

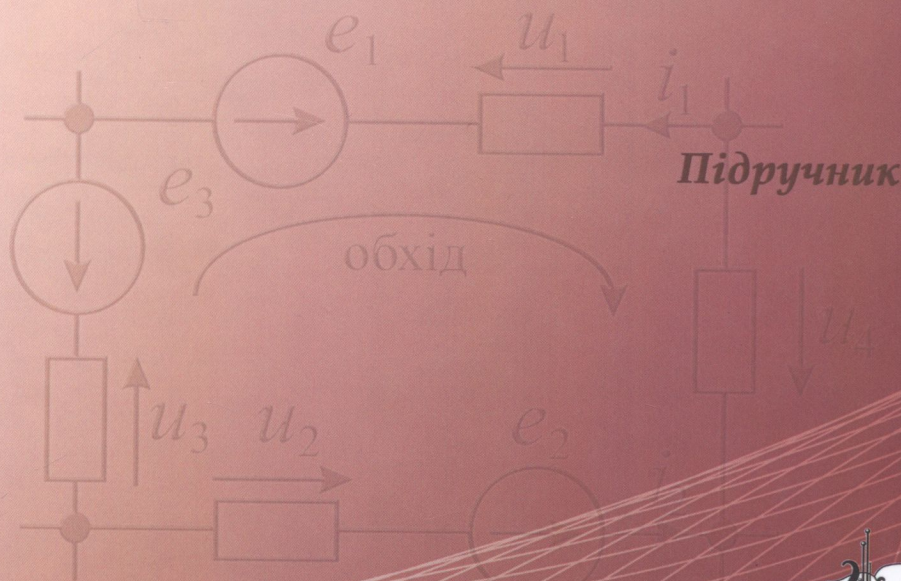
Бдп. 3.01(075.8)

М 33

М.П. МАТВИЄНКО

ОСНОВИ

ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ



621.3.01(075.8)
М33

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КОНОТОПЬСЬКИЙ ІНСТИТУТ
СУМСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

М.П. МАТВІЄНКО

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Підручник

Видання 2-ге перероблене і доповнене



КОННОТОПЬСЬКИЙ ІНСТИТУТ
СУМСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Київ 2018

Ed. 3. 01/073.87

ББК 32.973
УДК 517.1
М 33

Копіювання, сканування, запис на електронні носії і тому подібне будь-якої частини підручника без дозволу видавництва заборонено.

Рецензенти:

А.С. Довбиш – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету.

В.П. Розен – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації управління електротехнічними комплексами НТУУ «КПІ».

М.М. Проценко – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних систем і мереж Національного авіаційного університету, м. Київ.

*Рекомендовано Вченою радою Сумського державного університету як підручник для студентів вищих навчальних закладів.
Протокол №6 від 10 березня 2016 р.*

Матвієнко М. П.

М33 Основи електротехніки. Підручник. Вид. 2-ге перероб. і доп. – К.: Видавництво Ліра-К, 2018. – 228 с.

ISBN 978-617-7320-39-4

У підручнику розглянуті питання пов'язані з методами розрахунку лінійних електричних ланцюгів постійного й синусоїдального струмів при сталих режимах їх роботи, а також представлений аналіз перехідних процесів класичним та операторним методами. Матеріал поданий так, щоб він був зрозумілим як студентам денної, так і заочної форм навчання. Підручник має велику кількість прикладів із алгоритмами розв'язку задач (30% від загального об'єму), а кожний розділ - додаткові приклади для розв'язку з відповідями й контрольні запитання для самоперевірки.

Підручник призначено для студентів, аспірантів, викладачів і спеціалістів відповідних спеціальностей, а також окремі розділи підручника можуть бути використані студентами коледжів та технічних навчальних закладів.

Н82104

ББК 32.973
УДК 517.1

ISBN 978-617-7320-39-4

© Матвієнко М. П., 2016
© Видавництво Ліра-К, 2016



Передмова

У підручнику розглянуті питання пов'язані з методами розрахунку лінійних електричних ланцюгів постійного й синусоїдального струмів при сталих режимах їх роботи, а також представлений аналіз перехідних процесів класичним та операторним методами. Матеріал поданий так, щоб він був зрозумілий як студентам денної, так і заочної форм навчання. Для цього у кожному методі розрахунку електричних ланцюгів запропоновані алгоритми їх розв'язання з перевіркою на конкретних прикладах. Підручник має велику кількість прикладів з детальними розв'язаннями (30% від загального об'єму). Кожний розділ підручника має додаткові задачі з відповідями й контрольні запитання для самоперевірки.

Підбір навчального матеріалу для підручника виконаний так, що дає студентам можливість у подальшому успішно опанувати спеціальні електротехнічні дисципліни. Усі теоретичні викладки мають докладні пояснення, що дозволяє самостійно опанувати матеріал. Велику увагу приділено виробленню навичок практичних розрахунків електричних ланцюгів. Значна кількість схем електричних ланцюгів, векторних діаграм, графіків і таблиць забезпечують наглядність для засвоєння навчального матеріалу.

Підручник містить 10 розділів, їх перелік та наповнення легко зрозумілі зі змісту. Вибір та викладання розділів основ електротехніки виконано з урахуванням вимоги фундаментальної освіти з електротехнічних дисциплін, автоматики та обчислювальної техніки.

Підручник призначено для студентів, аспірантів та викладачів вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації при підготовці спеціалістів та бакалаврів за напрямками «Комп'ютерні науки», «Комп'ютерні системи, автоматика і управління», «Електронні пристрої та системи», «Комп'ютерна інженерія», «Автоматизовані та комп'ютерно – інтегровані технології». Окремі розділи можуть бути використані студентами відповідних коледжів та середніх технічних учбових закладів.

Цей підручник присвячую світлій пам'яті моєї дружини й коханої жінки Людмили Євгенівни Матвієнко, яка завжди підтримувала, допомагала й давала мені можливість у тяжкі періоди нашого життя значну частину часу присвятити питанням науки.

Матвієнко М.П. – 14 вересня 2015 р.

Розділ 1

Електричний ланцюг, його елементи і параметри

1.1. Визначення електричного ланцюга

Означення 1.1.1. Електричним ланцюгом називають сукупність електротехнічних пристроїв, які створюють замкнений шлях для електричного струму.

Обов'язковою умовою існування струму в електричному ланцюзі є його замкнутість на джерело електрорушійної сили (*ЕРС*), що є першопричиною виникнення електричного струму. При цьому струм в електричному ланцюзі може бути постійним (ланцюги постійного струму), а також змінним (ланцюги змінного струму).

Електричний ланцюг складається з окремих пристроїв, які можна розбити на джерела й приймачі електричної енергії, сполучені між собою дротами. У джерелах електричної енергії (акумулятори, генератори і т.д.) відбувається перетворення хімічної, механічної, теплової, атомної енергії на електричну, а у приймачах електричної енергії (електричні лампи, резистори, електричні двигуни і т.д.) – перетворення електричної на інші види енергії. В електричному ланцюзі можуть бути також різні перетворювачі, які відіграють роль як джерел, так і приймачів, а також захисні та комутаційні пристрої.

Джерела з неелектричними видами енергії, як правило, перетворюються на енергію електромагнітного поля. Електромагнітні процеси в електричному ланцюзі описуються за допомогою поняття про струм, напругу, електрорушійну силу (*ЕРС*), опір, індуктивність та ємність. Позначення цих та інших величин, одиниці їх виміру, які використовуються у цьому підручнику, наведені у табл. 1.1.1.

Таблиця 1.1.1

№ п/п	Буквенні позначення	Найменування величин	Одиниця виміру	
			Назва	Позначення
1	i	Миттєві позначення струму, напруги, <i>EPC</i>	Ампер	A
2	u		Вольт	B
3	e		Вольт	B
4	I	Постійний струм, напруга, <i>EPC</i> або дійсне значення синусоїдального струму, напруги, <i>EPC</i>	Ампер	A
5	U		Вольт	B
6	E		Вольт	B
7	f	Частота, кутова частота	Герц, одиниця(радіан) у секунду	Гц 1/С (рад/С)
8	ω			
9	ψ_i	Початкові фази синусоїдального струму, напруги, <i>EPC</i>	Градус або радіан	° або рад
10	ψ_u			
11	ψ_e			
12	φ	Кут зрушення між фазами синусоїдального струму й напруги	Градус або радіан	° або рад
13	t	Час, який пройшов від початку відліку Період будь – якої періодичної функції часу	Секунда	С
14	T		Секунда	С
15	I_m	Амплітуда синусоїдального струму, напруги, <i>EPC</i>	Ампер	A
16	U_m		Вольт	B
17	E_m		Вольт	B
18	q	Електричний заряд	Кулон	K
19	L	Індуктивність, ємність, опір ланцюга постійного струму або активний опір ланцюга синусоїдального струму	Генрі	Гн
20	C		Фарада	Ф
21	R		Ом	Ом

Продовження табл. 1.1.1

22	X_L	Реактивно-індуктивний, реактивно-ємнісний, повний опір ланцюга синусоїдального струму	ом	Ом
23	X_C		ом	Ом
24	Z		ом	Ом
25	G	Провідність ланцюга постійного струму або активна провідність ланцюга синусоїдального струму, реактивна індуктивність, реактивна ємність і сумарна провідність ланцюга синусоїдального струму	Сіменс	См
26	b_L		Сіменс	См
27	b_C		Сіменс	См
28	Y		Сіменс	См
29	Φ	Магнітний потік	Вебер	Вб
30	ω	Кількість витків котушки	Витки	-
31	Ψ	Потокозчеплення	Вебер	Вб
32	P	Потужність ланцюга постійного струму або активна потужність ланцюга синусоїдального струму	Ват	Вт
33	Q	Реактивна потужність ланцюга синусоїдального струму	Вольт – ампер реактивний	Вар
34	S	Загальна потужність ланцюга синусоїдального струму	Вольт – ампер	ВА
35	\dot{I}	Комплексні струм, напруга, EPC	Ампер	A
36	\dot{U}		Вольт	B
37	\dot{E}		Вольт	B
38	\dot{Z}	Комплексні опір, провідність, потужність	Ом	Ом
39	\dot{Y}		Сіменс	См
40	\dot{S}		Вольт - ампер	ВА

Необхідно відмітити, що струми і напруги, які змінюються у часі, позначаються малими латинськими літерами e, i, u , а EPC , струми і напруги, які не змінюються у часі, позначаються великими латинськими буквами E, I, U .

