67 \text{ К.}$$

Якщо ж  $kT \gg p_{ma}B$  ( $\alpha \ll 1$ ), то можна показати, що в цьому випадку

$$J = \chi \frac{B}{\mu_0}, \quad (8.5.3)$$

де  $\chi$  — магнітна сприйнятливність парамагнетика.

$$\chi = \frac{C}{T}; \quad (8.5.4)$$

$C$  — стала величина. Формула (8.5.4) — закон Кюрі. Відзначимо, що тут  $J \ll J_{max}$ .

Закон Кюрі справджується і у дуже сильних полях; необхідно лише, щоб виконувалася умова  $\alpha \ll 1$ . Так, при кімнатній температурі навіть у полі  $B=1$  Тл,  $\alpha \ll 2 \cdot 10^{-3}$ .

### 8.5.3 Магнітне охолодження парамагнетика

На розмагнічування парамагнетика (після усунення дії на нього зовнішнього магнітного поля) потрібно затратити певну роботу. Якщо розмагнічування відбувається адіабатно, то, у згоді із першим законом термодинаміки, від системи відбирається певна кількість теплоти. Цей висновок лежить в основі *методу магнітного охолодження* парамагнітних тіл. Він полягає в тому, що намагнічений парамагнетик спочатку охолоджують до дуже низьких температур звичайним способом (наприклад, рідким гелієм), а потім швидко зменшують магнітне поле. В такий спосіб речовина ще більше охолоджується (розвпорядкування магнітних моментів супроводжується пониженням температури). Так можна отримати температури, які відрізняються від абсолютного нуля на тисячні долі кельвіна.

## 8.6 ДІАМАГНЕТИКИ

**1. Загальні властивості діамагнетиків. 2. Механізм виникнення індукованих магнітних моментів. Намагніченість діамагнетика**

### 8.6.1 Загальні властивості діамагнетиків

В протилежність до парамагнетиків, — діамагнетики це такі речовини, характерною ознакою яких є намагнічування їх проти напрямку зовнішнього магнітного поля. Проявом цього є послаблення магнітного поля при внесенні в нього діамагнітної речовини. До діамагнетиків належать багато металів (Ві, Zn, Ag, Au, Cu), смоли, скло, мармур, вода, більшість органічних сполук, майже всі гази (але кисень — парамагнетик).

Принципова відмінність діамагнетиків від парамагнетиків полягає в тому, що в *діамагнетиках магнітні моменти атомів або молекул при відсутності зовнішнього магнітного поля дорівнюють нулю*; у діамагнітному атомі або молекулі скомпенсовані як орбітальні, так і спінові магнітні моменти. При внесенні діамагнетика у магнітне поле кожен атом його набуває магнітний момент, який спрямований *протилежно* до вектора  $\vec{B}$ . Внутрішнє поле у діамагнетику спрямоване протилежно до зовнішнього (послаблює його), вектор намагніченості  $J$  спрямований проти напрямку зовнішнього магнітного поля.

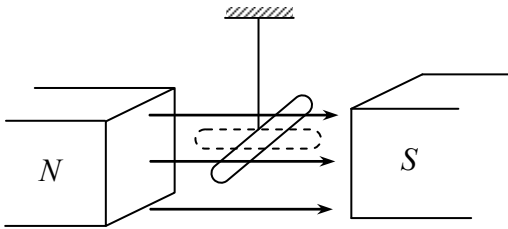


Рис. 8.14

$\vec{B}$  (рис. 8.14). Якщо між полюсами магніта (електромагніта) запалити свічку, то полум'я свічки буде виштовхуватися із поля (продукти згорання — діамгнетики).

Магнітна проникність діамгнетика  $\mu < 1$ , тому магнітна сприйнятливість діамгнетика  $\chi < 0$ . За абсолютною величиною  $\chi$  у сотні і тисячі разів менша, ніж сприйнятливість парамагнетиків, тому і сили, що діють у магнітному полі на діамгнетики, набагато менші від сил, що діють на парамагнітні матеріали.

Перейдемо до з'ясування природи діамгнетизму.

### 8.6.2 Механізм виникнення індукованих магнітних моментів. Намагніченість діамгнетика

Ключовим у встановленні природи діамгнетизму є наступне положення: у магнітному полі швидкість обертання електрона навколо атомного ядра змінюється; із цією зміною пов'язується додаткові (до орбітальних) мікроструми, а, отже, і поява додаткових (індукованих) магнітних моментів атомів. Це зумовлює намагніченість діамгнетика. З'ясуємо суть цього твердження наступними міркуваннями.

1. Коли зовнішнє магнітне поле відсутнє, то на електрон діє кулонівська сила  $\vec{F}_k$ , зумовлена притяганням електрона до атомного ядра; вона і є доцентровою силою:

$$\vec{F}_k = m\vec{a} \Rightarrow F_k = \frac{m\mathcal{G}_0^2}{r} \Rightarrow F_k = m\omega_0^2 r, \quad (8.6.1)$$

де

$$F_k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad (8.6.2)$$

$\mathcal{G}_0$  і  $\omega_0$  — лінійна і кутова швидкості електрона при відсутності магнітного поля,  $Ze$  — заряд ядра. Звідси можна знайти  $\mathcal{G}_0$  і  $\omega_0$ . Відсутність результуючого орбітального атомного магнітного моменту атома можна тлумачити так: магнітний момент одного електрона буде скомпенсований магнітним моментом іншого електрона за рахунок різних напрямків обертання електрона (рис. 8.15). Подібно до цього можна уявити і скомпенсованість спінових магнітних моментів.

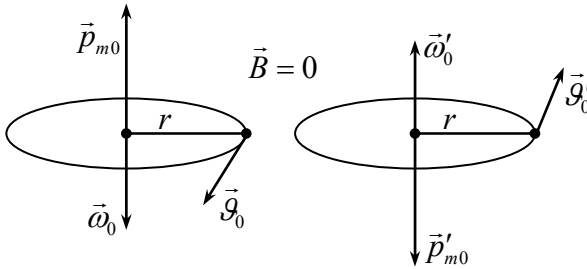


Рис. 8.15

Сумарний орбітальний магнітний момент двох електронів, які обертаються у протилежних напрямках, дорівнює нулю.

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}'_0, \quad p_{m0} = p'_{m0}, \quad \text{якщо } \vec{B} = 0$$

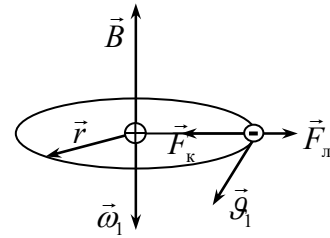


Рис. 8.16

Розглянемо тепер рух електрона у зовнішньому магнітному полі, індукція якого  $\vec{B}$ . Прийнемо спочатку, що електрон в атомі рухається зі швидкістю  $\vec{\mathcal{G}}_1$  по коловій орбіті, площина якої перпендикулярна до вектора  $\vec{B}$  у напрямку, показаному на рис. 8.16.

У магнітному полі потрібно враховувати і магнітну силу Лоренца  $\vec{F}_L$ , яка для випадку, зображеному на рис. 8.16, спрямована протилежно до  $\vec{F}_k$ ; за абсолютною величиною

$$F_{L1} = e\mathcal{G}_1 B.$$

Якщо ж електрон рухатиметься у напрямку, протилежному до зображеного на рис. 8.16, то напрями сил  $\vec{F}_L$  і  $\vec{F}_k$  співпадуть, а  $F_{L2} = e\mathcal{G}_2 B$ .

Рівняння руху електрона для обох напрямків руху електрона є

$$\begin{cases} F_{\kappa} - e \mathcal{G}_1 B = \frac{m \mathcal{G}_1^2}{r}, \\ F_{\kappa} + e \mathcal{G}_2 B = \frac{m \mathcal{G}_2^2}{r}. \end{cases} \quad (8.6.3)$$

Тут ми приймаємо, що під впливом магнітного поля змінюється лише швидкість електрона, але не радіус його орбіти; обґрунтуванням цього є те, що навіть у дуже сильних магнітних полях  $F_{\kappa} \gg F_{\perp}$ . Віднімемо в (8.6.3) від останнього рівняння попереднє:

$$e(\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_1)B = \frac{m}{r}(\mathcal{G}_2^2 - \mathcal{G}_1^2). \quad (8.6.4)$$

Звідси

$$\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1 = \frac{eBr}{m}. \quad (8.6.5)$$

Ми отримали очікуваний результат ( $\mathcal{G}_2 > \mathcal{G}_1$ ): якщо напрямки сил  $\vec{F}_{\kappa}$  і  $\vec{F}_{\perp}$  однакові, то доцентрове прискорення (а, отже, і швидкість) більша, ніж у випадку, коли ці сили протилежно спрямовані. Подамо отриманий результат у вигляді

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 - |\Delta \mathcal{G}|, \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_0 + |\Delta \mathcal{G}|, \quad (8.6.6)$$

де  $\mathcal{G}_0$  — лінійна швидкість електрона при  $\vec{B}=0$ , а  $|\Delta \mathcal{G}|$  — абсолютна величина приросту або убутку швидкості (в залежності від напрямку руху електрона). Із формули (8.6.5), після підстановки виразів  $\mathcal{G}_1$  і  $\mathcal{G}_2$  із (8.6.6), отримуємо

$$|\Delta \mathcal{G}| = \frac{eBr}{2m}. \quad (8.6.7)$$

Отже, швидкість електронів, які рухаються за годинниковою стрілкою (рис. 8.15) у магнітному полі стає рівною

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 - \frac{eBr}{2m},$$

а швидкість електронів у протилежному напрямку

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_0 + \frac{eBr}{2m}.$$

2. Лінійним швидкостям  $\mathcal{G}_1$ ,  $\mathcal{G}_2$  можна поставити у відповідність кутові швидкості  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , а величині  $\Delta \mathcal{G}$  — зміну кутової швидкості  $\Delta \omega$ . Оскільки



$$\frac{\mathcal{G}}{r} = \omega, \quad \frac{\Delta\mathcal{G}}{r} = \Delta\omega, \text{ то}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - |\Delta\omega| \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \frac{eB}{2m},$$

$$\omega_2 = \omega_0 + |\Delta\omega| \Rightarrow \omega_2 = \omega_0 + \frac{eB}{2m}.$$

Тут

$$|\Delta\omega| = \frac{eB}{2m} \quad (8.6.8)$$

— зміна кутової швидкості (частоти обертання) електрона під дією магнітного поля. Обертання в одному напрямку (за «годинниковою стрілкою»), пришвидшується на  $|\Delta\omega|$ , а обертання у протилежному напрямку сповільнюється на ту ж величину (відносно обертання при  $\vec{B}=0$ ).

Кутова швидкість (кутова частота обертання)  $\frac{eB}{2m}$  називається *частотою Лармора*  $\omega_L$ :

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (8.6.9)$$

Можна переконатися, що *незалежно від напрямку обертання електрона*, напрямки векторів  $\Delta\vec{\omega}$  і  $\vec{B}$ , а також напрямки векторів  $\vec{\omega}_L$  і  $\vec{B}$  співпадають, тому

$$\Delta\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{2m} \Rightarrow \vec{\omega}_L = \frac{e\vec{B}}{2m}. \quad (8.6.10)$$

Отримані результати можна інтерпретувати і так: у зовнішньому магнітному полі внутрішній рух електронів атома не змінюється, але атом як ціле здійснює обертання з частотою  $\omega_L$ .

Оцінімо величину  $\omega_L$  для досить сильного поля ( $B=1$  Тл):

$$\omega_L = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 10^{11} \text{ с}^{-1};$$

вона мала в порівнянні з кутовою швидкістю обертання електрона при відсутності магнітного поля ( $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ):  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 10^{-4}$ . Проте, саме за рахунок обер-

тання орбіти електрона з частотою Лармора і виникає діамagnetизм! Покажемо, що це справді так.

3. З додатковим обертанням електрона у магнітному полі можна пов'язувати появу певного мікроструму  $\Delta I$  (в додаток до орбітального мікроструму). У згоді із формулою (8.1.1)

$$\Delta I = \frac{e\Delta\mathcal{G}}{2\pi r} = \frac{e\Delta\omega}{2\pi}. \quad (8.6.11)$$

Цьому мікроструму відповідає додатковий (до орбітального) магнітний момент

$$\Delta p_m = \Delta IS = \frac{e\Delta\omega}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{e^2 r^2 B}{4m}, \quad (8.6.12)$$

де  $S = \pi r^2$  — площа, обмежена орбітою електрона. Вектор  $\Delta \vec{p}_m$  спрямований проти напрямку вектора  $\Delta \vec{\omega}$  (бо заряд електрона від'ємний), тобто, зважаючи на формулу (8.6.10) — проти вектора  $\vec{B}$ .

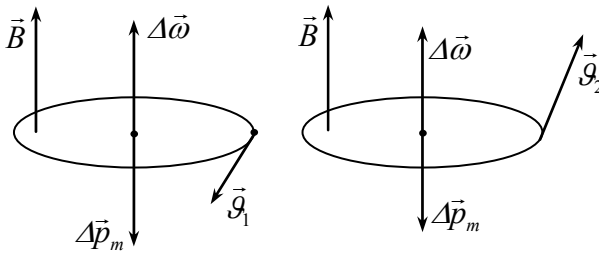


Рис. 8.17

**Індуковані магнітні моменти електронів спрямовані проти поля незалежно від напрямку обертання електрона**

Таким чином, отримуємо, що незалежно від напрямку обертання електрона, з кожним електроном у магнітному полі пов'язаний індукований цим полем магнітний момент  $\Delta \vec{p}_m$ , спрямований проти поля:

$$\Delta \vec{p}_m = -\frac{e^2 r^2 \vec{B}}{4m}, \quad (8.6.13)$$

де  $r$  — радіус орбіти, по якій рухається електрон (залежить від віддалі електрона від ядра). На рис. 8.17 зображені напрямки векторів, які характеризують обертання електрона у магнітному полі; на цьому рисунку не показані орбітальні магнітні моменти  $\vec{p}_{m0}$  і  $\vec{p}'_{m0}$  (див. рис. 8.15).

Індукований магнітний момент атома дорівнює сумі індукованих моментів електронів, що входять до складу атома ( $Z$ ):

$$\Delta\vec{p}_a = -\sum_{i=1}^Z \Delta\vec{p}_i = -\frac{e^2 \vec{B}_0}{4m} \sum_{i=1}^Z r_i^2. \quad (8.6.14)$$

Останній результат і роз'яснює питання щодо природи діамагнетизму: у кожному атомі діамагнетика при внесенні його у магнітне поле індукується (наводиться) магнітний момент  $\Delta\vec{p}_m$ , який спрямований проти напрямку зовнішнього магнітного поля.

Намагніченість діамагнетика, який містить  $n$  атомів в одиниці об'єму,

$$\vec{J} = n\Delta\vec{p}_a = -\frac{e^2 \vec{B}_0 n}{4m} \sum_{i=1}^Z r_i^2 = -\frac{e^2 \mu_0 n \vec{H}}{4m} \sum_{i=1}^Z r_i^2, \quad (8.6.15)$$

де  $\mu_0$  — магнітна стала,  $\vec{H}$  — напруженість магнітного поля. Порівняння останньої формули із формулою для намагніченості магнетика

$$\vec{J} = \chi \vec{H} \quad (8.6.16)$$

показує, що магнітна сприйнятливість діамагнетика

$$\chi = -\frac{e^2 n \mu_0}{4m} \sum_{i=1}^Z r_i^2. \quad (8.6.17)$$

Магнітна сприйнятливість діамагнетика — величина від'ємна і не залежить від температури (на противагу до парамагнетика).

*Зробимо короткий підсумок.* В діамагнетику атомні магнітні моменти (як орбітальні, так і спінові) скомпенсовані при відсутності зовнішнього магнітного поля. Вплив магнітного поля полягає в тому, що швидкості електронів (і частота обертання електронів) змінюється. Внаслідок цього виникають додаткові мікроструми, пов'язані із такою зміною. Цим мікрострумам можна поставити у відповідність додаткові магнітні моменти електронів. Незалежно від напрямку обертання електрона індукований (наведений) магнітний момент електрона спрямований проти напрямку вектора  $\vec{B}$ . Індуковані магнітні моменти електронів і зумовлюють намагніченість діамагнетика.

4. Недолік розглянутої теорії діамагнетизму той, що розглядалися лише електронні орбіти, площини яких перпендикулярні до вектора  $\vec{B}$  (вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  колінеарні). Прийmemo тепер що орбітальний магнітний момент  $\vec{p}_m$  утворює з напрямком магнітної індукції  $\vec{B}$  кут  $\alpha$  (рис. 8.17). У цьому випадку на орбітальний струм діятиме момент сили  $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$  ( $\vec{p}_m$  — орбіталь-

ний магнітний момент), який намагатиметься встановити вектор  $\vec{p}_m$  у напрямку поля. З іншого боку, момент імпульсу електрона  $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}_0$  (проти-лежно спрямований до  $\vec{p}_m$ ) буде прагнути зберегти свій напрям (прояв закону збереження моменту імпульсу).

Рівняння моментів  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  призводить у даному разі до висновку: орбіта електрона рухатиметься так, що вектор  $\vec{p}_m$ , зберігаючи кут  $\alpha$ , буде обертатися навколо вектора  $\vec{B}$  з кутовою швидкістю  $\omega_L$ . Вектор  $\vec{L}$  також здійснює таке обертання. Такий рух векторів  $\vec{p}_m$  і  $\vec{L}$  і відповідної їм орбіти називається *прецесією Лармора*. Прецесію Лармора можна уявити і як обертання магнітного моменту атома навколо напрямку магнітного поля з частотою  $\omega_L$ . Частота Лармора дається формулою (8.6.9) і не залежить ні від кута нахилу орбіти  $\alpha$ , ні від радіуса орбіти електрона, ні від швидкості електрона — вона однакова для всіх електронів, що входять до складу атома (обертається атом!).

Подальші міркування щодо виникнення індукованого магнітного моменту можна проводити подібно до попереднього розгляду, коли приймалося, що  $\alpha=0$ . Відмінність буде полягати лише в тому, що тепер потрібно враховувати всі можливі значення  $\alpha$ , вважаючи їх рівноймовірними. В результаті для індукованого магнітного моменту  $\Delta\vec{p}_m$  отримується формула (8.6.14) (із заміною 4 на 6 у знаменнику).

Прецесія Лармора присутня і в парамагнетиках, і в феромагнетиках, проте в цих речовинах діамагнітний ефект набагато слабший від парамагнітного або феромагнітного.

**Приклад.** Діамагнетизм гелію.

⇒ Застосуємо отримані вище результати до пояснення діамагнетизму гелію. Атом гелію має два електрони, які обертаються навколо ядра із зарядом  $+2e$ . Сумарний орбітальний магнітний момент і сумарний спіновий магнітний момент атома гелію дорівнює нулю — атом гелію діамагнітний. Рівність нулю орбітального атомного моменту за відсутності магнітного поля можна пояснити тим, що обидва електрони обертаються навколо ядра з од-

наковими швидкостями, проте у різних напрямках (у відповідності із рис. 8.15); цим рухам відповідають рівні за величиною, але протилежно спрямовані орбітальні магнітні моменти.

У магнітному полі кожен із електронів отримує додатковий магнітний момент спрямований проти поля (формула (8.6.14)), де  $Z=2$ . Магнітна сприйнятливість гелію при концентрації атомів  $n=2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  (нормальні умови) за формулою (6.17)

$$\chi = -\frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 0,5^2 \cdot 10^{-20} \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = -1,2 \cdot 10^{-9},$$

що досить близько до спостережуваної на експерименті ( $\chi = -2,2 \cdot 10^{-9}$ ).

## 8.7 ФЕРОМАГНЕТИКИ

**1. Загальні властивості феромагнетиків. 2. Явище гістерезису у феромагнетиках. 3. Природа феромагнетизму.**

### 8.7.1 Загальні властивості феромагнетиків

На відміну від пара- та діамагнетиків, для яких магнітна проникність  $\mu$  близька до одиниці, феромагнетики — матеріали з магнітною проникністю  $\mu \gg 1$ ; (зовнішнє магнітне поле може підсилюватися у феромагнетику в тисячі разів). До феромагнітних речовин відносяться: залізо (Fe), нікель (Ni), кобальт (Co), гадоліній (Gd), тербій (Tb), диспрозій (Dy), гольмій (Ho), ербій (Er), тулій (Tm) та їх численні сплави. Спостерігається феромагнетизм і в деяких сполуках з неферомагнітними компонентами (наприклад, сплав із 61,5% Cu, 23,5% Mn, 15% Al).

Для феромагнетиків характерні не тільки великі значення  $\mu$ , але і наступні особливості.

- Наявність залишкової намагніченості: намагніченість феромагнетиків існує і після усунення дії на них зовнішнього магнітного поля. Постійні магніти — матеріали із залишковою намагніченістю.

- Магнітна сприйнятливість феромагнетиків є функцією напруженості зовнішнього поля  $H$  і залежність намагніченості  $J$  від  $H$  ( $J = \chi H$ ) має вигляд, показаний на рис. 8.18 (крива 1). Особливістю залежності  $J(H)$  є те, що намагніченість зростає лише до певної межі, яка називається намагніченістю на-

сичення ( $J_H$ ). Насичення наступає вже в полях з напруженістю  $H \sim 10^2$  А/м. Це відповідає намагніченості насичення  $J_H \sim 10^5$  А/м. Тут ми маємо аналогію з парамагнетиками, тому можна висловити припущення, що намагніченість феромагнетиків також зумовлюється впорядкуванням магнітних моментів; далі ми переконаємося, що це справді так, і що магнітні моменти у феромагнетиках — спінові.

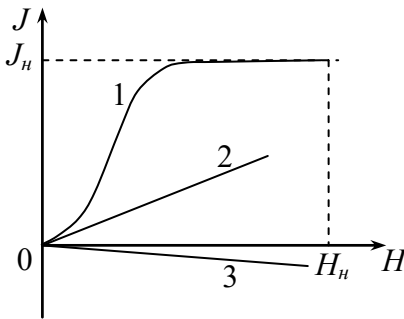


Рис. 8.18

Залежності  $J(H)$ : 1 – феромагнетик, 2 і 3 – відповідно пара- і діамагнетик (лінійні залежності)

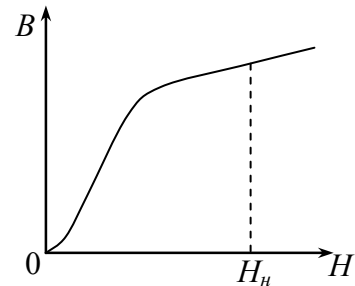


Рис. 8.19

• Крива намагнічування  $B(H)$ , яка описує залежність магнітної індукції  $B$  від напруженості магнітного поля  $H$  у відповідності із формулою

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J,$$

має вигляд, показаний на рис. 8.19. Крива залежності  $B(H)$  не виходить на насичення, хоча при  $H_n$  і маємо насичення намагніченості.

• Магнітна проникність  $\mu$  складним чином залежить від напруженості магнітного поля  $H$ . Оскільки

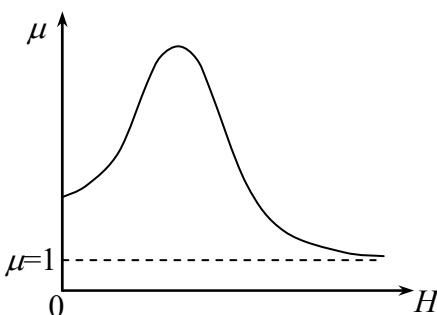


Рис. 8.20

$$\mu = \frac{B}{B_0} = \frac{B}{\mu_0 H},$$

то крива  $\mu(H)$  може бути побудована за даними залежності  $B(H)$ . Типова крива залежності  $\mu(H)$  показана на рис. 8.20. При сильних намагнічуючих полях  $\mu \rightarrow 1$ . Справді, оскільки  $B = \mu_0 H + \mu_0 J$ , то

$$\mu = \frac{\mu_0 H + \mu_0 J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{\mu_0 H}$$

і в дуже сильних полях  $\frac{J}{\mu H_0} \rightarrow 0$  ( $J=J_{нас}$ ), а  $\mu \rightarrow 1$ .

- Намагніченість феромагнетиків зменшується із зростанням температури. При певній температурі, яка називається *температурою Кюрі* (або *точкою Кюрі*)  $T_c$ , феромагнетик переходить у парамагнітний стан. Для заліза, нікеля і кобальта температури Кюрі відповідно дорівнюють 1070 К, 630 К, 1400 К.

- Залежність магнітної сприйнятливості феромагнетика від абсолютної температури  $T$  в парамагнітній фазі ( $T > T_c$ ) дається законом

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \quad (8.7.1)$$

де  $C$  — стала величина. (8.7.1) виражає закон Кюрі-Вейса. При наближенні  $T$  до  $T_c$  магнітна сприйнятливість  $\chi \rightarrow \infty$ . Це означає, що навіть дуже слабкі поля  $H$  викликають скінченну намагніченість  $J$  ( $J = \chi H$ !). Іншими словами при  $T = T_c$  відбувається перехід від парамагнітного до феромагнітного стану; при  $T < T_c$  маємо феромагнітний стан, при  $T > T_c$  — парамагнітний. Перехід феромагнетизм-парамагнетизм — другого роду (при переході не поглинається і не виділяється теплота).

- *Магнітострикція*. Магнітне поле впливає на розміри феромагнетиків. Явище зміни форми і розмірів тіла при його намагнічуванні називається *магнітострикцією*. Відносне видовження феромагнетика (наприклад, стержня)  $\Delta l/l$  може досягати  $10^{-5}$ – $10^{-4}$  в полі з напруженістю  $\sim 10^5$  А/м. Явище, зворотне до магнітострикції, зміна намагніченості при його деформації називається *магнітопружним ефектом* або *ефектом Віллари*. Ефект Віллари можна спостерігати при спилуванні із залізного ненамагніченого матеріалу ошурків, — вони будуть намагніченими. Якщо феромагнетик внести у змінне магнітне поле, то в ньому виникнуть магнітострикційні коливання. На цьому базується робота магнітострикційних перетворювачів, які застосовуються як потужні випромінювачі ультразвуку та приймачі ультразвуку, для вимірювання вібрацій різних споруд і конструкцій.

**Приклад.** По соленоїду із залізним осердям тече струм  $I=5$  А. Довжина соленоїда  $l=0,5$  м, число витків  $N=250$ . Знайти напруженість магнітного поля  $H$ , магнітну індукцію  $B$ , магнітну проникність заліза  $\mu$ , магнітну сприйнятливість  $\chi$ , намагніченість осердя  $J$ . Поле соленоїда вважати однорідним. Залежність  $B(H)$  наведена на рис. 8.3.

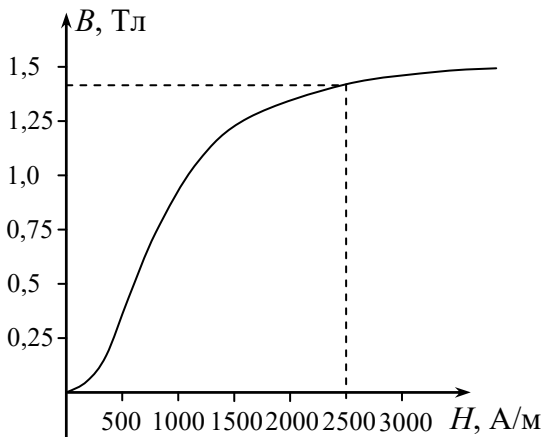


Рис. 8.21

$\Rightarrow$  1. Напруженість поля визначається за формулою

$$H = In = I \frac{N}{l};$$

$$H = 5 \text{ А} \cdot \frac{250}{0,5 \text{ м}} = 2500 \text{ А/м.}$$

2. За графіком залежності  $B(H)$  знаходимо, що магнітна індукція  $B \approx 1,4$  Тл.

3. За співвідношенням

$$B = \mu\mu_0 H$$

знаходимо

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1,4}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2500} \approx 446.$$

4. Магнітна сприйнятливість

$$\chi = \mu - 1 = 445.$$

5. Намагніченість осердя

$$J = \chi H \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

### 8.7.2 Явище гістерезису у феромагнетиках

Характерне для феромагнетика явище гістерезису полягає в тому, що зв'язок між  $J$  і  $H$  та між  $B$  і  $H$  залежить від того, в яких полях феромагнетик побував перед цим; намагніченість  $J$  не є однозначною функцією  $H$ . Магнітний гістерезис нагадує гістерезис у сегнетоелектриках і міркування, приведені у п. 1.9, можна було б (по аналогії) перенести сюди. Проте, зважаючи на особливу важливість явища магнітного гістерезису, розглянемо його дещо докладніше, ніж явище сегнетоелектричного гістерезису.



Складемо коло із ввімкнутих послідовно джерела струму, достатньо довгого соленоїда (для створення однорідного поля), реостата, амперметра і ключа<sup>1)</sup>. Помістимо феромагнітний стержень, який до того не намагнічувався, у соленоїд і будемо поступово збільшувати (за допомогою реостата) силу струму в колі (в соленоїді). При цьому зростатиме напруженість  $H$  поля та намагніченість стержня. При напруженості  $H=H_n$  намагніченість досягає насичення  $J_n$ . Цей процес відображено кривою  $0 \rightarrow 1$  на рис. 8.22.

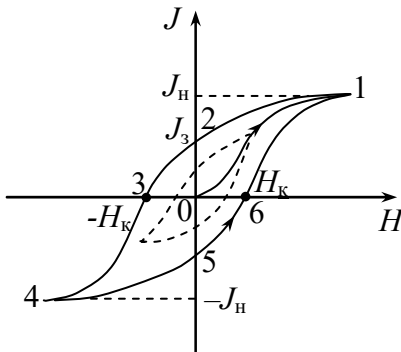


Рис. 8.22

Точці 3 відповідає коерцитивна сила  $-H_k$ , точці 6 — коерцитивна сила  $H_k$

Якщо тепер поступово зменшувати силу струму у колі, то зменшуватиметься напруженість  $H$  поля соленоїда і намагніченість стержня (він розмагнічуватиметься). Проте процес розмагнічування піде не по кривій  $1 \rightarrow 0$ , а по кривій  $1 \rightarrow 2$ . Розімкнемо ключ: — значення  $H$  дорівнюватиме нулю, проте намагніченість  $J$  не стане рівною нулю. Вона визначатиметься значенням  $J_3$ ;  $J_3$  — залишкова намагніченість. Цій намагніченості відповідає залишкове

внутрішнє магнітне поле  $\vec{B}_3$ . З наявністю залишкової намагніченості і пов'язане існування постійних магнітів.

Після зміни напрямку струму в соленоїді і поступового збільшення струму виникає магнітне поле, яке напрямлене протилежно до поля  $\vec{B}_3$ . Стержень розмагнічуватиметься (крива  $2 \rightarrow 3$ ). В точці 3:  $J=0$ ,  $H=-H_k$ : намагніченість зникає під дією поля  $H_k$ , яке протилежно спрямоване до поля, що викликало намагнічення. Напруженість  $H_k$ , яка потрібна, щоб повністю розмагнітити стержень, називається *коерцитивною напруженістю* (коерцитивною силою). Постійний магніт тим якісніший (краще зберігає залишкову намагніченість), чим більша коерцитивна сила феромагнетика, із якого він виготовлений.

<sup>1)</sup> Тут корисно нарисувати для себе відповідну електричну схему (див. задачу № 12 у п. 8.9)

При подальшому збільшенні струму в цьому ж напрямку (крива 3→4) стержень перемагнічується і при  $H=-H_n$  намагніченість досягає насичення —  $J_n$  (точка 4). Далі феромагнетик можна знову розмагнічувати (крива 4→6), а потім намагнічувати. Проте тепер намагнічування йтиме вже не по кривій 0→1, а по кривій 6→1. Крива 0→1 називається *первинною кривою намагнічення* (цим означається, що досліджуваний зразок до цього не був у магнітному полі або перед дослідженням був розмагнічений).

Криві 0→1, 3→4, 6→1 називаються *кривими намагнічування*, а криві 1→2→3 носять назву кривих розмагнічування. Відставання кривих розмагнічування від кривих намагнічування і є проявом магнітного гістерезису. При цьому зв'язок між  $J$  і  $H$  не є однозначним: певному значенню  $H$  відповідають різні значення  $J$  на обох кривих.

Магнітний гістерезис можна вивчити і за залежностями  $B(H)$  або  $B'(H)$  ( $B'$  — магнітна індукція внутрішнього магнітного поля), які подібні до залежностей  $J(H)$ .

Фігура 0-1-2-3-4-5-6-1 називається петлею гістерезису. Якщо в крайніх точках 1 і 4 досягається насичення намагніченості, отримується *максимальна петля гістерезису*. Якщо ж в цих точках насичення немає, то отримується аналогічна петля гістерезису (штрихована фігура на рис. 8.22, «вписана» у максимальну петлю гістерезису). Форма петлі гістерезису, залишкова намагніченість і коерцитивна сила залежать від матеріалу феромагнетика і змінюються для різних матеріалів у широких межах. Матеріали з великою коерцитивною силою мають широку петлю гістерезису; це — *тверді (жорсткі) магнітні матеріали*. Вони мають відносно низьку магнітну проникність, важко намагнічуються і розмагнічуються. З них виготовляють постійні магніти. Прикладом такого матеріалу є сплав *алніко* (51% заліза з додаванням алюмінію, нікелю і кобальту). Цей сплав має велику залишкову намагніченість і велике значення  $H_k$ . Постійний магніт, виготовлений з нього — і потужний, і «довгоживучий». Для матеріалів з малим значенням  $H_k$ , — петля гістерезису вузька. Це — *м'які магнітні матеріали*. З них, зокрема, виготовляють осердя для трансформаторів. Магнітна проникність їх — велика, вони легко намагнічуються і розмагнічуються. М'яке залізо, сплав заліза з нікелем — м'які феромагнетики.

**Приклад.** *Практичний спосіб розмагнічування тіл.* На особливостях кривих намагнічування базується зручний практичний спосіб для розмагнічування феромагнетика. Намагнічене тіло вміщують у котушку, по якій проходить змінний струм і силу його поступово зменшують до нуля. Феромагнетик здійснюватиме багатократні намагнічування і розмагнічування, і петля гістерезису, зменшуючись, стягується до точки 0, де намагніченість дорівнює нулю. Такий спосіб використовують, зокрема, для розмагнічування годинників, які побували поблизу магнітів.

### 8.7.3 Природа феромагнетизму

#### 1. Базові положення теорії феромагнетизму. 2. Намагніченість феромагнетиків

##### 8.7.3.1 Базові положення теорії феромагнетизму

Властивості феромагнетиків знаходять своє пояснення, якщо виходити із наступних положень, які мають надійне експериментальне підтвердження і обґрунтовуються теоретично:

- Феромагнетики — матеріали, в яких магнітні моменти електронів — спінові. Феромагнетизм спостерігається лише в тих сполуках, до складу яких входять елементи з недобудованими внутрішніми електронними оболонками (у Fe, Co, Ni — це  $3d$ -оболонки; саме ці електрони і формують результуючий спіновий магнітний момент атома).

- Електрони, які формують спінові магнітні моменти у феромагнетиках, взаємодіють між собою так, що їх спіни орієнтуються в одному напрямку (за умови відсутності зовнішнього магнітного поля!). Взаємодії, що забезпечують паралельну орієнтацію спінів електронів, називаються обмінними. Вони зумовлені кулонівською взаємодією електронів як частинок, для яких характерні і хвильові властивості<sup>1)</sup>. Внаслідок цього виникає *спонтанна* (самочинна, не зумовлена зовнішніми впливами) намагніченість феромагнетика.

- При температурах, нижчих *температури Кюрі* (різної для різних феромагнетиків), феромагнетик розділяється на малі області спонтанної намагніченості — *домени*. Кожен домен намагнічений до насичення (певної величини

---

<sup>1)</sup> Обґрунтування цього положення дається у спеціальних курсах теоретичної фізики

ни): спіни електронів в домені орієнтовані однаково (рис. 8.24, а)). При відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти окремих доменів орієнтовані хаотично, тому результуючий момент феромагнітного тіла дорівнює нулю (рис. 8.24, б)) — феромагнетик не намагнічений. Лінійні розміри доменів є величинами порядку  $10^{-4}$ - $10^{-2}$  см і містять до  $10^{15}$  атомів (іонів). Межі доменів (доменні стінки) охоплюють сотні атомних шарів, в яких напрям намагнічення змінюється поступово від домена до домена. Дуже малі феромагнетики можуть бути і однодоменними.

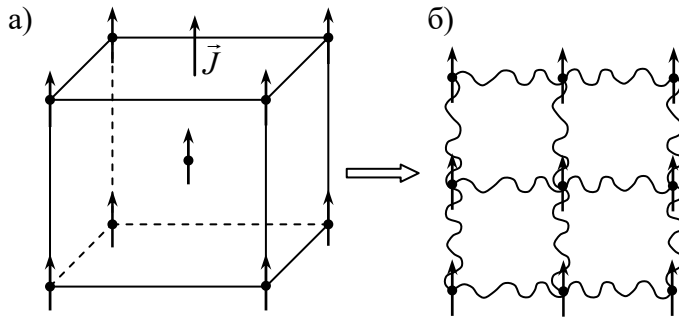


Рис. 8.23

а, б — впорядкування спінових магнітних моментів у феромагнетику; хвилясті лінії (б) відображають наявність обмінних взаємодій, які забезпечують паралельну орієнтацію спінів електронів

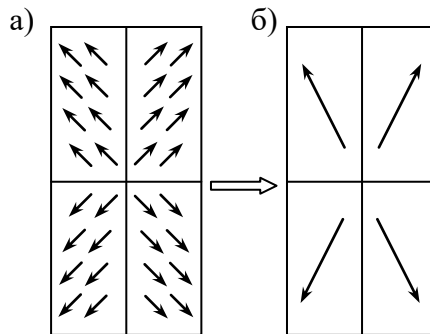


Рис. 8.24

а — спінові магнітні моменти в доменах;

б — стрілками відображені намагніченості доменів

- Для кожного феромагнетика існує напрям, у якому намагнічення під дією зовнішнього магнітного поля найбільше; у феромагнетному кристалі існують напрямки «легкого» і «важкого» намагнічування. Так, кристал заліза

має об'ємно-центровану гратку: іони  $\text{Fe}^+$  розміщені по вершинах куба і в його центрі (рис. 8.23). Тут вісь легкого намагнічення проходить через ребра куба. Найважче намагнітити кристал у напрямку, який проходить вздовж діагоналі, що з'єднує вершини куба і проходить через центральний іон.

### 8.7.3.2 Намагніченість феромагнетиків

Базові положення теорії феромагнетизму дозволяють пояснити, зокрема, закономірності, описані у п. 8.7.1 та п. 8.7.2 Так, намагнічення феромагнетиків у зовнішньому магнітному полі (залежність  $J(H)$ ) знаходить наступне пояснення.

Якщо  $H=0$ , то магнітні моменти окремих доменів орієнтовані хаотично, і результуючий магнітний момент (намагніченість) феромагнетика дорівнює нулю. Це схематично показано на прикладі чотирьох доменів на рис. 8.25, а). Намагніченість кожного із доменів забезпечується обмінними силами.

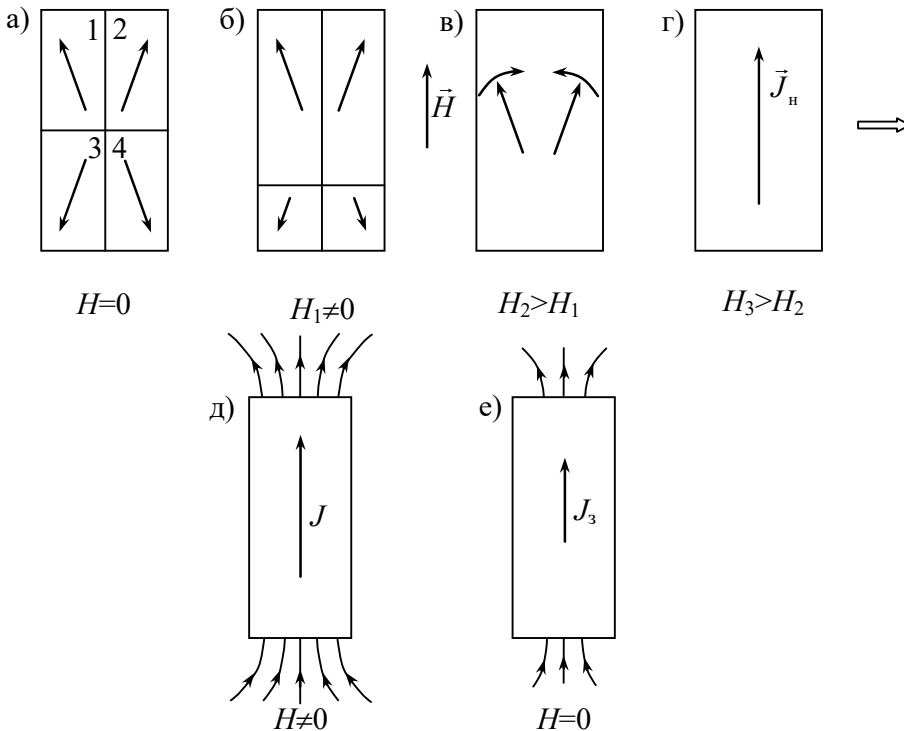


Рис. 8.25

Стрілками зображені вектори намагніченості доменів  $\vec{J}$ .  
 а)  $H=0$ ; е)  $H=0$  (стан постійного магніта)

При накладанні зовнішнього магнітного поля енергії окремих доменів стають нееквівалентними: меншими будуть енергії тих доменів, напрям вектора намагнічення яких близький до напрямку зовнішнього поля (вектор  $\vec{J}$  утворює з вектором  $\vec{H}$  гострий кут); так енергія доменів 1 і 2 у магнітному полі буде меншою від енергії доменів 3 і 4. Це зумовлює зміщення доменних стінок (меж доменів), при якому об'єми доменів з меншою енергією зростають, а з більшою — зменшуються (рис. 8.25, б)). При дуже слабких полях зміщення меж доменів носить в основному, *оборотний* («пружний») характер: при зменшенні поля стінки повертаються до попереднього положення.

Зростання поля призводить до зміщень меж стінок, які стають *необоротними*, енергетично не вигідні домени зовсім зникають (рис. 8.25, в)). Якщо поле і далі зростає, то виникає новий механізм намагнічення, при якому змінюється напрям магнітного момента домена (обертання намагнічення, відображене на рис. 8.25, в) стрілками). В дуже сильних полях магнітні моменти всіх доменів встановлюються паралельно до поля  $\vec{H}$  (рис. 8.25, г)). В цьому стані феромагнетик має максимально можливу при даній температурі намагніченість  $J_n$  (намагніченість насичення). Після усунення дії поля ( $H=0$ ) отримуємо постійний магніт (рис. 8.25, е)) із залишковою намагніченістю  $J_3 < J_n$ .

Розглянувши процесам намагнічення можна поставити у відповідність різні стадії намагнічення на кривій  $J(H)$  (рис. 8.26). Якщо поля малі, то відбуваються оборотні зміщення меж доменів; це — ділянка 1 (крива намагнічення  $OA$  на рис. 8.26. На ділянці 2 (крива намагнічення  $AB$ ) основ-

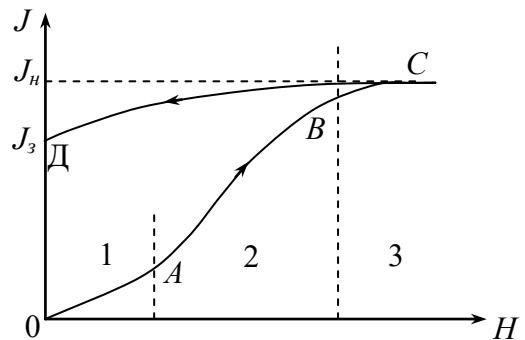


Рис. 8.26

ну роль відіграють необоротні зміщення меж доменів, а на ділянці 3 (крива  $BC$ ) переважають процеси намагнічення, пов'язані із обертанням магнітних моментів доменів. Відзначимо тут важливу різницю між намагнічуванням феромагнетика і парамагнетика: у феромагнетика магнітне поле орієнтує не магнітні моменти окремих атомів (як у парамагнетика), а цілі області спон-

танної намагніченості — доменів. Оскільки на двох останніх ділянках процеси намагнічення не є повністю оборотними, то процес розмагнічення феромагнетика ( $H \rightarrow 0$ ) буде йти по іншій кривій (С-Д).

Подібно до цього можна було б пояснити і залежність  $B(H)$ .

## 8.8 АНТИФЕРОМАГНЕТИКИ І ФЕРИТИ

### 1. Антиферомагнетики. 2. Ферити

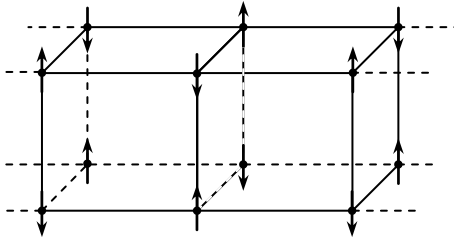


Рис. 8.27

Магнітна структура антиферомагнетика ( $T=0$ )

1. Обмінна взаємодія у феромагнетиках між електронами, що знаходяться на сусідніх атомах (іонах), спричиняє паралельну орієнтацію спінових магнітних моментів (рис. 8.23). Енергетичний параметр, що характеризує величину обмінної взаємодії, — *інтеграл обмінної взаємодії*, — у феромагнетиках є величиною додатньою. За певних умов (які реалізуються в деяких речовинах) обмінний інтеграл може бути від'ємний. В цьому випадку спінові магнітні моменти сусідніх іонів орієнтуються *антипаралельно*. Виникає антиферомагнітне впорядкування, яке схематично представлено на рис. 8.27. Речовини, в яких спостерігається антиферомагнітне впорядкування, називаються антиферомагнетиками. Прикладом антиферомагнетиків є Cr, MnO, NiO, FeNi<sub>2</sub>, FeS. Магнітну структуру антиферомагнетиків можна розглядати як сукупність двох «встановлених» одна в одну феромагнітних підґраток, кожна з яких намагнічена протилежно до іншої. Результуюча намагніченість антиферомагнетика за відсутності магнітного поля дорівнює нулю. Наявність двох підґраток з насиченим намагніченням у кожній — принципова відмінність магнітної структури антиферомагнетика від структури парамагнетика (рис. 8.13). Під дією магнітного поля антиферомагнетик подібно до парамагнетиків набуває слабку намагніченість. Магнітна сприйнятливність антиферомагнетиків  $\chi \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$ .

Антиферомагнітне впорядкування існує лише до певної температури, характерної для кожного антиферомагнетика, яка називається *температу-*

ри, характерної для кожного антиферомагнетика, яка називається *температу-*

рою Нееля  $T_N$  (аналог температури Кюрі для феромагнетика). При температурах  $T > T_N$  антиферомагнетик поводить себе як парамагнетик.

2. Існують магнітовпорядковані речовини — *феримагнетики*, які, як і антиферомагнетики, можна уявити у вигляді двох підґраток з протилежними намагніченостями. Проте тут, на відміну від антиферомагнетиків, намагніченості підґраток не скомпенсовані. Це зумовлено тим, що спінові магнітні моменти іонів, які входять до складу однієї підґратки, відрізняються за величиною від своїх «сусідів». Основний клас феримагнетиків — іонні сполуки перехідних і рідкоземельних елементів (з незаповненими  $d$ - і  $f$ -шарами електронних оболонок) — ферити, манганіти, хроміти. Феримагнетики за своїми магнітними властивостями нагадують феромагнетик. За електричними властивостями феримагнетики є здебільшого діелектриками та напівпровідниками.

Серед феримагнетиків за своїм прикладним значенням виділяють *ферити*. Ферити — сполуки залізотриоксиду ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) з оксидами інших металів; в більш широкому розумінні ферити — складні оксиди, які містять залізо і інші елементи. Завдяки тому, що ферити проявляють як феромагнітні так і напівпровідникові або діелектричні властивості, вони знаходять широке застосування як магнітні матеріали для виготовлення постійних магнітів, феритових антен, осердь для радіочастотних контурів і т.д.

## 8.9 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 8.9.1 Запитання і задачі

1. Чи можна намагнітити кулю?
2. Чому магніти рекомендується складати у пари різнойменними полюсами один до одного, а іноді між кінцями цих магнітів поміщати якір із м'якого заліза?
3. Підковоподібний магніт утримує залізну кульку (рис. 8.28). Що буде з кулькою, якщо магніт замкнути якорею?
4. Чому багато залізних предметів, наприклад штапи, часто є намагніченими?
5. Чому футляри годинників іноді виготовляють із

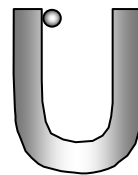


Рис. 8.28



м'якого заліза?

6. Однойменні магнітні полюси відштовхуються. Проте, коли до одного з полюсів магнітної стрілки піднести однойменний полюс досить сильного магніта, то кінець стрілки буде притягатися, а не відштовхуватися. Чому?

7. Яку лінійну швидкість повинен мати електрон, щоб величина орбітального магнітного моменту дорівнювала одному магнетону Бора?

8. Наявність власного магнітного моменту у електрона можна пов'язати із його «власним» обертанням. Поставимо у відповідність цьому магнітний момент

$$p_{ms} = \frac{e}{2} \omega r^2$$

(як і для випадку орбітального руху електрона, але із  $\omega$  і  $r$ , які відповідають обертання електрона навколо «своїї» осі). Покладемо  $p_{ms} = 9,3 \cdot 10^{-24}$  А·м<sup>2</sup> (магнетон Бора),  $r \approx 10^{-15}$  м («радіус» електрона). Яка кутова швидкість «власного» обертання електрона? Яка лінійна швидкість точок, які лежать на «екваторі» електрона? Який висновок можна зробити із цього?

9. Порівняти спінові магнітні моменти електрона і протона.

10. Є довгий прямолінійний провідник зі струмом. Як зміниться магнітне поле провідника, якщо на нього надягнути залізну трубу, яка коаксіальна з провідником?

11. Чи можна переносити електромагнітним краном розжарені сталеві болванки?

12. Запропонуйте електричну схему досліду для вивчення залежностей  $J(H)$ ,  $B(H)$  у феромагнетиках (п. 8.7.2).

13. Нехай домен є кубом зі стороною 10 мкм. Скільки атомів він містить?

### 8.9.2 Відповіді

1. Так, можна. Іноді вважають, що не можна: «у магніта має бути два полюси на протилежних кінцях, а в кулі протилежних кінців немає». Помилковість такої думки заперечується хоча б тим, що постійний магніт притягує феромагнітні тіла будь-якої форми. А тіло притягується саме тому, що воно

намагнічується — домени феромагнітної кулі впорядковуються під дією зовнішнього магнітного поля.

2. Для підтримування спонтанної намагніченості добре мати замкнуте магнітне «коло». Це сприяє збереженню намагніченості магнітів.

3. Кулька впаде вниз. За наявності якоря намагніченість кульки зменшиться. Поясніть це.

4. Вони намагнічені під дією магнітного поля Землі, домени впорядковуються під дією цього поля.

5. Бо в цьому випадку «працює» магнітний захист (див. п.8.4.2) механізму годинника від зовнішніх магнітних полів.

6. Дія сильного магніту може перемагнітити кінець стрілки (змінити напрям вектора намагніченості).

7. «Молекулярний струм», зумовлений орбітальним рухом електрона, створює магнітний момент

$$p_m = \frac{e \mathcal{G} r}{2},$$

де  $e$  — заряд електрона,  $\mathcal{G}$ , його швидкість,  $r$  — радіус орбіти. Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m} = \frac{eh}{4\pi m},$$

де  $h$  — стала Планка,  $m$  — маса електрона. Маємо:

$$\frac{e \mathcal{G} r}{2} = \frac{eh}{4\pi m} \Rightarrow \mathcal{G} = \frac{h}{2\pi m r} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{6,28 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \approx 1,15 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

8. Із виразу

$$\frac{e}{2} \omega r^2 = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$$

знаходимо

$$\omega \approx 10^{26} \text{ с}^{-1}.$$

Швидкість точок електрона, які знаходяться на «екваторі» електрона,

$$\mathcal{G} = \omega r \approx 10^{26} \cdot 10^{-15} = 10^{11} \text{ м/с.}$$

Це приблизно у 300 разів більше ніж швидкість світла — результат, який суперечить теорії відносності. Висновок: модель електрона, що обертається навколо «власної» осі не є прийнятною. Наявність спіна електрона і його влас-

ного магнітного моменту — характеристика електрона (така ж, як його маса, заряд).

9. Для електрона ця величина дорівнює  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  (магнетон Бора),

для протона —  $\mu_{Bп} = \frac{e\hbar}{2m_p}$ , де  $m_p$  — маса протона (ядерний магнетон Бора).

Видно, що відношення

$$\frac{\mu_B}{\mu_{Bп}} = \frac{m_p}{m_e} \approx 2 \cdot 10^3;$$

спіновий магнітний момент електрона більший приблизно у дві тисячі разів від спінового магнітного моменту протона; це і є підставою для подання виразу для  $p$  у формі (8.1.4).

10. У даному випадку лінії магнітної індукції (концентричні кола) не перетинають ні внутрішню, ні зовнішню поверхні труби. Тому не буде заломлень ліній магнітної індукції і магнітне поле навколо провідника, крім тіла труби, залишиться без змін. У трубі магнітна індукція збільшиться у  $\mu$  разів.

11. Ні. При нагріванні заліза (феромагнетика) його намагніченість зменшується із збільшенням температури; з наближенням до температури Кюрі  $T_c$  намагніченість тіла сильно послаблюється і зникає при  $T > T_c$ .

12. Такою схемою може бути, наприклад, наведена на рис. 8.29. Зауважимо, проте, що для дослідження вказаних в умові задачі залежностей краще використовувати не соленоїд, а тороїд (щоб уникнути неоднорідності магнітного поля, яка є біля торців соленоїда).

13. Вздовж однієї сторони куба може поміститися

$$\frac{10 \cdot 10^{-6}}{10^{-10}} = 10^5$$

атомів (розмір атома  $\approx 10^{-10}$  м) Тому домен буде містити  $10^{15}$  атомів.

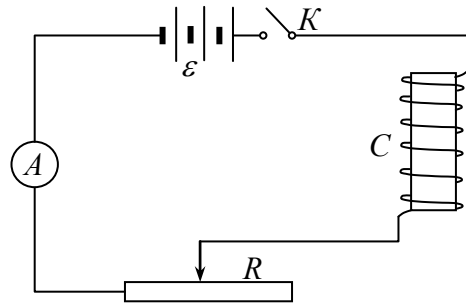


Рис. 8.29

$C$  – соленоїд з магнітним осердям

## РОЗДІЛ 9 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

*1821 р.: «Перетворити магнетизм в електрику» (Запис у щоденнику М. Фарадея)*

*1831 р.: Відкриття М. Фарадеєм явища електромагнітної індукції.*

Явище електромагнітної індукції, відкрите М. Фарадеєм 1831 р., — одне із найвидатніших відкриттів у фізиці, яке має не лише виключно наукове, але і практичне значення. На явищі електромагнітної індукції базується дія всіх потужних промислових джерел струму (промислових генераторів постійного і змінного струму, трансформаторів і т.і.). Явище електромагнітної індукції широко використовується у радіотехніці, електроніці, побутовій техніці та інших галузях техніки.

### 9.1 ЯВИЩЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ

**1. Зміна магнітного потоку крізь контур. Швидкість зміни магнітного потоку. 2. Відкриття Фарадея. 3. Правило Ленца. 4. Основний закон електромагнітної індукції**

#### *9.1.1 Зміна магнітного потоку крізь контур. Швидкість зміни магнітного потоку*

Поняття *зміна магнітного потоку крізь контур* та *швидкість зміни магнітного потоку* — ключові в з'ясуванні явища електромагнітної індукції. У цьому зв'язку доповнимо поняття *магнітний потік*, розглянуте у попередньому розділі, наступним.

1. Магнітний потік через площу  $S$ , обмежену контуром, у загальному випадку означається як

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B \cos \alpha dS$$

(п. 7.9).

В однорідному полі (рис. 9.1)

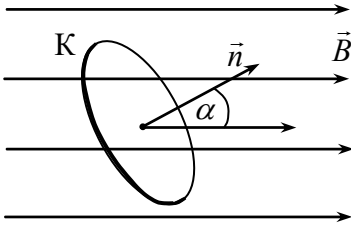


Рис. 9.1

$$\Phi = BS \cos \alpha .$$

Знак магнітного потоку пов'язаний з вибором нормалі до площадки  $S$ , яку обмежує контур. Для обраного на рис. 9.1 напрямку нормалі кут  $\alpha$  гострий і  $\Phi > 0$ .

Зміна магнітного потоку  $\Delta\Phi$ , як видно з останньої формули, може відбуватися як через зміну магнітного поля, що

пронизує контур, так і за рахунок зміни площі  $S$  (деформації контура) або внаслідок зміни орієнтації контура відносно напрямку лінії  $\vec{B}$  (приклади зі зміною  $\alpha$  наведені у п. 7.7). При поступальному переміщенні контура ( $\alpha$  — стала величина) в межах однорідного поля  $\Phi$  не змінюється і  $\Delta\Phi = 0$ .

У неоднорідному полі (рис. 9.2) зміна магнітного потоку крізь контур може відбуватися також при зближенні або віддаленні магніта і контура.

Якщо ми виберемо додатній напрям нормалі до площини контура так, як показано на рис. 9.2, то  $\Phi$  — величина додатня. Тому при зближенні магніта і контура зміна магнітного потоку  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 > 0$ , а при віддаленні  $\Delta\Phi < 0$ .

Якщо у схемі, поданій на рис. 9.2, постійний магніт замінити на соленоїд, по якому проходить струм (рис. 9.3), то з'являються додаткові можливості змінювати магнітний потік крізь контур — через зміну сили струму в соленоїді, а також при ввімкненні чи вимкненні струму.

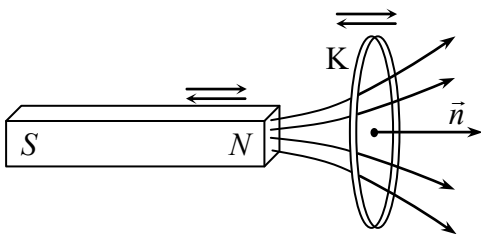


Рис. 9.2

Стрілки вказують на можливість взаємного переміщення магніта і контура,

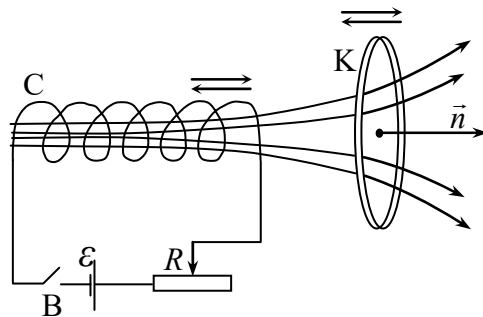


Рис. 9.3

Із наведеного (в подальшому будуть наведені і інші приклади) можна зробити висновок, що магнітний потік можна змінити двома різними спосо-

бами. Перший — переміщенням контура, або його окремих частин відносно джерела магнітного поля. Другий — зміною магнітного потоку, в якому знаходиться контур.

2. Якщо зміна  $\Delta\Phi$  відбулася за час  $\Delta t$ , то

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

— середня зміна магнітного потоку за час  $\Delta t$ . Швидкість зміни магнітного потоку —

$$\frac{d\Phi}{dt}.$$

Безмежно мала зміна магнітного потоку  $d\Phi$  — алгебраїчна величина, знак якої визначається через обрання додатньої нормалі до контура та зростанням або спаданням магнітної індукції крізь контур при його переміщенні.

Так, наприклад, при додатній нормалі, показаній на рис. 9.2 – 9.3,  $d\Phi$  (і  $\frac{d\Phi}{dt}$ )

— величина додатня при зближенні джерела поля та контура і від’ємна при їх віддаленні. Якщо ж обрати додатній напрям нормалі, протилежний до показаного на рис. 9.2 – 9.3, то знак  $d\Phi$  зміниться на протилежний. У першому випадку кут  $\alpha$  між  $\vec{n}$  і  $\vec{B}$  — гострий ( $\cos\alpha > 0$ ), у другому цей кут тупий ( $\cos\alpha < 0$ ).

Зміна магнітного потоку з часом вимірюється у вольтах. Справді,

$$\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = 1 \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = 1 \text{В}.$$

У випадку котушки, яка має  $N$  витків, швидкість зміни магнітного потоку буде в  $N$  разів більша ( $N \frac{d\Phi}{dt}$ ).

### 9.1.2 Відкриття Фарадея

Суть відкриття Фарадея: у замкнутому провідному контурі виникає електричний струм при зміні магнітного потоку через площу, обмежену цим контуром. Поява електричного струму (його назвали індукційним) означає, що при зміні магнітного потоку в контурі виникає електрорушійна сила — електрорушійна сила індукції (е.р.с. індукції).

Явище виникнення е.р.с. індукції у замкнутому провідному контурі при зміні потоку магнітної індукції через площу, обмежену цим контуром — явище електромагнітної індукції. Фарадеєм встановлено, що е.р.с. індукції  $\mathcal{E}_i$  не залежить від способу, яким відбулася зміна магнітного потоку, визначається лише швидкістю зміни магнітного потоку:

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.1.1)$$

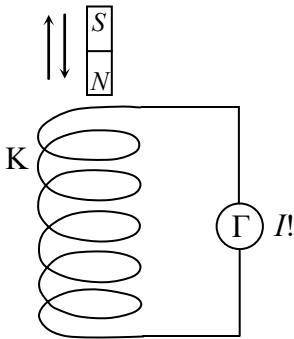


Рис. 9.4

Зміну магнітного потоку крізь контур можна реалізувати одним із способів, описаних у попередньому пункті. Індукційний струм виникає, зокрема, і в контурі К, зображеному на рис. 9.2, при виконанні умов, які забезпечують зміну магнітного потоку. Фіксувати сили цих струмів можна за допомогою гальванометра, ввімкнутого в коло контура, а для підсилення ефекту взяти не виток, а котушку. В такий спосіб спостерігається, зокрема, явище електромагнітної індукції в досліді, зображеному на рис.

9.4. Якщо в замкнуту на гальванометр котушку вставляти або виймати магніт, то буде спостерігатися відхилення стрілки гальванометра — виникає індукційний струм. При цьому напрямки струмів (напрямки відхилення стрілки гальванометра) при внесенні та вийманні магніта протилежні. Стрілка гальванометра відхилиться тим більше, чим швидше рухається магніт відносно котушки. Індукційний струм буде виникати і при русі котушки відносно магніта.

Подібно до цього можна зафіксувати індукційний струм у котушці і у випадку зміни магнітного потоку за схемою, показаною на рис. 9.3 (постійний магніт замінюють на соленоїд зі струмом, який можна змінювати).

Важливою особливістю індукційного струму в обох дослідіах (які відтворюють досліди Фарадея) є те, що його напрям у випадку  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$  протилежний до випадку  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ . Постає питання щодо визначення напрямку індук-

ційного струму в обох дослідіах (які відтворюють досліди Фарадея) є те, що його напрям у випадку  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$  протилежний до випадку  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ . Постає питання щодо визначення напрямку індук-

ційного струму у кожному конкретному випадку. Відповідь на нього дає *правило Ленца*.

### 9.1.3 Правило Ленца

Напрямок індукційного струму (а, отже, і знак е.р.с індукції) визначається **правилом Ленца**: індукційний струм завжди спрямований так, щоб протидіяти причині, яка його викликала. Іншими словами: напрям індукційного струму такий, що створене ним магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку, який зумовив виникнення цього індукційного струму.

Правило Ленца ілюструє рис. 9.5. Якщо магніт (електромагніт) наближати до контура, то магнітний потік крізь контур зростає. Індукційний струм, що виникає, створює магнітне поле «спрямоване» вліво; магнітний потік цього поля протидіє зростанню поля, що викликало індукційний струм (рис. 9.5, а)). Згадуючи тепер зв'язок (за правилом свердлика) між напрямом струму у коловому провіднику і напрямом ліній  $\vec{B}$ , приходимо до висновку, що індукційний струм  $I_i$  у витку (катушці) направлений за годинниковою стрілкою.

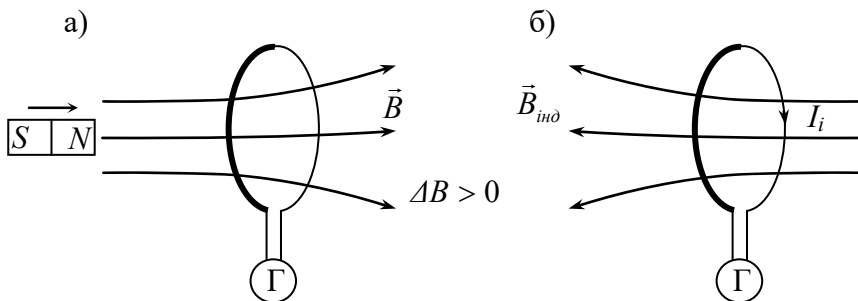


Рис. 9.5

Аналогічно можна визначити напрям індукційного струму і в інших випадках. Так, наприклад, якщо в досліді відображеному на рис. 9.4 замість постійного магніта буде соленоїд, то при збільшенні сили струму у соленоїді (збільшенні магнітної індукції поля соленоїда) індукційний струм буде мати такий самий напрям, як і показаний на рис. 9.5, б), а при зменшенні сили струму у соленоїді — протилежний до цього напрямку.



Правило Ленца відображає суттєву властивість фізичної системи — протидіяти зміні її стану<sup>1)</sup>.

Важливо відзначити, що *правило Ленца є проявом закону збереження енергії у явищі електромагнітної індукції* (див. п. 9.2).

#### 9.1.4 Основний закон електромагнітної індукції

Якщо врахувати правило Ленца, то закон електромагнітної індукції (9.1.1) у СІ набуває вигляду

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.1.2)$$

Це — *основний закон електромагнітної індукції або закон Фарадея-Ленца*. Він стверджує, що *е.р.с. електромагнітної індукції у провідному контурі чисельно рівна і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром*.

Якщо магнітний потік за час  $\Delta t$  змінюється рівномірно, то вираз (9.1.2) набуде вигляду

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (9.1.3)$$

де  $\Delta\Phi$  — зміна магнітного потоку крізь контур за час  $\Delta t$ . Цією ж формулою користуються і для визначення *середнього* значення е.р.с. індукції за час  $\Delta t$ . Формули (9.1.2) і (9.1.3) записані для випадку одного витка. Для котушки із  $N$  витків

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_i = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (9.1.4)$$

Величина  $N\Phi$  називається *потокозчепленням* ( $\Phi$  — магнітний потік через один виток).

При визначенні напрямку дії е.р.с. індукції (і напрямку індукційного струму) за законом (9.1.2) потрібно керуватися певними правилами знаків. Знак  $\Phi$  пов'язаний із обранням додатньої нормалі до поверхні  $S$ , яка обмежує контур, а знак  $\mathcal{E}_i$  — з обранням додатнього напрямку обходу по контуру. При цьому мається на увазі, що напрям додатньої нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  і дода-

<sup>1)</sup> У фізиці (і поза фізикою!) можна знайти різні прояви цього. Так, наприклад, сили пружності протидіють зміні форми і розмірів тіла

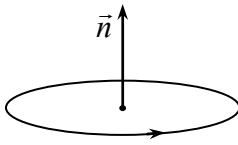


Рис. 9.6

Стрілка вказує додатний напрям обходу контура

тній напрям обходу контура пов'язані між собою *правилом правого свердлика*, яке було використане при встановленні взаємозв'язку між напрямом струму в контурі і напрямом  $\vec{n}$ ; рис. 9.6 відображає цей зв'язок. Отже, якщо ми обрали (цілком довільно) додатний напрям  $\vec{n}$ , то цим самим задаємо знак  $\Phi$ ; знак  $\frac{d\Phi}{dt}$  буде тепер

залежати від того зростає  $\Phi$  чи зменшується. За формулою (9.1.2) знак  $\mathcal{E}_i$  протилежний до знаку  $\frac{d\Phi}{dt}$ . Якщо  $\mathcal{E}_i$  — величина

додатня, то це означає, що е.р.с. індукції у контурі направлена за додатнім напрямом обходу контура, якщо від'ємна — то напрям е.р.с. протилежний до цього додатнього напрямку. Можна переконатися, що напрям е.р.с. індукції не залежить від вибору  $\vec{n}$ .

Напрямок індукційного струму  $I_i$  має той самий напрям, що і е.р.с.  $\mathcal{E}_i$ ; за законом Ома для контура, в якому діє лише е.р.с. індукції, є

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

для котушки, що містить  $N$  витків

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{N}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

де  $R$  — опір контура.

Пояснимо викладене на прикладі дослідів, відображених на рис. 9.2 і рис. 9.3. Тут напрям  $\vec{n}$  складає з лініями  $\vec{B}$  гострі кути, тому магнітний потік  $\Phi > 0$ . У відповідності із правилом свердлика додатний напрям обходу контура  $K$  на рис. 9.2 і 9.3 — проти годинникової стрілки (рис. 9.7). Якщо джерело магнітного поля і контур наближаються, то магнітний потік зростає:  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ . За законом (9.1.2)  $I_i < 0$ , отже е.р.с. ін-

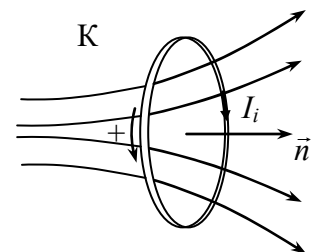


Рис. 9.7

«+» відображає додатний напрям обходу контура

дукції та індукційний струм спрямовані за годинниковою стрілкою. Це узгоджується із раніше знайденим напрямком індукційного струму за правилом Ленца.

Самостійно корисно переконатися, що показаний на рис. 9.7 напрям струму отримується із (9.1.2) і при обранні додатньої нормалі  $\vec{n}$  у напрямку, спрямованому проти ліній  $\vec{B}$ .

**Приклад.** Котушка, яка містить 1000 витків дроту і радіус якої 8 см, розміщена в однорідному магнітному полі так, що лінії  $\vec{B}$  поля спрямовані вздовж осі котушки. За 1 с індукція поля рівномірно зростає з 0,1 Тл до 0,6 Тл. Яка е.р.с. електромагнітної індукції? Яка кількість теплоти виділяється у котушці, якщо її опір 1000 Ом?

⇒  $\mathcal{E}_i$  визначимо за формулою (9.1.4):

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t};$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (B_2 - B_1)S = (B_2 - B_1)\pi r^2. \text{ Маємо:}$$

$$\mathcal{E}_i = -10^3 \cdot \frac{\pi r^2 (B_2 - B_1)}{\Delta t}.$$

Після підстановки числових даних знаходимо, що  $\mathcal{E}_i \approx 16$  В. Знак мінус означає, що е.р.с. індукції направлена проти вибраного додатнього напрямку обходу контура ( $\vec{n}$  спрямований вздовж ліній  $\vec{B}$ ).

Сила індукційного струму

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} \approx -16 \text{ мА.}$$

Знак «мінус» вказує, що індукційний струм, як і  $\mathcal{E}_i$ , має напрям, протилежний до вибраного додатнього напрямку обходу контура.

Кількість теплоти, яка виділяється у контурі

$$Q = I^2 R t \approx 26 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

## 9.2 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ У РУХОМОМУ ПРОВІДНИКУ

Вище були розглянуті випадки виникнення е.р.с. індукції у замкнутому провідному контурі при зміні магнітного потоку крізь контур (внаслідок пе-

реміщення контура або внаслідок зміни самого поля). Виявляється, що е.р.с. електромагнітної індукції виникає і у провіднику, який, рухаючись, перетинає лінії магнітної індукції. З'ясуємо суть цього прояву явища електромагнітної індукції.

Нехай провідник завдовжки  $l$  рухається зі сталою швидкістю  $\vec{g}$  перпендикулярно до ліній  $\vec{B}$  магнітного поля, яке будемо вважати однорідним. Таким може бути рух перемички вздовж направляючих провідників АВ і CD (рис. 9.8, а) — із розімкнутим електричним колом. Рух перемички може моделювати і переміщення крила літака у магнітному полі Землі (у цьому випадку  $\vec{B}$  — вертикальна складова магнітного поля Землі).

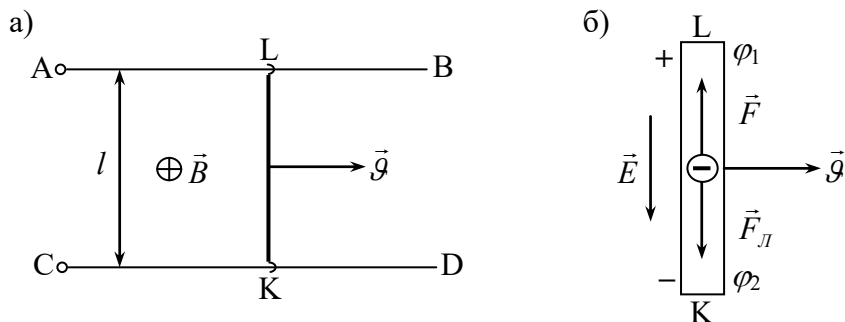


Рис. 9.8

**При русі провідника у магнітному полі виникає різниця потенціалів між кінцями провідника**

При переміщенні провідника на кожен із електронів провідності вздовж провідника KL діятиме магнітна сила Лоренца

$$\vec{F}_L = -e[\vec{g}\vec{B}],$$

і електрони почнуть переміщатися у напрямку від точки L провідника до точки K. Внаслідок цього біля точки L накопичуватиметься надлишковий додатній заряд, а біля точки K — надлишковий від'ємний заряд (рис. 9.8, б)). Електростатичне поле  $\vec{E}$ , що виникає при цьому, буде спрямоване у напрямку від L до K; воно буде протидіяти переміщенню електронів (згадаймо ефект Холла!).

Електрони будуть переміщуватися доти, доки сила  $\vec{F}$ , що діє з боку електростатичного поля (протилежно спрямована до сили Лоренца), не стане рівною за модулем силі  $\vec{F}_L$  (рис. 9.8, б)):

$$eE = e\mathcal{G}B ;$$

тут  $E$  — модуль напруженості електростатичного поля. Звідси

$$E = \mathcal{G}B .$$

Оскільки різниця потенціалів пов'язана з напруженістю поля виразом

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El ,$$

то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{G}Bl . \quad (9.2.1)$$

Якщо тепер коло замкнути, з'єднавши точки кола А і С, то по ньому потече струм. На ділянці провідника KL («внутрішня» ділянка кола) він буде спрямований від К до L (електрони рухатимуться у протилежному напрямку) — проти напрямку електростатичного поля, на «зовнішній» ділянці кола (LACK) — за напрямом електростатичного поля. Переміщення заряду вздовж провідника KL забезпечується сторонньою силою — силою Лоренца.

Знайдемо е.р.с., що виникла у провіднику KL.

За законом Ома для ділянки кола, що містить е.р.с., маємо:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} .$$

Якщо коло розімкнене ( $I=0$ ), то електрорушійна сила — е.р.с. електромагнітної індукції, що виникла у провіднику KL,

$$\mathcal{E}_i = -(\varphi_1 - \varphi_2) = -\mathcal{G}Bl . \quad (9.2.2)$$

Нехай швидкість  $\vec{\mathcal{G}}$  спрямована вздовж осі  $x$ , тоді  $\mathcal{G} = \frac{dx}{dt}$

$$\mathcal{E}_i = -Bl \frac{dx}{dt} .$$

$ldx = dS$  — приріст площі, обмеженої провідником, за час  $dt$ , а  $BdS = d\Phi$  — приріст магнітного потоку. Таким чином отримується вираз для е.р.с. електромагнітної індукції у вигляді основного закону електромагнітної індукції (9.1.2).

Отже, в провіднику, що переміщається у магнітному полі так, що ним перетинаються лінії магнітної індукції, виникає е.р.с. індукції. При «ввімкненні» провідника в коло виникає індукційний струм.

Проведений розгляд можна поширити і на провідник, який обертається в магнітному полі.

### 9.3 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ І ЯВИЩЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ

Явище електромагнітної індукції знаходить обґрунтування у *законі збереження енергії*. Воно полягає у наступному.

1. Індукційний струм не виникає «сам по собі», — лише при наявності провідного контура і джерела магнітного поля. Для його виникнення необхідно *створити змінний магнітний потік*. А для цього потрібно виконати певну роботу — механічну (наприклад, переміщення магніту, електромагніту) або роботу, пов'язану зі зміною сили електричного струму.

2. Основний закон електромагнітної індукції є наслідком закону збереження енергії. Проілюструємо це наступним прикладом.

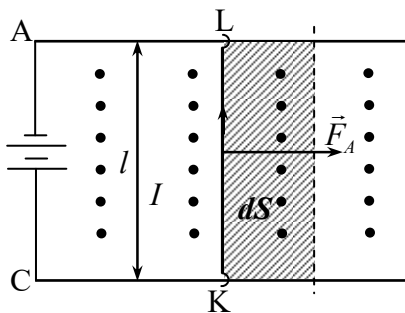


Рис. 9.9

Лінії індукції однорідного магнітного поля спрямовані «до нас»

кола. Якщо б провідник не переміщався (під дією сили Ампера), то ми мали б

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

де  $\mathcal{E}$  — електрорушійна сила джерела струму. Із врахуванням переміщення провідника у магнітному полі закон Ома потребує уточнення.

— Із переміщенням провідника зі струмом пов'язана механічна робота

$$\delta A = I d\Phi$$

(п. 7.10), де  $d\Phi$  — зміна магнітного потоку крізь контур АСКЛ при переміщенні рухомого провідника.

Відтворимо рис. 7.41 (який відображає переміщення провідника зі струмом у магнітному полі) і охарактеризуємо наступні процеси в електричному колі СКЛАС з енергетичної точки зору:

— При проходженні електричного струму за час  $dt$  виділяється теплота

$$\delta Q = I^2 (R + r) dt,$$

де  $I$  — сила струму в колі,  $R$  і  $r$  — відповідно зовнішній і внутрішній опори

( $d\Phi = BdS$ , де  $dS$  — площа, заштрихована на рис. 9.9).

— За час  $dt$  джерело струму виконує роботу

$$\delta A = \delta q \mathcal{E},$$

де  $\delta q$  — заряд, перенесений по електричному колі за час  $dt$ .

$$I = \frac{\delta q}{dt},$$

тому

$$\delta A = I \mathcal{E} dt.$$

За законом збереження енергії

$$\delta Q + \delta A = \delta A \Rightarrow I_2(R+r)dt + Id\Phi = I \mathcal{E} dt.$$

Звідси

$$I = \frac{\mathcal{E} + \left(-\frac{d\Phi}{dt}\right)}{R+r}.$$

Це і є закон Ома для електричного контура в магнітному полі. Отже, за умови зміни магнітного потоку крізь контур кола, виникає *додаткова* (до е.р.с. джерела струму) електрорушійна сила

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

— е.р.с. електромагнітної індукції. Якщо в електричному колі буде відсутнє джерело струму ( $\mathcal{E}=0$ ), в колі існуватиме індукційний струм, зумовлений е.р.с. електромагнітної індукції.

3. Правило Ленца — також наслідок закону збереження енергії.

Уявимо собі, що правило Ленца не виконується, а виконується протилежне правило: збільшення магнітного потоку, що пронизує контур, створює індукційне магнітне поле, яке *підсилює* первинний магнітний потік. Це привело б до все зростаючого магнітного потоку крізь контур (навіть після припинення зміни первинного магнітного потоку). Наслідком цього було б неупинне наростання (аж до безмежності) сили індукційного струму і відповідної потужності.

Такий «сценарій» суперечить, зрозуміло, закону збереження енергії.

Навпаки, — правило Ленца знаходиться у згоді із законом збереження енергії. Справді, як і будь-який інший струм, індукційний струм виконує пе-

вну роботу. Для цього, в свою чергу, повинна бути виконана робота зовнішніх сил. Ця робота пов'язана з тим, що індукційні струми, взаємодіючи з магнітним полем, зумовлюють сили, які протидіють зміні стану контура, в якому виник індукційний струм. Наявність такої протидії і стверджує правило Ленца, яке математично міститься в основному законі електромагнітної індукції (знак мінус!)<sup>1)</sup>.

## 9.4 ПРИРОДА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ

**1. Механізм виникнення е.р.с. індукції у контурі з рухомих провідником. 2. Виникнення е.р.с. індукції у нерухомому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі. Вихрове електричне поле. 3. Порівняння двох механізмів. Е.р.с. індукції у контурі, що переміщається у змінному магнітному полі**

Постає питання: які фізичні принципи (механізми) зумовлюють виникнення е.р.с. електромагнітної індукції? Відповідь полягає в тому, що у відповідності із двома можливими способами збудження індукційного струму, —

1) *внаслідок відносного переміщення контура (або його частин) і джерела магнітного поля,*

2) *внаслідок зміни магнітного поля, в якому знаходиться нерухомий контур,*

— існують і два механізми виникнення е.р.с. електромагнітної індукції. З'ясуємо суть цих механізмів.

### 9.4.1 Механізм виникнення е.р.с. індукції у контурі з рухомих провідником

Якщо в схемі на рис. 9.8 з'єднати провідником точки А і С, то ми будемо мати контур АСКЛА з рухомих провідником КЛ, що знаходиться у магнітному полі (рис. 9.10), то в контурі виникає індукційний струм.