1.2. Графічне позначення електричного ланцюга і його елементів

Означення 1.2.1. Графічним зображенням електричного ланцюга називають його схему.

У схемі електричного ланцюга розрізняють гілки, узли й контури.

Означення 1.2.2. Гілкою електричного ланцюга називають частину схеми, що складається тільки з послідовно з'єднаних джерел і приймачів.

Означення 1.2.3. Вузлом електричного ланцюга називають точку схеми, у якій сходяться не менше трьох гілок (гілки починаються й закінчуються у вузлах ланцюга).

Означення 1.2.4. Контуром електричного ланцюга називають частину схеми, яка утворена гілками, а число контурів схеми визначається числом варіантів обходів по гілках ланцюга.

На рис. 1.2.1 приведені структурні схеми двох електричних ланцюгів і показана кількість гілок, вузлів і контурів у кожній з них.

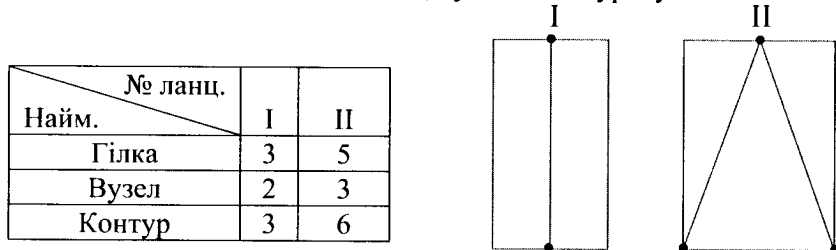


Рис. 1.2.1

У навчальній літературі такі схеми називають топологічними. На рис. 1.2.2. показані графічні позначення основних елементів електричного ланцюга,

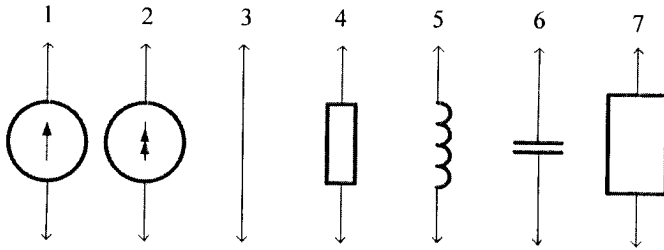


Рис. 1.2.2

де: 1 – джерело ЕРС; 2 – джерело струму; 3 – з’єднувальний провід; 4 – резистор R ; 5 – індуктивність L ; 6 – ємність C ; 7 – двополюсник (ланцюг з невідомою структурою, який має два входних – вихідних затискача).

1.3. Напря́м дії ЕРС, струмів і напруг

У електричних ланцюгах струми, напруги і ЕРС діють у певних напрямках. Цю обставину показують на схемах стрілками, рис. 1.3.1.

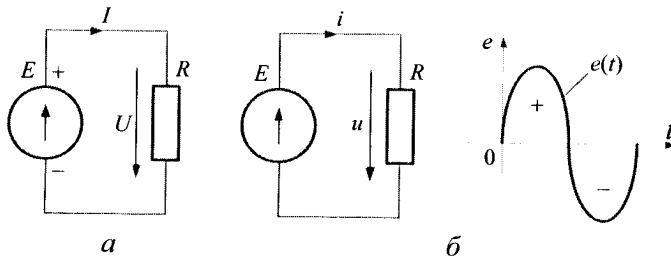


Рис. 1.3.1

У ланцюгах постійного струму, рис. 1.3.1, *а*, внутрішній напрям дії ЕРС джерела прийнято показувати у бік того полюса, на якому утворюються позитивні заряди. Напря́м дії струму у зовнішньому ланцюзі прийнято показувати від позитивно до негативно зарядженого полюса джерела. Напря́м дії напруги у приймачі завжди показують у той бік, що і напря́м дії струму.

У ланцюгах синусоїдального струму, рис. 1.3.1, *б*, прийнято позначати напрям ЕРС струму й напруги, використовуючи позитивний напівперіод, при якому струм не змінює свого напрямку.

При цьому, картина цих напрямів виходить аналогічною з ланцюгом постійного струму.

1.4. Закони електричних ланцюгів

Перший закон Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа належать до вузлів електричного ланцюга.

Означення 1.4.1. У будь-який момент часу алгебраїчна сума струмів у вузлі електричного ланцюга завжди дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^K i_k = 0, \tag{1.4.1}$$

де K – число гілок, підходящих до вузла (три і більше).

Струми, що підходять до вузла і струми, що відходять від нього, мають протилежні знаки. Уважатимемо струми позитивними, які підходять до вузла і братимемо їх у рівняннях першого закону Кірхгофа зі знаком (+), а що відходять від нього – негативними і братимемо їх зі знаком (-). Перший закон Кірхгофа фактично є наслідком відомого з курсу фізики принципу неперервності електричного струму, згідно з яким лінії струму завжди замкнуті й не мають ні початку, ні кінця.

Приклад 1.4.1. Для вузла, приведеного на рис. 1.4.1, а, скласти рівняння за першим законом Кірхгофа.

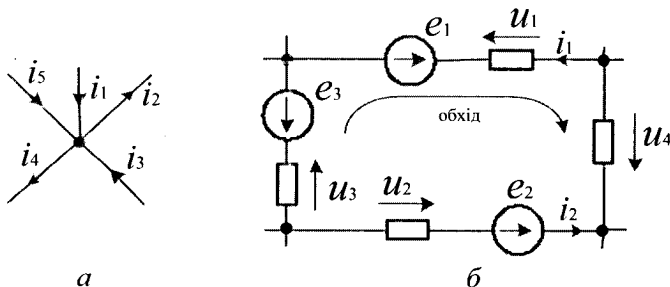


Рис. 1.4.1

Розв'язання. На підставі формули 1.4.1 маємо

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 + i_5 = 0 \quad \text{або} \quad i_1 + i_3 + i_5 = i_2 + i_4.$$

Таким чином, завжди сума струмів, що входять до вузла, дорівнює сумі струмів, що відходять від нього.

Другий закон Кірхгофа

Другий закон Кірхгофа належать до контурів електричного ланцюга.

Означення 1.4.2. У будь-який момент часу алгебраїчна сума ЕРС усіх джерел енергії контура дорівнює алгебраїчній сумі напруг на усіх прийमाках цього контура

$$\sum_{q=1}^Q e_q = \sum_{n=1}^N u_n, \quad (1.4.2)$$

де: Q – число джерел ЕРС у контурі; N – число приймачів контура.

Для складання рівняння за другим законом Кірхгофа необхідно заздалегідь (довільно) вибрати напрям обходу цього контура. Ті ЕРС і напруга, напрями яких співпадають з вибраним напрямом обходу, вважають позитивними і беруться у рівнянні зі знаком (+), а інші – зі знаком (-).

Приклад 1.4.2. Для контура, приведеного на рис. 1.4.1, б, скласти рівняння за другим законом Кірхгофа.

Розв'язання. Для цього заздалегідь обираємо (довільно) напрям обходу контура і, відповідно до формули 1.4.2, складаємо наступне рівняння

$$e_1 - e_2 - e_3 = -u_1 + u_4 - u_2 + u_3.$$

У рівнянні e_2 і e_3 , u_1 і u_2 узяті зі знаком (-), оскільки їх напрям дії не співпадає з напрямом обходу контура, а e_1 , u_4 і u_3 узяті зі знаком (+), оскільки напрям їх дії співпадає з напрямом обходу контура.

1.5. Параметри електричних ланцюгів

Будь-який електричний ланцюг і кожен його елемент окремо мають три параметри: опір – R ; індуктивність – L ; ємність – C .

Опір R характеризує здатність ланцюга перетворювати електромагнітну енергію на теплову. Кількість теплової енергії W_T , яка виділяється в опорі R при протіканні струму i впродовж часу t , визначається співвідношенням 1.5.1 і вимірюється у джоулях (Дж).

$$W_T = \int_0^t i^2 \cdot R \cdot dt. \quad (1.5.1)$$

Величину опору будь-якого елемента ланцюга визначають відношенням постійної напруги на цьому елементі до постійного струму у ньому й вимірюють в омах (Ом)

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1.5.2)$$

Індуктивність L характеризує здатність ланцюга накопичувати енергію магнітного поля. Таку здатність має будь-який провідник із струмом або система провідників. Кількість цієї енергії W_M , накопиченої у ланцюзі, залежить від величини струму i й вимірюється у джоулях (Дж). Така енергія не перетворюється на тепло, а існує у ланцюзі у вигляді деякого запасу. Коли струм у ланцюзі дорівнює нулю, запасу енергії магнітного поля у ньому немає. Величина індуктивності визначається як відношення потокозчеплення ланцюга ψ до струму i й вимірюється у генрі (Гн)

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (1.5.3)$$

Потокозчепленням називають суму магнітних потоків Φ усіх витків котушки w . У простому випадку для котушки на замкнутому сталевому сердечнику можна уважати, що її потокозчеплення знаходиться з виразу

$$\psi = \Phi \cdot w. \quad (1.5.4)$$

Ємність C характеризує здатність ланцюга накопичувати енергію електричного поля. Таку здатність мають будь-які два провідники, розділені діелектриком, наприклад, провідник, що висить над землею, будь-які два провідники лінії передачі і таке інше.

Кількість енергії електричного поля W_E , накопиченої у ланцюзі з ємністю C , залежить від величини напруги між провідниками, вимірюється у джоулях і знаходиться з виразу

$$W_E = \frac{C \cdot u^2}{2}. \quad (1.5.5)$$

Ця енергія не може перетворюватися у теплову, а існує у ланцюзі у вигляді деякого запасу. Якщо напруга між проводами відсутня, то і запасу енергії електричного поля у ланцюзі немає.

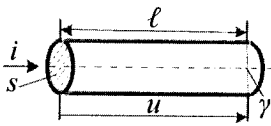
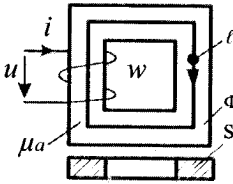
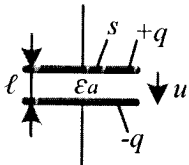
Величину ємності C визначають з виразу

$$C = q/u \quad (1.5.6)$$

і вимірюють у фарадах (Ф), де q – електричний заряд у кулонах (К).

У табл. 1.5.1. представлені конструкції деяких простих електротехнічних пристроїв і формули для розрахунку їх параметрів.

Таблиця 1.5.1.

№ п/п	Найменування пристрою	Ескіз пристрою	Формули для визначення параметрів пристрою
1	Прямолінійний ланцюг із постійним поперечним перерізом		$R = \frac{\ell}{\gamma \cdot S}$
2	Котушка на замкнутому сталевому сердечнику постійного перерізу		$L = \frac{\mu_a \cdot w^2 \cdot S}{\ell}$
3	Плоский конденсатор		$C = \frac{\epsilon_a \cdot S}{\ell}$

У цій таблиці прийняті наступні позначення: γ – питома електрична провідність провoda (1/Ом·м); μ_a – абсолютна магнітна проникність сталі (Гн/м); ϵ_a – абсолютна діелектрична проникність діелектрика (Ф/м); ℓ – довжина провoda, середня довжина сталевого сердечника,

відстань між пластинами конденсатора (м); S – площа поперечного перерізу провoda, площа поперечного перерізу сталевго сердечника, площа пластини конденсатора (м²); w – число витків обмотки; Φ – магнітний потік у сердечнику, вимірюваний у веберах (Вб).

1.6. Поняття про лінійні й нелінійні електричні ланцюги

Якщо γ , μ_a , ϵ_a , а отже (R, L, C) є постійними величинами і не залежать від струму чи напруги, то такі пристрої називають лінійними, а ланцюги, що їх містять – **лінійними ланцюгами**. Саме такі ланцюги розглядаються у даному підручнику.

Але існує цілий ряд пристроїв, у яких γ , μ_a і ϵ_a залежать від величини струмів (напруг). Такими, зокрема, є усі напівпровідникові прилади, котушки на насичених сталевих сердечниках, нагрівальні пристрої з великим діапазоном зміни температур (електрична дуга, лампи розжарювання), конденсатори з сегнетодіелектриками. Ланцюги, які мають такі пристрої, називають **нелінійними**.

Властивості нелінійного елемента електричного ланцюга не можуть бути виражені одним постійним числом і тому описуються його характеристикою. Для опорів це – залежності напруги від струму (вольт-амперні характеристики); для індуктивностей це – залежності потокозчеплення від струму (вебер-амперні характеристики); для ємностей це – залежності електричного заряду від напруги (кулон-вольтові характеристики). На рис. 1.6.1. показані приклади характеристик деяких лінійних (ЛЕЛ) і нелінійних (НЕЛ) елементів ланцюга.

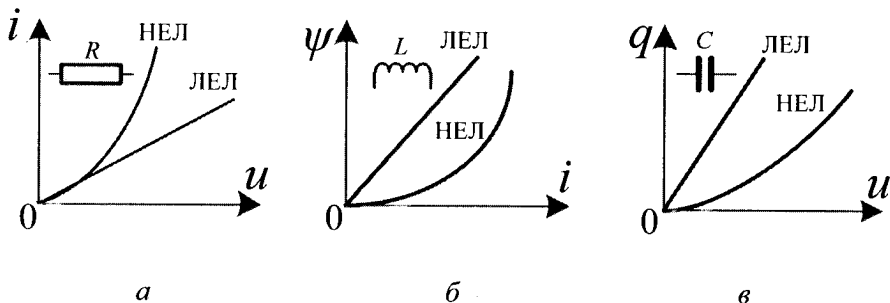


Рис. 1.6.1

На рис. 1.6.1, *a* – приведні вольт-амперні, рис. 1.6.1, *б* – вебер-амперні, а рис. 1.6.1, *в* – кулон-вольтові характеристики. Відмітимо, що характеристики усіх лінійних елементів ланцюга є прямими лініями, а нелінійних елементів – кривими.

1.7. Ідеальні елементи електричного ланцюга

Будь-який електротехнічний пристрій містить усі три параметри: опір R , індуктивність L і ємність C . Розглянемо котушку, виконану з проводу, яка має кінцеву провідність (це може бути нитка лампи розжарювання й обмотка трансформатора або електродвигуна), рис. 1.7.1.

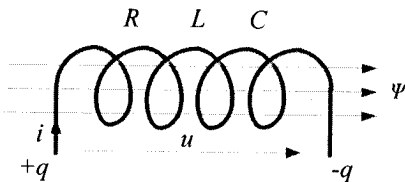


Рис. 1.7.1

При надходженні на її затискачі напруги u на кінцях котушки з'являються різнойменні заряди $+q$ і $-q$, а в обмотці починає протікати струм i . При цьому навколо витків обмотки виникає магнітне поле, яке характеризується потокозчепленням ψ .

Таким чином, відповідно до формул 1.5.2, 1.5.3 і 1.5.6, дана котушка має усі три вищезгадані параметри.

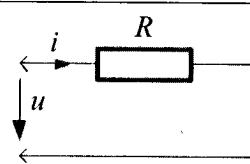
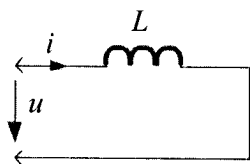
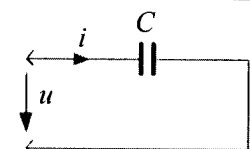
Для зручності аналізу й розрахунку електричних ланцюгів уводять до розгляду такі елементи, які за усіх умов характеризуються тільки одним параметром: тільки опором; тільки індуктивністю; тільки ємністю. При таких умовах вони називаються ідеальними. Графічне зображення ідеальних елементів електричного ланцюга приведено на рис. 1.2.2. позиціями 4, 5 і 6. У природі таких елементів не існує, але є пристрої за своїми властивостями близькі до ідеальних. Реостат (резистор) при низьких частотах володіє практично тільки опором R , а індуктивністю L і ємністю C у даному пристрої можна нехтувати. Котушка індуктивності на замкнутому феромагнітному сердечнику з малими тепловими втратами у ньому володіє на низьких частотах практично тільки індуктивністю L , а опором R і ємністю C у такій котушці можна нехтувати. Конденсатор з малими внутрішніми тепловими утратами володіє практично тільки ємністю C , а його активною провідністю G й індуктивністю L можна нехтувати.

Слід відзначити, що реостат, котушку індуктивності і конденсатор широко використовують для імітації (моделювання) ідеальних елементів при проведенні лабораторного практикуму з теорії електричних ланцюгів.

1.8. Співвідношення між струмом і напругою в ідеальних елементах електричного ланцюга

Перш ніж приступати до розрахунку електричних ланцюгів, слід з'ясувати, яким чином зв'язані між собою струм і напруга у кожному з ідеальних елементів ланцюга. Ці співвідношення відомі з курсу фізики і наведені у табл.1.8.1.

Таблиця 1.8.1

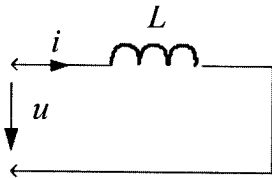
№п/п	Ідеальний елемент	Струм	Напруга
1		$i = \frac{u}{R}$	$u = i \cdot R$
2		$i = \frac{1}{L} \int u \cdot dt$	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$
3		$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$

Вони мають загальний характер і справедливі для ланцюгів, у яких струм і напруга змінюються у часі за будь-яким законом. Це найважливіші формули теорії електричних ланцюгів, які зустрінуться нам багато разів у цьому підручнику. Помітимо тут, що формули позиції 1 відповідають закону Ома, формули позиції 2 витікають із

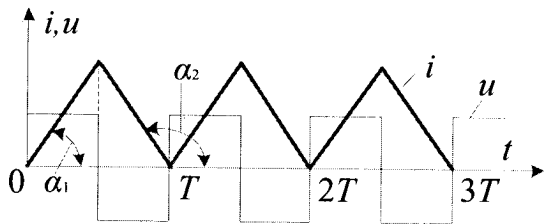
закону електромагнітної індукції, а формули позиції 3 виходять з визначення електричної ємності.

Із таблиці 1.8.1 видно, що тільки при опорі струм і напруга зв'язані між собою алгебраїчними співвідношеннями. Між струмом і напругою в індуктивності і ємності має місце інтегро-диференціальні співвідношення.

Приклад 1.8.1. Визначте форму прикладеної напруги у ланцюзі з ідеальною індуктивністю де діє пилоподібний періодичний струм, рис. 1.8.1, б.



а



б

Рис. 1.8.1

Розв'язання. Для знаходження форми прикладеної напруги використовуємо співвідношення $u = L \cdot di/dt$ (поз.2 табл.1.8.1), з якого виходить, що форма кривої напруги відповідає похідній від струму за часом. Із курсу математики відомо, що графічно похідна di/dt визначається у кожній точці кривої струму, як тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої відносно вісі t .

У нашому прикладі на ділянці від 0 до $T/2$ крива струму є прямою, що проходить через початок координат під гострим кутом $< 90^\circ$ до вісі t і тому похідна di/dt на цій ділянці є постійна, і позитивна величина. На ділянці від $T/2$ до T струм є прямою, що становить тупий кут з віссю t $\alpha_2 > 90^\circ$ і тому похідна di/dt на цій ділянці є постійна, і негативна величина. При цьому $\text{tg}\alpha_2 = \text{tg}(180^\circ - \alpha_1) = -\text{tg}\alpha_1$. Таким чином, графік шуканої напруги є відрізки прямих, що змінюють кожену половину періоду свій знак, як це показано на рис. 1.8.1, б.