---

<sup>1)</sup> Можна сказати і так: «знак мінус в основному законі електромагнітної індукції — прояв закону збереження енергії»



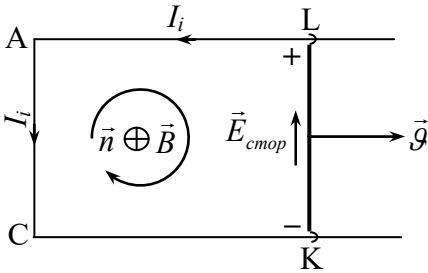


Рис. 9.10

Всередині контура показаний додатній напрям обходу контура

Переміщення зарядів на «зовнішній» ділянці кола (LACK) забезпечується електричним полем, що виникло внаслідок перерозподілу зарядів, а переміщення зарядів всередині «внутрішньої» ділянки кола (від точки К до L) відбувається під дією сторонньої сили (сили неелектростатичного походження) — сили Лоренца

$$\vec{F}_{Л} = -e[\vec{g}\vec{B}].$$

Їй відповідає елек-

тричне поле сторонніх сил з напруженістю

$$\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}}{-e} = [\vec{g}\vec{B}]. \tag{9.4.1}$$

Покажемо, що ця напруженість  $\vec{E}_{стор}$  призводить до е.р.с. індукції  $\mathcal{E}_i = -eI\vec{B}$ . Справді, за означенням, циркуляція вектора  $\vec{E}_{стор}$  по контуру дає величину е.р.с. (індукції). Із врахуванням (9.4.1) маємо:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{стор} d\vec{l} = \oint [\vec{g}\vec{B}] d\vec{l} \tag{9.4.2}$$

де контуром, вздовж якого здійснюється інтегрування, є контур ALKCA. Оберемо додатню нормаль  $\vec{n}$  до площини контура у напрямку вектора  $\vec{B}$  (рис. 9.10). У відповідності з цим знаходимо за правилом свердлика додатній напрям обходу контура — за годинниковою стрілкою. Оскільки стороння сила діє лише на ділянці LK, а проекція вектора  $\vec{E}_{стор}$  на додатній напрям  $E_{стор}l = -\mathcal{E}$  (вектор  $\vec{E}$  спрямований проти додатнього напрямку, а кут між векторами  $\vec{g}$  і  $\vec{B}$  дорівнює  $\pi/2$ ). Отже,

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{стор} d\vec{l} = \int_L^K -\mathcal{E} dl = -\mathcal{E}l,$$

де  $l$  — довжина провідника KL.

Як показано у п. 9.2, знайдений зв'язок можна подати у формі основного закону електромагнітної індукції (9.1.2).

Можна довести, що основний закон у формі (9.1.2) справедливий для довільного контура, що рухається у постійному магнітному полі.

Таким чином, виникнення е.р.с. індукції у випадку руху контура у постійному магнітному полі пояснюється дією магнітної сили Лоренца.

#### 9.4.2 Виникнення е.р.с. індукції у нерухомому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі. Вихрове електричне поле

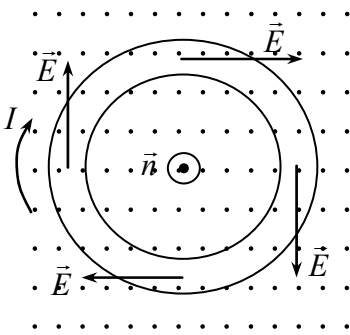


Рис. 9.11

Принципово інший механізм виникнення е.р.с. індукції у випадку нерухомого контура, що знаходиться у змінному магнітному полі; на нерухомі заряди сила Лоренца не діє, тому виникнення е.р.с. у цьому випадку не пояснюється силою Лоренца. Яка ж сила зумовлює рух електронів у цьому випадку? Відповідь на це питання дав Максвелл.

За Максвеллом магнітне поле, що змінюється у часі, породжує в оточуючому просторі електричне поле. Воно і є причиною руху електронів у контурі, внесеному у це поле. Це поле не електростатичне — воно не зумовлене електричними зарядами.

Суттєву різницю між двома типами електричних полів можна бачити на такому прикладі. Нехай коловий виток знаходиться в однорідному магнітному полі, лінії  $\vec{B}$  якого перпендикулярні до площини витка (рис. 9.11). Оберемо додатній напрям нормалі до контура  $\vec{n}$  у напрямку ліній  $\vec{B}$  («до нас»); цьому відповідатиме додатній напрям обходу контура проти годинникової стрілки. При зростанні магнітного поля зміна магнітного потоку  $d\Phi > 0$ , і тому напрям е.р.с. індукції та індукційного струму буде за годинниковою стрілкою. Оскільки всі ділянки витка еквівалентні, то напруженість електричного поля  $\vec{E}$ , яке виникло внаслідок зміни магнітного поля і зумовило рух вільних електронів, є однаковою за абсолютною величиною в будь-якій точці витка, а напрям  $\vec{E}$  всюди співпадає з напрямком індукційного струму. Звідси висновок: *лінії напруженості індукційного електричного поля на відміну від поля, створеного зарядами, є замкнутими.*

Циркуляція вектора напруженості індукційного електричного поля  $\vec{E}$  по *нерухомому* контуру (е.р.с.!) визначиться як

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (9.4.3)$$

(9.4.3) відображає замкнутість ліній  $\vec{E}$  індукційного електричного поля: циркуляція вектора  $\vec{E}$  не дорівнює нулю. Це означає, що індукційне поле не є потенціальним. Воно, як і магнітне поле, є *вихровим*. Отже, електричне поле може бути як потенціальним (поле електричних зарядів), так і вихровим.

### 9.4.3 Порівняння двох механізмів. Е.р.с. індукції у контурі, що переміщається у змінному магнітному полі

1. Підсумуємо спочатку викладене вище.

Магнітний потік крізь контур може змінюватися як при переміщенні контура (або його частин), так і при зміні магнітного поля.

В обох випадках е.р.с. електромагнітної індукції визначається швидкістю зміни магнітного потоку крізь контур. Проте між ними є суттєва відмінність. Вона полягає в тому, що е.р.с. індукції у рухомому контурі зумовлена дією магнітної сили (сила Лоренца), а у нерухомому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі, - вихровим електричним полем. Відповідно до цього закон електромагнітної індукції у першому випадку можна задати у формі

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \oint [\vec{g}\vec{B}] d\vec{l}$$

(формула (9.4.2)), а у другому — у вигляді

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

2. Якщо ж магнітне поле, що пронизує контур, змінюється в часі, а контур (або частини його) до того ж переміщається у магнітному полі, то потрібно враховувати обидва фактори. Наявність *повної похідної*  $d\Phi/dt$  в основному законі електромагнітної індукції (9.1.2) забезпечує врахування цього. Із врахуванням формул (9.4.2) і (9.4.3)

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [\vec{g}\vec{B}] d\vec{l};$$

тут перший доданок описує зміну магнітного поля в часі, а другий — швидкість зміни магнітного в часі внаслідок переміщення контура або його частин. Із врахуванням останньої формули основний закон електромагнітної індукції може бути записаний у вигляді

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\vec{g}\vec{B}]d\vec{l} \quad (9.4.4)$$

або

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\vec{g}\vec{B}]d\vec{l}. \quad (9.4.5)$$

Така конкретизація закону електромагнітної індукції може виявитися корисною при з'ясуванні явищ електромагнітної індукції. Покажемо це на такому прикладі.

**Приклад.** Якщо у пристрої, який відображений на рис. 7.26, «забрати» джерело струму, то за рахунок механічної роботи (обертання диска) можна отримати електричний струм: електричний двигун (7.26) у зворотному напрямку працює як генератор струму («диск Фарадея»). Це ілюструє рис. 9.12.

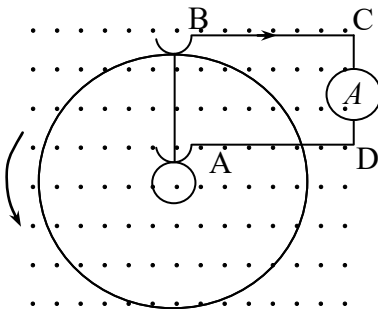


Рис. 9.12

В даному випадку магнітний потік, що пронизує диск, — сталий. І якщо підійти до закону електромагнітної індукції

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

формально, то  $\Phi = \text{const}$ ,  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ ,  $\mathcal{E}_i = 0$  —

індукційний струм у контурі ABCDA — відсутній. Насправді ж мова йде про контур, в якому «провідник» AB (радіальна

ділянка диска) — рухомий. Тому при знаходженні е.р.с. індукції ми повинні виходити із формули (9.4.4), яка у явному вигляді враховує переміщення ділянок контура, які лежать вздовж радіуса диска AB. В цій формулі ми справді можемо покласти  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ . Таким чином, е.р.с., що діє в контурі ABCDA,

визначатиметься виразом

$$\mathcal{E}_i = \oint [\vec{g}\vec{B}]d\vec{l},$$

де інтеграл береться вздовж розглядуваного контура. Тут швидкість  $\mathcal{J}$  є функцією віддалі від осі диска до елементів «провідника»  $ABdl$ . Ясно, що  $\mathcal{E}_i \neq 0$ . Конкретний розрахунок  $\mathcal{E}_i$  здійснений у задачі № 19 п. 9.11.

### 9.5 ВИХРОВІ СТРУМИ (СТРУМИ ФУКО)

Один із проявів явища електромагнітної індукції — виникнення індукційних струмів у масивному провіднику при зміні магнітного потоку, що його пронизує. Ця зміна може бути зумовлена як зміною магнітного поля, в якому знаходиться тіло, так і переміщенням тіла у магнітному полі.

Електричне поле, що виникає при цьому, — вихрове, тому лінії індукційного струму утворюють вихроподібні контури, що замикаються всередині провідника; звідси їх назва — *вихрові струми*. Вихрові струми називають і *струмами Фуко*.

Вихрові струми, які виникають при русі масивних провідників у магнітному полі, зумовлюють появу сил, які *протидіють* руху (у згоді із правилом Ленца). Це можна спостерігати на прикладі масивного (мідного, алюмінієвого) маятника, який здійснює слабко згасаючі коливання. Коли ж цей маятник, коливаючись, рухатиметься між полюсами сильного електромагніта, то коливання маятника швидко згаснуть. Якщо тілу (наприклад, мідній монеті) дати можливість вільно падати між полюсами сильного електромагніту, то вона буде рухатися дуже повільно; рух тіла нагадуватиме рух у в'язкому середовищі. Цей гальмівний електромагнітний ефект використовується, зокрема, в деяких типах дискових (циркулярних) пил. Вони оснащені підковоподібним магнітом, який після відключення приводу опускається над диском. Вихрові струми, що виникають в диску, зумовлюють його швидку зупинку.

Сили, що зумовлені вихровими струмами і які діють на рухомі провідники у магнітному полі, використовують в гальванометрах — для демпфування (заспокоєння) рухомої частини гальванометра, в електричних лічильниках та інших вимірювальних приладах.

У відповідності із законом Джоуля-Ленца вихрові струми зумовлюють нагрівання тіл, в яких вони виникають. Оскільки опір масивних провідників малий, то сила струму Фуко може досягти дуже великих значень. Якщо все-

редину котушки, по якій проходить змінний струм, помістити, наприклад, металічний диск, зорієнтований перпендикулярно до осі котушки, диск може нагрітися до температури плавлення.

Теплова дія струмів Фуко використовується в індукційних печах для плавлення металів і виготовлення їх сплавів. Надчисті матеріали отримуються плавленням металів у вакуумі саме таким способом.

У багатьох випадках вихрові струму відіграють шкідливу роль. Так, наприклад, в залізних осердях трансформаторів і обертових частинах електричних генераторів вихрові струми спричиняють непотрібне нагрівання, а це приводить до втрат енергії, зниження к.к.д. пристрою. З метою ослаблення вихрових струмів такі деталі виготовляють із тонких пластин, розділених ізолюючими прошарками. Пластини розташовують так, щоб можливі напрямки струмів Фуко були до них перпендикулярні. З появою феритів — магнітних матеріалів з великим електроопором, названі проблеми частково зняли ся; феритові осердя виготовляються суцільними.

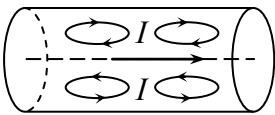


Рис. 9.13

Вихрові струми виникають і в провідниках (дротах), по яких тече змінний струм. На рис. 9.13 зображена ділянка провідника, в якому проходить підсилення струму ( $dI/dt > 0$ ). Це супроводжується посиленням магнітного поля, що оточує провідник. Зміна магнітного поля викликає появу вихрового електричного поля, а, отже, і вихрових струмів.

У круглому циліндричному провіднику площини вихрових струмів проходять через вісь провідника. Напрямок цих струмів можна визначити за правилом Ленца; біля осі провідника вони послаблюють основний струм, а біля поверхні — посилюють (рис. 9.13). Подібно до цього вихрові струми протидіятимуть зміні основного струму поблизу осі провідника і сприятимуть цій зміні біля поверхні у випадку зменшення струму ( $dI/dt < 0$ ). Внаслідок такої протидії зміні струму всередині провідника швидкозмінний струм розподіляється по поперечному перерізі провідника нерівномірно: густина струму максимальна на поверхні провідника і мінімальна на його осі. Це явище називається *скін-ефектом* (від англійського skin — шкіра; у вільному перекладі skin — поверхня). Змінні струми дуже високої частоти проходять по дуже тонкому поверхневому шару провідника. Ця обставина дозволяє замінити суцільні провідники трубчас-

тими. Внаслідок скін-ефекту височастотний струм, який проходить по суцільному провідник, зумовлює нагрівання, в основному, приповерхневого шару. На цьому ґрунтується метод поверхневого гартування металів.

## 9.6 ЯВИЩЕ САМОІНДУКЦІЇ

**1. Явище самоіндукції. Індуктивність. 2. Прояви самоіндукції при замиканні електричного кола. Електроструми замикання. 3. Прояви самоіндукції при розмиканні електричного кола**

### 9.6.1 Явище самоіндукції. Індуктивність

1. Електричний струм, що тече в будь-якому контурі, створює магнітне поле. Магнітний потік, створений цим полем крізь поверхню  $S$ , яка обмежує контур,

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

За законом Біо-Савара-Лапласа магнітна індукція  $B$  пропорційна до сили струму  $I$ , який тече в контурі. Звідси виходить, що магнітний потік  $\Phi$  пропорційний силі струму  $I$ :

$$\Phi = LI, \quad (9.6.1)$$

де  $L$  — коефіцієнт пропорційності, який називається *індуктивністю контура*. Індуктивність контура залежить від геометричної форми контура, його розмірів та магнітної проникності середовища, в якому він знаходиться.

При зміні сили струму в контурі буде змінюватися і магнітний потік  $\Phi$ . У відповідності із основним законом електромагнітної індукції е.р.с. індукції, що виникатиме в контурі,

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}. \quad (9.6.2)$$

Виникнення е.р.с. у контурі внаслідок зміни струму у цьому ж контурі називається *явищем самоіндукції*, а е.р.с.  $\mathcal{E}_c$  — е.р.с. самоіндукції. Струм, що виникає, називається *струмом самоіндукції*.

Якщо  $L = \text{const}$ , контур не деформується і магнітна проникність середовища не змінюється (ця умова виконується для неферромагнітних середовищ), то

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (9.6.3)$$

Знак мінус зумовлений правилом Ленца. Згідно з цим струм самоіндукції спрямований так, щоб протидіяти зміні сили струму у контурі. Якщо струм з часом зростає, то  $dI/dt > 0$ ,  $\mathcal{E}_c < 0$  — струм самоіндукції направлений проти струму, створеного джерелом струму (протилежно «первинному» струму). Якщо ж струм у контурі спадає ( $dI/dt < 0$ ,  $\mathcal{E}_c > 0$ ), то струм самоіндукції має той самий напрям, що і первинний струм. У першому випадку індукційний струм протидіє зростанню струму у контурі, у другому — протидіє його спаданню.

Із формули (9.6.1) визначається одиниця індуктивності *генрі* (Гн):

1 Гн — індуктивність такого контура, магнітний потік крізь який дорівнює 1 Вб при струмі 1 А.

2. Визначимо індуктивність соленоїда, об'єм якого  $V$ , довжина  $l$ , кількість витків  $N$ ; магнітна проникність речовини всередині соленоїда  $\mu$ .

За формулою (9.6.1)

$$L = \frac{\Phi_{\text{кол}}}{I} = \frac{N\Phi_1}{I},$$

де  $N$  — загальна кількість витків соленоїда,  $\Phi_1$  — магнітний потік крізь площу обмежену одним витком. При силі струму  $I$  магнітна індукція всередині соленоїда (красвими ефектами нехтується)

$$B = \mu_0 \mu n I,$$

де  $n = \frac{N}{l}$  — кількість витків на одиницю довжини соленоїда, тому

$\Phi_1 = BS = \mu_0 \mu n I S$ , а повний магнітний потік крізь соленоїд

$$\Phi = N\Phi_1 = n l \cdot \Phi_1 = \mu_0 \mu n^2 I V,$$

де  $V = Sl$ . Отже,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \mu n^2 V.$$

**Приклад.** Знайдемо індуктивність соленоїда, що має довжину  $l=0,5$  м, площу поперечного перерізу  $S=50$  см<sup>2</sup>. Кількість витків  $N=3000$ . Середовище — повітря.

⇒ За останньою формулою



$$L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \left( \frac{N}{l} \right)^2 SI$$

( $\mu \approx 1$ ). Чисельно

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left( \frac{3 \cdot 10^3}{0,5} \right)^2 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 \approx 0,11 \text{ Гн.}$$

Це значення завищене в порівнянні із справжнім значенням індуктивності даного соленоїда (насамперед, через нехтування скінченною довжиною соленоїда).

Перейдемо тепер до розгляду конкретних явищ в електричних колах, зумовлених наявністю індуктивності.

### 9.6.2 Прояви самоіндукції при замиканні електричного кола. Електроструми замикання

Будь-яка зміна струму в колі приводить до виникнення струмів самоіндукції. Вони будуть виникати, зокрема, при замиканні або розмиканні електричного кола, що містить джерело струму.

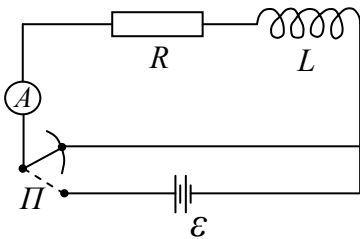


Рис. 9.14

Закономірності, які виникають при замиканні електричного кола, можна вивчати за допомогою досліду, схема якого відображена на рис. 9.14. Електричне коло складається із котушки з індуктивністю  $L$ , резистора з опором  $R$ , амперметра  $A$  і спеціального перемикача  $P$ , за допомогою якого джерело струму з е.р.с.  $\mathcal{E}$  можна

вводити в коло або виводити з кола. В положенні, показаному на рис. 9.14, джерело струму виведене з кола.

Замкнемо коло, перевівши перемикач  $P$  у нижнє положення. Струм в колі почне наростати; ця зміна струму зумовить е.р.с. самоіндукції, а отже, і індукційний струм. Цей струм називається *електрострумом замикання*. За правилом Ленца електрострум замикання направлений протилежно основному струму  $I$  і протидіє його наростанню, тому струм в колі не відразу набуває значення

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

(внутрішнім опором джерела струму нехтуємо), а поступово. Знайдемо залежність сили струму у колі від часу  $I(t)$  при замиканні кола.

За законом Ома

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_c \Rightarrow IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} \Rightarrow IR - \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Введемо нову змінну  $u = IR - \mathcal{E}$ ; при цьому  $du = R dI$ . Таким чином,

$$\frac{du}{u} = -\frac{R}{L} dt.$$

Інтегруємо:

$$\int_{-\mathcal{E}}^{IR-\mathcal{E}} \frac{du}{u} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt;$$

межі інтегрування зумовлені умовами: при  $t=0$  (момент вмикання е.р.с.)  $u = -\mathcal{E}$  (бо в момент вмикання  $I=0$ ); в довільний момент часу  $t$   $u = IR - \mathcal{E}$ , де  $I$  — сили струму в колі в момент часу  $t$ . Маємо

$$\ln \frac{IR - \mathcal{E}}{-\mathcal{E}} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow IR = \mathcal{E} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

або

$$I = I_0 \left( 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right). \quad (9.6.4)$$

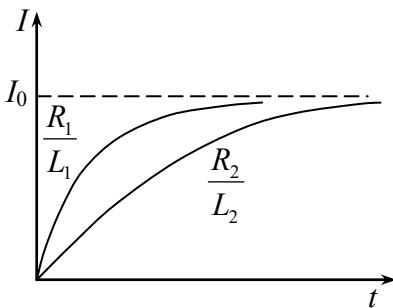


Рис. 9.15  
 $\frac{R_2}{L_2} > \frac{R_1}{L_1}$

Отже, струм в колі поступово зростає від нуля (в момент  $t=0$ ) до максимального значення  $I_0 = \mathcal{E}/R$  — сили постійного струму в колі. Зростання  $I$  буде тим швидше, чим більше відношення  $R/L$ . Графік залежності  $I(t)$  показаний на рис. 9.15. Повний струм  $I$  містить два доданки — постійну складову  $I_0$  і екстраструм замикання

$$I_s = -I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right).$$

Знак мінус показує, що екстраструм замикання має напрям, протилежний до основного струму.

Е.р.с. самоіндукції

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} = I_0 R \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) = -I_3 R;$$

знак мінус вказує, що е.р.с. самоіндукції протилежно спрямована до е.р.с. джерела струму.

**Приклад 1.** Прояв замикання електричного кола можна спостерігати в наступному досліді (рис. 9.16). Складемо електричне коло із джерела струму, вмикача  $B$  і двох паралельних ділянок  $AB$  і  $CD$ . Ділянка  $AB$  містить котушку із залізним осердям (для збільшення індуктивності  $L$ ) і лампочку розжарення, ділянка

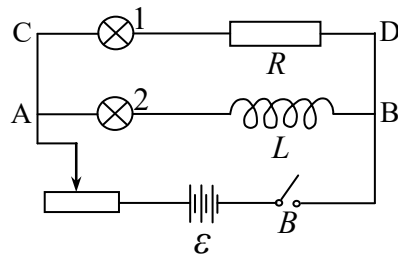


Рисунок 9.16

$CD$  містить таку ж лампочку і резистор з опором  $R$ , рівним опору котушки. Якщо замкнути коло, то лампочка 2 почне світитися пізніше і слабше, ніж лампочка 1. Ефект буде тим сильніший, чим більша індуктивність котушки. Спостережуване пояснюється тим, що відразу після ввімкнення, струм в колі швидко зростає, а це зумовлює виникнення струму самоіндукції в котушці. За законом Ленца на ділянці  $AB$  цей струм протидіє зростанню основного струму. Через деякий час обидві лампочки будуть світитися однаково.

**Приклад 2.** За формулою (9.6.4) струм  $I$  приймає, строго кажучи, значення  $I_0$  лише при  $t \rightarrow \infty$  (за такої умови  $I_3 = 0$ ). У більшості випадків  $R \gg L$ , тому практично струм набуває сталого значення  $I_0$  за долі секунди. Проте, в колах з великою індуктивністю процес переходу до сталого струму  $I_0$  може тривати *десятки секунд*. Так, якщо  $R = 1$  Ом,  $L = 0,1$  Гн, то через  $t = 0,01$  с,  $I > 0,1I_0$ , а через  $t = 1$  с  $I > 0,99995I_0$ , тобто практично співпадає із  $I_0$ .

### 9.6.3 Прояви самоіндукції при розмиканні електричного кола

Повернімося до рис. 9.14. Якщо швидко перевести ковзаючий перемикач із нижнього положення до верхнього, то можна вивести з кола джерело струму не порушивши замкненості кола (на мить перемикач «закоротить»

джерело струму і відразу ж вимкне його з кола). Струм через котушку почне зменшуватися, що приведе до виникнення е.р.с. самоіндукції. Індукційний струм, який виникає при цьому, називається *екстраструмом розмикання*. Екстраструм розмикання протидіє (за правилом Ленца) спаданню струму в колі. Знайдемо закон зміни струму в колі з часом.

В будь-який момент часу струм в колі задовільняє закону Ома

$$IR = \mathcal{E}_c \Rightarrow IR = -L \frac{dI}{dt},$$

або

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0.$$

Розділимо змінні; маємо:

$$\frac{dI}{I} + \frac{R}{L} dt = 0 \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln I \Big|_{I_0}^I = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow$$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right). \quad (9.6.5)$$

Тут ми прийняли, що вимкнення джерела струму відбулося в момент часу  $t=0$ , коли по колу проходив струм  $I_0$ .

Таким чином, після вимкнення джерела струму сила струму в колі не стає відразу рівною нулю, а спадає за законом (9.6.5). Графік залежності  $I(t)$  показаний на рис. 9.17. Із (9.6.5) видно, що чим більша індуктивність кола  $L$  і менший опір  $R$ , тим повільніше зникає струм в колі (після вимкнення джерела струму).

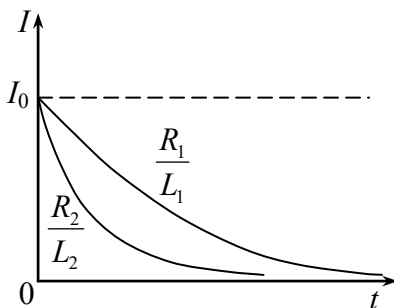


Рис. 9.17

$$\frac{R_1}{L_1} < \frac{R_2}{L_2}$$

2. Відзначимо тепер наступну важливу обставину — можливість виникнення дуже великих значень е.р.с. самоіндукції при миттєвому збільшенні

опору кола постійного струму від  $R_0$  до  $R$  (яке виникає при миттєвому вимкненні джерела струму).

Нехай джерело струму вимикається, коли в колі тече постійний струм  $I_0 = \mathcal{E} / R_0$ . При вимкненні джерела струму струм буде змінюватися в часі за формулою (9.6.5), в якій потрібно покласти  $I_0 = \mathcal{E} / R_0$ . Маємо:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \quad (9.6.6)$$

Е.р.с. самоіндукції, яка виникає,

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} \mathcal{E} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \quad (9.6.7)$$

З цієї формули видно, що при значному збільшенні опору кола ( $R \gg R_0$ ) е.р.с. самоіндукції може значно перевищити е.р.с. джерела струму, яке вмикається у коло.

*Екстраструми*, що виникають при швидкому розмиканні кола з великою індуктивністю, можуть зумовити небажані наслідки — пробій повітряного проміжку між контактами вимикача (виникає іскра або навіть електрична дуга), виведення з ладу обмоток електромагнітів і т.д.; екстраструми можуть становити небезпеку і для людини, що розмикає коло. Для недопущення цього існують певні запобіжні засоби. Так, наприклад, вимикання потужного електромагніту здійснюється поступово, зменшуючи основний струм за допомогою реостата.

## 9.7 ЯВИЩЕ ВЗАЄМНОЇ ІНДУКЦІЇ

### 1. Явище взаємної індукції. 2. Взаємна індуктивність. 3. Е.р.с. взаємної індукції

1. *Явище взаємної індукції* — окремий випадок електромагнітної індукції. Воно полягає в тому, що при зміні струму в деякому контурі у сусідньому до нього контурі виникає е.р.с. індукції (та індукційний струм). Це явище вперше спостерігав М. Фарадей на досліді, схема якого показана на рис. 9.18. Він встановив, що під час замикання і розмикання ключа К, у другій котушці виникає електричний струм. Фарадей також встановив, що струм у другій

котушці виникає і при зміні сили струму у першій котушці (в коло вмикався реостат).

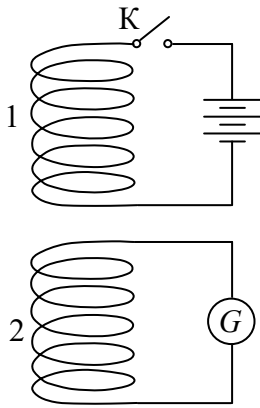


Рис. 9.18

2. З'ясуємо важливе поняття явища — *взаємну індуктивність контурів*.

Нехай маємо два нерухомі сусідні контури 1 і 2 (рис. 9.19). Якщо в контурі 1 тече струм  $I_1$ , то він створює магнітний потік  $\Phi_2$  крізь поверхню другого контура.

Керуючись міркуваннями, якими ми скористалися при розгляді явища самоіндукції (при встановленні зв'язку  $\Phi = LI$ ), запишемо

$$\Phi_2 = L_{21}I_1. \quad (9.7.1)$$

Подібно до цього магнітний потік через контур 1, зумовлений струмом  $I_2$ , що тече у другому контурі,

$$\Phi_1 = L_{12}I_2. \quad (9.7.2)$$

Коефіцієнти  $L_{12}$  і  $L_{21}$  називають *взаємною індуктивністю* контурів. Вони залежать від форми, розмірів і взаємного розташування контурів, а також від магнітної проникності середовища, що їх оточує. Вимірюють ці коефіцієнти в тих самих одиницях що і  $L$  (як видно із попередніх формул).

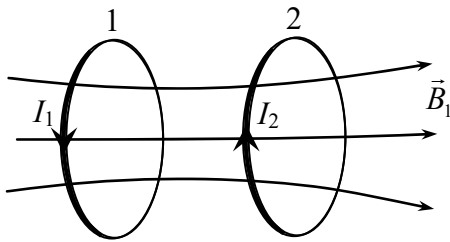


Рис. 9.19

Лінії, що пронизують контур 1 на рис. не показані (вони спрямовані проти ліній  $\vec{B}$ )

Можна показати, що при відсутності інших феромагнітних тіл

$$L_{12} = L_{21}. \quad (9.7.3)$$

У зв'язку з цим обидві величини називають *взаємною індуктивністю* двох контурів.

3. За законом електромагнітної індукції е.р.с., які виникають у контурах 1 і 2,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \\ \mathcal{E}_2 &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

Тут ми врахували зроблені вище припущення, що контури нерухомі і контури не перебувають у феромагнітному середовищі.

**Приклад.** Розглянемо взаємну індуктивність двох котушок, які намотані на тороїдальне осердя (рис. 9.20). Магнітна індукція поля, створеного першою котушкою,

$$B = \mu_0 \mu n_1 I_1,$$

де  $n_1$  — число витків першої котушки на одиницю довжини. Магнітний потік через один виток другої котушки

$$\Phi_2^{(1)} = BS = \mu_0 \mu n_1 I_1 S.$$

Повний потік через другу котушку (потокозчеплення)

$$\Phi_2 = \Phi_2^{(1)} \cdot N_2 = \mu_0 \mu n_1 S N_2 I_1 = \mu_0 \mu n_1 \frac{N_2}{l} S l I_1 = \mu_0 \mu n_1 n_2 V I_1,$$

де  $l$  — середня лінія тороїда, а  $V$  — об'єм тороїда ( $V = Sl$ ).

Потік  $\Phi_2$  створюється струмом  $I_1$ , тому

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \mu_0 \mu n_1 n_2 V = \mu_0 n_1 n_2 V$$

(ми поклали  $\mu \approx 1$ ; випадок діамагнітного або парамагнітного середовища).

$$L_{12} = L_{21}.$$

## 9.8 ЕЛЕКТРОГЕНЕРАТОР

Електрогенератор перетворює механічну енергію в електричну. Його дія протилежна до дії електродвигуна і ґрунтується на явищі електромагнітної індукції. Принцип дії електрогенератора можна зрозуміти на прикладі рамки, що обертається у однорідному магнітному полі з кутовою швидкістю  $\omega = \text{const}$  (рис. 9.21).

Нехай площа рамки  $S$ , тоді магнітний потік крізь рамку

$$\Phi = BS \cos \alpha,$$

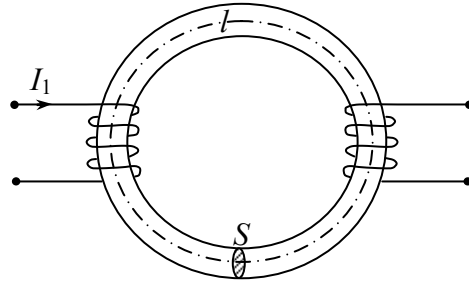


Рис. 9.20

де  $\alpha$  — кут між додатньою нормаллю до рамки  $\vec{n}$  і лініями вектора  $\vec{B}$ . Якщо рамку почати обертати в момент часу  $t=0$  (кут  $\alpha=0$ ), то в довільний момент часу

$$\alpha = \omega t$$

і, отже,

$$\Phi = BS \cos \omega t. \quad (9.8.1)$$

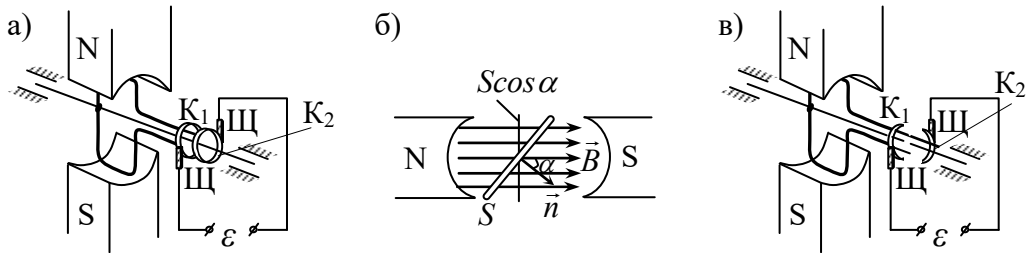


Рис. 9.21

Рамку пронизуватиме змінний магнітний потік і в ній виникне е.р.с. електромагнітної індукції

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Максимальне значення  $\mathcal{E}_i$

$$\mathcal{E}_{max} = BS\omega, \quad (9.8.2)$$

тому

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t. \quad (9.8.3)$$

Отже, в рамці, що рівномірно обертається у магнітному полі, виникає е.р.с., що змінюється в часі за гармонічним законом (рис. 9.22,а).  $\mathcal{E}_{max}$  називається амплітудою електрорушійної сили або амплітудою напруги, що подається в електричне коло.

Вираз для е.р.с. записують і у вигляді

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{max} \cos \omega t, \quad (9.8.4)$$

який відрізняється від (9.8.3) лише зміщенням (на  $T/4$ , де  $T$  період обертання рамки) початку відліку часу  $t$  (рис. 9.22, б)).

Пристрій, показаний на рис. 9.21, б) і є найпростішим генератором змінного струму. У зовнішнє коло струм поступає через кільця  $K_1$  і  $K_2$  та щітки  $\text{Щ}_1$  і  $\text{Щ}_2$ , між якими існує ковзний контакт; він забезпечує постійний ко-



нтакт між нерухомими дротами, під'єднаними до щіток і рамкою (якорем), кінці якої приєднані до кілець, ізолюваних між собою.

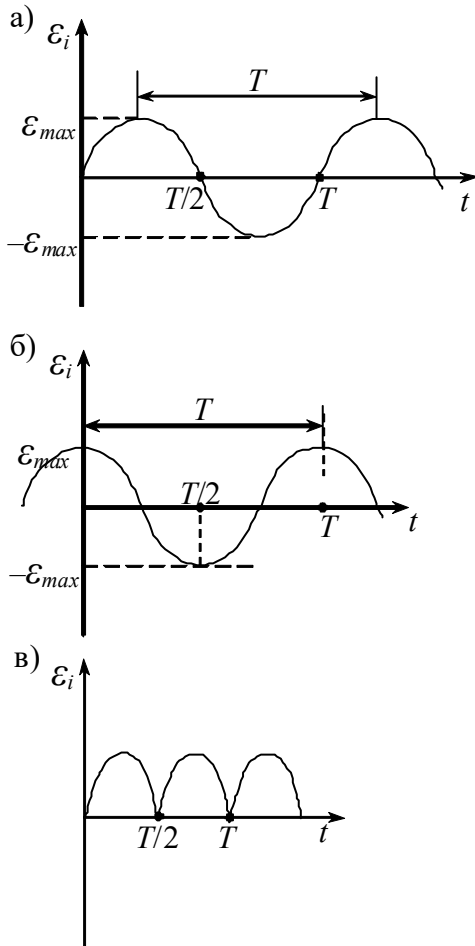


Рис. 9.22

а до півкілець  $K_1$  і  $K_2$  (рис. 9.21, в)). При повороті рамки на  $180^\circ$  напрям струму в ній зміниться на протилежний. Але тепер щітки  $\mathcal{C}_1$  і  $\mathcal{C}_2$  будуть контактувати з протилежними півкільцями  $K_1$  і  $K_2$ , тому у зовнішньому колі струм буде йти в одному напрямку. Це — пульсуючий струм (рис. 9.22, в)). З метою «згладжування» пульсуючого струму ротор генератора виготовляють із декількох багатовиткових контурів, розміщених у різних площинах.

Електрогенератор може слугувати і як електродвигун. Якщо через обмотку ротора генератора пропускати струм, то ротор буде обертатися (під дією сили Ампера).

Із формули (9.8.2) видно, що  $\varepsilon_{max}$  залежить від величин  $\omega$ ,  $B$  і  $S$ . За рахунок збільшення цих величин і можна збільшувати напругу  $\varepsilon$ . В багатьох країнах, як і у нас, прийнята стандартна частота змінного струму

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Герц}$$

(зауважимо, що

значне збільшення  $\omega$  зумовлює сильне зростання механічних напружень). Для збільшення  $B$  використовують сильні постійні магніти або потужні електромагніти. З цією ж метою всередину рамки і електромагніта вставляють осердя із феромагнітних матеріалів. Збільшення  $\varepsilon_{max}$  досягається і за рахунок збільшення числа витків.

За допомогою рамки, що обертається у магнітному полі, можна отримати і *пульсуючий струм*. Для цього кінці рамки під'єднують не до кілець,

## 9.9 ТРАНСФОРМАТОРИ

На практиці часто виникає необхідність мати більші е.р.с., ніж ті, що виробляють генератори електричного струму. Особливо важливо мати високі е.р.с. при передачі електричної енергії по дротах на великі віддалі. Це зумовлено тим, що втрати енергії в дротах (через виділення теплоти Джоуля-Ленца)

$$Q = I^2 R t ,$$

і є тим меншими, чим менша сила струму. З іншого боку, оскільки потужність, вироблена генератором,

$$N = \mathcal{E} I \Rightarrow I = \frac{N}{\mathcal{E}} ,$$

то

$$Q = \left( \frac{N}{\mathcal{E}} \right)^2 R t .$$

Звідси видно, що вигідна передача електричної енергії високої напруги. В потужних лініях електропередач використовують напруги в сотні тисяч вольт. З цією метою генератори змінного струму будують з розрахунку на напруги, значно менші (високі напруги створюють проблеми із надійною ізоляцією обмоток генератора), а високі напруги отримують за допомогою спеціальних пристроїв — *підвищувальних трансформаторів*. Трансформатор збільшує напругу в лінії у стільки разів, у скільки зменшує силу струму. В місцях використання електроенергії струм високої напруги перетворюють за допомогою *знижувальних трансформаторів* у струми низької напруги (110, 220 В).

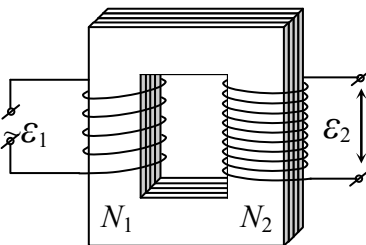


Рис. 9.23

Трансформатори використовуються і в багатьох електричних приладах та апаратах, коли необхідно мати різні напруги.

Принцип дії трансформатора базується на явищі електромагнітної індукції.

Трансформатор складається з двох, не з'єднаних між собою, обмоток (катушок), які закріплені на осерді із магніто-

м'якого матеріалу (п. 8.7.2). Найчастіше використовується замкнуте осердя. На рис. 9.23 показана схема трансформатора з осердям у формі рами, набраної із окремих листків спеціальної сталі, яка мало нагрівається при перемагнічуванні. Для зменшення втрат енергії на вихрові струми пластини ізолювані між собою. Та котушка, яка вмикається в коло змінного струму, називається первинною, а котушка, в якій індукується е.р.с., називається вторинною; з вторинної обмотки і знімається потрібна напруга.

Змінний струм, що надходить від джерела змінного струму у первинну обмотку, створює в осерді змінний магнітний потік, який практично повністю зосереджений в осерді (тобто другу обмотку пронизує той самий змінний потік). Зміна цього потоку і зумовлює у другій обмотці е.р.с. взаємної індукції.

Позначимо миттєве значення магнітного потоку, який пронизує довільний переріз осердя, через  $\Phi$ . Тоді за законом Ома для первинної котушки маємо

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{1c} = I_1 R \Rightarrow \mathcal{E}_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt} = I_1 R,$$

де  $\mathcal{E}_1$  — е.р.с., що подається у первинну обмотку,  $\mathcal{E}_{1c}$  — е.р.с. індукції, що виникає у первинній обмотці,  $N_1$  — кількість витків у первинній обмотці,  $I_1$  — сила струму в цій обмотці, а  $R$  — її опір. Приймемо, що  $I_1 R_1 \ll \mathcal{E}_1$  (ця умова виконується для технічних трансформаторів). Отже,

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Е.р.с., що виникає у вторинній обмотці, — е.р.с. взаємної індукції

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

( $N_2$  — кількість витків у вторинній обмотці). З двох останніх формул отримуємо вираз для  $\mathcal{E}_2$ :

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1 \Rightarrow \left| \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} \right| = \frac{N_2}{N_1}.$$

Відношення числа витків  $N_1/N_2$  показує у скільки разів е.р.с. у вторинній обмотці більша, ніж у первинній; воно називається *коефіцієнтом транс-*

формації. За законом збереження енергії потужності струму у первинній і вторинній обмотках однакові, тому

$$I_1 \mathcal{E}_1 = I_2 \mathcal{E}_2 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

(втрати енергії нехтуємо). Якщо  $N_2/N_1 > 1$ , трансформатор збільшує напругу і понижує (у стільки ж разів) силу струму; це — підвищувальний трансформатор ( $k < 1$ ).

Якщо  $N_2/N_1 < 1$ , то трансформатор — понижувальний ( $k > 1$ ); в цьому випадку е.р.с. зменшується на виході другої обмотки, а сила струму зростає. Понижувальні трансформатори використовуються, наприклад, при електрозварюванні, коли необхідні великі сили струму при порівняно низьких напругах.