Контрольні запитання

1. Що називають електричним ланцюгом?
2. Що є обов'язковою умовою існування струму в електричному ланцюзі?
3. З яких складових частин складається електричний ланцюг?
4. Що називають графічним зображенням електричного ланцюга?
5. Що таке гілка електричного ланцюга?
6. Що таке вузол електричного ланцюга?
7. Що таке контур електричного ланцюга?
8. Які є позначення основних елементів електричного ланцюга?
9. У яких напрямках діють струми, напруги і *ЕРС* в електричних ланцюгах?
10. Сформулюйте закони електричних ланцюгів.
11. Що характеризує опір, індуктивність і ємність в електричних ланцюгах?
12. Які бувають електричні ланцюги? Поясніть такі походження.
13. Які елементи відносять до ідеальних елементів електричного ланцюга і поясніть чому?
14. Наведіть співвідношення між струмом і напругою в ідеальних елементах електричного ланцюга?



Задачі для самостійного розв'язування

1. До ланцюга з ідеальною ємністю C прикладена синусоїдальна напруга $u = 20 \sin \omega t$, де $\omega = \text{const}$. Визначте закон зміни струму у часі у ланцюзі.

Відповідь: $i = 20 \omega C \sin (\omega t + 90^\circ)$.

2. До ланцюга з ідеальною індуктивністю L прикладена синусоїдальна напруга $u = 20 \sin \omega t$, де $\omega = \text{const}$. Визначте закон зміни струму у часі у ланцюзі.

Відповідь: $i = 20 \sin (\omega t - 90^\circ) / \omega L$.

3. До ланцюга з ідеальним опором R прикладена синусоїдальна напруга $u = 20 \sin \omega t$, де $\omega = \text{const}$. Визначте закон зміни струму у ланцюзі.

Відповідь: $i = 20 \sin \omega t / R$.

4. Котушка індуктивності на замкнутому сердечнику має наступні параметри: число витків $w = 100$; середня довжина сердечника $\ell = 10$ см; поперечний переріз сердечника $S = 1$ см²; абсолютна магнітна проникність сталі сердечника $\mu_a = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн/м. Визначте індуктивність L котушки.

Відповідь: $L = 20 \text{ мГн}$

5. Плоский конденсатор має наступні параметри: площа однієї з його пластин $S = 1 \text{ м}^2$; відстань між пластинами $0,25 \text{ мм}$; абсолютна діелектрична проникність ізолятора $\mu_a = 25 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Визначте ємність конденсатора.

Відповідь: $C = 100 \text{ мкФ}$.

6. Прямолінійний провідник довжиною 1000 м і поперечним перерізом $2,5 \text{ мм}^2$ виконаний із міді з питомою вагою провідника $\gamma = 57 \cdot 10^6 \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$. Визначте опір R такого провідника.

Відповідь: $R = 7 \text{ Ом}$.

7. Магнітний потік котушки у сталевому сердечнику $\Phi = 20 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$ при струмі у котушці $I = 0,5 \text{ А}$. Знайдіть індуктивність котушки, якщо $w = 1000$.

Відповідь: $L = 40 \text{ мГн}$.

8. Одна з пластин плоского конденсатора має позитивний заряд $q = 10^{-3} \text{ К}$. Напруга між обкладинками конденсатора $U = 500 \text{ В}$. Визначте ємність конденсатора.

Відповідь: $C = 10 \text{ мкФ}$.

9. У ланцюзі з котушкою індуктивності протікає постійний струм $I = 1 \text{ А}$. Знайдіть енергію магнітного поля котушки, якщо її індуктивність $L = 1 \text{ мГн}$.

Відповідь: $W_M = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$.

10. Енергія електричного поля, яка запасена у конденсаторі дорівнює $W_E = 0,05 \text{ Дж}$. Визначте ємність конденсатора, якщо він включений у ланцюг з постійною напругою $U = 100 \text{ В}$.

Відповідь: $C = 10 \text{ мкФ}$.



Коментарі

Визначення і позначення електричного ланцюга та його елементів узяті з [6, 17]. Напрямок дії ЕРС, струмів і напруг, закони і параметри електричних ланцюгів слідує [2, 17]. Поняття про лінійні і нелінійні, а також про ідеальні елементи електричного ланцюга, співвідношення між струмом і напругою в ідеальних елементах електричного ланцюга узяті з [4, 6].

Розділ 2 Ланцюги постійного струму

2.1. Деякі особливості ланцюгів постійного струму

Означення 2.1.1. Ланцюгом постійного струму називають ланцюг, у якому *EPC* джерел, а також струми і напруга на усіх його елементах залишаються незмінними у часі.

Ланцюги постійного струму містять усі три параметри: опір, індуктивність і ємність. Однак, при незмінних *EPC*, напруга на індуктивностях і струми у ємностях дорівнюють нулю. Насправді, при $I_L = const$ і $U_C = const$ напруга $U_L = dI_L / dt = 0$ і струм $I_C = dU_C / dt = 0$.

Таким чином, у ланцюзі постійного струму усі індуктивності закорочені ($U_L = 0$), а гілки з ємностями розімкнені ($I_C = 0$) і у роботі електричного ланцюга участі не приймають, рис. 2.1.1. Тому розрахунковим параметром ланцюга постійного струму є тільки опір *R* його елементів.

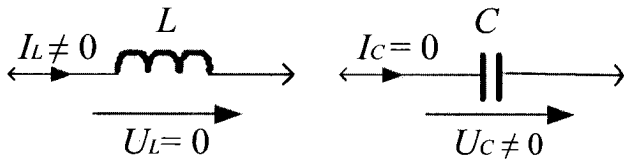


Рис. 2.1.1

2.2. Закон Ома і закони Кірхгофа для ланцюгів постійного струму

Закон Ома для будь-якої гілки ланцюга постійного струму визначається співвідношенням, показаним у табл.1.8.1, поз.1, у якому замість миттєвих значень u і i використовують значення постійної напруги U і струму I

$$I = U/R \text{ або } U = I \cdot R . \tag{2.2.1}$$

Величина, зворотна опору, називається провідністю. Вона позначається як G і вимірюється у сіменсах (См)

$$G = 1/R . \quad (2.2.2)$$

Тому закон Ома може бути записаний і в іншій формі

$$I = U \cdot G \text{ або } U = I/G . \quad (2.2.3)$$

Перший закон Кірхгофа для будь-якого вузла ланцюга постійного струму записується аналогічно загальній формулі 1.4.1, у якій змінні у часі струми i_k замінені на постійні струми I_k

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0 , \quad (2.2.4)$$

де K – число гілок, відповідних до цього вузла ланцюга (не менше трьох).

Струми, спрямовані до вузла, уважатимемо позитивними і їх необхідно уводити у рівняння 2.2.4 зі знаком (+), а струми, спрямовані від вузла, – негативними і їх необхідно уводити у рівняння зі знаком (-).

Другий закон Кірхгофа для будь-якого контура ланцюга постійного струму записується аналогічно виразу 1.4.2, у якого змінні у часі величини e_q і u_n замінені постійними величинами E_q і U_n

$$\sum_{q=1}^Q E_q = \sum_{n=1}^N U_n = \sum_{n=1}^N I_n \cdot R_n . \quad (2.2.5)$$

Як і раніше (див. розділ 1) EPC і струми, співпадаючі з прийнятим напрямом обходу контура, уважатимемо позитивними і необхідно уводити їх у рівняння зі знаком (+), а неспівпадаючі з обходом контура – негативними і необхідно уводити їх у рівняння зі знаком (-).

2.3. Еквівалентні схеми джерел електроенергії

Джерело електроенергії E розвиває EPC і має внутрішній опір $r_{вн}$. Дані параметри змінюються у залежності від сили струму I , яку віддає джерело у зовнішній ланцюг. Але у більшості випадків ці

зміни відносно малі, що дає можливість нехтувати ними і рахувати E і $r_{\text{вн}}$ постійними величинами, які не залежать від сили струму. На цій основі у розрахункових схемах ланцюгів можна зображати реальне джерело електроенергії еквівалентною схемою, рис. 2.3.1, а, у якій E – джерело з постійною EPC .

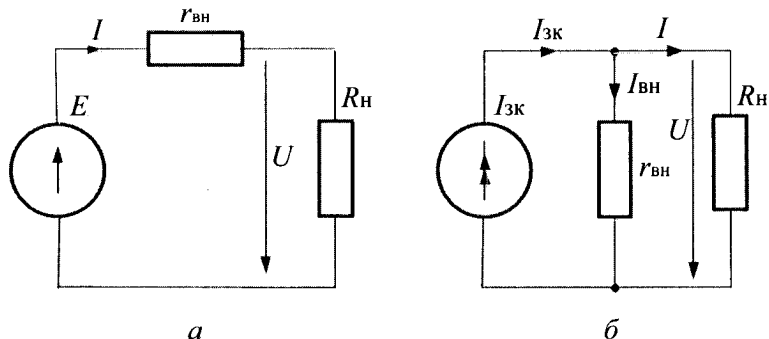


Рис. 2.3.1

Напряг цієї EPC позначено стрілкою, яка розміщена у колі, а $r_{\text{вн}}$ – його постійний внутрішній опір. Таке джерело електроенергії прийнято називати джерелом EPC . Напряга на його затискачах буде дорівнювати $U = E - I r_{\text{вн}}$. У багатьох випадках падіння напруги у середині джерела $I r_{\text{вн}} \ll E$ і, нехтуючи ним, можна рахувати, що напруга на затискачах джерела електроенергії буде дорівнювати $U = E = \text{const}$. Таке джерело електроенергії, напруга якого не залежить від сили струму, будемо називати **джерелом напруги**. При розрахунках електричних ланцюгів, у більшості випадків, ми будемо розглядати джерела EPC або напруги. Ідеальне джерело напруги має безмежно велику потужність, оскільки при опорі $R_n = 0$ його сила струму $I = \infty$. У джерела EPC сила струму обмежена внутрішнім опором (при закороченні джерела його сила струму дорівнює $I = E / r_{\text{вн}}$). Однак, у ряді випадків внутрішній опір $r_{\text{вн}}$ джерела може у декілька разів перевищувати опір зовнішньої навантаження, тобто $r_{\text{вн}} \gg R_n$. У таких ланцюгах сила струму, яка віддається джерелом, буде дорівнювати

$$I = \frac{E}{r_{\text{вн}} + R_n} \approx \frac{E}{r_{\text{вн}}} = I_{3\text{к}},$$

де $I_{3\text{к}}$ – сила струму закорочення джерела.

У подібних випадках доцільно розглядувати такі джерела, як джерела струму, тобто рахувати, що сила струму, яка віддається таким джерелом не залежить від опору ланцюга на яку він включений, а дорівнює його силі струму закорочення $I_{ЗК}$. Зміна опору у зовнішньому ланцюзі приводить лише до зміни напруги U на затискачах джерела. Від еквівалентної схеми джерела EPC можна перейти до еквівалентної схеми джерела струму, перетворивши при цьому рівняння напруги на рівняння струму. Згідно еквівалентної схеми, рис. 2.3.1, а, EPC джерела дорівнює $E = U + I r_{вн}$. Розділивши цей вираз на внутрішній опір джерела, отримаємо

$$\frac{E}{r_{вн}} = I_{ЗК} = \frac{U}{r_{вн}} + I = I_{вн} + I. \quad (2.3.1)$$

Про останній вираз можна сказати наступне: сила струму джерела $I_{ЗК}$ складається із струму I , який віддається у зовнішній ланцюг і струму $I_{вн}$, який закорочується у середині джерела з внутрішнім опором $r_{вн}$. Відповідна еквівалентна схема приведена на рис. 2.3.1, б. Джерело струму на схемах прийнято позначати колом з двома стрілками, див. рис. 1.2.2, рядом з яким писати букву I . Якщо у рівнянні 2.3.1 замінити опір провідністю, то отримаємо $I_{ЗК} = U \cdot (g_{вн} + G_n)$. Тобто, струм $I_{ЗК}$ джерела розподіляється між гілками схеми пропорційно їх провідностям. Зміна провідності навантаження змінює напругу на затискачах джерела струму, але не змінює струм. Чим більше провідність навантаження, тим менша сила струму $I_{вн}$, і якщо $G_n \gg g_{вн}$, то можна прийняти $I_{ЗК} \approx U \cdot G_n = I$. Це буде ідеальне джерело струму (джерело із заданим струмом). Напруга U на затискачах такого джерела струму змінюється прямо пропорційно опору навантаження, оскільки $U = I_{ЗК} / G_n = I_{ЗК} \cdot R_n$ і, якщо $R_n = \infty$, то напруга на затискачах джерела струму повинна бути безмежно великою. Але таких реальних джерел струму немає, тому теоретичне поняття джерела струму необхідно застосовувати для розрахунків при замірах опору навантаження у визначених межах.

По відношенню до зовнішнього ланцюга джерело EPC може бути заміщено еквівалентним джерелом струму. Умова еквівалентності визначається на основі того, що напруга на їх затискачах при обох

еквівалентних джерелах повинна бути однаковою. У джерела *EPC* напруга

$$U = E - I \cdot r_{\text{вн1}} = E - E \frac{r_{\text{вн1}}}{r_{\text{вн1}} + R_n} = E \frac{R_n}{r_{\text{вн1}} + R_n},$$

а у джерела струму

$$U = \frac{I_{3K}}{g_{\text{вн}} + G_n} = I_{3K} \frac{r_{\text{вн2}} \cdot R_n}{r_{\text{вн2}} + R_n}, \quad (2.3.2)$$

де: $r_{\text{вн1}}$ – внутрішній опір джерела *EPC*; $g_{\text{вн}} = 1/r_{\text{вн1}}$ – внутрішня провідність джерела струму. Умова еквівалентності по відношенню до зовнішнього навантаження обох джерел буде задовільнена, якщо $I_{3K} = E/r_{\text{вн1}}$ і $r_{\text{вн1}} = r_{\text{вн2}}$, що легко вбачається, якщо підставити ці значення у 2.3.2.

Але внутрішня енергетична умова цих джерел еквівалентною не є, оскільки утрату потужності всередині джерела *EPC* визначають виразом

$$I^2 \cdot r_{\text{вн}} = \left(\frac{E}{r_{\text{вн}} + R_n} \right)^2 \cdot r_{\text{вн}}, \text{ а у середині джерела струму } - I_{3K}^2 \cdot r_{\text{вн}} = \frac{U^2}{r_{\text{вн}}}.$$

2.4. Режим роботи електричних ланцюгів

Режими роботи електричних ланцюгів характеризуються певними значеннями струмів і напруг. Оскільки ці величини можуть приймати у загальному випадку різні значення, то режимів роботи може бути безліч.

Розглянемо найхарактерніші режими роботи електричного ланцюга, що містять одне джерело й один еквівалентний споживач електроенергії.

Можливі зміни значень опорів споживачів можна представити еквівалентною схемою, показаною на рис. 2.4.1, яка відображає наявність внутрішнього опору джерела *EPC* й можливі зміни еквівалентного опору навантаження шляхом уведення змінного резистора R_n .

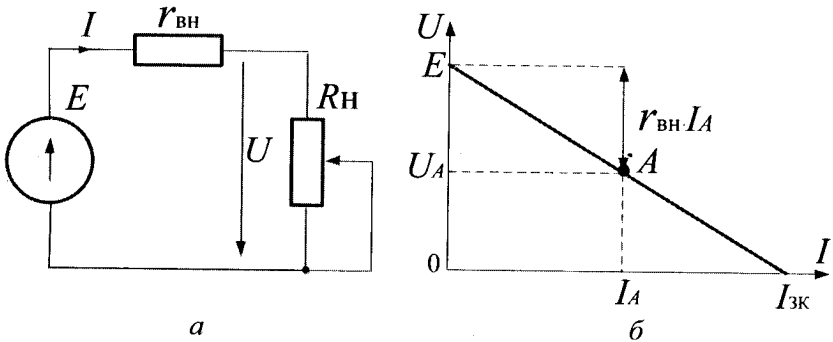


Рис. 2.4.1

Згідно другого закону Кірхгофа $E = I \cdot r_{вн} + I \cdot R_{н} = I \cdot r_{вн} + U$, що дозволяє записати основне рівняння залежності напруги U на клеммах джерела від споживаного зовнішнім ланцюгом струму I у вигляді

$$U = E - I \cdot r_{вн} . \tag{2.4.1}$$

Дане рівняння є рівнянням **зовнішньої характеристики** (характеристикою навантаження) джерела EPC . Враховуючи, що $E = const$ і $r_{вн} = const$, то залежність $U = f(I)$, (2.4.1), є лінійною функцією, яка може бути представлена графічно, рис. 2.4.1, б. Найхарактернішими точками характеристики навантаження є:

1. Режим холостого ходу ($R_{н} = \infty, I = 0$). Відповідно до рівняння 2.4.1 маємо $E = U$. Для визначення величини E необхідно відключити навантаження і заміряти напругу на клеммах джерела.
2. Режим замикання ($R_{н} = 0$). У цьому випадку на підставі рівняння 2.4.1 визначасмо струм замикання $I_{зк} = E/r_{вн}$.

Таким чином, здійснивши режим замикання джерела ($R_{н} = 0$) і, замірявши струм $I_{зк}$, можна визначити величину $r_{вн}$, що входить у розрахункову схему на рис. 2.4.2, а як $r_{вн} = E/I_{зк}$, де величина E уже визначена з режиму холостого ходу. Знаючи E і $r_{вн}$, легко визначити струм і напругу при будь-якому довільному режимі, наприклад, у точці A . Для цього режиму $U = E - I \cdot r_{вн}$. Ураховуючи $U_A = I_A \cdot R_{нА}$, де $R_{нА}$ – опір $R_{н}$, який відповідає режиму точки A , можна записати

$$I_A \cdot R_{нА} = E - r_{вн} \cdot I_A \Rightarrow \frac{E}{R_{нА} + r_{вн}} \Rightarrow U_A = \frac{E \cdot R_{нА}}{R_{нА} + r_{вн}}. \quad (2.4.2)$$

Таким чином, рівняння 2.4.2 дозволяє розрахувати напругу на клеммах джерела *EPC* і струм споживання зовнішнім ланцюгом при будь-якому довільному значенні еквівалентного опору навантаження $R_{нА}$.

Відзначимо, що на практиці часто неможливо реалізувати режим закорочення через велике значення $I_{зк}$. У цьому випадку можна реалізувати спочатку лише режим холостого ходу і визначити значення E , потім підключити до джерела будь-який опір навантаження і заміряти струм I і напругу U . Розрахункове значення внутрішнього опору, що використовується у схемі на рис. 2.4.2, знаходиться з рівняння 2.4.1 як

$$r_{вн} = (E - U)/I. \quad (2.4.3)$$

Після визначення величини $r_{вн}$ можна розраховувати U і I при будь-якому довільному значенні R_n за допомогою формул 2.4.2.

Маючи характеристику навантаження джерела *EPC*, можна визначити режим зовнішнього ланцюга графічно, використовуючи вольт-амперні характеристики споживача $U=f(I)$, рис. 2.4.2, *a*.

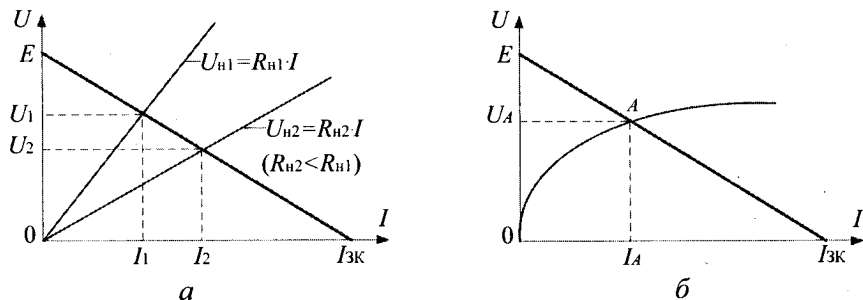


Рис. 2.4.2

Ураховуючи, що у ланцюзі завжди один і той же струм, точка перетину характеристики навантаження з вольт-амперною характеристикою споживача R_n однозначно визначить значення величин U і I . На рис. 2.4.2, *a* значення U_1 і I_1 відповідають опору навантаження $R_{н1}$, а значення U_2 і I_2 – опору навантаження $R_{н2}$.