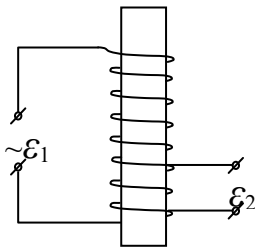


Рис. 9.24

Існують трансформатори (використовуються у радіопристроях), що мають більше, ніж дві обмотки. Трансформатор, що складається з однієї обмотки, називається *автотрансформатором*. У випадку підвищувального автотрансформатора е.р.с. підводиться до частини обмотки, а знімається е.р.с. зі всієї обмотки. У понижувальних автотрансформаторах вхідна напруга подається на всю обмотку, а вихідна напруга знімається з частини обмотки (рис. 9.24). Іноді один із контактів автотрансформатора роблять пересувним, що дозволяє плавно змінювати вихідну напругу.

## 9.10 ЕНЕРГІЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Нехай у контурі з індуктивністю  $L$  тече струм  $I_0$ . У момент розімкнення кола виникає струм самоіндукції. Робота, виконувана цим струмом за час  $dt$

$$\delta A = \delta q \mathcal{E} = \mathcal{E} dt,$$

де  $\delta q = Idt$  — заряд, перенесений під дією вихрового електричного поля за час  $dt$ ,  $\mathcal{E}$  — е.р.с. самоіндукції. Повна робота індукційного струму (від моменту розмикання кола до моменту повного зникнення струму в колі).

$$A = \int_{I_0}^0 \mathcal{E} I dt = - \int_{I_0}^0 L \frac{dI}{dt} I dt = - \int_{I_0}^0 L I dI = \frac{L I_0^2}{2}.$$

Ця робота виконана лише за рахунок енергії магнітного поля, яку мав контур до розмикання. Можна сказати і так: енергія зниклого магнітного поля перейшла в енергію вихрового електричного поля, за рахунок якої і здійснена робота  $A$ .

Отже, енергія магнітного поля, зв'язана з контуром, по якому тече струм  $I$ ,

$$W = \frac{L I^2}{2}.$$

Енергію магнітного поля можна представити через величини, які характеризують магнітне поле — магнітну індукцію  $B$  і напруженість магнітного поля  $H$ . Для цього розглянемо окремий випадок — однорідне магнітне поле всередині достатньо довгого соленоїда, для якого  $L$  дається формулою  $L = \mu_0 \mu n^2 V$  (п. 9.6.1). Із врахуванням цього

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 I^2 V,$$

де  $n$  — кількість витків на одиницю довжини соленоїда, а  $V$  — його об'єм. Оскільки магнітна індукція всередині соленоїда  $B = \mu_0 \mu n I$ , а  $H = n I$ , то

$$W = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu} V = \frac{B H}{2} V.$$

Величина

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B H}{2}$$

є густиною енергії магнітного поля.

## 9.11 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 9.11.1 Запитання і задачі

1. Який напрям індукційного струму у кільці, якщо магніт віддаляється від кільця (рис. 9.25)?
2. У котушку, замкнену на гальванометр, всувають магніт: один раз швидко, другий — повільно. Чи однакову роботу виконує рука, що перемі-

щує магніт? Чи однакові величини зарядів, які перенесені індукційним струмом, в обох випадках? Зміна магнітного потоку крізь котушку в обох випадках одна і та ж.

3. Кільце знаходиться у змінному магнітному полі, вектор індукції якого зростає з часом за законом

$$B = B_0 + ct$$

і напрямлений перпендикулярно до площини кільця (площа  $S$ ). Знайти характер струму в кільці.

4. На тороїд із залізним осердям насаджений провідник у вигляді кільця, яке може довільним чином переміщатися вздовж тороїда. Чи буде індукватися струм у кільці при його переміщенні, якщо по витках тороїда пропустити постійний струм?

5. Чому при ударі блискавки іноді виходять з ладу електроприлади, плавляться запобіжники в освітлювальній мережі?

6. У котушці 1 індукується струм взаємної індукції через зміну струму в котушці 2 (рис. 9.26). Як зміниться сила струму у котушці 1, якщо між котушками помістити металічну пластину?

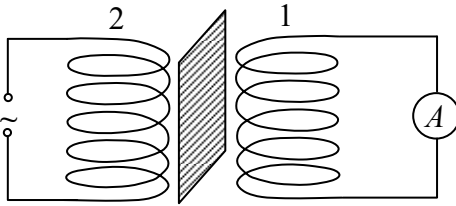


Рис. 9.26

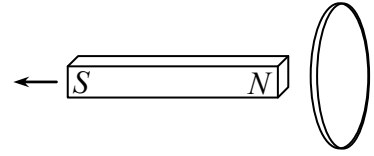


Рис. 9.25

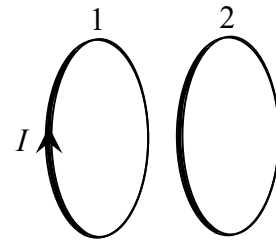


Рис. 9.27

7. Два контури розміщені так, що їх площини паралельні (рис. 9.27). По контуру 1 тече струм (за годинниковою стрілкою). Як буде направлений індукційний струм у контурі 2 при зближенні контурів? при віддаленні? Паралельність площин зберігається.

8. Який струм доцільніше використовувати у вторинному колі системи запалювання — струм, що виникає в момент розмикання первинного кола чи в момент замикання цього кола?

9. Який напрям індукційного струму в провіднику АВ при розмиканні ключа К (рис. 9.28)?

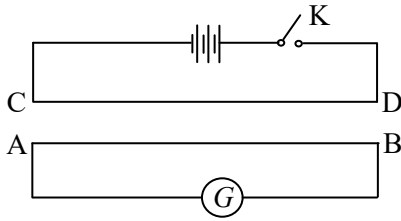


Рис. 9.28

10. Два колових провідники розміщені перпендикулярно один до одного (рис. 9.29). Чи виникне індукційний струм у провіднику 1 при зміні сили струму у провіднику 2?

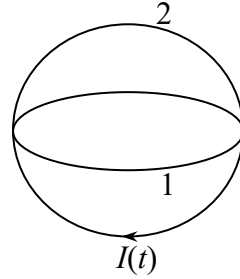


Рис. 9.29

11. Різниця потенціалів між кінцями крил літака, що летить горизонтально, зумовлена електромагнітною індукцією,  $\Delta\varphi = \mathcal{G}lB$ , де  $\mathcal{G}$  — швидкість літака,  $l$  — відстань між кінцями крил,  $B$  — вертикальна складова магнітного поля Землі. Ця формула, на перший погляд, дозволяє дуже просто визначити швидкість літака (за допомогою вольтметра!). Чи можна це зробити практично?

12. У середині соленоїда, по якому проходить струм, зумовлений постійною електрорушійною силою, знаходиться залізне осердя. Як зміниться струм в соленоїді, якщо виймати осердя?

13. Шасі автомобіля разом з двома осями утворюють замкнутий провідний контур, який переміщається у магнітному полі Землі. Чи індукується струм у цьому контурі?

14. У магнітному полі з індукцією 0,1 Тл обертається провідник (стержень)  $l=0,1$  м навколо осі, яка проходить через кінець стержня (рис. 9.30) паралельно до ліній  $B$ . Стержень здійснює 100 об/с. Знайти абсолютну величину (модуль) е.р.с. індукції, яка виникає в стержні; означити потенціал («плюс» — «мінус») на кінцях провідника).

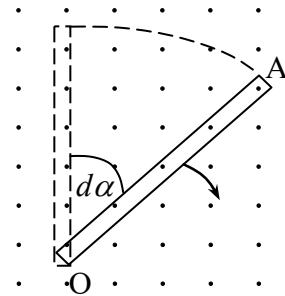


Рис. 9.30

15. Для вихрового електричного поля  $\oint \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Чому дорівнюватиме циркуляція вектора  $\vec{E}$ , рівного сумі  $\vec{E}_B + \vec{E}_K$ , де  $\vec{E}_K$  — напруженість електричного поля кулонівських сил?

16. Плоский провідний контур з площею  $S=50 \text{ см}^2$  знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B=0,5 \text{ Тл}$ . Опір контура  $R=1 \text{ Ом}$ . Який заряд пройде по контуру, якщо його повернути на кут  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ?

17. Алюміній — діамагнетик, і тому алюмінієві предмети з магнітом взаємодіють надзвичайно слабо. З цього погляду дещо незрозуміло є поведінка алюмінієвого диска, що може обертатися навколо осі, що проходить через його центр під дією магніта (рис. 9.31). Якщо обернути постійний магніт, то диск починає також обертатися. Як пояснити це явище? До речі, на цьому принципі працює спідометр автомобіля. Тут магніт обертається всередині круглої алюмінієвої коробочки, до якої прикріплена стрілка і пружинка, яка утримує коробочку від обертання.

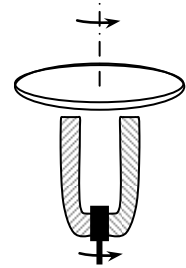


Рис. 9.31

18. Контур рухається у однорідному магнітному полі. Чи буде виникати індукційний струм, якщо: 1) контур рухається поступально? 2) контур обертається навколо осі, яка лежить в площині контура і спрямованої вздовж вектора  $\vec{B}$ ?

19. Знайти вираз для е.р.с., яка виникає в контурі ABCD (рис. 9.12), за умови, що диск радіуса  $r$  обертається з частотою  $\nu$ .

20. Нехай опір контура ABCD (попередня задача)  $R$ . Знайти кількість теплоти, яка виділяється в контурі за час, протягом якого диск здійснив  $N$  обертів.

21. При знаходженні е.р.с. у випадку диска Фарадея (попередня задача) потрібно, строго кажучи, враховувати і відцентрову силу інерції. Ця сила зумовлює переміщення електронів до країв диску і створює додаткову е.р.с. Тут сторонньою силою є сила інерції. Маємо своєрідний «інерційний» механізм генерування е.р.с. електромагнітної індукції. Знайти е.р.с. такого генератора. Радіус диска  $r$ , частота обертання  $\nu$ .



## 9.11.2 Відповіді

1. За правилом Ленца магнітне поле індукційного струму буде протидіяти рухові магніта. Це означає, що лінії магнітної індукції  $\vec{B}_i$  будуть направлені так, як показано на рис. 9.32. За правилом свердлика знаходимо, що індукційний струм йтиме проти годинникової стрілки.

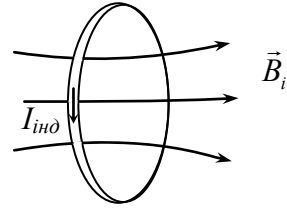


Рис. 9.32

2. Оскільки е.р.с. індукції визначається не зміною магнітного потоку, а швидкістю його зміни, то е.р.с. індукції, а отже і відповідна робота, у першому випадку більша. Перенесений заряд в обох випадках один і той самий:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow IR_i = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow I dt = -\frac{1}{R} d\Phi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int I dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi \Rightarrow q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}; \end{aligned}$$

тут  $R$  — опір котушки,  $\Phi_1$  — початковий магнітний потік,  $\Phi_2$  — кінцевий. Заряд визначається зміною магнітного потоку (а не швидкістю його зміни).

3. Е.р.с. індукції

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}((B_0 + ct)S) = -cS.$$

Тут  $c$  означає зміну магнітної індукції за одиницю часу.

Індукційний струм

$$I_i = -\frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{cS}{R},$$

де  $R$  — опір кільця. Знак мінус біля  $\mathcal{E}_i$  і  $I_i$  показує, що напрями е.р.с. індукції і індукційного струму протилежні до додатнього напрямку обходу контура. Це відображено на рис. 9.33.

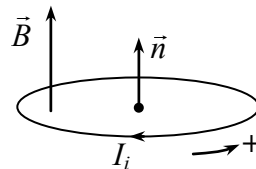


Рис. 9.33

4. Не буде. Магнітне поле тороїда не виходить за межі тороїда і переміщення кільця не супроводжуватиметься зміною магнітного потоку крізь кільце.

5. Змінне магнітне поле, що виникає навколо каналу блискавки, створює сильні вихрові поля та індукційні струми (струми Фуко). Ці струми і призводять до пошкоджень.

6. У пластині виникнуть струми Фуко, які будуть протидіяти зміні магнітного поля котушки 2 (зменшувати його). Це зумовить зменшення сили струму в котушці 1.

7. За законом Ленца напрям індукційного струму такий, що його магнітне поле протидіє зміні потоку в контурі. При наближенні контурів магнітний потік крізь контур 2 зростає. Протидія цьому зростанню буде, якщо магнітне поле у контурі 2 створюватиме струм, протилежно спрямований до струму у контурі 1. При віддаленні контурів напрям індукційного струму у котушці 2 буде такий, як і напрям струму у котушці 1.

8. У момент замикання і розмикання первинного кола виникають екстраструми вмикання і екстраструми розмикання. Як було з'ясовано у п. 9.6.2, при розмиканні електричного кола виникають е.р.с., які можуть значно перевищити е.р.с. джерела струму (за рахунок е.р.с. самоіндукції). Отже, щоб іскра між електродами свічки була більш стійкою, потрібно використовувати струм високої напруги, що виникає в момент розмикання первинного кола.

9. При замиканні ключа К струм тектиме від А до В, бо саме тоді, у відповідності із правилом Ленца, виникатиме протидія наростанню струму в колі. При розмиканні ключа індукційний струм буде направлений від В до А.

10. Магнітний потік, створений провідником 2, не пронизує контур 1; індукційний струм (взаємної індукції) не виникатиме. Можна сказати, що струм відсутній, бо коефіцієнт взаємної індуктивності  $L_{12}=0$ .

11. На жаль, не можна. Якщо замкнути кінці крил на вольтметр, то утвориться контур, який знаходиться у постійному магнітному полі і в якому відсутнє переміщення одних ділянок контура відносно інших. За цих умов е.р.с. електромагнітної індукції в контурі дорівнює нулю.

12. При витягуванні осердя із соленоїда магнітний потік крізь соленоїд буде зменшуватися. Внаслідок цього виникне е.р.с. самоіндукції, яка протидіятиме цьому зменшенню через

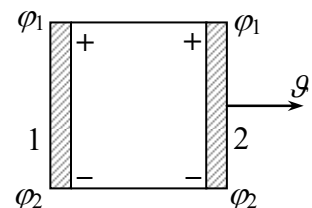


Рис. 9.34

1, 2 — осі автомобіля

збільшення сили струму в соленоїда; при цьому напрямки е.р.с. самоіндукції і зовнішньої е.р.с. однакові.

13. Ні. Е.р.с. індукції в контурі не виникатиме, бо е.р.с., що виникає в одній осі, компенсується е.р.с., яка індукується у другій осі (повна е.р.с. індукції в контурі дорівнює нулю). У відповідності із п. 9.2 розглянутий контур можна зобразити так — рис. 9.34.

14. а). Будемо виходити із основного закону електромагнітної індукції у формі

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де  $d\Phi$  — магнітний потік, що проходить через площу, покриту стержнем за час  $dt$ . За час  $dt$  стержень повертається на кут  $d\alpha$  і описує площу сектора  $dS$ ;

$$dS = \frac{1}{2} l \cdot l d\alpha = \frac{l^2 d\alpha}{2}.$$

Тому

$$d\Phi = B dS = \frac{Bl^2 d\alpha}{2},$$

а е.р.с.

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{Bl^2 d\alpha}{2dt} = \frac{Bl^2 \omega}{2},$$

де  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  — кутова швидкість обертання стержня. Оскільки  $\omega = 2\pi\nu$ , то

$$\mathcal{E}_i = \frac{2\pi\nu Bl^2}{2} = \pi\nu Bl^2; \quad \mathcal{E}_i = 100\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1 \approx 0,3 \text{ В.}$$

б) Під дією сили Лоренца електрони будуть зміщуватися у напрямку від осі обертання. Отже, біля осі обертання (точка О) буде надлишок додатнього заряду (більш високий потенціал), а на другому кінці стержня (точка А) — надлишок від'ємного заряду (менший потенціал).

Якщо коло розімкнуте, то знайдена е.р.с. створює різницю потенціалів між точками О і А:

$$\varphi_O - \varphi_A = 0,3 \text{ В.}$$

Якщо коло замкнути (забезпечивши ковзання кінця стержня А по відповідному колу, яке через опір  $R$  з'єднане з точкою О), то в колі тектиме струм

$$I = \frac{\varphi_0 - \varphi_A}{R}.$$

15. Циркуляція вектора  $\vec{E}$  також дорівнюватиме е.р.с. індукції, бо циркуляція напруженості електричного поля кулонівських сил

$$\oint \vec{E}_k d\vec{l} = 0.$$

16. За законом Ома для замкнутого кола

$$\mathcal{E} = IR \Rightarrow \mathcal{E}_i = IR \Rightarrow -\frac{d\Phi}{dt} = IR \Rightarrow -d\Phi = RI dt.$$

Інтегруючи, маємо:

$$-\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = R \int Idt \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = Rq \Rightarrow q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Виберемо додатню нормаль до контура у напрямку ліній  $\vec{B}$ . Тоді  $\Phi_1 = BS \cos 0 = BS$ . Якщо контур повернути на  $90^\circ$ , то  $\Phi_2 = BS \cos \frac{\pi}{2} = 0$ . У цьому випадку

$$q = \frac{BS}{R} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} = 2,5 \text{ мКл}.$$

При повороті контура на  $180^\circ$   $\Phi_3 = BS \cos \pi = -BS$  і  $q = 5 \text{ мКл}$  ( $\cos \alpha = -1$ ).

17. Магніт, що обертається, створює змінне магнітне поле, яке викликає вихрові струми у алюмінієвому диску. Вихрові струми створюють власне магнітне поле. Момент сил, що виникає, змушує диск обертатися в тому ж напрямку, що і магніт. Якщо у розглянутому досліді обертати замість магніта диск, то магніт також почне обертатися (при взаємодії вихрових струмів з магнітним полем виконується третій закон Ньютона).

18. Індукційний струм буде відсутній в обох випадках (відсутня зміна магнітного потоку).

19. За означенням, е.р.с. визначається роботою сторонніх сил  $\vec{F}_C$ :

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \int_L \vec{F}_C d\vec{l} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{e} \int_0^r F_L dl,$$

де  $e$  — заряд електрона, а  $F_C$  є силою Лоренца  $F_L = e\mathcal{V}B$ , де  $\mathcal{V}$  є швидкість вільного електрона. Маємо:

$$\mathcal{E} = \int_0^r \mathcal{G} B dl = B \int_0^r \mathcal{G} dl = B \int_0^r 2\pi v l dl = \pi r^2 v B,$$

де  $\mathcal{G} = \omega l = 2\pi v l$  — швидкість електрона, що знаходиться на відстані  $l$  від центра диска.

20. За законом Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 R t \Rightarrow Q = \left( \frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 R t,$$

де  $\mathcal{E}$  — е.р.с. електромагнітної індукції, знайдена в попередній задачі, а  $t$  — час, протягом якого диск здійснив  $N$  обертів; із врахуванням того, що  $v t = N$

$$Q = \pi^2 v N r^4 \frac{B^2}{R}.$$

21. Е.р.с. «інерційного» генератора  $\mathcal{E}_i$  знайдемо за загальною формулою

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{e} \int_0^r F_C dl,$$

де  $e$  — заряд електрона,  $F_C$  — стороння сила, зумовлена силою інерції (розгляд зручно вести з точки зору неінерціальної системи відліку, пов'язаної з диском, що обертається). Силі  $F_C$  відповідає напруженість поля сторонніх сил

$$E_C = \frac{F_C}{e}.$$

$F_C = -ma = -m\omega^2 l = -4\pi^2 v^2 l m$  — сила інерції, що діє на електрон маси  $m$ , що знаходиться на віддалі  $l$  від центра диска.

Після інтегрування отримуємо:

$$\mathcal{E}_i = -2\pi^2 v^2 r^2 \frac{m}{e}.$$

Зважаючи на те, що  $\frac{m}{e} \approx 6 \cdot 10^{-12}$  кг/Кл, практичне використання інерційного генератора недоцільне.

## РОЗДІЛ 10

### ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

*Немає нічого практичнішого,  
ніж добра теорія*

*Відома істина*

Виникнення е.р.с. індукції у нерухомому провідному контурі пояснювалося (у п. 9.4 попереднього розділу) появою вихрового електричного поля при зміні магнітного потоку, що пронизує площу, обмежену цим контуром. Тут, фактично, йдеться про взаємопов'язані між собою електричне і магнітне поля — *електромагнітне поле*. Явище електромагнітної індукції — один із проявів взаємозв'язку між електричним і магнітним полями. Повну ж теорію електромагнітного поля являє теорія Максвелла, створена у 60-х роках XIX ст. Основа теорії електромагнітного поля – рівняння Максвелла. Теорія Максвелла не тільки дозволила пояснити всю сукупність електричних і магнітних явищ, відомих на той час, але і передбачила існування нових явищ, які підтвердилися згодом (зокрема, існування електромагнітних хвиль). Рівняння Максвелла є основою електротехніки і радіотехніки та суміжних областей техніки.

У цьому розділі розглядаються базові положення теорії Максвелла та ряд важливих наслідків із цієї теорії.

#### 10.1 УЗАГАЛЬНЕННЯ МАКСВЕЛЛОМ ЗАКОНУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ. ПЕРШЕ РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

1. Математичним виразом закону електромагнітної індукції для нерухомого провідного контура є

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (10.1.1)$$

де інтегрування ведеться по всій довжині розглянутого замкнутого провідника. Частинна похідна показує, що зміна магнітного потоку зумовлена лише зміною магнітного поля.

У теорії електромагнетизму формула (10.1.1) набуває більш загального змісту. За Максвеллом провідний контур, у якому проявляється електрорушійна сила, є лише вторинним фактором. Первинний фактор, незалежний від

наявності провідника, полягає в тому, що навколо змінного потоку магнітної індукції виникають замкнуті лінії вихрового електричного поля. Провідний контур є лише індикатором цього поля; вихрове поле зумовлює електричний струм і цим проявляє себе. З цієї точки зору рівняння (10.1.1) *стверджує, насамперед, що змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле.*

Узагальнений в такий спосіб вираз (10.1.1) носить назву *першого рівняння Максвелла в інтегральній формі*<sup>1)</sup>. При цьому інтегрування може вестися по *будь-якому замкненому контуру*, що охоплює змінний потік магнітної індукції. Отже: циркуляція вектора напруженості вихрового електричного поля по довільному замкненому контуру  $L$  дорівнює взятій із знаком мінус швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

2. Першому рівнянню Максвелла можна надати і дещо іншої (часто вживаної) форми. Оскільки  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ , то

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (10.1.2)$$

Оскільки зміна магнітного потоку зумовлена лише зміною магнітного поля (контур нерухомий, його конфігурація не змінюється), то операцію диференціювання можна внести під знак інтеграла:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (10.1.3)$$

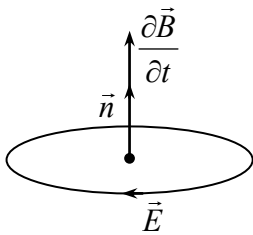


Рис. 10.1

Напрямок ліній  $\vec{E}$  зручно визначати у відповідності із рис. 10.1; це є у згоді із попередніми правилами, які виходили із представлення останнього рівняння у формі

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Зв'язок між напрямом ліній  $\vec{E}$  і вектором  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  називається «лівогвинтовим».

<sup>1)</sup> Така нумерація не є загальноприйнятою. Іноді вираз (10.1.1) називають другим рівнянням Максвелла, а рівняння (10.2.9) — першим

## 10.2 СТРУМ ЗМІЩЕННЯ. ДРУГЕ РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

### 1. Струми зміщення. 2. Узагальнення закону повного струму. Друге рівняння Максвелла

Теорія Максвелла поряд з положенням про породження вихрового електричного поля змінним магнітним полем містить і наступне: *змінне електричне поле породжує вихрове магнітне поле*. Наслідком цього є існування так званих *струмів зміщення*, введення яких необхідне, зокрема, для розуміння процесів, які протікають в колах змінного струму.

#### 10.2.1 Струми зміщення

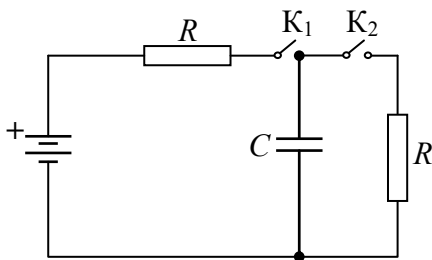


Рис. 10.2

При зарядці конденсатора ключ  $K_1$ , ввімкнутий, а  $K_2$  — розімкнутий. При розрядці конденсатора ключ  $K_1$  розмикається і вмикається ключ  $K_2$

1. Відтворимо схему зарядки або розрядки конденсатора, розглянуту у п. 2.13 (рис. 10.2).

При зарядці конденсатора сила струму в колі змінюється в часі за законом

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (10.2.1)$$

а заряд на конденсаторі — за законом

$$q = q_m \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \quad (10.2.2)$$

де  $\tau = RC$ ,  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ ,  $q_m = \mathcal{E}C$  ( $\mathcal{E}$  — е.р.с. джерела постійного струму,  $C$  — ємність конденсатора).

Після зарядки конденсатора ( $t/\tau \rightarrow \infty$ ) струм в колі, що містить  $R$ ,  $C$  — елементи і джерело постійного струму, припиняється ( $I \rightarrow 0$ ), а заряд на конденсаторі набуває граничного значення  $q_m$ . Електричне коло стає *розімкнутим*. Якщо ж в цьому колі джерело постійного струму замінити джерелом змінного струму, або якщо відбудуватиметься процес розрядки конденсатора



(за схемою, показаною на рис. 10.2), то в колі проходитиме струм (формули для сили струму  $I$  і заряду  $q$ , залежних від часу, наведені у п. 2.13).

**Висновок:** У розімкнутих електричних колах постійного струму — колах з просторовим проміжком (зумовленим, наприклад, конденсатором) електричний струм відсутній. Якщо ж в такому колі проходить змінний струм — коло стає замкненим.

2. Постає питання щодо механізму функціонування струму в колі з просторовим проміжком (наявність в колі конденсатора). Вздовж електричного кола поза конденсатором все зрозуміло: провідність зумовлена переміщенням вільних: електричних зарядів (електронів). Що ж відбувається в проміжку між пластинами конденсатора, де практично відсутні вільні носії зарядів?

Відповідь наступна. За теорією Максвелла на ділянках кола непостійного струму, де відсутні провідники (як, наприклад, між пластинами конденсатора), провідність зумовлена *струмами зміщення*.

Густина струму зміщення  $\vec{j}_3$  в даній точці дорівнює швидкості зміни електричного зміщення  $\vec{D}$  в цій точці:

$$\vec{j}_3 = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.2.3)$$

Струмом зміщення через поверхню  $S$  називається фізична величина

$$I_3 = \int_S \vec{j}_3 d\vec{S} = \int j_{3n} dS \quad (10.2.4)$$

(індекс  $n$  означає нормальну складову густини струму зміщення). Оскільки

$$j_{3n} = \frac{\partial D_n}{\partial t}, \text{ то}$$

$$J_3 = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n dS = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E, \quad (10.2.5)$$

де  $\Phi_E = \int_S D_n dS$  — потік електричної індукції через поверхню  $S$ . У випадку конденсатора  $S$  — площа обкладки конденсатора. Отже, густина струму зміщення визначається швидкістю зміни електричного зміщення, а сила струму зміщення — швидкістю зміни потоку електричної індукції.

Можна сказати і так: струм зміщення — змінне електричне поле. У випадку конденсатора змінне поле між пластинами конденсатора виникає вна-

слідок зміни заряду на пластинах конденсатора (при зарядці або розрядці конденсатора, чи при ввімкненні його в коло із джерелом змінного струму).

3. Густина струму зміщення дорівнює густині струму провідності  $\vec{j}$ . Цим забезпечується замкненість кола непостійного струму. Покажемо, що  $\vec{j} = \vec{j}_3$  на прикладі конденсатора, ввімкненого в таке коло.

З одного боку, густину струму провідності  $\vec{j}$  можна записати так:

$$j = \frac{I}{S} \Rightarrow j = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (10.2.6)$$

де  $\sigma$  — поверхнева густина заряду. З іншого боку, електрична індукція в проміжку між обкладками конденсатора

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \sigma.$$

Диференціюючи в часі вираз  $D = \sigma$ , маємо:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Rightarrow j_3 = \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (10.2.7)$$

Порівняння формул (10.2.6) і (10.2.7) дає:  $j = j_3 \Rightarrow I = I_3$  (сила струму зміщення дорівнює силі струму провідності).

Струм зміщення, як і струм провідності, породжує вихрове магнітне поле; конкретний зміст цього твердження містить друге рівняння Максвелла (наступний пункт 10.2.2).

**Приклад 1.** Відобразимо процес зарядки конденсатора за схемою, показаною на рис. 10.3.

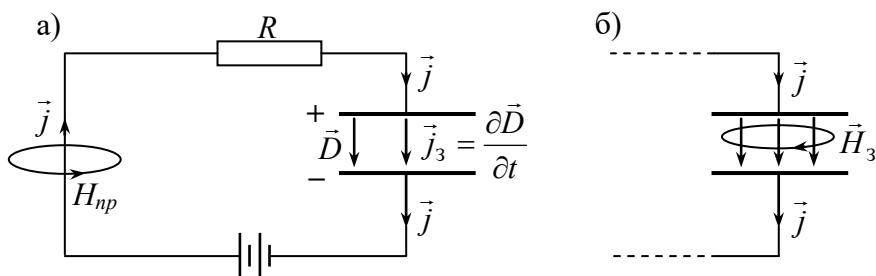


Рис. 10.3

**Струми провідності, струми зміщення і відповідні магнітні поля при зарядці конденсатора**

При зарядці конденсатора заряди на обкладинках зростають. Напрямки струму провідності (його густини струму  $\vec{j}$ ), густини струму зміщення  $\vec{j}_3$ , вектор електричного зміщення  $\vec{D}$ , вектора швидкості зміни  $\vec{D}$  зображені на рис. 10.3, а). Оскільки заряд конденсатора зростає, то вектор  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (тобто вектор  $\vec{j}_3$ ) має той самий напрям, що і вектор  $\vec{D}$ . Напрямок ліній магнітного поля струму провідності  $H_{np}$  визначений за правилом правого свердлика (рис. 10.3, а)). Напрямок магнітного поля струму зміщення показаний на рис. 10.3, б).

### 10.2.2 Узагальнення закону повного струму.

#### Друге рівняння Максвелла

В загальному випадку струми провідності і струми зміщення не розділені, як у випадку кола з конденсатором, а існують в одному і тому ж об'ємі. Тому природно говорити про *повний струм*, який містить, поряд із струмом провідності, і струм зміщення. Густина повного струму

$$\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \vec{j}_3 = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.2.8)$$

Повна сила струму

$$I_{повн} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_3) d\vec{S} = I + I_3,$$

де  $I$  — сила струму провідності,  $I_3$  — сила струму зміщення. Замкненість кіл змінного струму означає замкненість повного струму.

Із врахуванням струму зміщення теорема про циркуляцію напруженості магнітного поля ( $\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum_i i$ ) набуває вигляду

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i + I_3, \quad (10.2.9)$$

де справа стоять сили струмів, охоплених контуром  $L$ .

(10.2.9) — узагальнений закон повного струму або *друге рівняння Максвелла*. Воно стверджує, що вихрове магнітне поле породжується як струмами провідності, так і струмами зміщення.

Оскільки за формулою (10.2.7)  $I_s = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ , то

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i + \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}.$$

Якщо струми провідності відсутні, то

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}.$$

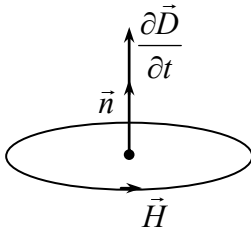


Рис. 10.4

Наявність знака «плюс» у правій стороні останніх формул відображає «правогвинтовий» зв'язок між напрямом ліній  $\vec{H}$ , вектора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (на відміну від «лівогвинтового» зв'язку між напрямом ліній  $\vec{E}$  і вектором  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , показано на рис. 10.1). Рис. 10.4 ілюструє сказане; це відображено і на рис. 10.3, б)

для випадку струму зміщення.

## 10.3 ПОВНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА

**1. Рівняння Максвелла в інтегральній формі. 2. Рівняння Максвелла в диференціальній формі**

### 10.3.1 Рівняння Максвелла в інтегральній формі

1. Означені вище перше і друге рівняння Максвелла та теорема Гаусса для електричної індукції  $D$  і теорема Гаусса для магнітної індукції  $\vec{B}$ , складають повну систему рівнянь Максвелла. Подамо їх у такій послідовності

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (10.3.1)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS, \quad (10.3.2)$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad (10.3.3)$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (10.3.4)$$

де  $\rho$  — об'ємна густина електричних зарядів,  $\vec{j}$  — густина струму провідності. Це — повна система рівнянь Максвелла в інтегральній формі для нерухомих середовищ (частинні похідні  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  і  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  відображають цю обставину).

Вони пов'язують основні характеристики електромагнітного поля — вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  з розподілом у даному середовищі електричних зарядів і струмів. В них міститься вся інформація про електромагнітне поле.

Рівняння Максвелла — результат узагальнення Максвеллом відомих на той час теоретичних і експериментальних досліджень в області електрики і магнетизму та геніальних передбачень.

Фізичний зміст рівнянь Максвелла зводиться до наступного.

— Перше з рівнянь Максвелла стверджує, що змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле. В застосуванні до явища електромагнітної індукції рівняння можна розглядати як означення е.р.с. електромагнітної індукції в провідному контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі.

— Друге рівняння Максвелла показує, що магнітні поля можуть бути створені як струмами провідності, так і струмами зміщення (змінним електричним полем). Так як циркуляція вектора  $\vec{H}$  не дорівнює нулю, то магнітне поле — вихрове. Зауважимо, що під  $\vec{E}$  у рівнянні (10.3.1) розуміють суму вихрового і електростатичного полів (циркуляція останнього, як було з'ясовано раніше, дорівнює нулю).

— Рівняння (10.3.3) — теорема Гаусса для електричного поля, створеного нерухомими зарядами, — електростатичного поля. Її обґрунтування та застосування було розглянуто у розділі «Електростатика».

— Четверте рівняння Максвелла є теорема Гаусса для магнітного поля. Рівність нулю магнітного потоку крізь замкнуту поверхню еквівалентне твердженню про відсутність магнітних зарядів і замкненість магнітних силових ліній (ліній вектора  $\vec{B}$ ). Саме цим і зумовлена асиметрія між двома останніми рівняннями.

Важливий висновок з перших двох рівнянь Максвелла і той, що електричне і магнітне поле у загальному випадку взаємопов'язані: зміна в часі од-

ного з полів зумовлює появу іншого. Отже, і електричне, і магнітне поле — прояви єдиного електромагнітного поля.

Для стаціонарних полів (величини  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  незалежні від часу) рівняння Максвелла розпадаються на дві групи незалежних рівнянь

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (10.3.5)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (10.3.6)$$

У цьому випадку електричне і магнітне поля незалежні. (10.3.5) — основні рівняння електростатики, (10.3.6) — основні рівняння магнітостатики.

При розв'язуванні задач електромагнетизму в матеріальних середовищах рівняння Максвелла доповнюються так званими *матеріальними рівняннями*. У багатьох практично важливих випадках ними є добре відомі нам співвідношення —

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{cm}), \quad (10.3.7)$$

де  $\vec{E}_{cm}$  — напруженість поля сторонніх сил; (10.3.7) встановлюють зв'язок між величинами  $D$  і  $E$ ,  $B$  і  $H$ , які входять в рівняння Максвелла.

### 10.3.2 Рівняння Максвелла в диференціальній формі

При розв'язуванні багатьох задач електродинаміки корисним є представлення рівнянь Максвелла в *диференціальній формі*.

Перехід від інтегральної форми рівнянь до диференціальної здійснюється за допомогою наступних теорем векторного аналізу:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S [\nabla \vec{A}] dS, \quad (10.3.8)$$

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{A} dV; \quad (10.3.9)$$

тут  $\nabla$  — оператор набла,  $[\nabla \vec{A}] = \text{rot} \vec{A}$  — (ротор  $\vec{A}$ ) — векторний добуток операторів  $\nabla$  і  $\vec{A}$ ,  $\nabla \vec{A} = \text{div} \vec{A}$  (дивергенція  $\vec{A}$ ) — скалярний добуток векторів  $\nabla$  і  $\vec{A}$  (див. Математичне доповнення).

У підсумку рівняння Максвелла набувають вигляду

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.3.10)$$

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (10.3.11)$$

$$\nabla \vec{D} = \rho, \quad (10.3.12)$$

$$\nabla \vec{B} = 0. \quad (10.3.13)$$

Кожне із перших двох рівнянь еквівалентне трьом скалярним рівнянням. З першого рівняння отримуємо:

$$[\nabla \vec{E}]_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (10.3.14)$$

$$[\nabla \vec{E}]_y = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (10.3.15)$$

$$[\nabla \vec{E}]_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (10.3.16)$$

Аналогічно можна записати в скалярній формі і друге рівняння Максвелла.

Два останні рівняння набувають вигляду

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (10.3.17)$$

При переході від рівнянь (10.3.10)-(10.3.13) до рівнянь (10.3.14)-(10.3.17) використані правила розкриття скалярних і векторних добутків вектора  $\nabla$  і векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  (див. Математичне доповнення).

**Приклад.** Запишемо рівняння Максвелла для електромагнітного поля, в якому вектор  $\vec{E}$  весь час залишається паралельним до осі  $OY$ , а вектор  $\vec{H}$  – паралельним до осі  $OZ$ <sup>1)</sup>. Прийmemo, що  $\rho=0, j=0$

$\Rightarrow$  За умовою  $E_x=E_z=0, E=E_y, H_x=H_y=0, H=H_z$ , тому із рівнянь (10.3.14)-(10.3.16) залишається лише останнє —

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Подібно до цього

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Отже, розглянуте електромагнітне поле описується рівняннями

<sup>1)</sup> Як буде видно із подальшого, взаємна перпендикулярність векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є характерною ознакою електромагнітної хвилі

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (10.3.18)$$

Вони пов'язують між собою змінні електричне і магнітне поля: змінне електричне поле вздовж осі  $OY$  породжує змінне магнітне поле  $H_z$  вздовж осі  $OZ$ , а воно, в свою чергу, породжує змінне електричне  $E_y$  і т.д.

Отримані тут рівняння (10.3.18) будуть використані при встановленні хвильових рівнянь, що описують поширення електромагнітної хвилі.

## 10.4 ВІЛЬНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

**1. Рівняння Максвелла в середовищі з відсутніми вільними зарядами і струмами провідності. 2. Енергія і маса електромагнітного поля**

1. У середовищі з відсутніми вільними зарядами ( $\rho=0$ ) і струмами провідності ( $j=0$ ) рівняння Максвелла в інтегральній формі набувають вигляду:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = 0, \quad (10.4.1)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}, \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (10.4.2)$$

У диференціальній формі маємо рівняння

$$\begin{aligned} [\nabla \vec{E}] &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & [\nabla \vec{H}] &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \vec{E} &= 0, & \nabla \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Із цих рівнянь, які стверджують, що змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле, а змінне електричне поле породжує змінне магнітне поле, випливає важливий висновок: електромагнітне поле може існувати і без електричних зарядів і струмів. Електромагнітне поле, не пов'язане з електричними зарядами і струмами, називається вільним електромагнітним полем. Електромагнітне поле, що виникло в деякій обмеженій області простору, не залишається локалізованим в цій області, а поширюється із скінченою швидкістю у вигляді хвилі (див. наступний параграф).

2. Вільне електромагнітне поле володіє енергією, яка складається з енергії електричного і магнітного полів. Густина енергії цього поля



$$w = w_{el} + w_{mag} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (10.4.3)$$

Оскільки  $\varepsilon_0 \varepsilon E = D$ , а  $\mu_0 \mu H = B$ , то

$$w = \frac{ED}{2} + \frac{HB}{2}. \quad (10.4.4)$$

Між енергією електромагнітного поля  $W$  і масою  $m$  існує універсальний зв'язок (Пуанкаре, Ейнштейн)

$$W = mc^2, \quad (10.4.5)$$

де  $c$  — швидкість світла. У відповідності з цим одиниці об'єму електромагнітного поля можна поставити у відповідність масу

$$m = \frac{W}{c^2}. \quad (10.4.6)$$

## 10.5 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

**1. Загальні поняття. Хвильове рівняння і наслідки з нього. 2. Енергія плоскої електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга. 3. Тиск електромагнітної хвилі. Імпульс електромагнітного поля**

### 10.5.1 Загальні поняття. Хвильове рівняння і наслідки з нього

1. З рівнянь Максвелла випливає: якщо в якій-небудь точці простору виникло змінне магнітне поле, то воно породить в сусідніх точках змінне в часі вихрове електричне поле, яке збудить в сусідніх точках змінне магнітне поле і т.д. Взаємозв'язані змінні електричне і магнітне поля, які поширюються у просторі, називаються електромагнітною хвилею. Схематично поширення електромагнітного поля можна зобразити «ланцюжком», показаним на рис. 10.5; при цьому при встановленні напрямків полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  ми керувалися правилами «лівого» і «правого» гвинтів (рис. 10.1 і рис. 10.4). У вакуумі електромагнітна хвиля (електромагнітне поле) поширюється зі швидкістю світла  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.