Аналогічний підхід використовують для визначення режиму ланцюга при підключенні нелінійного навантаження з відомою вольт-амперною характеристикою $U = f(I)$ нелінійного елемента, рис. 2.4.2, б. У цьому випадку точка перетину його вольт-амперної характеристики з характеристикою навантаження реального джерела ЕРС однозначно визначає напругу на клеммах джерела U_A і струм споживача I_A при підключенні нелінійного навантажувального елемента.

2.5. Енергетичні співвідношення у ланцюгах постійного струму

Розглянемо рівняння $U = E - I \cdot r_{вн}$ характеристики навантаження для узагальненої схеми, рис. 2.4.1. Після множення усіх членів цього рівняння на I отримаємо

$$U \cdot I = E \cdot I - I^2 \cdot r_{вн} \Rightarrow P = P_1 + P_{вн}, \quad (2.5.1)$$

де: $P = E \cdot I$ – потужність, що віддається джерелом; $P_1 = U \cdot I$ – потужність, споживана споживачем; $P_{вн} = I^2 \cdot r_{вн}$ – втрата потужності на внутрішньому опорі реального джерела ЕРС.

Рівняння 2.5.1 називають **рівнянням балансу потужностей електричного ланцюга**. Проаналізуємо корисну потужність, що віддається джерелом у зовнішній ланцюг

$$P_1 = U \cdot I = R_n \cdot I^2 = \frac{E^2 \cdot R_n}{(R_n + r_{вн})^2}. \quad (2.5.2)$$

Це рівняння показує, що корисна потужність, що віддається у зовнішній ланцюг, залежить від співвідношення R_n і $r_{вн}$. Наприклад, у режимі холостого ходу ($R_n = \infty, I = 0$) потужність $P_1 = 0$, а у режимі закорочення ($R_n = 0, U = 0$) потужність P_1 також дорівнює нулю. Але існує оптимальне значення R_n , при якому потужність, що віддається у навантаження P_1 , буде максимальною.

Скориставшись виразом 2.5.1, візьмемо похідну і, прирівнявши її нулю, отримаємо оптимальне значення струму навантаження $I_{\text{опт}}$ при якому P_1 буде максимальною

$$\frac{dP_1}{dI} = E - 2I_{\text{опт}} \cdot r_{\text{вн}} = 0, \quad (2.5.3)$$

звідки $I_{\text{опт}} = \frac{E}{2 \cdot r_{\text{вн}}} = 0,5 \cdot I_{\text{ЗК}}$.

З урахуванням $I = \frac{E}{R_n + r_{\text{вн}}}$ величина $I = I_{\text{опт}}$ при $R_n = r_{\text{вн}}$.

Таким чином, максимальне значення потужності, що віддається у навантаження $P_{1\text{мак}}$, матиме місце при узгодженні зовнішнього опору ланцюга з внутрішнім опором джерела ЕРС, тобто при $R_n = r_{\text{вн}}$. При цьому чисельне значення $P_{1\text{мак}}$ визначається як

$$P_{1\text{мак}} = U \cdot I_{\text{опт}} = \frac{E \cdot R_n}{(R_n + r_{\text{вн}})} \cdot \frac{E}{(R_n + r_{\text{вн}})} = \frac{E^2 \cdot R_n}{(R_n + r_{\text{вн}})^2}.$$

Враховуючи $R_n = r_{\text{вн}}$, остаточно отримаємо

$$P_{1\text{мак}} = \frac{E^2 \cdot R_n}{(2r_{\text{вн}})^2} = \frac{E^2}{4r_{\text{вн}}}.$$

Очевидно, що при $R_n = r_{\text{вн}}$ потужність, що віддається джерелом P , ділиться порівну між $r_{\text{вн}}$ і R_n , тобто коефіцієнт корисної дії джерела дорівнює $\eta = P_1 / P = 0,5$.

Для силових електричних ланцюгів з великими струмами споживання звичайно рекомендується значення $\eta = 0,8 \div 0,9$, що має місце при $I = (0,1 \dots 0,2) \cdot I_{\text{ЗК}}$. Такий режим роботи силових електричних ланцюгів називають номінальним, на відміну від злагодженого режиму при $\eta = 0,5$ (тобто при $R_n = r_{\text{вн}}$), який використовують у слабкострумівих ланцюгах електроніки, автоматики й обчислювальної техніки.

2.6. Потужність та баланс потужностей ланцюга постійного струму

Енергія електромагнітного поля, що виробляється у джерелах постійного струму, перетворюється у прийमाках на тепло й інші види енергії, у тому числі й на механічну роботу.

Кількість енергії, що виділяється у приймачі з опором R за час t при протіканні струму I , визначається формулою $W_T = I^2 \cdot R \cdot t$ і вимірюється у джоулях (Дж). Енергія, віднесена до одиниці часу, є потужність приймача і вимірюється у ватах (Вт)

$$P = \frac{W_T}{t} = I^2 \cdot R = U \cdot I = U^2 \cdot G.$$

Для будь-якого, скільки завгодно складного ланцюга постійного струму, можна скласти енергетичний баланс, який безпосередньо слідує із закону збереження енергії: **алгебраїчна сума усіх потужностей джерел енергії дорівнює сумі усіх потужностей її приймачів**

$$\sum_{k=1}^K E_k \cdot I_k = \sum_{n=1}^N I_n^2 \cdot R_n, \quad (2.6.1)$$

де: K – число джерел енергії ланцюга; N – число приймачів енергії ланцюга.

В усіх прийमाках енергії струм і напруга мають один і той же напрям. Тому права частина рівняння 2.6.1 є арифметичною сумою потужностей усіх приймачів ланцюга. Що стосується лівої частини цього рівняння, то у деяких гілках складного ланцюга струм гілки може виявитися спрямованим протилежно дії ЕРС джерела енергії. Тоді добуток $E \cdot I$ буде негативним. Це означає, що при такому режимі роботи дане джерело не генерує енергію, а споживає її (наприклад, акумулятор при його зарядці).

Приклад 2.6.1. Складіть баланс потужностей для схеми електричного ланцюга приведенного на рис. 2.6.1, де: $I_1 = 6A$; $I_2 = 2A$; $I_3 = 4A$; $R_1 = 3\text{ Ом}$; $R_2 = 4\text{ Ом}$; $R_3 = 2\text{ Ом}$; $U = 26B$; $U_1 = 18B$; $U_{23} = 8B$.

Розв'язання. Підставивши значення струмів і напруг у рівняння 2.6.1, отримаємо $U \cdot I_1 = U_1 \cdot I_1 + U_{23} \cdot (I_2 + I_3)$. У лівій частині рівняння

маємо $U \cdot I_1 = 26 \cdot 6 = 156 \text{ Вт}$, а у правій частині – $U_1 \cdot I_1 + U_{23} \cdot (I_2 + I_3) = 18 \cdot 6 + 48 = 156 \text{ Вт}$, що свідчить про правильність розв'язання прикладу.

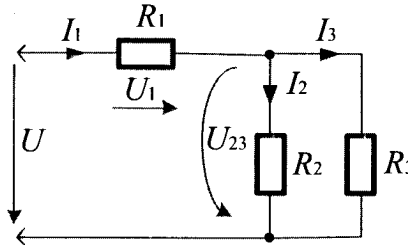


Рис. 2.6.1



Контрольні запитання

1. Які є особливості ланцюгів постійного струму?
2. Сформулюйте закон Ома для ланцюга постійного струму.
3. Сформулюйте закон Кірхгофа для ланцюга постійного струму.
4. Які є еквівалентні схеми ланцюгів постійного струму?
5. Що розуміють під режимом роботи електричного ланцюга?
6. Які є режими роботи електричного ланцюга постійного струму?
7. Що розуміють під енергетичним співвідношенням у ланцюгах постійного струму?
8. Що називають рівнянням балансу потужностей електричного ланцюга?
9. Що таке потужність електричного ланцюга?
10. Що таке баланс потужностей електричного ланцюга?



Задачі для самостійного розв'язування

1. В умовах прикладу 2.6.1. визначіть потужність, яку споживають ланцюги резисторів R_1 , R_2 , R_3 .

Відповідь: $P_1 = 108 \text{ Вт}$; $P_2 = 16 \text{ Вт}$; $P_3 = 32 \text{ Вт}$.

2. Використовуючи формулу 2.4.1, знайдіть напругу холостого ходу та струм замикання при таких даних: $E = 10 \text{ В}$; $U = 8 \text{ В}$; $I = 1 \text{ А}$; $r_{\text{вн}} = 0,5 \text{ Ом}$.

Відповідь: $U_{\text{хх}} = 10 \text{ В}$; $I_{\text{зк}} = 20 \text{ А}$.

3. Знайдіть провідність схеми ланцюга постійного струму, представленого у прикладі 2.6.1.

Відповідь: $G=13/12$ См .



Коментарі

При висвітленні деяких особливостей ланцюгів постійного струму, законів Ома і Кірхгофа ми спиралися на джерело [3]. Еквівалентні схеми джерел електроенергії постійного струму, режими роботи електричних ланцюгів узяті з [6, 7], а енергетичні співвідношення, потужність та баланс потужностей ланцюгів постійного струму – з [9, 11].

Розділ 3

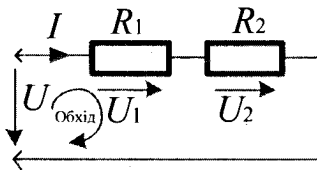
Методи розрахунку ланцюгів постійного струму

3.1. Розрахунок з одним джерелом енергії

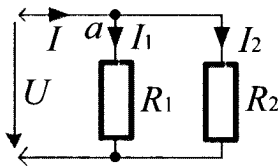
До них належать ланцюги з послідовним, паралельним і змішаним з'єднанням опорів. Їх розрахунок здійснюється за допомогою закону Ома і законів Кірхгофа.

Ланцюг із послідовним з'єднанням опорів

Це нерозгалужений одноконтурний ланцюг, по якому протікає один і той же струм I в усіх його опорах, рис. 3.1.1, а.



а



б

Рис.3.1.1

При цьому, на кожному з них виникає напруга, яка визначається законом Ома відповідно до формули 2.2.1. До такого ланцюга застосуємо другий закон Кірхгофа. Вибравши (довільно) напрям обходу контура за годинниковою стрілкою, отримаємо

$$U_1 + U_2 - U = 0 \text{ або } U_1 + U_2 = U$$

$$U_1 = I \cdot R_1; \quad U_2 = I \cdot R_2$$

Тоді $U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2) = I \cdot R_{\Sigma}$, де $R_{\Sigma} = R_1 + R_2$.

Таким чином, у послідовному ланцюзі постійного струму загальна напруга ланцюга U складається з суми напруг усіх його елементів, а загальний опір ланцюга R_{Σ} - з суми усіх його опорів.

Ланцюг із паралельним з'єднанням опорів

У такому ланцюзі напруга однакова на усіх його опорах, але струми у них у загальному випадку різні, рис. 3.1.1, б. До такого

ланцюга застосуємо перший закон Кірхгофа (вузол «а»), у результаті чого отримаємо $I - I_1 - I_2 = 0$ або $I = I_1 + I_2$, де відповідно до формули 2.2.1, $I_1 = U / R_1$, $I_2 = U / R_2$.

Струми I_1 і I_2 можна виразити й через провідність G відповідно до формул 2.2.2 і 2.2.3 $I_1 = U \cdot G_1$, де $G_1 = 1 / R_1$, $I_2 = U \cdot G_2$, де $G_2 = 1 / R_2$. Тоді $I = U \cdot G_1 + U \cdot G_2 = U \cdot (G_1 + G_2) = U \cdot G_\Sigma$, де $G_\Sigma = G_1 + G_2 = 1 / R_\Sigma$.

Таким чином, у паралельному ланцюзі постійного струму загальний струм I є сумою струмів, а загальна провідність G_Σ ланцюга є сумою провідностей усіх його гілок. Загальний опір ланцюга з двох паралельних гілок визначається формулою

$$R_\Sigma = \frac{1}{G_\Sigma} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.1.1)$$

Ланцюг із послідовно-паралельним з'єднанням опорів

При розрахунку такого ланцюга застосовуються як перший, так і другий закони Кірхгофа. Для вузла «а», рис. 3.1.2, а, відповідно до формули 2.2.4, маємо $I_1 = I_2 + I_3$, а для лівого контура, використовуючи формулу 2.2.5 при указаному напрямі обходу, отримаємо $U = U_1 + U_{23}$, де U_{23} – напруга на двох паралельно з'єднаних резисторах R_2 і R_3 .

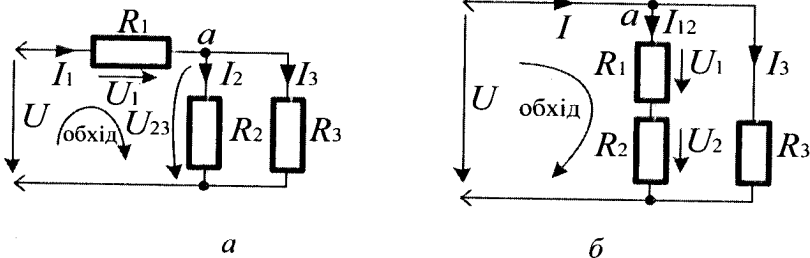


Рис. 3.1.2

Таким чином, досліджуваний ланцюг шляхом спрощень може бути зведений до послідовного ланцюга, рис. 3.1.1, а. Загальний опір цього ланцюга буде дорівнювати

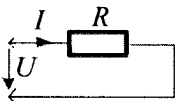
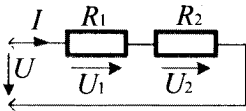
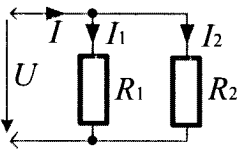
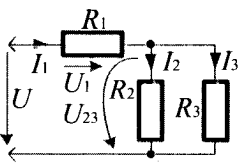
$$R_\Sigma = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.1.2)$$

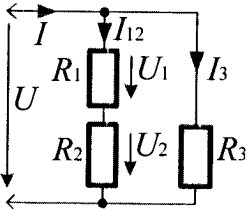
Ланцюг із паралельно-последовним з'єднанням опорів

Для розрахунку такого ланцюга слід використати як перший, так і другий закони Кірхгофа. Наприклад, для вузла «а», рис. 3.1.2, б, відповідно до формули 2.2.4, маємо $I = I_{12} + I_3$, а для лівого контура ланцюга (указаний прийнятий напрям його обходу) відповідно до формули 2.2.5, отримаємо $U = U_1 + U_2 = I_{12} \cdot (R_1 + R_2) = I_{12} \cdot R_{12}$, де $R_{12} = R_1 + R_2$. Отже, цей ланцюг шляхом спрощень може бути зведений до паралельного ланцюга.

Його провідність визначається відповідно до формули $G_{\Sigma} = G_{12} + G_3$, де $G_{12} = 1 / R_{12}$ і $G_3 = 1 / R_3$, а загальний опір – відповідно до формул 2.4.1 і 2.4.2. Основні результати, отримані при дослідженні вище зазначених ланцюгів постійного струму, представлені у табл. 3.1.1.

Таблиця 3.1.1

№ п/п	Схема ланцюга	Закон Ома і закони Кірхгофа	Опір і провідність
1		$U = I \cdot R$ $I = U \cdot G$	$R = U/I$ $G = 1/R = I/U$
2		$U = U_1 + U_2$ $U_1 = I \cdot R_1$ $U_2 = I \cdot R_2$ $U = I \cdot R_{\Sigma} = I / G_{\Sigma}$	$R_{\Sigma} = R_1 + R_2$ $G_{\Sigma} = \frac{1}{R_{\Sigma}} = \frac{1}{R_1 + R_2}$
3		$I = I_1 + I_2$ $I_1 = U / R_1 = U \cdot G_1$ $I_2 = U / R_2 = U \cdot G_2$ $I = U / R_{\Sigma} = U \cdot G_{\Sigma}$	$G_1 = 1 / R_1; G_2 = 1 / R_2$ $G_{\Sigma} = G_1 + G_2$ $R_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
4		$I_1 = I_2 + I_3$ $I_1 = U / R_{\Sigma}; I_2 = U_{23} / R_2$ $I_3 = U_{23} / R_3 = U_{23} \cdot G_3$ $U = U_1 + U_{23}$ $U_1 = I_1 \cdot R_1$ $U_{23} = I_1 \cdot R_{23}$	$R_{\Sigma} = R_1 + R_{23}$ $R_{23} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$ $G_1 = 1 / R_1;$ $G_2 = 1 / R_2;$ $G_3 = 1 / R_3$

5		$I = I_{12} + I_3$ $I_{12} = U / R_{12} = U \cdot G_{12}$ $I_3 = U / R_3 = U \cdot G_3$ $I = U / R_{\Sigma} = U \cdot G_{\Sigma}$ $U = U_1 + U_2$ $U_1 = I_{12} \cdot R_1$ $U_2 = I_{12} \cdot R_2$	$G_{12} = 1 / R_{12} = 1 / (R_1 + R_2)$ $G_3 = 1 / R_3$ $G_{\Sigma} = G_{12} + G_3$ $R_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}$
---	---	---	---

Приклад 3.1.1. До схеми ланцюга, наведеного на рис. 3.1.3, *а*, підключена постійна напруга $U = 100$ В. Параметри усіх його гілок відомі: $R_1 = 10$ Ом; $L = 25 \cdot 10^{-3}$ Гн; $R_2 = 20$ Ом; $C = 0,2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Знайдіть струм I у ланцюзі.

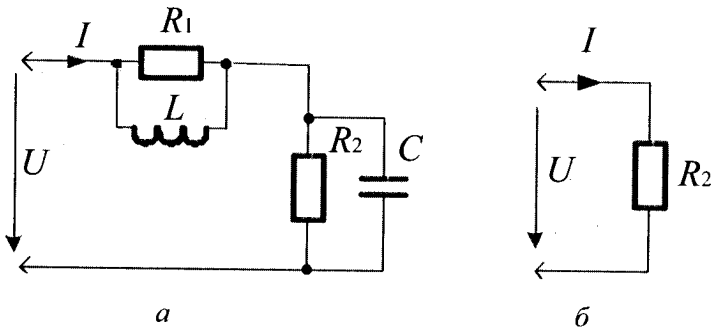


Рис. 3.1.3

Розв'язання. У ланцюзі постійного струму індуктивності закорочені, а гілки з ємностями розірвані (див. § 2.1). Тому розрахункова схема ланцюга набуває вигляду, показаного на рис. 3.1.3, *б*. За цих умов загальний струм ланцюга буде дорівнювати $I = U/R_2 = 100/20 = 5$ А.

Приклад 3.1.2. Для схеми ланцюга, зображеного на рис. 3.1.4, відомі опори усіх його гілок, а також дані ватметра: $R_1 = 3$ Ом;

$R_2 = 4 \text{ Ом}$; $R_3 = 2 \text{ Ом}$; $P = 32 \text{ Вт}$. Знайдіть струм і напругу на вході ланцюга.