2. Рівняння, що описують зміну напруженостей електричних і магнітних полів у просторі і часі, називаються хвильовими рівняннями.

Встановимо їх за допомогою рівнянь Максвелла, записаних у диференціальній формі (п. 10.3.2).

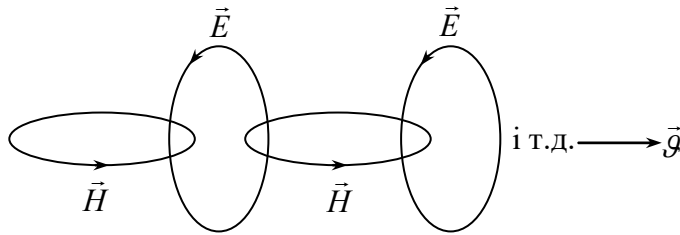


Рис. 10.5

**Змінне магнітне поле породжує змінне вихрове електричне поле, яке в свою чергу породжує змінне магнітне поле і т.д. (схема поширення електромагнітної хвилі)**

Припустимо, як і у прикладі розглянутому у п. 10.3.2, що розглядається вільне електричне поле, в якому вектор  $\vec{E}$  залишається паралельним до осі  $OY$ , а вектор  $\vec{H}$  — паралельним до осі  $OZ$ :  $E=E_y$ ,  $E_x=E_z=0$ ,  $H=H_z$ ,  $H_x=H_y=0$ . При цьому вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є функціями координат і часу (значення  $E$  і  $H$  різні у різних точках, як і в різні моменти часу). Припущення щодо напрямків  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  не вплинуть на загальний характер зроблених далі висновків щодо властивостей електромагнітних хвиль.

Отже, розглянуте електромагнітне поле описується рівняннями Максвелла

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (10.5.1)$$

Продиференціюємо перше рівняння по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu_0\mu \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} \Rightarrow \Rightarrow -\mu_0\mu \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \Rightarrow \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2};$$

тут ми провели заміну  $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$  і скористалися другим із рівнянь (10.5.1). Маємо:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (10.5.2)$$

Подібно до цього, після диференціювання по  $x$  другого із рівнянь (10.5.1), і використання першого рівняння, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (10.5.3)$$

Рівняння (10.5.2), (10.5.3) належать до так званих хвильових рівнянь ((10.5.2) — хвильове рівняння для напруженості електричного поля  $E_y$ , (10.5.3) — хвильове рівняння для напруженості магнітного поля  $H_z$ ).

Функція, яка задовольняє хвильовому рівнянню, описує хвилю, причому коефіцієнт перед другою похідною по часу є коренем квадратним від швидкості поширення хвилі. Рівняння (10.5.2) і (10.5.3) показують, що електромагнітне поле поширюється вздовж осі  $OX$  у вигляді електромагнітної хвилі, фазова швидкість якої дорівнює

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}. \quad (10.5.4)$$

Для вакууму  $\varepsilon = \mu = 1$ , і  $v = c = 3 \cdot 10^8$  м/с, що співпадає зі швидкістю світла у вакуумі. Саме це і навело Максвелла на думку, що світло — електромагнітна хвиля.

Розв'язками хвильових рівнянь (10.5.2)-(10.5.3) є *плоскі, монохроматичні хвилі* — електромагнітні хвилі певної частоти, задані виразами

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad (10.5.5)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx), \quad (10.5.6)$$

де  $E_0$  і  $H_0$  — амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів (спрямованих вздовж осей  $OY$  і  $OZ$ ),  $\omega$  — кутова (циклічна) частота,  $k = \frac{\omega}{v}$  —

хвильове число. Оскільки електромагнітна хвиля плоска, то напруженості електричного і магнітного полів  $E_y$  і  $H_z$  — одні і ті ж для всіх точок, які лежать в площині  $x = \text{const}$ .

Домножуючи рівняння (10.5.5) на орт вздовж осі  $OX$ , а рівняння (10.5.6) на орт вздовж осі  $OY$ , отримуємо рівняння плоскої електромагнітної хвилі у вигляді

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad (10.5.7)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx). \quad (10.5.8)$$

Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в електромагнітній хвилі взаємно перпендикулярні і лежать в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі (тобто вектора  $\vec{g}$ ). Отже, *електромагнітні хвилі поперечні*. У згоді з цим

$$\vec{g} = \frac{g}{EH} [\vec{E}\vec{H}] \quad (10.5.9)$$

(рис. 10.6).

Для певного моменту часу ( $t$  у формулах (10.5.5) і (10.5.6) фіксоване) просторова зміна векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у плоскій монохроматичній хвилі наведена на рис 10.7 («миттєва картина» хвилі). Зміну векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у довільній точці простору залежно від часу також можна зобразити аналогічним рисунком (із заміною абсциси  $X$  на  $t$ )<sup>1)</sup>.

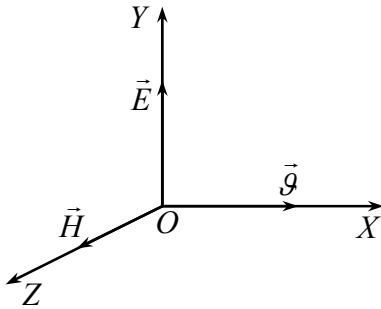


Рис. 10.6

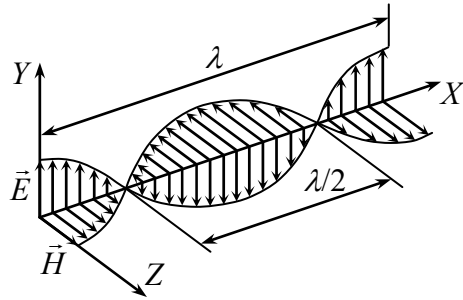


Рис. 10.7

Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  завжди коливаються в однакових фазах, причому між їх миттєвими значеннями існує зв'язок

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (10.5.10)$$

Звідси маємо, зокрема, що  $E$  і  $H$  одночасно досягають максимальних значень ( $E_0$  і  $H_0$ ) і одночасно стають рівними нулю.

Площина, яка проходить через вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{g}$ , називається *площиною поляризації хвилі*.

Довжина хвилі  $\lambda$ , частота  $\nu$ , період  $T$  і швидкість поширення хвилі пов'язані між собою:

$$\lambda = gT = \frac{g}{\nu}; \quad (10.5.11)$$

<sup>1)</sup> Див. у цьому зв'язку задачу № 10 у п. 10.7

за час, що дорівнює періоду  $T$ , хвиля переміщається на відстань  $\lambda$ .

### 10.5.2 Енергія плоскої електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга

1. Конкретизуємо вирази для енергії електромагнітного поля, наведені у п. 10.4, у випадку, коли вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  описуються виразами (10.5.7) і (10.5.8) (плоска електромагнітна хвиля). Одним із висновків, отриманих при цьому, є рівність густин енергій електричних і магнітних полів ( $w_e = w_m$ ).

Із формули (10.5.10) маємо (випадок поля у вакуумі)

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H,$$

і після підстановки у формулу для густини енергії електричного поля

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (10.5.12)$$

отримуємо

$$w_e = \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (10.5.13)$$

Справа у цій формулі — енергія магнітного поля. Отже,  $w_e = w_m$ ; тому

$$w = \varepsilon_0 E^2. \quad (10.5.14)$$

Тут  $E$  — миттєве значення напруженості електричного поля (формула (5.5)), тому

$$w = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (10.5.15)$$

Звідси видно, що  $w$  періодично змінюється від 0 до  $w_{max} = \varepsilon_0 E_0^2$  з частотою  $\omega/\pi$ . Оскільки середнє значення  $\cos^2(\omega t - kx)$  за період дорівнює  $1/2$ , то середнє значення густини електромагнітної енергії

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2.$$

Останню формулу можна записати і у вигляді

$$\langle w \rangle = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{E_0 H_0}{2} \quad (10.5.16)$$

(використана формула (10.5.10)).  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$  — швидкість світла, тому

$$\langle w \rangle = \frac{E_0 H_0}{2c}. \quad (10.5.17)$$

Разом з тим

$$w = \frac{EH}{c}. \quad (10.5.18)$$

В останній формулі  $E, H$  — миттєві значення напруженостей поля, в попередній —  $E_0$  і  $H_0$  максимальні значення напруженостей полів.

2. Електромагнітна хвиля у напрямку свого поширення переносить деяку кількість енергії.

Важливою характеристикою енергії, перенесеною хвилею, є *густина потоку електромагнітної енергії*  $\vec{P}$ , яка визначається добутком густини електромагнітної енергії  $w$  на швидкість поширення електромагнітної хвилі  $\mathcal{G}$ ;

$$\vec{P} = w\vec{\mathcal{G}}. \quad (10.5.19)$$

Видно, що  $P$  — це є кількість енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиницю площі, розміщену перпендикулярно до напрямку поширення хвилі (рис.

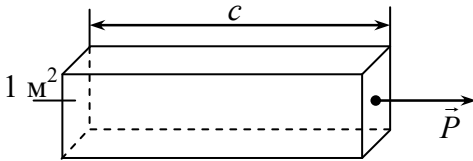


Рис. 10.8

Енергія, яка міститься в цьому об'ємі, вийде через праву площадку за  $1\text{ с}$

10.8). Оскільки  $w = \frac{EH}{\mathcal{G}}$ , а

$$\vec{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}}{EH} [\vec{E}\vec{H}]$$

(див. формулу (10.5.9)), то

$$\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (10.5.20)$$

Вектор  $\vec{P}$  називається вектором Пойнтінга.

Енергія, яку переносить електромагнітна хвиля через площадку  $S$  за час  $dt$

$$dW = PSdt,$$

а за час  $t$

$$W = \int_0^t PSdt.$$

**Приклад 1.** Оцінимо величини напруженостей електричного і магнітного полів, створених випромінюванням 100-ватної електричної лампочки. Будемо вважати, що у видиме випромінювання перетворюється приблизно 3% потужності лампочки.

Прийmemo, що лампочка — точкове джерело, що рівномірно випромінює енергію у всіх напрямках. На віддалі  $r$  від лампочки інтенсивність видимого випромінювання

$$I = \frac{N \cdot 0,03}{4\pi r^2},$$

де  $N=100$  Вт. Цій величині можна поставити у відповідність величину  $P = |\vec{P}|$ , виражену через напруженість електричного поля:

$$P = 2\langle w_e \rangle c,$$

де  $\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2$  — середня густина енергії електричного поля,  $E_0$  — амплітудне значення напруженості електричного поля. Отже,

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{0,03 \cdot N}{4\pi r^2}.$$

Візьmemo  $r=2$  м. Тоді

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,03 \cdot 100}{4\pi \cdot 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} \approx 6,7 \text{ В/м.}$$

Для порівняння: напруженість електричного поля телевізійного сигналу, який ще надійно сприймається, складає декілька мікрвольт на метр.

Із формули

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$$

отримуємо:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} \cdot 6,7 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ А/м.}$$

Це в тисячі разів менше величини магнітного поля Землі.

Використання вектора Пойнтінга виявляється корисним при розв'язуванні багатьох задач. При цьому іноді отримуються доволі неочікувані висновки, що демонструє, зокрема, наступний приклад.

**Приклад 2.** Джоулева теплота як потік електромагнітної енергії.

Нехай по циліндричному провіднику з радіусом  $r$  тече струм  $I$ . Відобразимо на рис. 10.9 електричне і магнітне поля біля поверхні провідника. За теоремою про циркуляцію вектора  $H$  маємо

$$\oint H dl = I \Rightarrow H \cdot 2\pi a = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi a}.$$

Із формули (10.5.20) і рис. 10.9 видно, що вектор Пойнтінга спрямований всередину провідника перпендикулярно до його поверхні. Звідси висновок: електромагнітна енергія спрямована всередину провідника! Дещо несподіваний висновок. При цьому, проте, використання вектора Пойнтінга призводить до закону Джоуля-Ленца:

$$w = PS = EH \cdot 2\pi al = 2\pi alH \cdot E = IU = I^2 R,$$

тут  $w$  — густина потоку електромагнітної енергії через бокову поверхню ділянки провідника довжиною  $l$ ,  $U$  — різниця потенціалів,  $R$  — опір провідника.

Отже, електромагнітна енергія надходить у провідник ззовні. Звідки? — від джерела струму. У середині джерела вектор  $\vec{E}$  спрямований проти струму  $I$ , тому в області джерела струму вектор  $\vec{P}$  спрямований назовні. Це і зумовлює передачу енергії від джерела струму до провідника у вигляді потоку електромагнітної енергії; ця енергія і виділяється провідником як теплота.

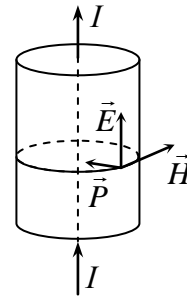


Рис. 10.9

### 10.5.3 Тиск електромагнітної хвилі. Імпульс електромагнітного поля

1. Одним із наслідків теорії Максвелла є висновок про те, що електромагнітні хвилі, поглинаючись або відбиваючись від тіл, чинять на них тиск.

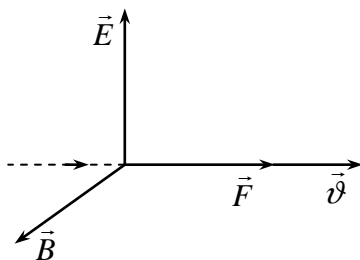


Рис. 10.10

Тиск електромагнітного поля пояснюється тим, що під дією електричного поля заряджені частинки речовини починають впорядкований рух — виникає електричний струм з густиною  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Внаслідок цього на одиницю об'єму середовища діє сила Ампера

$$\vec{F} = [\vec{j}\vec{B}] = \sigma[\vec{E}\vec{B}]$$



(результуюча сил Лоренца, які діють на заряджені частинки, що знаходяться в одиниці об'єму). Ця сила спрямована в той самий бік, що і вектор Пойнтінга — у напрямку поширення хвилі (рис. 10.10). Вона і зумовлює тиск електромагнітної хвилі; під дією сили  $\vec{F}$  тіло набуває певний імпульс.

Тиск, що чинить електромагнітна хвиля, дуже малий. Так, наприклад, тиск, що чинить сонячне випромінювання на поверхню Землі, що повністю поглинає це світло, складає всього 5 мкПа.

2. Існування тиску електромагнітної хвилі приводить до висновку, що електромагнітна хвиля має імпульс. Імпульс, набутий тілом при падінні на нього електромагнітної хвилі, виникає за рахунок імпульсу, наданого тілу електромагнітним полем (у згоді із законом збереження імпульсу). Імпульс електромагнітного поля

$$p = \frac{W}{c},$$

де  $W$  — енергія електромагнітного поля.

Наявність імпульсу електромагнітного поля в теорії Максвелла знаходить своє підтвердження і в квантовій теорії електромагнітного поля. У відповідності з цією теорією електромагнітна хвиля — потік фотонів з імпульсом  $p_\phi = \frac{h\nu}{c}$  ( $h$  — стала Планка,  $\nu$  — частота електромагнітної хвилі,  $c$  — швидкість світла).

**Приклад.** Енергія, що отримується Землею від сонячного випромінювання за 1 с на площі 1 м<sup>2</sup>, приблизно рівна  $1,5 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>. Тому тиск, що чинить сонячне випромінювання на поверхню Землі

$$p = \frac{1,5 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2}{c} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Па.}$$

Силу, що діє на поверхню Землі, внаслідок поглинання сонячного випромінювання оцінимо за формулою

$$F = pS,$$

де  $S = \pi R_3^2$ , де  $R_3$  — радіус Землі ( $R_3 \approx 6,4 \cdot 10^6$  м). Отже,

$$F = \pi (6,4 \cdot 10^6)^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-5} \approx 6,4 \cdot 10^8 \text{ Н.}$$

## 10.6 ДЖЕРЕЛА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ. ШКАЛА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

### 1. Джерела електромагнітних хвиль. 2. Шкала електромагнітних хвиль

#### 10.6.1 Джерела електромагнітних хвиль

1. Джерелами електромагнітних хвиль є заряди, що рухаються прискорено, змінний струм в провідниках, коливний рух заряджених частинок (електронів, іонів), тепловий рух атомів чи молекул. Заряд, що рухається у вакуумі рівномірно, не випромінює електромагнітного поля незалежно від його швидкості. Справді, нерухомий заряд створює тільки кулонівське (електростатичне) поле. Електромагнітне поле в цьому випадку відсутнє. Електромагнітного поля (отже, і випромінювання електромагнітних хвиль), за принципом відносності, не створює і заряд, що рухається рівномірно і прямолінійно.

2. Найпростішою моделлю випромінювальної системи є електричний диполь із гармонічно змінним в часі дипольним моментом:

$$\vec{p} = q\vec{l} \Rightarrow p = p_0 \sin \omega t, \quad (10.6.1)$$

де вектор  $\vec{l}$  спрямований від від'ємного заряду до додатнього,  $p = ql$  ( $l$  — відстань між зарядами  $-q$  і  $q$ ),  $p = ql$  — амплітудне значення дипольного моменту, а  $\omega$  — циклічна частота.

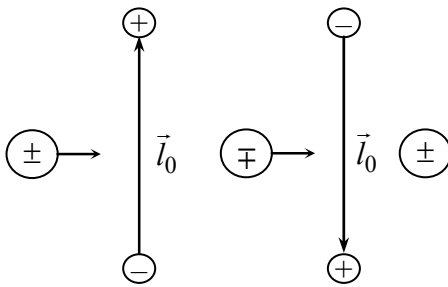


Рис. 10.11

Такий змінний дипольний момент реалізується, наприклад, у системі, відображеній на рис. 10.11; тут  $p_0 = ql_0$ ,  $l = l_0 \sin \omega t$ . У відповідності із формулою (10.6.1) в початковий момент часу  $t=0$  заряди  $-q$  і  $q$  суміщені,  $p=0$ . Через час  $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$  (чверть

періоду), коли заряди розходяться на

максимальну відстань  $l_0$ , момент диполя — максимальний ( $ql_0$ ). Через час

$t = \frac{T}{2}$   $p=0$  (заряди зійшлися), а через час  $t = \frac{3}{4}T$   $p = -ql_0$  (заряди поміняли-

ся місцями). Повне коливання (через час  $t=T$ ) закінчується поверненням системи у вихідне положення. Інший приклад гармонічно змінного в часі дипольного момента: відстань між зарядами диполя є сталою, а за гармонічним законом змінюються величини зарядів  $-q$  і  $q$ .

Диполь, електричний момент якого гармонічно змінюється в часі, еквівалентний, як випромінююча система, струму  $I = I_0 \cos \omega t$  вздовж провідника (антени)<sup>1)</sup> довжиною  $l$ .

3. На практиці модель дипольного випромінювача можна реалізувати у вигляді короткого (у порівнянні з довжиною електромагнітної хвилі  $\lambda$ ) провідника, електроємність якого зосереджена на кінцях провідника. Посередині провідника вмикається джерело електричних коливань. Оскільки довжина провідника  $l \ll \lambda$ , то струм вздовж провідника не змінюється (однорідно розподілений по довжині провідника). Такий пристрій — *вібратор Герца*, використовувався Герцем (1888 р.) в дослідах, які підтвердили один із найважливіших висновків теорії Максвелла — існування електромагнітних хвиль (рис. 10.12).

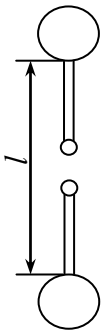


Рис. 10.12

4. Змінний електричний дипольний момент (або еквівалентний цьому змінний струм) зумовлюють змінні електричне і магнітне поля, які «відщеплюються» від випромінювача і поширюються у навколишньому середовищі.

Частота електромагнітних хвиль, випромінюваних дипольним випромінювачем, дорівнює частоті коливань диполя.

Напруженість електричного і магнітного полів на віддалі  $r$  від випромінювача ( $r \ll \lambda$ ) даються виразами

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kr), \tag{10.6.2}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kr), \tag{10.6.3}$$

які за формою співпадають з відповідними виразами для плоскої електромагнітної хвилі (формули (10.5.7) і (10.5.8)). Суттєва відмінність полягає в то-

<sup>1)</sup> Див. задачу № 11 у п. 10.7

му, що амплітудні значення  $E_m$  і  $H_m$  залежать як від  $r$ , так і від напрямку поширення хвилі:

$$H_m = \frac{I_{max}}{2} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin \theta}{r}, \quad E_m = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m; \quad (10.6.4)$$

тут  $I_{max}$  — максимальне значення сили струму в провіднику (антені), довжина якого  $l$ , кут  $\theta$  визначає напрям від випромінювача до точки спостереження  $A$  (рис. 10.13). Як і належить, вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємноперпендикулярні; вектор  $\vec{E} \perp \vec{r}$  в площині  $(\vec{r}, Oz)$ , вектор  $\vec{H} \perp \vec{E}$  і  $\vec{r}$ . Коливання векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  зменшуються із віддаллю; це характерна ознака сферичної хвилі. Поля максимальні у напрямку, перпендикулярно до випромінювача ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), і відсутні вздовж провідника (диполя).

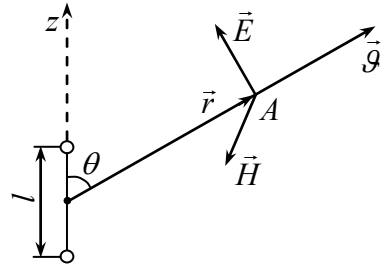


Рис. 10.13

Оскільки  $I_{max}$  можна пов'язати із характеристиками диполя ( $I_0 = \frac{p_0 \omega}{l}$ ), то формули (10.6.2) і (10.6.4) можна виразити і через дипольний момент.

Напруженості  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , які виникають в деякий момент часу в певній точці середовища, поширюються у напрямку електромагнітного променя  $\vec{r}$  зі швидкістю  $\vec{g}$  (у вакуумі — зі швидкістю світла  $c$ ); через час  $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ , рівний періоду коливань диполя (періоду коливань сили струму в антені),  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в цій точці набувають попередніх значень.

За допомогою формул (10.6.4) можна отримати наступні важливі висновки.

- Густина потоку енергії знаходиться за формулою Пойнтінга

<sup>1)</sup> Див. задачу № 11 у п. 10.7

$$P = EH = Z_0 \frac{I_{max}^2}{4} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(\omega t - kr); \quad (10.6.5)$$

тут

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \mu_0 c \approx 377 \text{ Ом.} \quad (10.6.6)$$

Якщо вираз для  $P$  усереднити за період коливання, то середнє значення густини потоку енергії

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0 I_{max}^2}{8} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \quad (10.6.7)$$

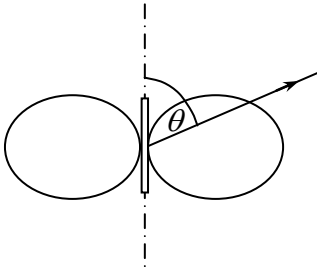


Рис. 10.14

тут використано, що  $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2}$  (див. задачу № 6 у п. 10.7). Из (10.6.7) видно, що інтенсивність випромінювання змінюється при  $\theta = const$  (вздовж променя) обернено пропорційно квадрату відстані від випромінювача (як і слід очікувати для сферичної хвилі). Залежність інтенсивності від напрямку ( $\sim \sin^2 \theta$ ) показана на рис. 10.14; це так звана *діаграма направленості випромінювання*.

У напрямку вздовж осі диполя ( $\theta=0$ ) випромінювання відсутнє, у напрямку, перпендикулярному до осі диполя ( $\theta=\pi/2$ ), воно максимальне.

Діаграма направленості випромінювання — важлива характеристика будь-якої антени. Складні антени дозволяють створювати випромінювання із заданою діаграмою направленості.

- Вектор  $\vec{P}$  спрямований по нормалі до сфери радіуса  $r$ , тому повна енергія випромінювана диполем за 1 с, дорівнює

$$W = \frac{\pi}{3} Z_0 I_{max}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (10.6.8)$$

(див. задачу № 12 у п. 10.7). Введемо величину

$$R_{випр} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ Ом,} \quad (10.6.9)$$

тоді енергію  $W$  можна подати у формі закону Джоуля-Ленца:

$$W = \frac{1}{2} I_{max}^2 R_{випр} = I_{ef}^2 R_{випр}, \quad (10.6.10)$$

де ефективна сила струму  $I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ .

Цю величину  $W$  можна тлумачити як енергію, яка витрачається на подолання деякого опору  $R_{випр}$ , який характеризує дипольну антену. Для інших типів антен  $W$  також можна подати у формі (10.6.10), але із іншими значеннями  $R_{випр}$ . Для реальних антен  $R_{випр}$  складає декілька десятків Ом.

- Оскільки  $I_0 = \frac{p_0 \omega}{l}$  (див. задачу № 11 у п. 10.7), то потужність випромінювання

$$W \sim p_0^2 \omega^4 \quad (10.6.11)$$

(при переході від формули (10.6.8) до (10.6.11) використано, що  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$ ). Остання формула дозволяє зробити важливий висновок: при малих частотах (як, наприклад, в лінії передачі змінного струму з частотою 50 Гц) випромінювання електричних систем незначне. Тому потужне електромагнітне випромінювання, здатне переносити енергію на значну віддаль, можна отримати лише на високих частотах (порядку мільйона Гц).

- Можна показати, що потужність випромінювання, виражена через дипольний момент,

$$W \sim \ddot{p}^2,$$

де  $\ddot{p}$  — друга похідна від моменту електричного диполя  $p$  по часу. Оскільки  $p \sim l$ , а  $\ddot{p} \sim \ddot{l}$  (пропорційність прискоренню  $a$  заряду  $q$ ), то

$$W \sim q^2 a^2.$$

Останній результат є загальним (для довільного прискорення руху заряду): заряджена частинка, що рухається з прискоренням, є джерелом електромагнітних хвиль. Саме цим, зокрема, пояснюється  $X$ -випромінювання при гальмуванні електронів анодом  $X$ -променевої трубки.

З останньої формули випливає, що заряд, який рухається рівномірно, не випромінює електромагнітних хвиль. Це справедливо лише для зарядів, які рухаються у вільному просторі (вакуумі). Якщо ж заряд рухатиметься у середовищі зі швидкістю, яка більша від швидкості світла у цьому середовищі,

то виникає електромагнітне випромінювання (випромінювання Черенкова-Вавілова).

Вище розглянутий випадок, коли заряд здійснює гармонічне коливання; в цьому випадку випромінюється електромагнітна хвиля з частотою, що дорівнює частоті коливань заряду. Якщо ж прискорення змінюється не по гармонічному закону, то випромінюються електромагнітні хвилі різних частот.

Електричний дипольний випромінювач — найпростіша антена. Наведемо приклади інших випромінювачів. Магнітний дипольний випромінювач реалізується у вигляді рамки із струмом (рамочна антена). Магнітна антена являє провідник із високою магнітною проникністю, на який намотана котушка. Як самостійні антени, так і елементи складних антенних систем для всього діапазону радіохвиль використовуються як замкнуті, так і незамкнуті провідники зі струмом, що збуджується зовнішнім джерелом.

Джерелами електромагнітного випромінювання є і квантові генератори (лазери, мазери). Пояснення механізму випромінювання цих систем виходить за рамки класичної електродинаміки (Максвелла); вони ґрунтуються на законах квантової електродинаміки.

### 10.6.2 Шкала електромагнітних хвиль

Електричні заряди можуть осцилювати з довільними частотами. Це означає, що і електромагнітні хвилі можуть мати також довільні частоти. Отже частотний спектр електромагнітних хвиль необмежений.

Шкала електромагнітних хвиль відображена в таблиці 1.

Таблиця 1

Назва діапазону		Довжина хвилі, $\lambda$	Частоти $\nu$	Джерела
Радіохвилі	Наддовгі	100 – 10 км	3 – 30 кГц	Атмосферні явища. Змінні струми в провідниках. Коливальні контури
	Довгі	10 км – 1 км	30 – 300 кГц	
	Середні	1 км – 100 м	300 кГц – 3 МГц	
	Короткі	100 м – 10 м	3 – 30 МГц	
	Ультракорткі	< 10 м	> 30 МГц	

Оптичне випромінювання	Інфрачервоне (теплове)	760 нм – 2 мм	$> 1,5 \times 10^{11}$ Гц (11 октав)	Випромінювання молекул і атомів у разі теплового і електричного впливах
	Видиме світло	400 – 760 нм	(1 октава)	
	Ультрафіолетове	10 – 400 нм	$< 3 \times 10^{16}$ Гц (5 октав)	Випромінювання атомів під дією прискорених електронів
Жорстке випромінювання	Рентгенівські (X-промені)	$10 - 10^2$ нм	$3 \times 10^{16} - 6 \times 10^{19}$ Гц	Атомні процеси під дією прискорених заряджених частинок
	Гамма	$10^{-1} - 10^{-6}$ нм	$3 \times 10^{20} - 10^{23}$ Гц	Ядерні і космічні процеси, радіоактивний розпад

Як видно, різні діапазони частково перекриваються. Це пояснюється тим, що кожна область шкали електромагнітних хвиль пов'язана з певним типом випромінювачів. Радіо- і мікрохвилі<sup>1)</sup> (радіодіапазон частот), з якими ми найчастіше зустрічаємося, випромінюються змінними струмами (див. таблицю). Починаючи з оптичного діапазону (інфрачервоне випромінювання, видиме світло, ультрафіолетові промені) визначальну роль починають відігравати мікроскопічні випромінювачі (атоми і молекули). Так, інфрачервоне випромінювання (ГЦ) виникає внаслідок руху зарядів в молекулі. Видиме світло і ультрафіолетові промені виникають внаслідок коливань електронів в атомах. При гальмуванні електронів речовиною виникають X-промені.  $\gamma$ -промені випромінюються атомними ядрами при ядерних перетвореннях, зокрема, при радіоактивному розпаді, входять до складу космічного випромінювання. Для пояснення властивостей X- і  $\gamma$ -променів потрібно використовувати квантові уявлення; у відповідності з цим X- і  $\gamma$ -промені — потік фотонів з енергією  $\varepsilon = h\nu$  ( $h$  — стала Планка,  $\nu$  — частота випромінювання).

<sup>1)</sup> Хвилі надвисоких частот (НВЧ)



## 10.7 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 10.7.1 Запитання і задачі

1. Знайти струм зміщення в початковий момент зарядки конденсатора.

2. Зобразити на рисунку вектори  $\vec{D}$ ,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , напрями струмів провідності і зміщення та відповідні магнітні поля при розрядці конденсатора.

3. Чи задовільняє струм зміщення закону Джоуля-Ленца?

4. Чи виникне електромагнітна хвиля, якщо електричне і магнітне поле змінюватимуться за законами  $\frac{\partial E}{\partial t} = const$ ,  $\frac{\partial B}{\partial t} = const$ ?

5. За яких умов напруженість магнітного поля  $\vec{H}$ , що виникає внаслідок зміни з часом напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , є сталою?

6. Показати, що середнє (за період) значення середньої густини електромагнітної енергії у плоскій хвилі, що поширюється вздовж осі  $OX$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2,$$

де  $E_0$  — амплітудне значення напруженості електричного поля.

7. Переконайтеся, що плоскі електромагнітні хвилі, задані формулами (10.5.5) і (10.5.6), задовольняють хвильовим рівнянням (10.5.2) і (10.5.3).

8. Показати, що між напруженістю електричного поля  $E$  і магнітною індукцією  $B$  в електромагнітній хвилі існує зв'язок  $E = vB$ , де  $v$  — швидкість поширення електромагнітної хвилі,  $B$  — магнітна індукція.

9. На рис. 11.15 показана ділянка електричної лінії,  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Визначте, справа чи зліва знаходиться джерело струму (електрогенератор). Тут зручно скористатися вектором Пойнтінга (дещо неочікуване застосування, чи не так?).

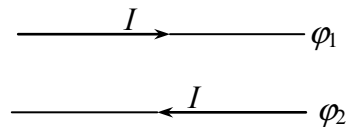


Рис. 10.15

10. Дослідити залежність векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  від часу для фіксованої точки простору.

11. Показати, що диполь, в якому заряди здійснюють гармонічні коливання, еквівалентний антені (провіднику довжиною  $l$ ), в якій тече струм  $I = I_0 \cos \omega t$ , рівномірно розподілений по всій довжині антени.

12. Енергія  $W$ , випромінювана дипольною антеною за 1 с може бути знайдена так

$$W = \int_S \langle P \rangle dS,$$

де  $\langle P \rangle$  — середнє значення модуля вектора Пойнтінга, а інтегрування ведеться по сфері радіуса  $r$  (вектор  $\vec{P}$  спрямований по нормалі до сфери). Знайти  $W$  (формула (10.6.8)). Вказівка: елемент поверхні  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  (у сферичній системі координат), інтегрування ведеться по  $\varphi$  (від 0 до  $2\pi$ ) і по  $\theta$  (від 0 до  $\pi$ ).

### 10.7.2 Відповіді

1. За формулою (10.2.2) маємо

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q_m}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}C}{RC} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

В момент часу  $t=0$  струм зміщення дорівнює початковій силі струму провідності

$$I_3 = I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

2. Виділимо зі схеми розрядки конденсатора ділянку з конденсатором (рис. 10.16). Оскільки конденсатор розряджається, то струм провідності спрямований від додатньо зарядженої обкладки конденсатора  $\frac{\partial D}{\partial t} < 0$ , тому

вектори  $\vec{D}$  і  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  протилежно спрямовані, отже

струм зміщення має той самий напрям, що і струм провідності. Напрямок магнітного поля струмів провідності  $H_{np}$ , як і напрям струму зміщення, визначається за відповідними правилами правого гвинта.

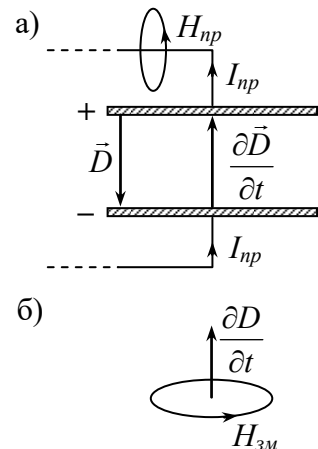


Рис. 10.16

3. Ні. Із проходженням струму зміщення у вакуумі взагалі не пов'язане виділення теплоти.

4. При  $\frac{\partial E}{\partial t} = \text{const}$  вектор  $\vec{B}$ , за другим рівнянням Максвелла, — величина також стала, а це означає, що вихрове електричне поле відсутнє ( $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ ). Електромагнітна хвиля не виникне.

5. Якщо  $\frac{\partial E}{\partial t} = \text{const}$ , то і  $\vec{H} = \text{const}$ .

6. Повна густина енергії хвиль

$$w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2,$$

де

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Шукане середнє

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dt.$$

Використаємо формулу

$$\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1 + \cos[2(\omega t - kx)]}{2}.$$

Маємо:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2,$$

бо

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2T} \int_0^T \cos(2(\omega t - kx)) dt = 0.$$

7.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -k E_{0y} \sin(\omega t - kx), & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -k^2 E_{0y} \cos(\omega t - kx), \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\omega E_{0y} \sin(\omega t - kx), & \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_{0y} \cos(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Після підстановки у хвильове рівняння маємо отримуємо

$$k^2 = \frac{\omega^2}{g^2},$$

бо хвильове число  $k = \frac{\omega}{g}$ . Аналогічно переконуємося, що (10.5.6) є розв'язком рівняння (10.5.3).

8. Оскільки миттєві значення  $E$  і  $H$  змінюються у фазі, то

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H \Rightarrow E = \frac{\sqrt{\mu_0 \mu}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} H = \frac{\sqrt{\mu_0 \mu} \sqrt{\mu_0 \mu} H}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = g \mu_0 \mu H = g B.$$

9. У даному випадку вектор  $\vec{E}$  між дротами спрямований вгору, а вектор  $\vec{H}$  за площину рисунка від нас (правило свердлика). Вектор Пойнтінга  $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$  спрямований вліво (рис. 10.18). Висновок: джерело струму знаходиться справа, а споживач — зліва.

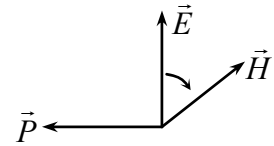


Рисунок 10.17

10. Оберемо точку  $x=0$ . Зміна векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у цій точці в залежності від часу дається формулами (див. п. 10.5)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t, \quad (*)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos \omega t. \quad (**)$$

Така ж зміна векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  відбувається у всіх точках простору, але із зсувом по фазі, що залежить від відстані між точками, яка відраховується вздовж осі  $OX$ . Важливо відмітити, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  одночасно набувають максимального значення, одночасно перетворюються в нуль і т.д.

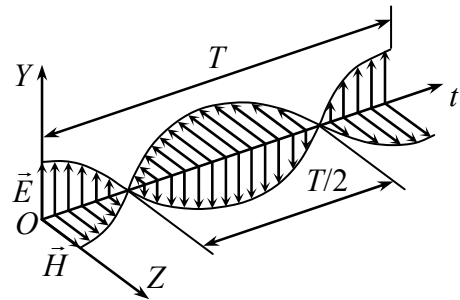


Рис.10.18

Стрілки, спрямовані паралельно до осі  $OY$ , характеризують величину і напрям вектора  $\vec{E}$ , стрілки паралельні осі  $OZ$  характеризують магнітне поле

11. Нехай дипольний момент

$$p = ql = p_0 \sin \omega t = q_0 l_0 \sin \omega t,$$

тут заряди  $q_0$  і  $-q_0$  здійснюють гармонічні коливання з частотою  $\omega$ ,  $l_0$  — максимальна відстань між зарядами  $q_0$  і  $-q_0$ . З іншого боку, змінний дипольний момент можна розглядати як момент диполя сталої довжини  $l$ , заряди якого  $q_0$  і  $-q_0$  змінюються в часі за гармонічним законом ( $q = q_0 \sin \omega t$ ). Отже,

$$\frac{dp}{dt} = l \frac{dq}{dt} = l q_0 \omega \cos \omega t \Rightarrow \dot{p} = l q_0 \omega \cos \omega t \Rightarrow I = I_0 \cos \omega t,$$

де  $I_0 = q_0 \omega = \frac{p_0 \omega}{l}$ . Сила струму  $I$  рівномірно розподілена по всій довжині  $l$  антени.

12.

$$W = \int_S \langle P \rangle dS,$$

де  $S$  — поверхня сфери радіуса  $R$ ,  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , а  $\langle P \rangle$  дається формулою (10.6.7). Маємо:

$$W = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Z_0 I_0^2}{8} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \frac{\sin^3 \theta r^2}{2^2} d\theta d\varphi = \frac{\pi Z_0 I_0^2}{4} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{3 I_0} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4,$$

бо

$$\int \sin^3 \theta d\theta = -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} + C.$$

## РОЗДІЛ 11

### ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

*Усе тече, все змінюється*

*Геракліт*

У цьому розділі будуть розглянуті фізичні процеси в електричних колах змінного струму.

Змінний струм — струм, який змінюється в часі за величиною і за напрямком. На відміну від кола постійного струму тут струм проходить через конденсатор (струм зміщення!). Наявність в електричному колі котушки індуктивності і конденсатора зумовлює (в додаток до опору резистора) так званий реактивний опір.

На практиці під змінним струмом розуміють струм, що поширюється в електричних мережах і який змінюється в часі за гармонічним законом з лінійною частотою 50 Гц (в Європі — 55 Гц, у США — 60 Гц).

Оскільки електромагнітні поля, зумовлені змінним струмом, поширюються в електричному колі зі швидкістю світла, то миттєві значення сили струму будуть практично однаковими для всіх перерізів кола (*квазістаціонарність змінного струму*). Для миттєвих значень виконуються закон Ома і правила Кірхгофа.

#### 11.1 КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР. ВІЛЬНІ ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Коливальний контур — електричне коло, що складається з послідовно ввімкнених котушки з індуктивністю  $L$ , конденсатора ємності  $C$  і резистора з опором  $R$ <sup>1)</sup>. У коливальному контурі можуть виникати електричні коливання, при яких фізичні величини (заряд конденсатора, сила струму в колі, напруга на котушці, напруга на конденсаторі) періодично змінюються з часом; ці зміни супроводжуються взаємними перетвореннями енергій електричного і магнітного полів. Коливальні контури знаходять широке застосування, зок-

---

<sup>1)</sup> Зауважимо, що в теорії електричних кіл змінного струму послідовно ввімкнені в коло  $R, L, C$  — елементи означаються як *послідовний коливальний контур*, а паралельно з'єднані елементи як *паралельний коливальний контур*

рема, в приймально-передавальних пристроях зв'язку, генераторах і перетворювачах електричних сигналів.

Далі будуть досліджені умови, за яких у коливальному контурі виникають і підтримуються електричні коливання.

## 1. Рівняння гармонічних коливань. 2. Перетворення енергії у коливальному контурі

### 11.1.1 Рівняння гармонічних коливань

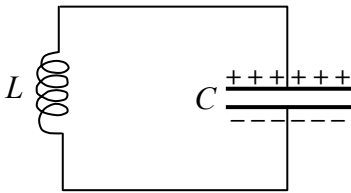


Рис. 11.1

Розглянемо спочатку ідеалізований коливальний контур, опір якого  $R=0$  (рис. 11.1).

Прийmemo, що в момент часу  $t=0$  конденсатор (попередньо заряджений за схемою, розглянутою у п. 2.13) починає розряджатися і по котушці потече струм.

У довільний момент часу в розглянутій системі співіснують електричне поле конденсатора і магнітне поле котушки. Енергія електричного поля  $W_e$  буде зосереджена, в основному, між пластинами конденсатора, а енергія магнітного  $W_m$  — всередині котушки.

$$W_e = \frac{q^2}{2C}, \quad W_m = L \frac{I^2}{2} \quad (11.1.1)$$

( $q$  — заряд конденсатора,  $I$  — сила струму, взяті в довільний момент часу).

Оскільки  $R=0$ , то відсутні втрати енергії на джоулеве тепло. Тому за законом збереження енергії повна енергія

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}. \quad (11.1.2)$$

Продиференціюємо вираз (11.1.2) в часі:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \frac{IdI}{dt} \Rightarrow \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \frac{IdI}{dt} = 0.$$

Оскільки  $\frac{dq}{dt} = I$ , то:

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (11.1.3)$$

Введемо сталу величину

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (11.1.4)$$

і позначення  $\frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$ <sup>1)</sup>. Тоді рівняння (11.1.3) набуде вигляду

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.1.5)$$

Зазначимо, що це рівняння можна отримати і за законом Ома (див. задачу №4 у п.11.6).

Рівняння (11.1.5) є *рівнянням вільних незгасаючих коливань* (або *власних коливань*) у коливальному контурі<sup>2)</sup>.

Розв'язком рівняння (11.1.5) є

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11.1.6)$$

в чому можна переконатися шляхом прямої підстановки (11.1.6) у (11.1.5). Отже, величина заряду на конденсаторі змінюється з часом — здійснює гармонічне коливання. У формулі (11.1.6):  $q$  — величина заряду в довільний момент часу  $t$ ,  $q_m$  — амплітуда коливань заряду,  $(\omega_0 t + \varphi_0)$  — фаза коливань заряду,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.1.7)$$

— кутова (циклічна) частота коливань, яка називається *власною частотою* контура.  $\varphi_0$  — початкова фаза коливань, яка характеризує значення  $q$  в момент часу  $t=0$ . Покладемо  $q=q_m$  в момент часу  $t=0$ , тоді  $\varphi_0 = 0$ . Отже,

$$q = q_m \cos \omega_0 t. \quad (11.1.8)$$

Залежність  $q(t)$  показана на рис. 11.2.

Період власних коливань (час, за який заряд набуває початкового значення  $q$ )

<sup>1)</sup> У теорії коливань прийнято першу похідну в часі від величини, що періодично змінюється (тут  $q$ ), позначати як  $\dot{q}$ , а другу похідну в часі — як  $\ddot{q}$

<sup>2)</sup> Коливання у контурі можуть бути і *вимушеними незгасаючими* (див. п. 11.3)



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (11.1.9)$$

Це — формула Томсона. Період коливань, як видно, не залежить від величини заряду, наданого конденсатору. Формула (11.1.8), записана через  $T$ , має вигляд

$$q = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (11.1.10)$$

Деякі наслідки з отриманого результату:

- Сила струму в коливальному контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t = q_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow I = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.1.11)$$

де  $I_m = q_m \omega_0$  — амплітуда сили струму. Коливання струму  $I$  випереджають по фазі коливання заряду  $q$  на  $\pi/2$ ; коли заряд стає рівним нулю, сила струму — максимальна і навпаки. Залежність  $I(t)$  показана на рис. 11.3.

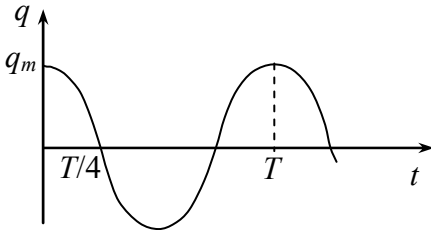


Рис. 11.2

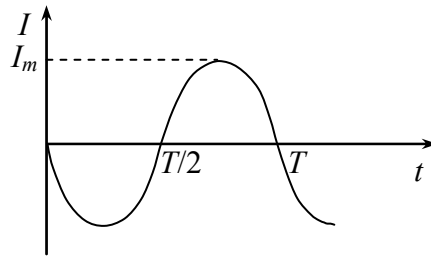


Рис. 11.3

- Напруга на конденсаторі

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m \cos \omega_0 t}{C} \Rightarrow U_c = U_m \cos \omega_0 t, \quad (11.1.12)$$

де  $U_m = \frac{q_m}{C}$  — амплітуда напруги.

- Оскільки

$$U_m = \frac{q_m}{C} \quad \text{і} \quad I_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}},$$

то

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11.1.13)$$

### 11.1.2 Перетворення енергії у коливальному контурі

Енергії електричного  $W_e$  і магнітного  $W_m$  полів

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}, \quad W_m = L \frac{I^2}{2},$$

змінюються, у відповідності із отриманими вище виразами для  $U$  і  $I$ , за законами

$$W_e = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t = \frac{CU_m^2}{2} \cos^2 \omega t, \quad (11.1.14)$$

$$W_m = \frac{LI_m^2}{2} \cos^2 \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t. \quad (11.1.15)$$

Звідси маємо, зокрема:

- У  $LC$ -контурі повна енергія  $W$  (сума  $W_e$  і  $W_m$ ) зберігається:

$$W = \frac{CU_m^2}{2} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{CU_m^2}{2} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

$W$  не залежить від часу і визначається початковою енергією зарядженого конденсатора.

- Максимальна енергія електричного поля дорівнює максимальній енергії магнітного поля:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

- Середня за період енергія електричного поля дорівнює відповідній енергії магнітного поля:

$$\frac{CU_m^2}{2} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{LI_m^2}{2} \langle \sin^2 \omega t \rangle,$$

бо відповідні середні, взяті за період, дорівнюють  $\frac{1}{2}$  (див. задачу №3 у п. 11.6).

- Послідовність процесів у коливальному контурі від початку розрядки конденсатора ( $t=0$ ) до переходу в початковий стан (за час  $t$ ), рівний періоду коливань, проілюстрована на рис. 11.4, а)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Корисно самостійно переконатися в справедливості означених на рис. 11.4 стадій коливального процесу

На рис. 11.4, б) наведені відповідні стани коливань математичного маятника. Можна бачити, що потенціальній енергії маятника ( $mgh$ ) можна поставити у відповідність енергію електричного поля, а кінетичній енергії маятника  $\left(\frac{m g^2}{2}\right)$  — енергію магнітного поля.

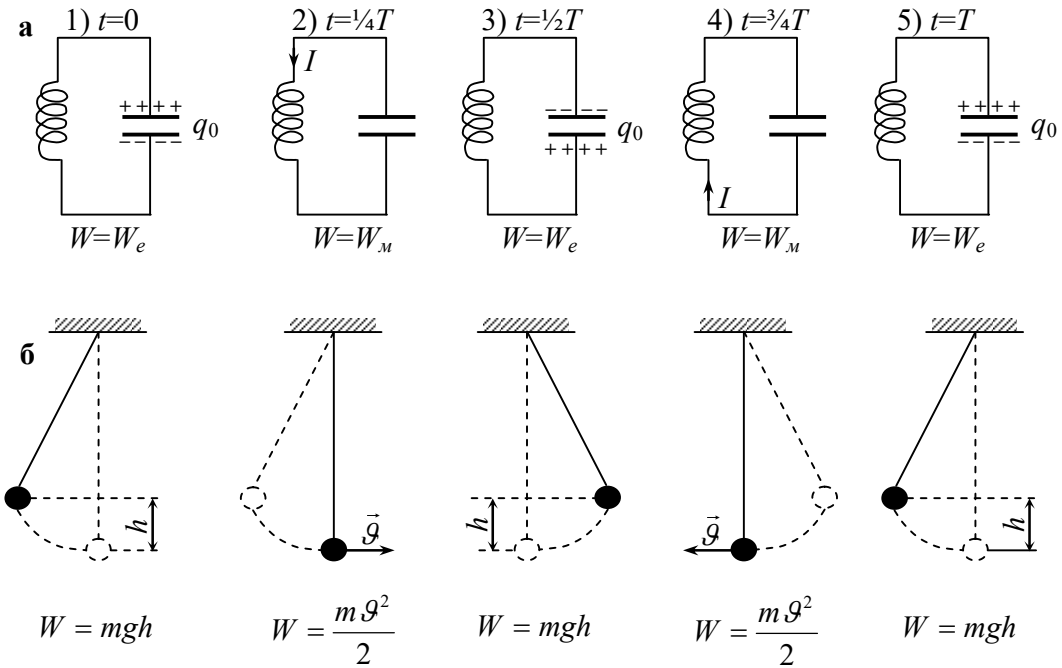


Рис. 11.4

## 11.2 ВІЛЬНІ ЗГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

**1. Рівняння вільних згасаючих коливань. 2. Характеристики згасання електричних коливань**

### 11.2.1 Рівняння вільних згасаючих коливань

Реальний контур характеризується і певним опором  $R$  (рис. 11.15), тому енергія, яку має контур, буде поступово перетворюватися у джоулеву теплоту. Внаслідок цього коливання будуть згасаючими. З'ясуємо характер згасаючих коливань.

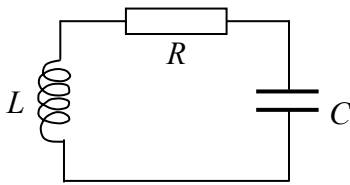


Рис. 11.5

Зміна повної енергії системи  $W$  за час  $dt$

$$dW = -I^2 R dt; \quad (11.2.1)$$

знак мінус відповідає зменшенню енергії системи ( $dW < 0$ ). Отже, у згоді із законом збереження енергії

$$\begin{aligned} dW = -I^2 R dt &\Rightarrow -I^2 R dt = \frac{1}{C} q dq + L I dI \Rightarrow \\ LI \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} + I^2 R = 0 &\Rightarrow LI \frac{d}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q I + I \frac{dq}{dt} R = 0 \Rightarrow \\ L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} = 0 &\Rightarrow \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. &\quad (11.2.2) \end{aligned}$$

Позначимо:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \ddot{q}, \quad \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (11.2.3)$$

У підсумку приходимо до рівняння вільних згасаючих коливань:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.2.4)$$

Якщо  $\beta=0$  ( $R=0$ ), то приходимо до рівняння вільних незгасаючих коливань.

Рівняння (11.2.4) — лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Підстановкою

$$q = Q \exp(-\beta t) \quad (11.2.5)$$

воно зводиться до вигляду

$$\ddot{Q} + (\omega_0^2 - \beta^2) Q = 0. \quad (11.2.6)$$

Розв'язання цього рівняння залежить від знаку величини  $\omega_0^2 - \beta^2$ . Прийнемо, що  $\omega_0^2 > \beta^2$ . Введемо позначення  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ , тоді

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0.$$

Це рівняння за формулою співпадає з рівнянням вільних незгасаючих коливань. Тому

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.2.7)$$

Повертаючись до початкової змінної  $q$  (за формулою (11.2.5)), отримуємо, що

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.2.8)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (11.2.9)$$

а  $q_m$  і  $\varphi$  — сталі величини, які визначаються з початкових умов; якщо в момент часу  $t=0$  заряд  $q$  дорівнює  $q_m$  — максимальній величині заряду конденсатора, то  $\varphi=0$ . При  $\beta=0$  (11.2.8) переходить у рівняння вільних незгасаючих коливань, а  $\omega=\omega_0$ . Видно, що кутова частота згасаючих коливань  $\omega$  менша від кутової частоти незгасаючих коливань  $\omega_0$ , а період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} \quad (11.2.10)$$

— більший від періоду незгасаючих коливань.

Множник  $q_m \exp(-\beta t)$  у формулі (11.2.8) називається *амплітудою згасаючих коливань*. Згасання тим менше, чим менше відношення  $R/L$ .

Залежності  $q(t)$  (суцільна крива) і амплітуди згасаючих коливань від часу (пунктирна крива) показані на рис.11.6.

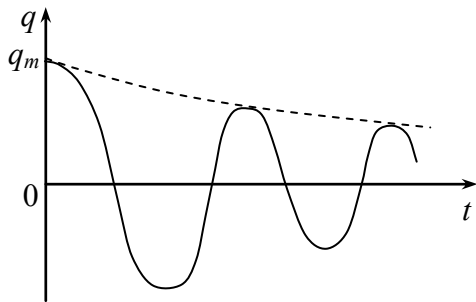


Рис. 11.6 — При  $t=0$   $q=q_m$

За допомогою (11.2.8) знаходимо вирази для напруги на конденсаторі і для сили струму в контурі. Залежність амплітуди згасаючих коливань від часу показана на рис. 11.6 пунктирною лінією.

- Напруга на конденсаторі

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.2.11)$$

- Струм у контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t} (-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)).$$

Цей вираз можна подати у формі

$$I = \omega q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \delta), \quad (11.2.12)$$

де кут  $\delta$  лежить у другій чверті ( $\pi/2 < \delta < \pi$ ) і визначається умовами  $\sin \theta = \omega/\omega_0$ ,  $\cos \theta = \beta/\omega_0$ . Це означає, що за наявності у контурі активного опору струм випереджує по фазі напругу на конденсаторі більше, ніж на  $\pi/2$  (якщо  $R=0$ , то  $\delta=\pi/2$ ).

Отримані вище результати є наслідком зробленого на початку припущення, що  $\omega_0^2 > \beta^2$ , тобто  $4L > CR^2$ . Якщо ця нерівність не виконується, то коливання стають неможливі. Відбувається поступова (без коливань) розрядка конденсатора через котушку. Аналогічно поводить себе відхилений маятник при поверненні до положення рівноваги у в'язкому середовищі.

### 11.2.2 Характеристики згасання електричних коливань

1. *Логарифмічний декремент згасання  $\lambda$*  визначається як логарифм натуральний відношення двох значень послідовних амплітуд, взятих через час, рівний періоду коливань  $T$ :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}, \quad (11.2.13)$$

де  $A$  — амплітуда відповідної величини ( $q$ ,  $I$ ,  $U$ ). Використання формул (11.2.8), (11.2.11), (11.2.12) дає один і той самий результат:

$$\lambda = \beta T; \quad \beta = \frac{R}{2L}. \quad (11.2.14)$$

У випадку слабкого згасання

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

і

$$\lambda \approx \beta \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (11.2.15)$$

(тут використані формули (11.2.3)).

2. *Час релаксації  $\tau$*  — час, протягом якого амплітуда коливань зменшується у  $e$  ( $\approx 2,72$ ) разів. Із (11.2.8) отримуємо:

$$\frac{q_m e^{-\beta t} \cos \omega t}{q_m e^{-\beta(t+\tau)} \cos \omega t} = e \Rightarrow \beta \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (11.2.16)$$

3. *Добротність коливального контура*  $Q$  характеризує відносну втрату енергії за період коливань  $T$ :

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \quad (11.2.17)$$

Оскільки енергія коливної системи пропорційна квадрату амплітуди  $A(t)$ , то

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - \exp(-2\beta T)} = \frac{2\pi}{1 - \exp(-2\lambda)}$$

Для малих значень, коли  $x \ll 1$ ,  $\exp(-2\lambda) \approx 1 - 2\alpha$ , і

$$Q \approx \frac{\pi}{\lambda}.$$

Якщо скористатися формулою (11.2.15), то

$$Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11.2.18)$$

4. *Критичний опір*. Якщо  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , то, як відзначалося, відбувається *аперіодичний розряд* конденсатора. Опір контура, при якому коливальний процес переходить в аперіодичний, називається *критичним*. Значення критичного опору  $R_k$  визначається з умови

$$\omega_0^2 = \beta^2 \Rightarrow \frac{1}{LC} = \frac{R_k^2}{4L^2} \Rightarrow R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

## 11.3 ВИМУШЕНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

### 1. Рівняння вимушених коливань. 2. Резонансні криві. Резонанс

#### 11.3.1 Рівняння вимушених коливань

Для підтримування коливань у контурі з  $R \neq 0$  необхідна дія періодично змінної в часі електрорушійної сили  $\mathcal{E}$ , подібно до того, як для підтримування механічних коливань необхідний вплив зовнішньої періодично діючої сили.

Нехай

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t, \quad (11.3.1)$$

де  $\omega$ — кутова (циклічна) частота зміни е.р.с. (див. формулу (9.8.4) Розділу 9).

У цьому випадку зміна повної енергії електричного і магнітного полів  $W$  за час  $dt$  буде

$$dW = -I^2 R dt + \delta q \mathcal{E},$$

де  $\delta q$  — заряд, перенесений в контурі за час  $dt$ .  $\delta q = Idt$ , тому

$$dW = -I^2 R dt + Idt \mathcal{E} \Rightarrow IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_m \cos \omega t;$$

тут використано, що зміна енергії системи

$$dW = \frac{q dq}{C} + LI dI.$$

Отже, маємо рівняння, яке є наслідком закону збереження енергії:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_m \cos \omega t. \quad (11.3.2)$$

Після простих перетворень (повністю аналогічних до проведених у попередньому параграфі) отримуємо диференціальне рівняння вимушених електричних коливань у формі

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \mathcal{E}_m / L \cos \omega t. \quad (11.3.3)$$

Розв'язком цього рівняння є, як відомо з математики, сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (тобто рівняння (11.3.3) без правої частини) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Однорідне рівняння — це рівняння згасаючих коливань (11.2.4), розв'язок його (11.2.8) містить множник  $e^{-\beta t}$ , тому з часом він зникає, перетворюється в нуль.

Частинним розв'язком рівняння (11.3.3), який описує режим усталених (стаціонарних) коливань, є

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (11.3.4)$$

де  $q_m$  і  $\psi$  — невідомі величини, які, як видно із подальшого, визначаються властивостями контура та е.р.с.  $\mathcal{E}$ . Форма запису (11.3.4) — наявність  $-\psi$  (замість  $\varphi$  у формулах для  $q$ , використаних у попередніх параграфах) зумовлена тим, що, як виявляється,  $q$  відстає по фазі від  $\mathcal{E}$ , а також використанням  $\varphi$  у кінцевих формулах для  $I$  і  $U$ .

Для визначення  $q_m$  і  $\psi$  підставимо (11.3.4), першу та другу похідні  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  у вихідне рівняння (11.3.3). Після використання формул

$$\cos(\omega t - \psi) = \cos \omega t \cos \psi + \sin \omega t \sin \psi,$$



$$\sin(\omega t - \psi) = \sin \omega t \cos \psi - \cos \omega t \sin \psi$$

та відповідного групування доданків, отримуємо:

$$M \sin \omega t + N \cos \omega t = 0, \quad (11.3.5)$$

де

$$\begin{aligned} M &= q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\beta q_m \cos \varphi, \\ N &= q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\beta q_m \sin \varphi - \mathcal{E}_m / L. \end{aligned}$$

(11.3.5) — тотожність (вираз справедливий для будь-якого моменту часу), тому

$$\begin{aligned} q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\beta q_m \cos \varphi &= 0, \\ q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\beta q_m \sin \varphi &= \mathcal{E}_m / L. \end{aligned}$$

Із першого рівняння отримуємо вираз для шуканої величини  $\psi$ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.3.6)$$

Для знаходження  $q_m$  піднесемо обидва рівняння до квадрату і додамо їх. Маємо:

$$q_m^2 \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = (\mathcal{E}_m / L)^2,$$

звідки

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (11.3.7)$$

Підстановка значень  $\omega_0^2$  і  $\beta^2$  дає:

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (11.3.8)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (11.3.9)$$

Вираз для  $q(t)$  (формула 11.3.4) дозволяє знайти силу струму в контурі та відповідні напруги (на резисторі, конденсаторі та котушці індуктивності).

- Після диференціювання (11.3.4) по  $t$  знайдемо силу струму в контурі при усталених коливаннях:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

де

$$I_m = \omega q_m.$$

Позначимо  $\psi - \frac{\pi}{2} = \varphi$ , тоді

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi); \quad (11.3.10)$$

тут  $I_m$  — амплітудне значення сили струму,  $\varphi$  — зсув фаз між струмом і прикладеною е.р.с.;

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11.3.11)$$

(врахований вираз (11.3.8)). При цьому використання формули (11.3.9) приводить до виразу

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad (11.3.12)$$

оскільки

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi}.$$

Звідси отримуємо: якщо  $\omega L > 1/\omega C$ , то  $\varphi > 0$  (струм відстає по фазі від напруги, якщо ж  $\omega L < 1/\omega C$ , то  $\varphi < 0$  (струм випереджає по фазі напругу).

Означимо наступні вирази для напруг на  $R$ -  $L$ -  $C$ - елементах коливального контура.

- Напруга (різниця потенціалів) на резисторі

$$U_R = IR = I_m R \cos(\omega t - \varphi) \quad (11.3.13)$$

(використана формула (11.3.10)).

- Напруга (різниця потенціалів) на конденсаторі

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right); \quad (11.3.14)$$

тут

$$U_{C_m} = \frac{q_m}{C} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11.3.15)$$

— максимальне (амплітудне) значення напруги на конденсаторі (використана формула (11.3.8) для  $q_m$ ). Врахуємо формулу (11.3.11); тоді

$$U_{C_m} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (11.3.16)$$

- Напруга на котушці індуктивності

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = U_{L_m} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad (11.3.17)$$

тут

$$U_{L_m} = \omega L I_m \quad (11.3.18)$$

— максимальне (амплітудне) значення напруги на котушці індуктивності (використана формула (11.3.15)).

- Формули (11.3.13), (11.3.14), (11.3.17) дозволяють подати вихідне рівняння (3.2) у вигляді

$$U_R + U_C + U_L = \mathcal{E}_m \cos \omega t. \quad (11.3.19)$$

Отже, сума напруг на елементах  $R, L, C$  контура дорівнює в кожен момент часу е.р.с., прикладеній до  $RLC$ -ділянки.

Відзначимо, що проведений вище розгляд спрощується і стає більш наочним, якщо скористатися *методом векторних діаграм* (п. 11.3.4 та Математичне доповнення, п.7).

### 11.3.2 Резонансні криві. Резонанс

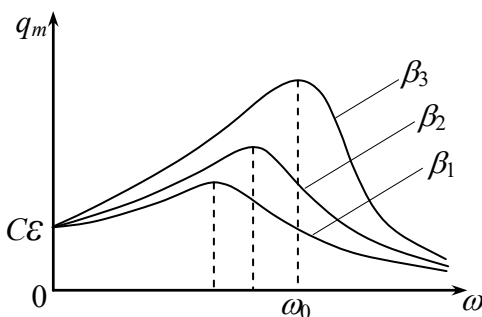


Рис. 11.7  $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$

1. Як видно із формул, наведених вище, амплітуди заряду  $q$  на конденсаторі, сила струму  $I$ , напруги  $U_R, U_C, U_L$  залежать не тільки від характеристик контура, але і від частоти  $\omega$  дії зовнішньої е.р.с. Графіки залежностей цих величин від  $\omega$  називаються резонансними кривими.

1. Резонансна крива для заряду

$q_m$  (за формулою (11.3.8)) наведена на рис. 11.7. Як можна бачити, максимум амплітуди заряду досягається при резонансній частоті<sup>1)</sup>

$$(\omega_q)_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

яка при зменшенні  $\beta$  (відношення  $R/2L$ ) все більше наближається до власної частоти  $\omega_0$ ; якщо  $\beta \rightarrow 0$ , то  $(\omega_q)_{рез} \rightarrow \omega_0$ .

2. Оскільки

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C},$$

то резонансна крива  $U_{Cm}(\omega)$  аналогічна показаній на рис. 11.7.

3. Резонансна крива  $I_m(\omega)$  відображена на рис. 11.8. Як видно із формули (11.3.11), амплітуда сили струму має максимальне значення при  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ . Звідси маємо, що резонансна частота для сили струму співпадає з власною частотою коливань в контурі

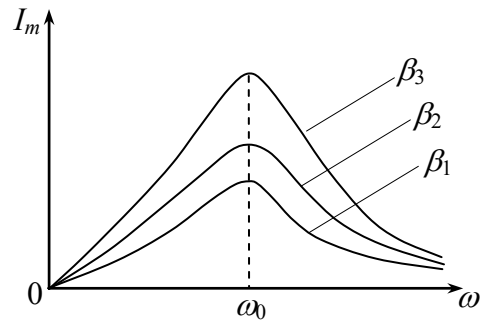


Рис. 11.8  $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$

$$(\omega_I)_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Максимум при резонансі тим вищий і гостріший, чим менший коефіцієнт згасання  $\beta$ .

Подібно до цього будуються резонансні криві для  $U_R$ ,  $U_L$  та знаходяться їх резонансні частоти. Для відповідних резонансних частот маємо:

$$(\omega_R)_{рез} = \omega_0,$$

$$(\omega_L)_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

4. Явище резонансу використовується, зокрема, для виділення із е.р.с., яка діє в контурі, і яка є сумою е.р.с. різних частот, —

<sup>1)</sup> Див. задачу № 7 у п. 11.6

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \mathcal{E}_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

складової потрібної частоти  $\omega_n$ . Якщо підібрати параметри  $L$  і  $C$  так, щоб власна частота  $\omega_0$  була близькою до цієї частоти  $\omega_n$ , то можна отримати на конденсаторі значну напругу; напруга, створювана іншими складовими буде малою. На цьому базується настроювання радіоприймача на потрібну довжину хвилі: зміною  $L$  або  $C$  підбирають таку частоту, щоб вона співпала з частотою електромагнітних хвиль, випромінюваних радіостанцією. Явище резонансу в колах змінного струму буде розглянуто далі (п. 11.6).

## 11.4 ЗМІННИЙ СТРУМ. ПРОСТІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

**11.4.1 Резистор у колі змінного струму. 11.4.2 Котушка індуктивності в колі змінного струму. 11.4.3 Конденсатор в колі змінного струму. 11.4.4 Послідовно з'єднані резистор, котушка індуктивності і конденсатор в колі змінного струму**

Електричні коливання, що встановилися у коливальному контурі під дією е.р.с. (11.3.1) можна розглядати як проходження струму у колі, яке містить  $RLC$ -ланцюжок, під дією напруги

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (11.4.1)$$

прикладеної до точок  $a$  і  $b$  (рис. 11.9). І, отже, результати, отримані при дослідженні вимушених електричних коливань, можна поширити і на електричні

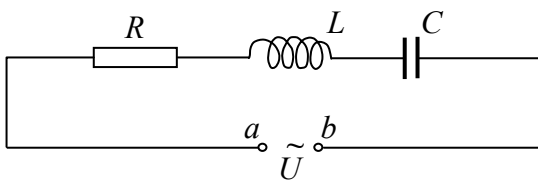


Рис. 11.9

ні кола змінного струму, якщо вважати, що і для них виконується умова стаціонарності; виконання умови стаціонарності дозволяє користуватися законом Ома і правилами Кірхгофа.

Перейдемо до розряду конкретних питань, пов'язаних з розрахунком електричних кіл, в яких діє змінна напруга, прикладена до  $RLC$ -ділянки (відіграє роль зовнішньої е.р.с.). Буде показано, зокрема, що сила змінного струму

$$I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

де  $\varphi$  — зсув фази між струмом і напругою.

### 11.4.1 Резистор у колі змінного струму

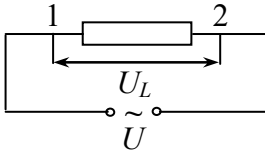


Рис. 11.12

Найпростіше електричне коло змінного струму — резистор, під'єднаний до джерела змінної напруги (рис. 11.12). Миттєве значення напруги  $U$  на резисторі (миттєве значення різниці потенціалів між точками 1 і 2) визначається за формулою (11.4.1).

За законом Ома для миттєвих значень сили струму і напруги маємо:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad (11.4.2)$$

де амплітуда сили струму

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (11.4.3)$$

Отже зміна в часі струму і напруги на резисторі відбувається у фазі (тут зсув фаз між струмом і напругою відсутній).

Наявність резистора (активного опору) зумовлює виділення теплоти за законом Джоуля-Ленца для змінного струму (див. п.11.5).

### 11.4.2 Котушка індуктивності в колі змінного струму

Знайдемо закон зміни в часі сили струму в колі і напруги на виводах котушки.

1. Оберемо додатний напрям обходу контура  $1LU1$ , як і напрям струму в контурі, за годинниковою стрілкою. Тоді за законом Ома (рис. 11.13)

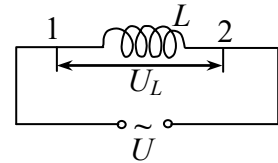


Рис. 11.13

$$IR = U_m \cos \omega t + \mathcal{E}_C,$$

де  $\mathcal{E}_C = -L \frac{dI}{dt}$  — е.р.с. самоіндукції. Якщо знехтувати активним опором котушки  $R$ , то

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t.$$

Після інтегрування, маємо:

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + const \Rightarrow I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t;$$

сталу інтегрування покладаємо рівною нулю, оскільки постійна складова струму відсутня. Отже,

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t \quad (11.4.4)$$

або

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

— амплітудне значення сили струму.

Позначимо

$$X_L = \omega L, \quad (11.4.5)$$

тоді

$$I_m = \frac{U_m}{X_L}. \quad (11.4.6)$$

$X_L$  називається *індуктивним опором* котушки.

2. Для ділянки кола з котушкою індуктивності маємо:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_C \Rightarrow 0 = U_L - L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt},$$

де  $U_L$  — напруга, прикладена до котушки ( $R=0$ ). Використання (11.4.4) приводить до виразу

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t \quad (11.4.7)$$

або

$$U_L = U_{Lm} \cos \omega t,$$

де  $U_{Lm} = \omega L I_m$ .

Порівняння виразів для  $I$  і  $U_L$  показує, що напруга на котушці випереджує по фазі струм на  $\pi/2$ .

3. Наявність індуктивного опору можна пояснити тим, що протидія зовнішній е.р.с. буде тим більшою, чим більша індуктивність котушки  $L$  і частота зміни напрямку струму, що проходить котушкою (у відповідності з ви-

разом для е.р.с. самоіндукції і правилом Ленца). У згоді з цим  $X_L = 0$ , якщо відсутня зміна сили струму (постійний струм).

### 11.4.3 Конденсатор в колі змінного струму

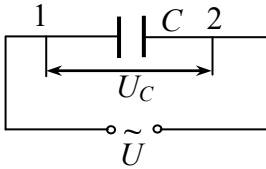


Рис. 11.14

Проведемо аналіз, подібний до попереднього, кола змінного струму з конденсатором (рис. 11.14).

1. Нехай в певний момент часу (процеси перезарядки конденсатора під впливом зовнішньої е.р.с.) ліва обкладка конденсатора має заряд  $q > 0$  і струм тече за годинниковою стрілкою ( $\varphi_1 > \varphi_2$ ). Оберемо додатний напрям обходу контура у цьому ж напрямку.

Закон Ома для ділянки кола  $2U1$  маємо

$$IR = \varphi_2 - \varphi_1 + U_m \cos \omega t.$$

Якщо  $R=0$ , то напруга, прикладена до обкладок конденсатора,

$$U_C = U_m \cos \omega t$$

( $U_C = \varphi_1 - \varphi_2$ ) змінюється у фазі із зміною зовнішньої напруги.

2. Оскільки

$$U_C = \frac{q}{C} \Rightarrow$$

$$q = CU_m \cos \omega t,$$

то сила струму, що проходить через конденсатор

$$I = \frac{dq}{dt}$$

де  $q$  — заряд, що надійшов на ліву обкладку конденсатора за час  $dt$  ( $dq > 0$ ).

Маємо:

$$I = -\omega CU_m \sin \omega t$$

або

$$I = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Позначимо



$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (11.4.8)$$

тоді

$$I_m = \frac{U_m}{X_C}. \quad (11.4.9)$$

$X_C$  називається *ємнісним опором* конденсатора.

Наявність ємнісного опору можна пояснити наступним: конденсатор в колі змінного струму чинить опірність проходженню заряду, оскільки на його обкладках накопичуються заряди, тому чим більша ємність  $C$ , тим більший заряд може надбати конденсатор і тим менша його протидія переміщенню заряду в колі. Разом з цим, чим коротший час накопичення заряду конденсатором, тим менший заряд встигає накопитися. І, отже, маємо обернено пропорційну залежність  $X_C$  від ємності  $C$  і кутової частоти  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ). При частоті  $\nu = 0$   $X_C \rightarrow \infty$  (у випадку джерела постійного струму). За відсутності в колі конденсатора у виразі для  $X_C$  потрібно покласти  $C \rightarrow \infty$  (а не  $C=0$ ). Це можна зрозуміти на основі зв'язку  $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ ; при заміні конденсатора закороченою ділянкою внаслідок зближення обкладок ( $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ )  $C \rightarrow \infty$ .

3. Порівняння виразів для сили струму  $I$  і напруги на конденсаторі  $U_C$  показує, що напруга відстає по фазі від сили струму на  $\pi/2$ .

#### 11.4.4 Послідовно з'єднані резистор, котушка індуктивності і конденсатор в колі змінного струму

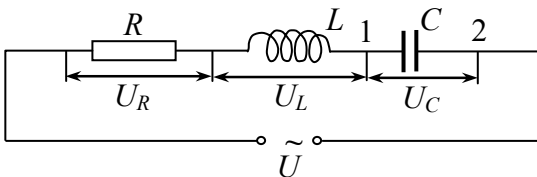


Рис. 11.15

Доповнимо попередній аналіз електричних кіл змінного струму наявністю послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -елементів (рис. 11.15.)

Зафіксуємо, що в певний момент часу ліва обкладка конденсатора має заряд  $q > 0$ , і  $dq > 0$  (струм тече за годинниковою стрілкою). Прийемо обхід контура  $2RL1$  за годинниковою стрілкою. За законом Ома маємо:

$$IR = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E}_i + U_m \cos \omega t \quad (11.4.10)$$

( $I > 0$ ), що відповідає рівнянню

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t, \quad (11.4.11)$$

отриманому за законом збереження енергії і дослідженому у п. 11.3. Його можна подати і у формі

$$U_R + U_L + U_C = U_m \cos \omega t.$$

І, отже, при дослідженні протікання змінного струму в колі, що містить  $RLC$ -ділянку, можна скористатися відповідними результатами (п. 11.3). У відповідності з цим струм, у колі, показаному на рис. 11.15, змінюється за законом

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

де амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11.4.12)$$

визначається амплітудою зовнішньої напруги  $U_m$  та параметрами кола і кутової частоти  $\omega$ . Струм відстає від напруги на кут  $\varphi$ , причому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (11.4.13)$$

Якщо  $\varphi < 0$ , то, насправді, струм випереджує напругу.

Вираз, що стоїть у знаменнику формули (11.4.12), —

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (11.4.14)$$

називається повним електричним опором або імпедансом. Різниця між індуктивним опором і ємнісним опором, —

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (11.4.15)$$

називається реактивним опором. Індуктивний опір зростає із збільшенням частоти  $\omega$ , ємнісний опір при цьому — зменшується. Якщо котушка індуктивності відсутня ( $L=0$ ), то  $X_L=0$ , якщо відсутній конденсатор ( $C \rightarrow \infty$ ), то  $X_C=0$ .

Зв'язок між максимальними значеннями  $U_m$  і  $I_m$  та  $Z$  носить назву *закона Ома для змінного струму*

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \tag{11.4.16}$$

який можна подати у формі (1.4.12).

Зазначимо, що хоча реактивний опір вимірюється в омах (як і активний опір), їх принципова відмінність та, що лише активний опір визначає такі процеси як, наприклад, перетворення електромагнітної енергії в теплоту, механічну роботу.

### 11.5 МЕТОД ВЕКТОРНИХ ДІАГРАМ

Зв'язок між відповідними амплітудними значеннями сили струму і напруги та зсув фаз між ними зручно зображати за допомогою методу векторних діаграм. Суть його зводиться до наступного<sup>1)</sup>. Відомо, що гармонічні коливання (або гармонічну функцію) можна задати за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливань, а напрям вектора складає з певною віссю кут, що дорівнює фазі коливань. У нашому випадку маємо коливання струму і напруги, що входять у закон Ома (11.4.11):

$$U_R + U_L + U_C = U_m \cos \omega t \Rightarrow$$

$$I_m R \cos(\omega t - \varphi) + U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \tag{11.5.1}$$

$$= U_m \cos \omega t.$$

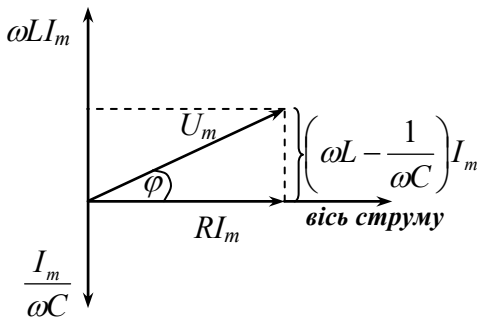


Рис. 11.16

Візьмемо за вісь, від якої відраховується початкова фаза, вісь струмів. У відповідності з цим в момент часу  $t=0$  вектор з модулем  $U_{Rm} = RI_m$  буде спрямований горизонтально, вектори з модулями  $U_{Lm} = \omega LI_m$  і

$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}$  будуть повернуті відносно горизонтальної осі відповідно на  $\pi/2$  і  $-\pi/2$ . Результуючий вектор ( $U_m$ ) буде повернутий відносно напрямку струму на кут  $\varphi$  (напруга  $U$  випе-

<sup>1)</sup> Див. також «Математичне доповнення», п. 7

реджує по фазі силу струму  $I$  на цей кут). Сума векторів  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  задає вектор  $U$ , що і відображає діаграма, показана на рис. 11.16. Тут амплітуди напруг на резисторі, котушці і конденсаторі є

$$U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Lm} = \omega LI_m, \quad U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C},$$

а їх векторна сума дорівнює вектору величини  $U_m$ .

Отримана векторна діаграма є корисною при розв'язанні багатьох конкретних задач завдяки своїй наочності і простоті. Так, зокрема, закон Ома для змінного струму (11.4.16) та вираз (11.4.13) отримується за теоремою Піфагора з трикутника на рис. 11.16.

**Приклад.** Послідовно з'єднані котушка (з активним опором  $R$  й індуктивністю  $L$ ) і конденсатор ємністю  $C$ , під'єднані до зовнішньої напруги з амплітудою  $U_m$  і кутовою частотою  $\omega$ . Струм у колі випереджує по фазі напругу. Побудуємо векторну діаграму і з її допомогою знайдемо амплітуду напруги на котушці  $(U_{RL})_m$ .

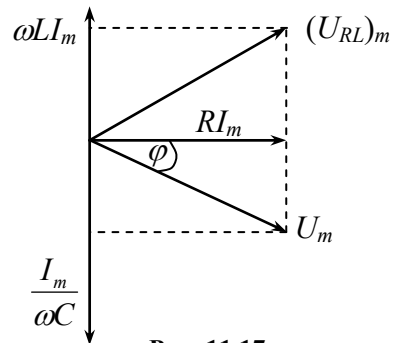


Рис. 11.17

→ Діаграму будемо у відповідності із викладеним вище. Тут струм, на відміну від діаграми, зображеної на рис. 11.16, випереджує по фазі напругу ( $\varphi < 0$ ), тому маємо діаграму, показану на рис. 11.17. Із діаграми видно, що

$$(U_{RL})_m = \sqrt{R^2 I_m^2 + (\omega LI_m)^2} = I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}.$$

### 11.6 РЕЗОНАНС НАПРУГ. РЕЗОНАНС СТРУМІВ

1. Із формули (11.4.12) для амплітудного значення сили струму в колі з послідовно з'єднаними резистором, котушкою індуктивності і конденсатором видно, що за умови

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (11.6.1)$$

маємо рівність індуктивного і ємнісного опорів. У цьому випадку зсув фаз  $\varphi$  між струмом і напругою дорівнює нулю (зміна в часі сили струму і зовнішньої напруги відбувається синфазно). Реактивний опір зникає, сила струму набуває максимального значення. При цьому спад напруги на активному опорі дорівнює зовнішній напрузі  $U$ , а напруга на  $LC$ -ділянці дорівнює нулю, бо, як видно із фазової діаграми (рис.11.16),

$$U = I\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}. \quad (11.6.2)$$

Це явище називається *резонансом напруг* (див. також п. 11.3.2), а частота, що визначається за формулою (11.6.1), — *резонансною частотою*

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Явище резонансу напруг використовується, зокрема, для виділення із багатьох сигналів, які функціонують в колі, коливання певної частоти (про це йшла мова в п. 11.3), його потрібно враховувати при розрахунку ізоляції електричних мереж, які містять конденсатори і котушки індуктивності.

З явищем резонансу напруг пов'язана і небезпека при контактуванні з контуром, який знаходиться під напругою: зовнішня напруга може бути мала, але на окремих елементах контура (котушка, конденсатор) напруга може набувати небезпечних для людини значень.

2. Розглянемо електричне коло змінного струму, в якому  $RLC$ -елементи з'єднані паралельно (рис. 11.18). У цьому випадку струм у нерозгалуженій ділянці кола

$$I = I_R + I_L + I_C,$$

а напруга на елементах кола ( $R, L, C$ ) є однаковою ( $U = U_m \cos \omega t$ ).

З векторної діаграми (рис. 11.19)

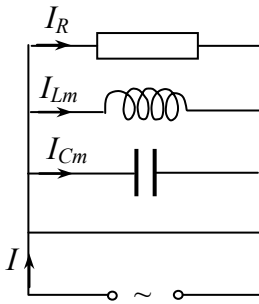


Рис. 11.18

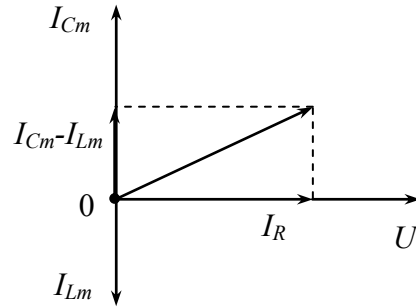


Рис. 11.19

для амплітудних значень сил струмів маємо:

$$I_m = \sqrt{(I_{Cm} - I_{Lm})^2 + I_R^2};$$

тут за опорну вісь вибрана вісь миттєвого значення напруги  $U$  і враховано, що струм на конденсаторі випереджує, а на котушці індуктивності відстає по фазі від напруги на  $\pi/2$ .

За законом Ома для електричного кола змінного струму  $U=IZ$ , звідки повний опір (*імпеданс*)

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + \frac{1}{R^2}}}.$$

Видно, що сила струму в нерозгалуженій ділянці кола досягає мінімального значення за умови

$$I_{Cm} = I_{Lm} \Rightarrow \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При збільшенні активного опору сила струму  $I$  зменшується, і якщо  $R \rightarrow \infty$ , то  $I \rightarrow 0$ . Проте струми (які протікають у протифазі) через котушку індуктивності і конденсатор можуть бути дуже великі. Це явище називається *резонансом струмів*.

Явище резонансу струмів використовується, зокрема, в індукційних печах (п. 9.5 Розділу 9); за рахунок цього сила струму через нагрівальну котушку може бути суттєво більшою, ніж сила струму в підведених дротах.

## 11.7 ПОТУЖНІСТЬ У КОЛІ ЗМІННОГО СТРУМУ

**11.7.1 Теплова дія змінного струму. Ефективні значення сили струму і напруги. 11.7.2 Потужність у колі змінного струму. Коефіцієнт потужності**

При проходженні змінного електричного струму  $I$  ділянкою кола з опором  $R$ , яка знаходиться під напругою  $U$  виділяється кількість теплоти

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \text{ Цьому відповідає потужність } N = IU.$$

Встановимо аналог цьому для електричного кола змінного струму.

### 11.7.1. Теплова дія змінного струму. Ефективні значення сили струму і напруги

1. Розглянемо електричне коло, показане на рис. 11.9. Оскільки в колі відсутні конденсатор і котушка індуктивності, то миттєві значення сили змінного струму і напруги на резисторі даються формулами

$$I = I_m \sin \omega t, \quad U = U_m \sin \omega t$$

або

$$I = I_m \cos \omega t, \quad U = U_m \cos \omega t$$

(зсув фаз  $\varphi$  між струмом і напругою  $\varphi = 0$ ).

Як і постійний, змінний струм проявляє теплову дію. За час  $dt$  на резисторі з опором  $R$  за законом Джоуля-Ленца виділяється теплота

$$dQ = I^2 R dt. \quad (11.7.1)$$

За час  $T$ , рівний періоду зміни сили струму, виділиться теплота

$$Q = I_m^2 R \int_0^T \cos^2 \omega t dt.$$

Оскільки

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

то

$$Q = \frac{I_m^2}{2} RT. \quad (11.7.2)$$

Подамо формулу (11.7.2) у вигляді

$$Q = I_{ef}^2 RT ; \quad (11.7.3)$$

величина

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (11.7.4)$$

— *ефективна* або *діюча сила змінного струму*.

2. Якщо ж в колі з опором  $R$  протікає *постійний струм*  $I_n$ , то за час  $T$  виділиться теплота

$$Q = I_n^2 RT \quad (11.7.5)$$

Із порівняння виразів (11.7.3) та (11.7.5) видно, що ефективному значенню *сили змінного струму* можна поставити у відповідність *силу постійного струму*, під час протікання якого на резисторі виділяється така сама кількість теплоти, як і у разі змінного струму.

Подібно означається і *ефективна* або *діюча напруга* у колі змінного струму

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} . \quad (11.7.6)$$

(із порівняння відповідних виразів для постійного і змінного струмів за формулою  $Q = \frac{U^2}{R} t$ ).

У побутовій електромережі  $U_{ef}=220$  В, амплітудне значення напруги  $U_m = 220 \cdot \sqrt{2}$  В  $\approx 310$  В.

Амперметри і вольтметри градуйовані за ефективними (діючими) значеннями. У діючих значеннях струму і напруги вказуються номінальні струми і напруги в паспортах електроприладів і пристроїв.

Кількість теплоти, що виділяється в колі за час рівний періоду

$$Q = I_{ef} \cdot U_{ef} \cdot t \quad (11.7.7)$$

•  $I_{ef}$  і  $U_{ef}$  означають як *середньоквадратичні величини* ( $I$ ,  $U$ ). Так, середньоквадратична сила струму

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt} = I_m \langle \cos^2 \omega t \rangle_T^{1/2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (11.7.8)$$



— корінь квадратний із середнього значення за період  $T$  суми квадратів миттєвих значень сили струму.

Аналогічний вираз означається і для середньоквадратичної напруги:

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt} = U_m \langle \cos^2 \omega t \rangle_T^{1/2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (11.7.9)$$

• Зазначимо, що *середні значення сили струму і напруги гармонічного змінного струму за період  $T$  дорівнюють нулю:*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t dt = 0. \quad (11.7.10)$$

• При вимірюванні змінних струмів використовується і їх випрямлення, коли в будь-який момент часу струм через гальванометр протікає лише в одному напрямку (рис. 9.22, в); від'ємна частина гармонічного струму «перекидається» в додатну. Цьому відповідає середнє значення сили струму за період

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m |\sin \omega t| dt \quad (11.7.11)$$

або

$$I_{cp} = \frac{2}{T} I_m \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,67I_m \quad (11.7.12)$$

(середнє значення сили струму за *півперіоду*).

Середнє значення напруги

$$U_{cp} = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0,67U_m. \quad (11.7.13)$$

• Із порівняння виразів для ефективних і середніх значень сили струму маємо:

$$I_{ef} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_{cp} \approx 1,1I_{cp}. \quad (11.7.14)$$

Подібний зв'язок отримується і для відповідних напруг.

### 11.7.2 Потужність у колі змінного струму. Коефіцієнт потужності

Теплоті  $Q$  за формулою (11.7.7) відповідає потужність змінного струму

$$N = I_{ef} \cdot U_{ef} \quad (11.7.15)$$

(в коло ввімкнений лише резистор, зсув фаз між струмом і напругою відсутній).

За наявності в електричному колі активного опору  $R$  і реактивного опору  $X$ , між струмом і напругою існує зсув фаз  $\varphi$  ( $0 < \varphi < 90^\circ$ ), який визначається із формули (11.4.13). У цьому разі середнє значення потужності за період визначається усередненням в часі виразу для миттєвого значення потужності наступним чином.

Миттєве значення потужності  $P(t)$  дорівнює добутку миттєвих значень напруги і сили струму:

$$N(t) = I(t)U(t),$$

де  $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ ,  $U(t) = U_m \cos \omega t$ . Після використання формули  $\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$  маємо:

$$N(t) = I_m U_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi).$$

У цьому виразі відповідні середні значення за період даються виразами:

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi}{T} t \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos \left( \frac{4\pi}{T} t \right)}{2} dt = \frac{1}{2},$$

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin \left( \frac{4\pi}{T} t \right) dt = 0$$

(використано, що  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ). Отже, середнє значення потужності за період

$$\langle N \rangle = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi \quad (11.5.16)$$

або

$$N = I_{ef} \cdot U_{ef} \cos \varphi, \quad (11.5.17)$$

де

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (11.5.18)$$

(можна отримати з рис. 11.16).

Отримані вирази для потужності, що виділяється в колі змінного струму, суттєво відрізняються від відповідної формули для постійного струму ( $N = I \cdot U$ ) наявністю множника, який залежить від зсуву фаз між струмом та напругою. Множник  $\cos \varphi$  називається *коефіцієнтом потужності*.

Якщо в колі відсутній реактивний опір ( $X=0$ ), то  $\cos \varphi=1$ , отже  $\langle N \rangle = U_{ef} I_{ef}$ . Якщо ж в колі діє лише реактивний опір ( $R=0$ ), то  $\cos \varphi=0$ , і середня потужність дорівнює нулю незалежно від величин сили струму і напруги.

Залежність потужності від  $\cos \varphi$  враховують при проектуванні ліній електропередач. При цьому намагаються так розподілити навантаження ( $R$ ), індуктивності ( $L$ ) і ємності ( $C$ ), щоб  $\cos \varphi$  був якомога ближчим до одиниці. Це досягається зменшенням реактивного опору  $X$ ;  $X=0$ , якщо рівні індуктивний ( $X_L$ ) і ємнісний ( $X_C$ ) опори. При малій величині  $\cos \varphi$  для виділення в електричному колі заданої потужності потрібно збільшувати силу струму (що призводить до втрат в провідниках через додаткове виділення джоулевої теплоти) або збільшувати поперечний переріз провідників (що є також небажаним).

## 11.8 ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ. ВІДПОВІДІ

### 11.8.1 Запитання і задачі

1. У коливальному контурі відбуваються вільні незгасаючі коливання. Повна енергія коливань  $W_1$ . Пластини конденсатора розсунули так, що частота коливань збільшилася в  $k$  разів. Яка робота виконана при цьому?

2. Вивести формулу Томсона.

3. Показати, що середні (за період) енергії електричних та магнітних полів у коливальному контурі даються виразами

$$\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle = \frac{1}{4} C U_m^2 = \frac{1}{4} L I_m^2.$$

4. Запишіть закон Ома для неоднорідної ділянки коливального контура  $1L2$  (рис. 11.18) на стадії зарядки конденсатора. Отримайте, як наслідок, рівняння вільних незгасаючих коливань (11.1.5).

5. Виконати завдання попередньої задачі для стадії розрядки конденсатора у коливальному контурі.

6. Як зміниться частота вільних незгасаючих коливань у коливальному контурі, якщо: 1) збільшити віддаль  $d$  між пластинами плоского конденсатора? 2) ввести у котушку залізне осердя?

7. Знайти резонансну частоту для коливань заряду  $q$  при вимушених коливаннях у колі з послідовно з'єднаними резистором, котушкою індуктивності і конденсатором (вивести формулу).

8. Знайти струм зміщення у проміжку між пластинами повітряного конденсатора, які мають форму дисків радіусом  $r$ , при вільних незгасаючих коливаннях. Віддаль між пластинами конденсатора  $d$ . Амплітудне значення напруги  $U_m$ , кутова частота власних коливань  $\omega_0$ .

9. Потрібно отримати із загальної формули для електричного опору  $Z$  (імпедансу)  $RLC$ -ділянки вираз, для випадку, коли немає конденсатора в колі. Здавалося б, на перший погляд, у формулі (11.4.14) для  $Z$  потрібно покласти  $C=0$ . Насправді ж, правильна формула отримується за умови  $C \rightarrow \infty$ . Прокоментуйте сказане.

10. Послідовно сполучені резистор і конденсатор під'єднані до зовнішньої змінної напруги з амплітудою  $U_m$ . Амплітудне значення сили струму  $I_m$ . Знайти різницю фаз між струмом і зовнішньою напругою.

11. Для зменшення теплових втрат у лініях електропередач підвищують напругу  $U$ , а лінії будують з якомога меншим опором. Це, на перший погляд, не узгоджується з формулою для теплових втрат  $Q = \frac{U^2}{R} t$ . В чому тут справа?

12. Доведіть, що втрати електроенергії у лініях електропередач обернено пропорційні квадрату напруги, під якою передають електроенергію.

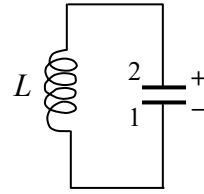


Рис. 11.18

13. У колі, що складаються із послідовно з'єднаних резистора і котушки індуктивності, амплітуда зовнішньої змінної напруги залишається сталою, а частота змінюється. Знайти залежність від частоти сили струму, зсуву фаз між напругою і струмом та споживану потужність.

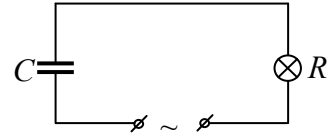


Рис. 11.19

14. Чим пояснити «гудіння» трансформатора?

15. Лампа і конденсатор ввімкнені послідовно в мережу змінного струму (рис. 11.19). Як зміниться розжарення лампи, якщо ввімкнути ще один конденсатор, паралельний до даного.

16. На ділянці кола, яка складається з послідовно сполучених резистора (опір  $R$ ) і котушки (індуктивність  $L$ ) струм змінюється за законом  $I = (a + bt)$  А. Знайти різницю потенціалів між точками 1 і 2 (рис. 11.20).

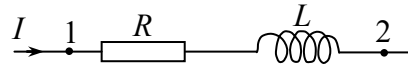


Рис. 11.20

17. Два конденсатори, ємності яких  $C_1$  і  $C_2$ , ввімкнені послідовно в коло змінного струму з напругою  $U$  і частотою  $\nu$ . Знайти силу струму в колі і напругу на кожному конденсаторі.

18. В освітлювальну мережу ввімкнули лампочку для кишенькового ліхтаря, послідовно з'єднану з конденсатором (рис. 11.21). Яка повинна бути ємність конденсатора, щоб лампочка горіла нормальним розжаренням? Лампочка розрахована на напругу 3,5 В і струм 0,25 А.

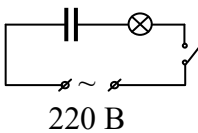


Рис. 11.21

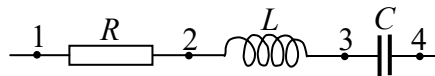


Рис. 11.22

19. У колі (рис. 11.22) протікає змінний струм. Задані ефективні напруги:  $U_{12}$ ,  $U_{23}$  і  $U_{34}$ . Знайти ефективну напругу на ділянці 14.

## 11.8.2 Відповіді

1. Робота  $A$  виконується проти електростатичних сил притягання між пластинами конденсатора

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q_m^2}{2C_2} - \frac{q_m^2}{2C_1} = \frac{q_m^2}{2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{q_m^2}{2C_1} \left( \frac{C_1}{C_2} - 1 \right) = W_1 \left( \frac{C_1}{C_2} - 1 \right).$$

Оскільки

$$\omega_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{LC_1}}, \quad \omega_0^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{LC_2}},$$

то

$$k = \frac{\omega_0^{(2)}}{\omega_0^{(1)}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}},$$

отже

$$A = (k^2 - 1)W_1.$$

2. Період коливань  $T$  — найкоротший проміжок часу, через який  $q$  набуває попереднього значення. Отже,

$$q_m \cos \omega_0 t = q_m \cos \omega_0 (t + T) = q_m \cos(\omega_0 t + \omega_0 T) \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

3. Знайдемо середні значення  $\sin^2 \omega t$  і  $\cos^2 \omega t$  за період.

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2},$$

оскільки  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , то

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2}.$$

Підстановка цих середніх у формули (11.1.14) і (11.1.15) і приводить до формул, наведених в умові задачі.

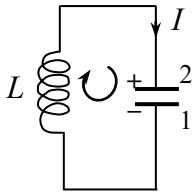


Рис. 11.23

4. Запишемо закон Ома для неоднорідної ділянки кола 1L2 (неоднорідної, бо наявна е.р.с. самоіндукції). Виберемо напрям обходу контура за годинниковою стрілкою. Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} > 0;$$

напряг струму і напряг обходу контура співпадають.

У згоді із сказаним, закон Ома для ділянки кола 1L2 матиме вигляд

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \Rightarrow$$

$$0 = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt},$$

бо  $R=0$ . Тому

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L \frac{d}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{*}$$

5. Напряг струму і напряг обходу контура показані на рис. 11.24. Сила струму при розрядці конденсатора ( $\frac{dq}{dt} < 0$ ) додатна, якщо записати

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Закон Ома для ділянки 1L2 є

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \Rightarrow 0 = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt}.$$

Оскільки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{dq}{dt} \right) = -\frac{d^2q}{dt^2},$$

то

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \Rightarrow$$

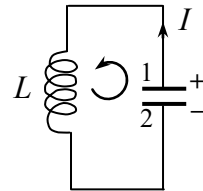


Рис. 11.24

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (**)$$

6. Частота вільних незгасаючих коливань

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}.$$

У першому випадку  $C$  зменшиться ( $C \sim \frac{1}{d}$ ); частота збільшиться. У другому випадку  $L$  збільшиться ( $L \sim \mu$ , де  $\mu$  — магнітна проникність осердя); частота зменшиться.

7. Умова максимуму функції

$$q_m = \frac{\frac{\mathcal{E}_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

є умовою мінімуму функції

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2,$$

отже

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow -4\omega_0^2 \omega + 4\omega^3 + 8\beta^2 \omega = 0 \Rightarrow -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 = 0,$$

звідки

$$\omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

8. Сила струму зміщення

$$I_{зм} = j_{зм} \cdot \pi r^2,$$

де густина струму зміщення

$$j_{зм} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{U}{d} \right)$$

( $U$  — напруга між пластинами конденсатора). Оскільки при вільних незгасаючих коливаннях

$$U = U_m \cos \omega_0 t,$$

то

$$j_{зм} = \frac{-\varepsilon_0 U_m \omega_0 \sin \omega_0 t}{d},$$

і



$$I_{зм} = -\frac{\epsilon_0 \pi r^2 \omega_0 U_m}{d} \sin \omega_0 t .$$

9. Наявність конденсатора в електричному колі проявляється в тому, що при проходженні струму на конденсаторі виникає напруга  $U = \frac{q}{C}$ . Якщо замість конденсатора є провідник, то при довільному заряді  $q$ , який проходить дану ділянку  $U=0$ , що відповідає  $C = \frac{q}{U} \rightarrow \infty$ .

10.  $U = U_m \cos \omega t$ ,  $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ , де  $\varphi$  визначається із формули (11.4.13), в якій покладаємо  $L=0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC} .$$

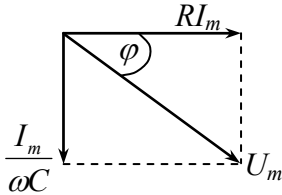


Рис. 11.25

Ємність  $C$  знаходиться із закону Ома для даного випадку:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \Rightarrow C = \frac{1}{R\omega} \left( \sqrt{\left(\frac{U_m}{RI_m}\right)^2 - 1} \right)^{-1}$$

Оскільки  $\varphi < 0$ , то струм випереджує по фазі зовнішню напругу. Отриманий результат відображений на рис. 11.25.

11. У формулі  $Q = \frac{U^2}{R} t$  під  $U$  потрібно розуміти спад напруги на лінії, а не напругу, під якою струм поступає в лінію. Оскільки  $U = IR$ , то кількість тепла, що виділяється на лінії  $Q = I^2 R t$ ; цим усувається непорозуміння.

12. Оскільки потужність струму в лінії  $P = UI$ , то

$$Q = I^2 R t = \frac{P^2 R t}{U^2} .$$

За конкретних умов  $P, R, t$  – сталі, тому  $Q \sim \frac{1}{U^2}$ .

13. Сила струму в колі з котушкою індуктивності

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi) ,$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{Z} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Із цих виразів видно, що з ростом частоти зростає відставання по фазі сили струму від напруги. Сила струму зменшується із зростанням частоти.

Середня потужність також зменшується, бо із зростанням частоти коефіцієнт потужності

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

зменшується.

14. Гудіння трансформаторів та інших приладів, які містять котушки, по яких тече змінний струм, пояснюється, в основному, двома причинами – вібрацією слабо закріплених витків і залізних пластин, з яких складається феромагнітне осердя котушки, а також явищем магнітострикції (змінною лінійних розмірів осердя при перемагнічуванні). Частота звуку – 100 Гц (вдвічі більша від частоти коливань сили струму).

15. Опір кола, показаного на рисунку,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Якщо ввімкнено додатковий конденсатор, паралельно до даного, то реактивний опір зменшиться, бо  $C \rightarrow C + C_{\text{дод}}$ , де  $C_{\text{дод}}$  — ємність додаткового конденсатора, тому ефективне значення струму зросте, отже лампа горітиме яскравіше.

16. За законом Ома для неоднорідної ділянки кола маємо

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_C = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR + L \frac{dI}{dt} = IR + bL.$$

17. Загальна ємність конденсаторів

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Реактивний опір ділянки

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{C_1 + C_2}{2\pi\nu C_1 C_2}.$$

За законом Ома для змінного струму

$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{2\pi\nu U C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Напруга на першому конденсаторі

$$U_1 = IR_{C_1} = I \frac{1}{\omega C_1} = \frac{2\pi\nu U C_1 C_2}{2\pi\nu C_1 (C_1 + C_2)} = \frac{U C_2}{C_1 + C_2};$$

напруга на другому конденсаторі

$$U_2 = \frac{U C_1}{C_1 + C_2};$$

$U_1 + U_2 = U$ , як і слід було очікувати.

18. Опір лампочки

$$R = \frac{3,5 \text{ В}}{0,25 \text{ А}} = 14 \text{ Ом.}$$

Реактивний опір  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ , повний опір  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ , тому

$$I_{e\phi} = \frac{U_{e\phi}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

де  $U_{e\phi} = 220 \text{ В}$ ,  $I_{e\phi} = 0,25 \text{ А}$ ,  $\omega = 2\pi\nu$  ( $\nu = 50 \text{ Гц}$ ). Звідси

$$C = \frac{1}{2\pi\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{U_{e\phi}}{I_{e\phi}}\right)^2 - R^2}} \approx 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 3,6 \text{ мкФ.}$$

19. Шукана напруга

$$\begin{aligned} U_{14} &= I_{e\phi} Z = I_{e\phi} \sqrt{R_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{(I_{e\phi} R_0)^2 + \left(I_{e\phi} \omega L - \frac{I_{e\phi}}{\omega C}\right)^2} = \\ &= \sqrt{U_{12}^2 + (U_{23} - U_{34})^2}. \end{aligned}$$

## МАТЕМАТИЧНЕ ДОПОВНЕННЯ

### 1 СКАЛЯРНІ І ВЕКТОРНІ ПОЛЯ. ПОТЕНЦІАЛЬНЕ ПОЛЕ

Скалярним полем називається область простору, кожній точці  $P$  якого поставлений у відповідність певний скаляр. Оскільки точка поля визначається радіусом-вектором  $\vec{R}$ , то задання скалярного поля еквівалентне заданню функції  $\varphi(\vec{R}) = \varphi(x, y, z) = \varphi(P)$ . Функція  $\varphi(\vec{R})$  може залежати і від часу. Скалярним полем,  $\epsilon$ , наприклад, температурне поле нерівномірно нагрітого тіла. Електростатичне поле (як і гравітаційне поле) — скалярне поле — задається потенціалом  $\varphi(x, y, z)$ .

Подібно до цього векторне поле — область простору, кожній точці якого поставлено у відповідність певне значення і напрям деякого вектора  $\vec{A}(\vec{R})$  з початком у цій точці. У такий спосіб задається, наприклад, поле напруженості електростатичного поля, задане вектором  $\vec{E}(\vec{R}) = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z$ <sup>1)</sup>, де  $E_x, E_y, E_z$  — проекції вектора  $\vec{E}(\vec{R})$  на декартові координатні осі.

Поле називається потенціальним, якщо при переміщенні тіла по довільному замкнутому шляху робота сил поля дорівнює нулю. Електростатичне поле  $\epsilon$  потенціальним полем.

Між скалярним і векторним описом електростатичного поля існує зв'язок. Частинні похідні  $\varphi(x, y, z)$ , взяті в певній точці  $(\vec{R}_0)$  визначають проекції вектора  $\vec{E}(\vec{R}_0)$  на координатні осі:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

(диференціальна форма зв'язку) або  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , де  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  — різниця потенціалів між двома точками поля (інтегральна форма взаємозв'язку між скалярним і векторним описом електростатичного поля).

---

<sup>1)</sup> Виклад у цьому і наступних параграфах дається у взаємозв'язку із матеріалами п. 1.4 першого розділу

Електростатичне поле можна зображати графічно: при скалярному описі — еквіпотенціальними поверхнями, при векторному — лініями напруженості (розділ перший, п. 1.4).

## 2 ПОХІДНА СКАЛЯРА ПО НАПРЯМКУ. ГРАДІЄНТ

Нехай ми маємо сукупність точок в електростатичному полі, в яких  $\varphi$  має однакове значення:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}. \quad (2.1)$$

Сукупність точок, які задовільняють цій умові, утворює поверхню, яка називається *еквіпотенціальною поверхнею* (поверхнею однакового потенціалу).

На рис. 1 зображений переріз площиною рисунка ряду поверхонь, які

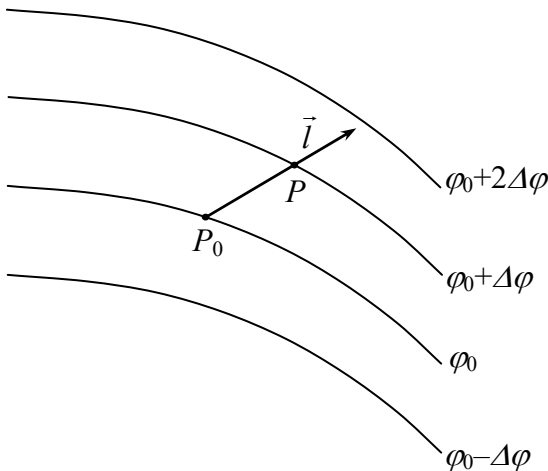


Рис. 1

відповідають значенням скаляра (потенціалу)  $\varphi$ , які дорівнюють  $\varphi_0, \varphi_0 \pm \Delta\varphi, \varphi_0 \pm 2\Delta\varphi$  і т.д.

Нехай потенціал має значення  $\varphi_0$  у точці  $P_0$ . При переміщенні  $\Delta\vec{l}$  ми переходимо у точку  $P$ ; приріст потенціалу при цьому становить  $\Delta\varphi$ . Границя відношення  $\Delta\varphi$  до числового значення переміщення  $\Delta l$  називається *похідною* скаляра  $\varphi$  у точці  $P_0$  по напрямку  $\vec{l}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}. \quad (2.2)$$

Цю похідну можна розуміти як *швидкість зміни потенціалу  $\varphi$  у напрямку  $\vec{l}$* . Частинна похідна береться тому, що визначається швидкість зміни у певному напрямку (одному із множини можливих). Значення похідної суттєво залежить від напрямку  $\vec{l}$ ; цим похідна по напрямку суттєво відрізняється від звичайної похідної по скалярному параметру.

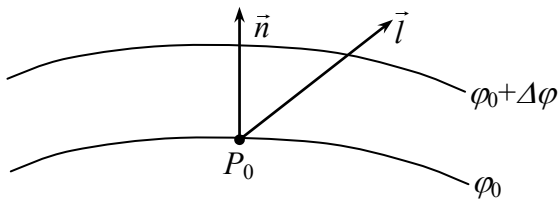


Рис. 2

Позначимо через  $\vec{n}$  нормаль до поверхні  $\varphi_0 = \text{const}$ , спрямовану у напрямку зростання  $\varphi$  (рис. 2). Знання похідної  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  дозволяє знайти значення похідної від  $\varphi$  по довільному напрямку  $\vec{l}$ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{l}, \vec{n}). \quad (2.3)$$

Вектор, чисельно рівний  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  і спрямований по нормалі до еквіпотенціальної поверхні у бік зростання  $\varphi$ , носить назву градієнта скаляра  $\varphi$  (градієнта потенціалу  $\varphi$ ):

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}. \quad (2.4)$$

Із врахуванням (2.4) вираз (2.3) може бути записаний і так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = |\text{grad}\varphi| \cdot \cos(\vec{l}, \vec{n}) = \text{grad}_l\varphi. \quad (2.5)$$

Отже, похідна  $\varphi$  по напрямку  $\vec{l}$  дорівнює проекції вектора градієнта  $\varphi$  на напрям  $\vec{l}$ .

Із формули (2.2) видно, що напрям вектора  $\vec{n}$  (напрям вектора градієнта) є напрям найшвидшого зростання  $\varphi$  (це видно і з рис. 2).

Якщо ввести систему декартових координат, то проекції вектора  $\text{grad}\varphi$  на осі  $x, y, z$  будуть визначатися похідними  $\varphi$  по напрямках  $x, y, z$ :

$$\text{grad}_x\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Оскільки

$$\text{grad}\varphi = \vec{i}\text{grad}_x\varphi + \vec{j}\text{grad}_y\varphi + \vec{k}\text{grad}_z\varphi$$

( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — відповідні орти вздовж осей  $x, y, z$ ), то

$$\text{grad}\varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Модуль вектора градієнта

$$|\mathit{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Відзначимо, що часто використовують наближену формулу для градієнта скалярного поля —

$$\mathit{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n} \Rightarrow \mathit{grad}\varphi \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\vec{n},$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  — скінченний приріст потенціалу  $\varphi$  при переміщенні у напрямку  $\vec{n}$  на відстань  $d$ . При цьому

$$|\mathit{grad}\varphi| = \frac{\Delta\varphi}{d}.$$

### 3 ПОТІК ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНЮ. ДИВЕРГЕНЦІЯ ВЕКТОРА

Важливим при описі векторних полів (зокрема, електричного і магнітного полів) є поняття *потіку вектора через поверхню*.

З'ясуємо це поняття спочатку на прикладі *однорідного поля*. У цьому випадку значення вектора  $\vec{A}$  є одне і те саме, як за величиною, так і за напрямом у всіх точках поверхні  $S$ . Таким, наприклад, є електричне поле, створене рівномірно зарядженою безмежною площиною (п. 1.3 першого розділу).

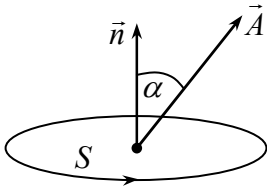


Рис. 3

Виділимо в полі вектора  $\vec{A}$  площадку у вигляді круга з площею  $S$ . Проведемо нормаль до цієї площадки і будемо вважати один напрям нормалі  $\vec{n}$  *додатнім* (або *зовнішнім*), а протилежний — *від'ємним* (або *внутрішнім*). Задамо напрям обходу контура, що охоплює площадку — за годинниковою стрілкою або проти. Тоді напрям додатньої

нормалі визначиться за правилом правого свердлика (правого гвинта): при обертанні ручки свердлика у напрямку обходу контура вістря свердлика переміщатиметься у напрямку додатньої нормалі  $\vec{n}$  (рис. 3). У відповідності з цим при заданому напрямку  $\vec{n}$  обирається додатній напрям обходу контура. Кажуть, що у цьому випадку напрям додатньої нормалі і напрям обходу контура складають *правогвинтову систему*. У протилежному випадку мова йде про *лівогвинтову систему* (зв'язок між напрямом  $\vec{n}$  і обходом контура задає

рух *лівого гвинта*). Напрямок нормалі характеризується одиничним вектором  $\vec{n}$  ( $|\vec{n}| = 1$ ).

Потоком вектора  $\vec{A}$  через площадку  $S$  у розглянутому випадку буде величина

$$N = \vec{A}\vec{S} = AS\vec{n} = AS \cos \alpha = A_n S, \quad (3.1)$$

де  $A$  — модуль вектора  $\vec{A}$ ,  $\alpha$  — кут між вектором  $\vec{A}$  і вектором  $\vec{n}$ ,  $A_n$  — складова (проекція) вектора  $\vec{A}$  на напрям  $\vec{n}$ . Плоска поверхня  $S$ , зрозуміло, може мати різну форму.

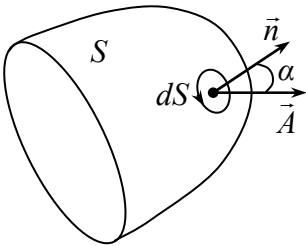


Рис. 4

• Розглянемо тепер загальний випадок: вектор  $\vec{A}$  має різні значення, як за величиною, так і за напрямом, у різних точках поверхні  $S$  (довільної форми). Потік вектора через поверхню  $S$  визначається наступним чином. Розіб'ємо поверхню  $S$  на такі безмежно малі площадки  $dS$ , щоб їх можна було вважати плоскими, а вектор  $\vec{A}$  вважати сталою (для даної площадки) величиною (рис. 4).

Потоком вектора  $\vec{A}$  через безмежно малу площадку буде величина

$$dN = \vec{A}d\vec{S} = AdS\vec{n} = AdS \cos \alpha = A_n dS. \quad (3.2)$$

Потік вектора  $\vec{A}$  через поверхню  $S$  визначиться як алгебраїчна сума елементарних потоків через окремі елементи цієї поверхні. Це сумування зводиться до знаходження означеного інтеграла

$$N = \iint_S A_n dS; \quad (3.3)$$

тут подвійний інтеграл означає інтегрування по поверхні  $S$ . Для спрощення запису двократні інтеграли замінюються одним —

$$N = \int_S A_n dS, \quad (3.4)$$

де знак  $S$  під інтегралом означає інтегрування по поверхні.

• Якщо поверхня замкнута, то потік вектора через замкнуту поверхню позначається так:



$$N = \oint_S A_n dS. \quad (3.5)$$

Для вихрових векторних полів цей інтеграл дорівнює нулю (як, наприклад, у випадку магнітного поля, під вектором  $\vec{A}$  потрібно розуміти вектор магнітної індукції  $\vec{B}$ ). Для потенціальних полів інтеграл (3.5) визначається через характеристики джерел цього поля, охоплених поверхнею  $S$ ; в електростатиці суть цього виражає теорема Гауса (п. 1.3 першого розділу).

• Нехай потік через замкнуту поверхню  $S \in N$ , а об'єм, охоплений цією поверхнею —  $V$ . Величина, яка визначається виразом

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{N}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{S}}{V}$$

називають дивергенцією вектора  $\vec{A}$ :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{A} d\vec{S}. \quad (3.6)$$

Із визначення (3.6) дивергенція є скалярною функцією координат. У векторному аналізі доводиться, що

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3.7)$$

#### 4 ЦИРКУЛЯЦІЯ ВЕКТОРА

Якщо тіло переміщається із точки 1 у точку 2 під дією сили  $\vec{F}$ , то робота, виконана цією силою

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F_l dl, \quad (4.1)$$

де  $d\vec{l}$  — елементарне переміщення,  $F_l$  — проекція сили на напрям переміщення. Якщо тіло, переміщуючись, повертається у вихідну точку, то ця робота позначається так:

$$A = \oint_L F_l dl, \quad (4.2)$$

де  $L$  означає контур, вздовж якого діє сила  $\vec{F}$ .

У загальному випадку, незалежно від змісту вектора  $\vec{A}$ ,

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \oint_L A_l dl \quad (4.3)$$

називається *циркуляцією* вектора  $\vec{A}$  вздовж замкнутого контура  $L$ .

В електростатиці важливий зміст має *циркуляція вектора напруженості електростатичного поля*. Виявляється, що

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (4.4)$$

Цим означається потенціальність електростатичного поля.

В протилежність до цього циркуляція вектора напруженості *вихрового електричного поля* і циркуляція вектора напруженості магнітного поля не дорівнюють нулю (вихровий характер цих полів).

## 5 ОПЕРАТОР НАБЛА

Написання багатьох формул векторного аналізу спрощується, якщо ввести векторний диференціальний оператор *набла* або оператор Гамільтона. Він позначається символом  $\nabla$ ;

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.1)$$

Вектор *набла* набуває змісту лише при його дії на скалярну або векторну функцію.

При множенні вектора  $\nabla$  на скаляр  $\varphi$  отримується вектор

$$\nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (5.2)$$

що співпадає з градієнтом функції  $\varphi$  (див. п. 2). Отже,

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi. \quad (5.3)$$

При множенні вектора  $\nabla$  скалярно на вектор  $\vec{A}$  отримується скаляр:

$$\nabla \vec{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (5.4)$$

Порівняння правої сторони останнього виразу з формулою (3.7) дає

$$\nabla \vec{A} = \text{div} \vec{A}. \quad (5.5)$$

Векторний добуток  $[\nabla \vec{A}]$  можна записати у вигляді визначника

$$[\nabla\vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Цей векторний добуток позначається ще і так:

$$[\nabla\vec{A}] \equiv \text{rot}\vec{A}. \quad (5.7)$$

Вектор  $\text{rot}\vec{A}$  називається *ротором* (вихором) вектора  $\vec{A}$ .

Розкриваючи визначник отримуємо, що ротор  $A$  є наступний вектор –

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

## 6 ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСЬКОГО-ГАУССА. ТЕОРЕМА СТОКСА

1. Теорема Остроградського-Гауса дозволяє звести потік вектора  $\vec{A}$  через замкнену поверхню  $S$  до інтегралу від дивергенції вектора  $A$  по об'єму  $V$ , який обмежується цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{A} dV, \quad (6.1)$$

або, використовуючи оператор набла,

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{A} dV. \quad (6.2)$$

2. За теоремою Стокса циркуляція вектора  $\vec{A}$  по довільному контуру  $L$  дорівнює потоку вектора  $\text{rot}\vec{A}$  через довільну поверхню  $S$ , яка обмежена цим контуром:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{A} dS, \quad (6.3)$$

або

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S [\nabla\vec{A}] dS. \quad (6.4)$$

Обидві теореми знаходять широке застосування. Зокрема, за їх допомогою дається формулювання основних рівнянь електродинаміки — рівнянь Максвелла — в диференціальній формі.

## 7 ГРАФІЧНИЙ МЕТОД ЗОБРАЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ. ВЕКТОРНА ДІАГРАМА

Суть графічного методу зображення гармонічних коливань, який знаходить широке застосування, полягає в наступному.

Нехай маємо величину  $x$ , залежну від часу за законом

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (7.1)$$

де  $A$  — амплітуда величини  $x$ ,  $(\omega t + \varphi)$  — фаза коливання,  $\omega$  — кутова (циклічна) частота,  $\varphi$  — початкова фаза коливань. Розглянемо момент часу  $t=0$ ; тоді  $x = A \cos \varphi$ . Величину  $A \cos \varphi$  можна розглядати як проекцію на горизонтальну вісь радіус-вектора, що має довжину  $A$  і утворює з віссю кут  $\varphi$  (рис. 5). Якщо тепер вектор  $\vec{A}$

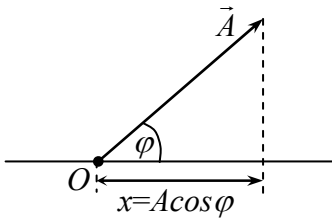


Рис. 5

обертатиметься навколо точки  $O$  із кутовою швидкістю  $\omega$  проти годинникової стрілки, то кут, який утворюватиме вектор  $A$  з віссю, буде  $(\omega t + \varphi)$ . Отже, проекція вектора  $A$  на обрану вісь (в довільний момент часу) буде відповідати формулі (7.1). Рисунок, який дозволяє розглядати гармонічне коливання геометрично, називається *векторною діаграмою*.

Використання векторної діаграми зручне при вивченні накладання (додавання) коливань, які відбуваються з однаковою частотою, але фази цих коливань зсунуті одна відносно одної. Наприклад, додаються два коливання

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ і } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (7.2)$$

Потрібно знайти  $x = x_1 + x_2$ . У відповідності із сказаним вище будемо векторну діаграму, яка відображає обидва коливання (рис. 6). Шукана величина  $x$  є сумою проекцій векторів  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$ . З другого боку,  $x$  має дорівнювати проекції вектора  $\vec{A}$ , рівного сумі векторів  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$ . Звідси маємо (в момент часу  $t=0$ )

$$x_0 = A \cos \varphi, \quad (7.3)$$

де  $\varphi$  — кут між вектором  $\vec{A}$  і обраною віссю. Векторна діаграма (рис. 6) і формула (7.3) відображають коливання в момент часу  $t=0$ . У довільний мо-

мент часу  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \omega t$ ,  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_2 + \omega t$  і  $\varphi \rightarrow \varphi + \omega t$ . Отже, в довільний момент часу результуюче коливання задається формулою

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.4)$$

$A$  і  $\varphi$  знаходяться із виразів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(теорема косинусів),

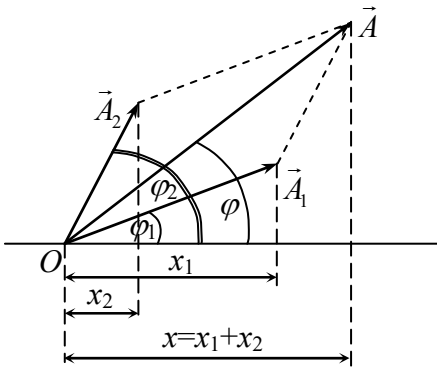


Рис. 6

Значення  $x, x_1, x_2$  взяті в момент часу  $t=0$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

(проекції вектора  $\vec{A}$  на дві взаємно перпендикулярні осі дорівнює сумі проєкцій складових векторів на ці осі).

Нехай тепер потрібно додати три коливання. Тоді будується результуючий вектор  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$ ; відповідним чином знаходиться  $|\vec{A}|$  і початкова фаза коливань  $\varphi$  (через  $\operatorname{tg} \varphi$ ).

Метод векторних діаграм виявляється особливо корисним і зручним при дослідженні змінних струмів.

## ДОДАТКИ

## Д1. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ТА ПОХІДНІ ФІЗИЧНІ СТАЛІ

Фізична величина	Позначення	Значення
Заряд електрона	$e$	$1,6021773349 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	$m_e$	$9,109389754 \cdot 10^{-31}$ кг
Питомий заряд електрона	$\frac{e}{m_e}$	$-1,758820150(44) \cdot 10^{11}$ Кл·кг <sup>-1</sup>
Класичний радіус електрона	$r_e = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e}$	$2,81 \cdot 10^{-15}$ м
Маса спокою протона	$m_p$	$1,672623110 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса спокою нейтрона	$m_n$	$1,674928610 \cdot 10^{-27}$ кг
Магнітна проникність вакууму (магнітна стала)	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Діелектрична проникність вакууму (електрична стала)	$\epsilon_0$	$8,854187817 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Швидкість світла	$c$	$2,99792458 \cdot 10^8$ м/с
Гравітаційна стала	$G$	$6,6725985 \cdot 10^{-11}$ Н·м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Стала Планка	$h$	$6,626075540 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Квант опору (стала Клітцінга)	$R_K = h/e^2$	$25812,807557(18)$ Ом
Магнетон Бора	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$927,400915(23) \cdot 10^{-26}$ Дж·Тл <sup>-1</sup>
Стала тонкої структури	$\alpha$	$1/137,03599968(9)$
Стала Больцмана	$k$	$1,38065812 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стала Фарадея	$F$	$96485,3399(24)$ Кл·моль <sup>-1</sup>
Число Авогадро	$N_A$	$6,022136736 \cdot 10^{23}$ 1/моль
Універсальна газова стала	$R$	$8,31451070$ Дж/(моль·К)
Прискорення вільного падіння	$g$	$9,80665$ м/с <sup>2</sup>

## Д2. ОСНОВНІ ТА ПОХІДНІ ОДИНИЦІ ЕЛЕКТРИКИ ТА МАГНЕТИЗМУ

Таблиця 1

Назва одиниці фізичної величини	Одиниця вимірювання	Скорочене позначення одиниці	Розмірність величини
Одиниця довжини	метр	м	L
Одиниця маси	кілограм	кг	M
Одиниця часу	секунда	с	T
Одиниця сили електричного струму	ампер	A	I
Одиниця термодинамічної температури	кельвін	K	$\Theta$
Одиниця сили світла	кандела	кд	J
Одиниця кількості речовини	моль	моль	N

Таблиця 2

Величина			Одиниці вимірювання		
Назва	Символ	Розмірність	Назва	Позначення	
				укр.	міжн.
1	2	3	4	5	6
Електричний заряд, кількість електрики	$Q$	TI	Кулон	Кл	C
Об'ємна густина заряду	$\rho$	$L^{-3}TI$	Кулон на кубічний метр	Кл/м <sup>3</sup>	C/м <sup>3</sup>
Поверхнева густина заряду	$\sigma$	$L^{-2}TI$	Кулон на квадратний метр	Кл/м <sup>2</sup>	C/м <sup>2</sup>
Напруженість електричного поля	$E$	$LMT^{-3}I^{-1}$	Вольт на метр	В/м	V/m
Електричний потенціал, різниця потенціалів, напруга, електрорушійна сила ЕРС	$U_\varphi$ $\Delta\varphi$ $U$ $\varepsilon$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	Вольт	В	V

Електрична ємність	$C$	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	$\Phi$	F
Абсолютна діелектрична проникність	$\varepsilon$	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	$\Phi/m$	F/m
Густина електричного струму	$j$	$L^{-2}I$	ампер на квадратний метр	$A/m^2$	$A/m^2$
Лінійна густина електричного струму	$\tau$	$L^{-1}I$	ампер на метр	A/m	A/m
Напруженість магнітного поля	$H$	$L^{-1}I$	ампер на метр	A/m	A/m
Магнітна індукція, густина магнітного поля	$B$	$MT^{-2}I^{-1}$	Тесла	Тл	T
Магнітний потік	$\Phi$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	Вебер	Вб	Wb
Індуктивність, взаємодуктивність	$L$ $L_{mn}$	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	Генрі	Гн	H
Абсолютна магнітна проникність	$\mu_\alpha, \mu$	$LMT^{-2}I^{-2}$	генрі на метр	Гн/м	H/m
Магнітний момент	$\mu, \mu_r$	$L^2I$	Ампер × квадратний метр	$A \cdot m^2$	$A \cdot m^2$
Густина енергії електромагнітного поля	$w$	$L^{-1}MT^{-2}$	Джоуль на кубічний метр	Дж/м <sup>3</sup>	J/m <sup>3</sup>
Вектор Пойнтінга	$S_W$	$MT^{-3}$	ват на квадратний метр	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>
Електричний опір (постійного струму)	$R$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	$\Omega$
Електрична провідність (для постійного струму)	$G$	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	S
(Електрична) потужність (для постійного струму)	$P$	$L^2MT^{-3}$	ват	Вт	W
Питомий електричний опір	$\rho$	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	Ом × метр	Ом·м	$\Omega \cdot m$



Питома електрична провідність	$\sigma$	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	Сименс на метр	См/м	S/m
Частота Обертובה частота	$\nu$ $n$	$T^{-1}$ $T^{-1}$	Герц секунда в мі- нус першому степені	Гц $s^{-1}$	Hz $s^{-1}$
Кутова частота	$\omega$	$T^{-1}$	радіан за секунду секунда в мі- нус першому степені	рад/с $s^{-1}$	rad/s $s^{-1}$
Різниця фаз	$\varphi$		один радіан	1 рад	1 rad
Імпеданс, повний електричний опір	$Z$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ом	Ом	$\Omega$
Модуль імпедансу (імпеданс) активний опір, резистанс, реактивний опір, реактанс	$ Z $ $R$ $X$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ом	Ом	$\Omega$
Добротність	$Q$		один	1	1
Активна потужність	$P$	$L^2MT^{-3}$	ват	Вт	W
Повна потужність, реактивна потуж- ність	$S, (P_s)$ $Q, P_q$	$L^2MT^{-3}$	Вольт-ампер	В·А	V·A
Електрична енергія, робота електричного струму	$W,$ $A$	$L^2MT^{-2}$	Джоуль	Дж	J

*Фізичні властивості деяких чистих металів*

Таблиця 3

Метал	Хім. символ	Атомний номер	Густина г/см <sup>3</sup>	T <sub>плав.</sub> °C	Пит.опір мкОм·м	Магнітні властивості
Алюміній	Al	13	2,70	660	0,026	парамагнетик
Вольфрам	W	74	19,30	3400	0,055	парамагнетик
Залізо	Fe	26	7,87	1540	0,097	ферромагнетик
Золото	Au	79	19,30	1063	0,0225	діамагнетик
Іридій	Ir	77	22,40	2410	0,054	парамагнетик
Кадмій	Cd	48	8,65	320,9	0,074	діамагнетик
Кобальт	Co	27	8,85	1500	0,064	ферромагнетик
Мідь	Cu	29	8,92	1083	0,017	діамагнетик
Молібден	Mo	42	10,20	2620	0,05	парамагнетик
Нікель	Ni	28	8,96	1453	0,068	ферромагнетик
Олово	Sn	50	7,29	231,9	0,113	парамагнетик
Паладій	Pd	46	12,02	1552	0,108	парамагнетик
Платина	Pt	78	21,45	1773	0,098	парамагнетик
Родій	Rh	45	12,48	1970	0,043	парамагнетик
Ртуть	Hg	80	13,50	-39	0,958	діамагнетик
Свинець	Pb	82	11,34	327	0,19	діамагнетик
Срібло	Ag	47	10,49	960,5	0,015	діамагнетик
Титан	Ti	22	4,52	1670	0,47	парамагнетик
Хром	Cr	24	7,19	1900	0,13	антиферромагн
Цинк	Zn	30	7,14	419,5	0,059	діамагнетик

**ДЗ КРАТНІ І ЧАСТИННІ ОДИНИЦІ**

Степінь десяти	Префікс	Скорочення
10 <sup>-15</sup>	фемто-	ф
10 <sup>-12</sup>	піко-	п
10 <sup>-9</sup>	нано-	н
10 <sup>-6</sup>	мікро-	мк
10 <sup>-3</sup>	мілі-	м

$10^{-2}$	санти-	с
$10^3$	кіло-	к
$10^6$	мега-	М
$10^9$	гіга-	Г
$10^{12}$	тера-	Т
$10^{15}$	пета-	П
$10^{18}$	екса-	Е

#### Д4 ЛАТИНСЬКИЙ І ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТИ

##### *Латинський алфавіт*

<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	ен
<i>B b</i>	бе	<i>O o</i>	о
<i>C c</i>	це	<i>P p</i>	пе
<i>D d</i>	де	<i>Q q</i>	ку
<i>E e</i>	е	<i>R r</i>	ер
<i>F f</i>	еф	<i>S s</i>	ес
<i>G g</i>	же (ге)	<i>T t</i>	те
<i>H h</i>	гаш (га)	<i>U u</i>	у
<i>I i</i>	і	<i>V v</i>	ве
<i>J j</i>	йот(йота)	<i>W w</i>	дубль–ве
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	ікс
<i>L l</i>	ель	<i>Y y</i>	ігрек (іпсилон)
<i>M m</i>	ем	<i>Z z</i>	зет (зета)

##### *Грецький алфавіт*

<i>A α</i>	альфа	<i>N ν</i>	ню (ні)
<i>B β</i>	бета	<i>Ξ ξ</i>	ксі
<i>Γ γ</i>	гамма	<i>Ο ο</i>	омікрон
<i>Δ δ</i>	дельта	<i>Π π</i>	пі
<i>Ε ε</i>	епсилон	<i>Ρ ρ</i>	ро
<i>Z ζ</i>	зета	<i>Σ σ</i>	сигма
<i>Η η</i>	ета	<i>Τ τ</i>	тау
<i>Θ θ ϑ</i>	тета	<i>Υ υ</i>	іпсилон
<i>Ι ι</i>	йота	<i>Φ φ</i>	фі
<i>Κ κ</i>	каппа	<i>Χ χ</i>	хі
<i>Λ λ</i>	лямбда	<i>Ψ ψ</i>	псі
<i>Μ μ</i>	мю (мі)	<i>Ω ω</i>	омега

## ПОКАЖЧИК ТЕРМІНІВ

Акумулятор	198	– заряду (поверхнева)	39
Ампер	246	– зв'язаних зарядів	62
Амперметр	87	– струму зміщення	361
		– струму насичення	173
<b>Блискавка</b>	<b>214</b>	– струму провідності	<b>362</b>
Блискавковідвід	216	– потоку енергії	380
<b>Вебер</b>	<b>263</b>	Джерела струму	89
Вектор		Джоулева теплота	107
– електричного зміщення	65	Дивергенція	433
– електричного поля	11	Диполь електричний	13
– магнітного поля	235	Діамагнетики	293
– Пойнтінга	374	Діелектрики	58
– поляризації	282	– іонні	60
Векторна діаграма	411	– неполярні	58
Взаємна індуктивність	342	– полярні	59
Взаємоіндукція	343	Діелектрична проникність	61
Випромінювач Герца	379	Діод	172
Власна частота коливального контуру	392	Ділянка кола	
Вольт	32	– неоднорідна	96
Вольтметр	46	– однорідна	96
		Добротність контуру	399
<b>Генрі</b>	<b>336</b>	Довжина вільного пробігу	134
Гіромагнітне відношення	277	Домен	
Гістерезис		– електричний	75
– електричний	76	– магнітний	307
– магнітний	305	Доменна стінка	308
Градiєнт	429	Дослід Рікке	131
Градiєнт потенціалу	37	– Толмена-Стюарта	131
Густина		Дуга електрична	217
– енергії електричного поля	72	<b>Еквіпотенціальна поверхня</b>	<b>33</b>
– енергії електромагнітного поля	369	Екранування	223
– енергії магнітного поля	349	Екстраструми	340
– заряду (лінійна)	15	Електрети	77
– заряду (об'ємна)	23	Електричне коло	85
		Електроліз	186

Електроліти	185	– Холла	249
Електролітична дисоціація	186	Ефективне значення	416
Електромагніт	235		
Електрон	130	Ємність електрична	48
Електропровідність		– відокремленого	
– електролітів	193	провідника	48
– металів	145	– конденсатора	52
Електрорушійна сила	94	– сфери	53
– взаємодукції	342		
– електромагнітної		<b>Закон</b>	
індукції	319	– Ампера	244
– самоіндукції	335	– Біо-Савара-Лапласа	241
Електростатична індукція	42	– Відемана-Франца	136
Електростатичний захист	44	– Джоуля-Ленца	107
Електрохімічний		– електролізу (об'єднаний)	190
еквівалент	189	– збереження заряду	7
Елемент		– Кулона	8
– гальванічний	196	– Кюрі	292
– Даніеля	198	– Ома	97
– Лекланше	198	– Фарадея	188
– струму	242	– – електромагнітної	
Емісія	171	індукції	321
– автоелектронна	174	– – електролізу	190
– вторинна	175	– повного струму	260
– термоелектронна	171	<b>Заряд</b>	
– фотоелектронна	175	– від'ємний	6
Енергія		– додатний	6
– електричного поля	71	– елементарний	6
– електромагнітної хвилі	373	– пробний	11
– іонізації	205	– точковий	8
– конденсатора	71		
– магнітного поля	348	<b>Ізолятори</b>	58
– потенціальна	29	<b>Імпеданс</b>	410
– заряду	30	<b>Індуктивність</b>	335
– системи точкових зарядів	70	– контуру	335
– Фермі	138	– соленоїда	336
Ефект		– тороїда	343
– Зеебека	161	<b>Індукція</b>	
– Пельтье	169	– взаємна	343
– Томсона	170	– електромагнітна	319

– електростатична	43	– власний	278
– магнітного поля	235	– спіновий	278
Іони як носії струму	185	Матеріали	
Іонізація		– магнітомакні	306
– газу	203	– магнітотверді	306
– ударна	206	Момент дипольний	
Іонні кристали	63	– електричний	13
		– магнітний	233
<b>Катод</b>	89	Момент орбітальний	
Катодне свічення	219	– магнітний	277
Коливання електричні		– механічний	278
– вимушені	399	<b>Намагніченість</b>	282
– вільні	395	– залишкова	305
– згасаючі	395	– феромагнетиків	309
Конденсатор	49	Намагнічування	276
– плоский	52	Напруга	96
– сферичний	52	Напруга пробою	209
– циліндричний	53	Напруженість	
Контур зі струмом	260	– електричного поля	11
Контур коливальний	390	– коерцитивна	305
– відкритий	395	– магнітного поля	283
– ідеальний	391	<b>Ом</b>	98
Котушка кільцева (тороїдальна)	262	Оператор Гамільтона	434
Кратність іонізації	204	Опір	
Кулон	7	– внутрішній	101
		– додатковий	116
<b>Лампи</b>		– зовнішній	100
– газорозрядні	210	– ємнісний	409
– люмінесцентні	223	– індуктивний	407
Ларморова частота	297	– паралельного з'єднання	104
Лідер	215	– питомий	104
Лінії		– повний	410
– силові електричного поля	16	– послідовного з'єднання	103
– магнітного поля	237	– провідника	146
<b>Магнетики</b>	281	<b>Парамагнетики</b>	289
Магнетон Бора	278	Петля гістерезису	306
Магнітний момент	234	Піроелектрики	77
– орбітальний	277		

Плазма	222	Пробій електричний	216
– висотемпературна	223	Провідники	
– газорозрядна (низькотемпературна)	223	– першого роду	131
Плече диполя	59	– другого роду	185
Подвійний електричний шар		Промені катодні	220
	137, 157, 195	Проникність	
Поле		– діелектрична	63
– електричне	10	– магнітна	280
– – вихрове	330	Простір астоновий	220
– – однорідне	18	П'єзоелектрики	77
– електромагнітне	358	Радіус Дебая	223
– електростатичне	26	Резонанс	
– магнітне	231	– напруг	413
Поляризація		– струмів	412
– діелектрика	61	Резонансна частота	
– електронна	59	коливань	404
– залишкова	76	Рекомбінація іонів	206
– іонна	60	Рівняння	
– спонтанна	75	– Максвелла	359
Потенціал		– плоскої електромагнітної	
– електричного поля	31	хвилі	371
– іонізації	204	Різниця потенціалів	32
Потік		Робота	
– вектора напруженості		– виходу електронів	154
електричного поля	18	– електростатичного поля	27
– магнітний	316	– іонізації	204
Потужність		– сили Ампера	256
– постійного струму	106	– сторонніх сил	91
– змінного струму	418	– струму	106
Правила Кірхгофа	109	Розряд газовий	203
Правило		– дуговий	217
– Ленца	320	– іскровий	213
– лівої руки	245	– коронний	210
– свердлика	238	– несамоствійний	207
Принцип суперпозиції	12	– самоствійний	209
– сил електростатичної		– тліючий	218
взаємодії	12	Ротор вектора	435
– електростатичних полів	12	Рухливість носіїв заряду	192
– магнітних полів	236		

Самоіндукція	335	– про циркуляцію магнітної ін- дукції	264
Сегнетоелектрики	75	Теорія класична електронна	133
Сила		Тесла	236
– Ампера	244	Тороїд	262
– електрорушійна	94	Трансформатор	346
– коерцитивна	305	<b>Фаза</b> коливання	392
– Лоренца	247	Фарада	49
– струму	86	Фарадеева темна область	219
Скін-ефект	334	Ферити	312
Соленоїд	233	Фероелектрики	75
Спін електрона	139	Феромагнетики	301
Сприйнятливність		Формула	
– діелектрична	61	– Ленгмюра-Богуславського	173
– магнітна	281	– Річардсона-Дешмена	173
Стала		– Томсона	393
– Кюрі	292	Фотоелектронний	
– Планка	139	помножувач	175
– Фарадея	190	Хвилі	
– Холла	251	– електромагнітні	369
Струм		– плоскі	371
– вихровий	333	<b>Циркуляція векторного</b>	
– дрейфовий	134	– електричного поля	28
– змінний	390	– магнітного поля	259
– зміщення	360	<b>Час</b>	
– індукційний	318	– релаксації	398
– квазістаціонарний	116	– вільного пробігу	134
– насичення	173	<b>Шкала електромагнітних</b>	
– постійний	86	хвиль	383
Ступінь		Шунт	114
– дисоціації	186	<b>Явище електромагнітної</b>	
– іонізації плазми	223	індукції	319
<b>Тверді електроліти</b>	185	Яма потенціальна	137
Температура			
– Кюрі	81, 303		
– плазми	225		
Теорема Гаусса	20		
– Остроградського-Гаусса	435		



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

*1. Підручники та посібники.*

1. Вайданич В.І., Пенцак Г.М. Фізика. — Львів : Національний лісотехнічний університет України, 2009.  
*Доступний виклад розділу Електрика, Магнетизм.*
2. Воловик П.М. Фізика для університетів.— К. : Перун, 2005.  
*Сучасний підручник з фізики для університетів. Докладний виклад розділів Електрика, Магнетизм. Багато прикладів, гарних ілюстрацій.*
3. Джанколи Дж. Фізика. Т.2. — М. : Мир, 1989.  
*Доступно і цікаво викладені, зокрема, розділи, присвячені Електромагнетизму. Велика кількість ілюстративного матеріалу, прикладів, задач.*
4. Л. Д. Дідух. Механіка / Дідух Л. Д. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2016. – 428 с.  
*Докладно викладені питання, пов'язані із розділами «Коливання, хвилі». Наведена велика кількість прикладів, які ілюструють теоретичний матеріал.*
5. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. — М. : Высшая школа, 1991.  
*Поглиблений виклад принципів питань Електромагнетизму.*
6. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1985.  
*Достатньо повний виклад Електромагнетизму. Основна увага у книзі приділена з'ясуванню фізичної сторони основних понять, законів і явищ.*
7. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Курс загальної фізики. Електрика і магнетизм.— К.: Техніка, 2001.  
*Грунтовний виклад основ фізики електрики та магнетизму.*
8. Кухлинг Х. Справочник по физике.— М.: Мир, 1982.  
*Стислий виклад фізичних понять, законів.*
9. Курс фізики / під ред. Лопатинського І.Є. — Львів, 2002.  
*Доступний виклад основ фізики.*
10. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Ільчук Г.А., Романишин Б.М. Фізика.— Львів: Афіша, 2005.

*Стислий та доступний виклад розділів фізики, пов'язаних з електромагнетизмом.*

11. Матвеев А.Н. Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1980.  
*Поглиблений виклад Електромагнетизму.*
12. Оритр Дж. Физика. Т.2.— М.: Мир, 1981.  
*За стилем книга подібна до посібника Дж.Джанколі, але більш доступна та менша за об'ємом.*
13. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1975.  
*Глибокий виклад основ Електрики та магнетизму.*
14. Поль Р.В. Учение об электричестве. — М.: Физматгиз, 1962.
15. Понеділок Г.В., Данилов А.Б. Електрика & магнетизм. Львів. Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2010.  
*Детально з'ясовуються базові положення Електрики та магнетизму. Підручник містить багато пізнавального матеріалу, пов'язаного із сучасністю.*
16. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2.— М.: Наука, 1982.  
*Глибокий виклад Електромагнетизму в рамках фундаментального курсу фізики.*
17. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. — М.: Наука, 1982.  
*Достатньо повний виклад Електромагнетизму. Детально з'ясовується природа фізичних явищ.*
18. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.  
*Стислий виклад основ електромагнетизму.*
19. Тимофеева Т.И. Курс физики.— М.: ВШ, 1997.  
*Стислий виклад основ електрики і магнетизму.*
20. Фейман Р., Лейтон Р., Сендс М. Феймановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1982.  
*Оригінальний виклад електрики і магнетизму.*
21. Физический энциклопедический словарь.— М.: Советская энциклопедия, 1983.
22. Фриш С.Э., Тиморева А.В. Курс общей физики. Т.2. — М.: Изд. физ.-мат. литературы, 1962.  
*Том присвячений електромагнетизму. Достатньо повний та доступний виклад електромагнетизму.*

23. Яворський Б.М., Детлаф А.А., Мілковська Л.Б. Курс фізики. — М.: Вища школа, 1973.

*Детально з'ясовуються розділи підручника, присвячені електромагнетизму.*

24. Яворський Б.М., Детлаф А.А., Лебедєв А.К. Довідник з фізики. Для інженерів та студентів.— Тернопіль. Навчальна книга — Богдан, 2007.

## *2. Збірники задач*

1. Антонов Л.И., Деденко Л.Г., Матвеев А.Н. Методика рішення задач по електричеству. — М.: Изд.-во МГУ, 1982.

2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. — М.:Наука, 1985.

3. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Серета В.М., Крушельницька Т.Д., Українець Н.А. Збірник задач з фізики. — Львів: Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2003.

4. Лук'янець Б.А. та інші. Якісні задачі з фізики.— Львів, 2005.

*У посібнику приведено біля 1000 задач з усіх розділів фізики, — цікавих і корисних задач для розуміння фізики.*

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА.....</b>	<b>3</b>
<b>ПОЗНАЧЕННЯ.....</b>	<b>4</b>
<b>РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРОСТАТИКА.....</b>	<b>5</b>
1.1 Електризація тіл. Електричний заряд. Закон збереження електрично-го заряду.....	5
1.2 Закон Кулона .....	8
1.3 Електричне поле. Напруженість електричного поля.....	10
1.3.1 Електричне поле.....	10
1.3.2 Напруженість електричного поля точкового заряду .....	11
1.3.3 Принцип суперпозиції .....	12
1.3.4 Електричне поле диполя.....	13
1.3.5 Поле на осі тонкого рівномірно зарядженого кільця.....	15
1.3.6 Геометричний опис електричного поля .....	16
1.3.6.1 Лінії напруженості (силові лінії).....	16
1.3.6.2 Потік напруженості електричного поля .....	18
1.3.7 Теорема Гаусса .....	20
1.3.8 Застосування теореми Гаусса.....	21
1.4 Робота сил електростатичного поля. Потенціал. Різниця потенціалів .....	26
1.4.1 Робота сил електростатичного поля .....	27
1.4.2 Потенціальна енергія взаємодіючих зарядів .....	29
1.4.3 Потенціал .....	30
1.4.4 Різниця потенціалів.....	31
1.4.5 Еквіпотенціальні поверхні .....	32
1.4.6 Зв'язок між напруженістю і потенціалом .....	34
1.4.7 Знаходження різниці потенціалів за відомою напруженістю електричного поля.....	38
1.5 Провідники в електричному полі .....	40
1.5.1 Загальна характеристика провідників .....	40
1.5.2 Провідник в електричному полі. Явище електростатичної індукції .....	41
1.5.3 Електростатичний захист .....	44
1.5.4 Вимірювання різниці потенціалів між провідниками .....	46
1.5.5 Людина в електричному полі Землі .....	47
1.6 Електроємність.....	48
1.6.1 Електроємність відокремленого провідника .....	48
1.6.2 Конденсатори.....	49
1.6.3 З'єднання конденсаторів .....	54
1.7 Діелектрики в електричному полі .....	58
1.7.1 Типи діелектриків .....	58
1.7.2 Поляризованість. Поверхнева густина зв'язаних зарядів .....	61

1.7.3	Напруженість електричного поля в діелектрику. Різниця потенціалів. Ємність конденсатора .....	62
1.7.4	Електричне зміщення. Теорема Гаусса для поля в діелектрику .....	64
1.8	Зв'язок між векторами $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на межі розділу двох діелектриків .....	66
1.8.1	Умови на межі двох діелектриків .....	66
1.8.2	Заломлення ліній векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ .....	68
1.9	Енергія електричного поля .....	69
1.9.1	Енергія системи нерухомих точкових зарядів .....	69
1.9.2	Енергія відокремленого зарядженого провідника .....	70
1.9.3	Енергія зарядженого конденсатора .....	70
1.9.4	Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля .....	71
1.10	Пондеромоторні сили .....	73
1.11	Сегнетоелектрики. П'єзоелектрики. Електрети .....	74
1.12	Електростатика: запитання, задачі, відповіді .....	77
1.12.1	Запитання, задачі .....	77
1.12.2	Відповіді .....	80
<b>РОЗДІЛ 2 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ .....</b>		<b>85</b>
2.1	Електричний струм. Сила струму. Густина струму .....	86
2.2	Механізм проходження електричного струму в електричному колі .....	88
2.2.1	Модель електричного кола .....	88
2.2.2	Сторонні сили .....	90
2.2.3	Електричне коло кишенькового ліхтаря .....	92
2.3	Електрорушійна сила .....	94
2.4	Напруга .....	96
2.5	Закон Ома .....	97
2.5.1	Закон Ома для однорідної ділянки кола .....	97
2.5.2	Закон Ома для неоднорідної ділянки кола (узагальнена форма закону Ома) .....	99
2.5.3	Закон Ома для електричного кола .....	100
2.5.4	Приклади застосування закону Ома .....	101
2.6	Послідовне і паралельне з'єднання провідників .....	102
2.7	Температурна залежність опору провідників .....	104
2.8	Робота і потужність електричного струму .....	105
2.9	Теплова дія струму. Закон Джоуля-Ленца .....	107
2.10	Коефіцієнт корисної дії електричного кола .....	108
2.11	Правила Кірхгофа .....	109
2.12	Розширення меж вимірювання амперметра і вольтметра .....	114
2.13	Квазістаціонарні струми. Зарядка і розрядка конденсатора .....	116
2.13.1	Квазістаціонарні струми .....	116
2.13.2	Зарядка конденсатора .....	117
2.13.3	Розрядка конденсатора .....	119
2.14	Запитання і задачі. Відповіді .....	120

2.14.1	Запитання і задачі.....	120
2.14.2	Відповіді.....	123
<b>РОЗДІЛ 3 ОСНОВИ ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕОРІЇ МЕТАЛІВ.....</b>		<b>130</b>
3.1	Експериментальна база електронної теорії металів.....	130
3.2	Основи класичної електронної теорії металів.....	132
3.3	Електронний газ в металі за квантовою теорією .....	136
3.3.1	Модель «потенціальної ями» для вільних електронів .....	137
3.3.2	Електронний газ у потенціальній ямі. Енергія Фермі .....	138
3.3.3	Електронний газ при $T \neq 0$ . Розподіл Фермі-Дірака .....	141
3.4	Кристалічна ґратка за квантовою теорією. Фонони .....	143
3.5	Електропровідність металів .....	145
3.6	Запитання і задачі. Відповіді .....	149
3.6.1	Запитання і задачі.....	149
3.6.2	Відповіді.....	150
<b>РОЗДІЛ 4 КОНТАКТНІ, ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНІ ТА ЕМІСІЙНІ ЯВИЩА .....</b>		<b>154</b>
4.1	Робота виходу електрона.....	154
4.2	Контактна різниця потенціалів .....	155
4.2.1	Контакт двох різнорідних металів.....	155
4.2.2	Зовнішня і внутрішня контактні різниці потенціалів .....	157
4.2.3	Закон послідовних з'єднань Вольта .....	159
4.3	Термоелектричні явища.....	160
4.3.1	Явище Зеебека .....	161
4.3.2	Термоелектрорушійна сила.....	161
4.3.3	Практичні застосування явища Зеебека .....	167
4.3.4	Явище Пельтьє .....	169
4.3.5	Явище Томсона.....	170
4.4	Емісійні явища.....	171
4.4.1	Термоелектронна емісія.....	171
4.4.2	Інші емісійні явища.....	174
4.5	Запитання і задачі. Відповіді .....	176
4.5.1	Запитання і задачі.....	176
4.5.2	Відповіді.....	179
<b>РОЗДІЛ 5 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ В ЕЛЕКТРОЛІТАХ.....</b>		<b>184</b>
5.1	Електроліти. Електролітична дисоціація .....	184
5.2	Електроліз .....	186
5.3	Закони Фарадея .....	188
5.3.1	Перший закон Фарадея .....	188
5.3.2	Другий закон Фарадея .....	189
5.3.3	Об'єднаний закон електролізу .....	190
5.4	Провідність в електролітах. Закон Ома в електролітах.....	191
5.5	Гальванічні елементи і акумулятори.....	194
5.5.1	Взаємодія металу з електродом. Перетворення хімічної енергії в електричну .....	195

5.5.2	Гальванічні елементи.....	196
5.5.3	Акумулятори.....	198
5.6	Запитання і задачі. Відповіді.....	200
5.6.1	Запитання і задачі.....	200
5.6.2	Відповіді.....	201
<b>РОЗДІЛ 6 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ У ГАЗАХ.....</b>		<b>203</b>
6.1	Іонізація газу. Рекомбінація іонів.....	203
6.2	Несамостійний газовий розряд.....	207
6.3	Самостійний газовий розряд.....	209
6.4	Види самостійних розрядів.....	210
6.4.1	Коронний розряд.....	210
6.4.2	Іскровий розряд (іскра).....	213
6.4.3	Блискавка.....	214
6.4.4	Дуговий розряд.....	217
6.4.5	Тліючий розряд.....	218
6.5	Плазма.....	222
6.6	Запитання і задачі. Відповіді.....	226
6.6.1	Запитання і задачі.....	226
6.6.2	Відповіді.....	227
<b>РОЗДІЛ 7 МАГНЕТИЗМ.....</b>		<b>230</b>
7.1	Прояви магнітних взаємодій. Магнітне поле.....	230
7.1.1	Магніти. Магнітне поле.....	230
7.1.2	Прояви магнетизму струмів.....	232
7.2	Магнітна індукція.....	233
7.2.1	Магнітний момент контура зі струмом.....	233
7.2.2	Магнітна індукція.....	235
7.3	Графічне зображення магнітного поля. Лінії магнітної індукції.....	237
7.4	Закон Біо-Савара-Лапласа.....	241
7.4.1	Загальна форма закону Біо-Савара-Лапласа.....	241
7.4.2	Приклади на застосування закону Біо-Савара-Лапласа.....	242
7.5	Сила Ампера.....	244
7.5.1	Закон Ампера. Сила Ампера.....	244
7.5.2	Розрахунок взаємодії паралельних струмів.....	245
7.5.3	Означення одиниці сили струму в СІ. Магнітна стала. Одиниця магнітної індукції.....	246
7.6	Сила Лоренца та її прояви.....	247
7.6.1	Сила Лоренца.....	247
7.6.2	Рух зарядженої частинки у магнітному полі.....	248
7.6.3	Ефект Холла.....	249
7.6.4	Магнітогідродинамічний ефект.....	251
7.6.5	Двигун Фарадея.....	252
7.7	Контур зі струмом у магнітному полі.....	252
7.7.1	Загальні закономірності. Момент сил Ампера.....	252

7.7.2	Робота при обертанні контура зі струмом (рамки зі струмом) у магнітному полі. Потенціальна енергія контура в магнітному полі.....	256
7.7.3	Контур у неоднорідному магнітному полі.....	257
7.7.4	Електричний двигун постійного струму.....	257
7.8	Теорема про циркуляцію магнітної індукції у вакуумі та її застосування.....	259
7.8.1	Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції.....	259
7.8.2	Застосування закону повного струму.....	261
7.9	Потік вектора магнітної індукції.....	263
7.9.1	Потік магнітної індукції.....	263
7.9.2	Теорема Гаусса для магнітного поля.....	264
7.10	Робота переміщення провідника зі струмом і контура зі струмом у магнітному полі.....	265
7.11	Запитання і задачі. Відповіді.....	268
7.11.1	Запитання і задачі.....	268
7.11.2	Відповіді.....	270
<b>РОЗДІЛ 8 МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ РЕЧОВИНИ.....</b>		<b>276</b>
8.1	Магнітні моменти електронів, атомів і молекул.....	277
8.2	Загальна характеристика магнетиків.....	280
8.2.1	Магнітне поле в магнетик. Магнітна проникність середовища. Типи магнетиків.....	280
8.2.2	Магнітна сприйнятливість.....	281
8.3	Циркуляція вектора $\vec{B}$ і циркуляція вектора $\vec{H}$ .....	284
8.4	Заломлення ліній магнітної індукції і ліній напруженості магнітного поля.....	285
8.4.1	Умови для векторів $\vec{B}$ і $\vec{H}$ на межі розділу двох магнетиків.....	285
8.4.2	Магнітний захист. Згущення ліній магнітної індукції.....	287
8.5	Парамагнетики.....	288
8.5.1	Загальні властивості парамагнетиків.....	289
8.5.2	Модель парамагнетика.....	290
8.5.3	Магнітне охолодження парамагнетика.....	293
8.6	Діамагнетики.....	293
8.6.1	Загальні властивості діамагнетиків.....	293
8.6.2	Механізм виникнення індукованих магнітних моментів. Намагніченість діамагнетика.....	294
8.7	Феромагнетики.....	301
8.7.1	Загальні властивості феромагнетиків.....	301
8.7.2	Явище гістерезису у феромагнетиках.....	304
8.7.3	Природа феромагнетизму.....	307
8.7.3.1	Базові положення теорії феромагнетизму.....	307
8.7.3.2	Намагніченість феромагнетиків.....	309
8.8	Антиферомагнетики і ферити.....	311



8.9	Запитання і задачі. Відповіді.....	312
8.9.1	Запитання і задачі.....	312
8.9.2	Відповіді.....	313
<b>РОЗДІЛ 9 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ.....</b>		<b>316</b>
9.1	Явище електромагнітної індукції.....	316
9.1.1	Зміна магнітного потоку крізь контур. Швидкість зміни магнітного потоку.....	316
9.1.2	Відкриття Фарадея.....	318
9.1.3	Правило Ленца.....	320
9.1.4	Основний закон електромагнітної індукції.....	321
9.2	Електромагнітна індукція у рухомому провіднику.....	323
9.3	Закон збереження енергії і явище електромагнітної індукції.....	326
9.4	Природа електромагнітної індукції.....	328
9.4.1	Механізм виникнення е.р.с. індукції у контурі з рухомим провідником.....	328
9.4.2	Виникнення е.р.с. індукції у нерухомому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі. Вихрове електричне поле ...	330
9.4.3	Порівняння двох механізмів. Е.р.с. індукції у контурі, що переміщується у змінному магнітному полі.....	331
9.5	Вихрові струми (струми Фуко).....	333
9.6	Явище самоіндукції.....	335
9.6.1	Явище самоіндукції. Індуктивність.....	335
9.6.2	Прояви самоіндукції при замиканні електричного кола. Електроструми замикання.....	337
9.6.3	Прояви самоіндукції при розмиканні електричного кола.....	339
9.7	Явище взаємної індукції.....	341
9.8	Електрогенератор.....	343
9.9	Трансформатори.....	346
9.10	Енергія магнітного поля.....	348
9.11	Запитання і задачі. Відповіді.....	349
9.11.1	Запитання і задачі.....	349
9.11.2	Відповіді.....	353
<b>РОЗДІЛ 10 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.....</b>		<b>358</b>
10.1	Узагальнення Максвеллом закону електромагнітної індукції. Перше рівняння Максвелла.....	358
10.2	Струм зміщення. Друге рівняння Максвелла.....	360
10.2.1	Струми зміщення.....	360
10.2.2	Узагальнення закону повного струму. Друге рівняння Максвелла.....	363
10.3	Повна система рівнянь Максвелла.....	364
10.3.1	Рівняння Максвелла в інтегральній формі.....	364
10.3.2	Рівняння Максвелла в диференціальній формі.....	366
10.4	Вільне електромагнітне поле.....	368

10.5	Електромагнітні хвилі .....	369
10.5.1	Загальні поняття. Хвильове рівняння і наслідки з нього.....	369
10.5.2	Енергія плоскої електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга.....	373
10.5.3	Тиск електромагнітної хвилі. Імпульс електромагнітного поля...	376
10.6	Джерела електромагнітних хвиль. Шкала електромагнітних хвиль .....	378
10.6.1	Джерела електромагнітних хвиль.....	378
10.6.2	Шкала електромагнітних хвиль .....	383
10.7	Запитання і задачі. Відповіді .....	385
10.7.1	Запитання і задачі.....	385
10.7.2	Відповіді.....	386
<b>РОЗДІЛ 11 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ .....</b>		<b>390</b>
11.1	Коливальний контур. Вільні гармонічні коливання .....	390
11.1.1	Рівняння гармонічних коливань .....	391
11.1.2	Перетворення енергії у коливальному контурі .....	394
11.2	Вільні згасаючі коливання .....	395
11.2.1	Рівняння вільних згасаючих коливань .....	395
11.2.2	Характеристики згасання електричних коливань .....	398
11.3	Вимушені електричні коливання.....	399
11.3.1	Рівняння вимушених коливань .....	399
11.3.2	Резонансні криві. Резонанс.....	403
11.4	Змінний струм. Прості кола змінного струму .....	405
11.4.1	Резистор у колі змінного струму .....	406
11.4.2	Котушка індуктивності в колі змінного струму.....	406
11.4.3	Конденсатор в колі змінного струму.....	408
11.4.4	Послідовно з'єднані резистор, котушка індуктивності і конденсатор в колі змінного струму .....	409
11.5	Метод векторних діаграм.....	411
11.6	Резонанс напруг. Резонанс струмів .....	413
11.7	Потужність у колі змінного струму .....	415
11.7.1	Теплова дія змінного струму. Ефективні значення сили струму і напруги.....	415
11.7.2	Потужність у колі змінного струму. Коефіцієнт потужності .....	418
11.8	Запитання і задачі. Відповіді .....	419
11.8.1	Запитання і задачі.....	419
11.8.2	Відповіді.....	422
<b>МАТЕМАТИЧНЕ ДОПОВНЕННЯ .....</b>		<b>428</b>
1	Скалярні і векторні поля. Потенціальне поле .....	428
2	Похідна скаляра по напрямку. Градієнт .....	429
3	Потік вектора через поверхню. Дивергенція вектора.....	431
4	Циркуляція вектора.....	433
5	Оператор Набла.....	434
6	Теорема Остроградського-Гаусса. Теорема Стокса.....	435
7	Графічний метод зображення гармонічних коливань. Векторна діаграма ...	436

Зміст	459
<b>ДОДАТКИ</b> .....	<b>438</b>
Д1    Фундаментальні та похідні фізичні сталі.....	438
Д2    Основні та похідні одиниці електрики та магнетизму .....	439
Д3    Кратні і частинні одиниці.....	442
Д4    Латинський і грецький алфавіти.....	443
<b>ПОКАЖЧИК ТЕРМІНІВ</b> .....	<b>444</b>
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	<b>449</b>









**Навчальне видання**

*Дідух Леонід Дмитрович*

# **ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ**

Комп'ютерний набір та верстка: *Світлана Зелінська, Ірина Парій*

Формат 70×100/16. 28,75 ум. др. арк., 27,84 обл.-вид. арк. Тираж 300. Замовлення № 20-262

Редакція газети «Підручники і посібники».

46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.

Збут: [pip.ternopil@ukr.net](mailto:pip.ternopil@ukr.net) Редакція: [editoria@i.ua](mailto:editoria@i.ua)

[www.pp-books.com.ua](http://www.pp-books.com.ua)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції  
серія ДК № 4678 від 21.01.2014 р.

Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.

Тел.: 096-948-09-27; 097-50-35-376

[pip.bookpost@gmail.com](mailto:pip.bookpost@gmail.com)