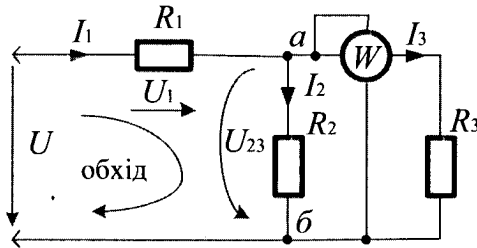


Рис. 3.1.4

Розв'язання. Для розрахунку струму I і напруги U необхідно визначити струм I_3 і напругу U_{23} на резисторі R_3 . Використовуючи формулу 2.3.1, маємо $P = I_3^2 \cdot R_3 = U_{23} \cdot I_3$, звідси

$I_3 = \sqrt{P/R_3} = \sqrt{32/2} = 4 \text{ А}$. Тоді $U_{23} = P/I_3 = 32/4 = 8 \text{ В}$. Потужність P

вимірюється ватметром W , включеним у ланцюг, як показано на рис. 3.1.4. Він має обмотку струму й обмотку напруги. Перша включається у ланцюг послідовно з резистором R_3 , а друга – паралельно йому. Знаючи напругу U_{23} між точками «а» і «б» схеми, обчислюємо струм $I_2 = U_{23} / R_2 = 8/4 = 2 \text{ А}$. Тоді струм I_1 ланцюга визначають згідно з першим законом Кірхгофа для вузла «а» $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ або $I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 4 = 6 \text{ А}$. Знаходимо напругу U_1 на резисторі R_1 : $U_1 = I_1 \cdot R_1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ В}$. Скориставшись другим законом Кірхгофа, знаходимо напругу на вході ланцюга: $U_1 + U_{23} - U = 0$ або $U = U_1 + U_{23} = 18 + 8 = 26 \text{ В}$.

3.2. Розрахунок із використанням законів Кірхгофа

Закони Кірхгофа, як правило, використовують для розрахунку складних ланцюгів постійного струму.

Означення 3.2.1. Складним ланцюгом називають ланцюг з розгалуженими електричними ланцюгами й багатьма джерелами енергії. Приклад такого ланцюга показаний на рис. 3.2.1.

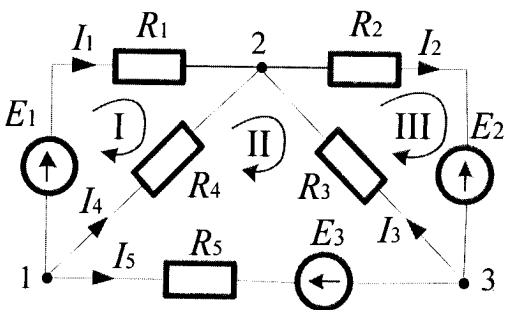


Рис.3.2.1

Для його розрахунку, тобто для визначення струмів у всіх його гілках, необхідно скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа. Загальне число рівнянь у системі повинно відповідати числу невідомих струмів, тобто числу гілок. Для нашого складного ланцюга це п'ять невідомих струмів. При цьому:

а) за першим законом Кірхгофа складається число рівнянь, на одиницю менше числа вузлів ланцюга, оскільки рівняння для останнього вузла є наслідком усіх попередніх рівнянь і не дає нічого нового для розрахунку. У нашому прикладі за першим законом Кірхгофа потрібно скласти два рівняння, оскільки у складному ланцюзі три вузли;

б) за другим законом Кірхгофа складають усі відсутні рівняння для будь-яких довільно обраних контурів складного ланцюга. У нашому прикладі за другим законом Кірхгофа, потрібно скласти три рівняння ($5 - 2 = 3$).

Довільно вибираємо напрям струмів у всіх гілках складного ланцюга і напрям обходу вибраних контурів. При складанні рівнянь за першим законом Кірхгофа, згідно з формулою 2.2.4 струми, які входять у вузол, вважають позитивними й беруть зі знаком (+), а струми, що виходять із вузла, – негативними й беруть зі знаком (-). При складанні рівнянь за другим законом Кірхгофа, відповідно до формули 2.2.5, ЕРС і струми, що співпадають з обраним напрямом обходу контура, братимемо зі знаком (+), а ті, що не співпадають – зі знаком (-).

Слід відзначити, що довільність вибору напрямів струмів у гілках ланцюга і напрямів обходу контурів не впливає на кінцевий результат розрахунку. Якщо у результаті розрахунків деякі зі знайдених струмів матимуть знак (-), то це означатиме, що їх істинний напрям є протилежним заздалегідь прийнятому.

Прийнявши для нашого ланцюга напрям струмів у гілках і напрям обходу у трьох обраних контурах, як показано на рис. 3.2.1, складасмо таку систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{вузол 1} \rightarrow -I_1 - I_4 - I_3 = 0; \\ \text{вузол 2} \rightarrow I_1 + I_4 + I_5 - I_2 = 0; \\ \text{контур 1} \rightarrow I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 = E_1; \\ \text{контур 2} \rightarrow I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_3 = E_3; \\ \text{контур 3} \rightarrow I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = -E_2. \end{array} \right.$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо струми в усіх п'яти гілках цього складного ланцюга.

Алгоритм розрахунку ланцюгів з використанням законів Кірхгофа

1. Довільно вибрати напрями струмів у всіх гілках розрахункової схеми.
2. Вибрати контури у схемі й довільно обрати напрями їх обходу.
3. Скласти число рівнянь за першим законом Кірхгофа на одиницю менше числа вузлів у схемі.
4. За другим законом Кірхгофа скласти усі відсутні рівняння для будь-яких довільно обраних контурів схеми.
5. Розв'язати отриману систему рівнянь відносно невідомих струмів схеми.
6. Виконати перевірку розв'язку, використовуючи усі вузли схеми.

Приклад 3.2.1.

Розрахуйте усі струми у складному ланцюзі схеми, приведеному на рис. 3.2.2, де відомі величини й напрями дії ЕРС джерел і опір в усіх його гілках: $E_1 = 20B$; $E_2 = 16B$; $E_3 = 10B$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$; $R_3 = 50 \text{ Ом}$.

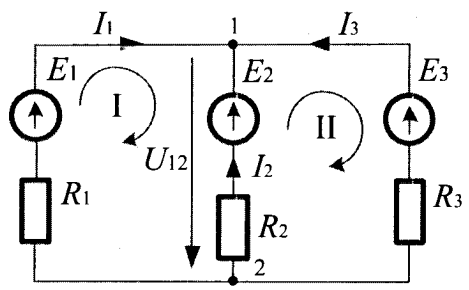


Рис.3.2.2

Розв'язання. Згідно з кроками 1 і 2 алгоритму, довільно обираємо напрями струмів у гілках схеми, контури й напрями їх обходу, рис. 3.2.2. Використовуючи кроки 3 і 4 алгоритму, складаємо систему рівнянь. Для розрахунку трьох невідомих струмів складаємо систему з трьох рівнянь. При цьому за першим законом Кірхгофа складаємо тільки одне (у схемі тільки два вузли), а за другим законом Кірхгофа – два рівняння ($3 - 1 = 2$). За цих умов система рівнянь відносно невідомих струмів I_1, I_2 і I_3 має вигляд:

$$\begin{cases} \text{для вузла} & 1 \rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0; \\ \text{для контура} & 1 \rightarrow I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = E_1 - E_2; \\ \text{для контура} & 2 \rightarrow I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Підставивши у цю систему рівнянь чисельні значення EPC джерел і чисельні значення резисторів, отримаємо:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0; \\ 2 \cdot I_1 - 4 \cdot I_2 + 0 = 4; \\ 0 + 4 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 = 6. \end{cases}$$

Користуючись кроком 5 алгоритму, виконаємо розв'язання даної системи рівнянь. Для цього зведемо три рівняння до одного. Виразимо I_1 з другого рівняння через I_2 , а I_3 з третього - через I_2 і отримаємо: $I_1 = (4 + 4 \cdot I_2) / 2 = 2 + 2 \cdot I_2$; $I_3 = -(6 - 4 \cdot I_2) / 5 = (-1,2 + 0,8 \cdot I_2)$. Підставивши отримані значення I_1 і I_3 у перше рівняння системи, отримаємо $(2 + 2 \cdot I_2) + I_2 + (-1,2 + 0,8 \cdot I_2) = 0$ або $3,8 \cdot I_2 + 0,8 = 0$. Тоді $I_2 = -0,8 / 3,8 = -0,21 A$. Після цього знаходимо струми I_1 і I_3 : $I_1 = 2 - 0,42 = 1,58 A$; $I_3 = -1,2 - 0,17 = -1,37 A$. Слід відмітити, що знак (-) у струмів I_2 і I_3 означає, що реальний напрям цих струмів протилежний до заздалегідь обраного. Згідно з кроком 5 алгоритму, виконаємо перевірку рішення за допомогою першого закону Кірхгофа для вузла 1 ланцюга $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Підставивши усі значення струмів, отримаємо $+1,58 - 0,21 - 1,37 = 0$. Таким чином, приклад розв'язаний правильно.

3.3. Розрахунок методом контурних струмів

В основі методу лежить уявлення про незалежні контури, у яких протікають незалежні один від одного контурні струми.

Означення 3.3.1. Контурним струмом називають умовний (уявний) струм, що замикається тільки по своєму контуру.

Означення 3.3.2. Незалежним контуром називають контур, який має хоча би одну нову гілку.

Алгоритм розрахунку ланцюгів методом контурних струмів

1. Довільно обрати контури й напрями контурних струмів.
2. Позначити відповідні вузли схеми.
3. Обрати незалежні контури у схемі. Число незалежних контурів визначити формулою $n = p - q + 1$, де: p – число гілок; q – число вузлів схеми.
4. Довільно показати у обраних незалежних контурах напрям їх обходу.
5. Записати рівняння для кожного обраного контура, використовуючи тільки контурні струми. При цьому, якщо контурний струм суміжного контура спрямований проти власного контурного струму, то полярність падіння напруги на суміжній гілці, викликана сусіднім струмом, береться із знаком (-), а якщо співпадає, то - із знаком (+).
6. Записати отриману систему на кроці 5 алгоритму у стандартній формі запису системи рівнянь алгебри для контурних струмів.
7. Визначити значення власних, взаємних опорів та значення контурних EPC .
8. Підставити значення власних, взаємних опорів та значення контурних EPC у систему рівнянь, яку отримано на кроці 5 алгоритму.
9. Розв'язати систему рівнянь із визначеними значеннями на кроці 7 алгоритму.
10. Користуючись контурними струмами, знайти істинні струми у гілках схеми, застосовуючи перший закон Кірхгофа.
11. Виконати перевірку розрахунку струмів у гілках, використовуючи вузли схеми, знайдені на кроці 2 алгоритму.

Приклад 3.3.1. Розрахуйте струми у гілках схеми, рис. 3.3.1, методом контурних струмів, у якій: $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$; $R_3 = R_4 = 100 \text{ Ом}$; $R_5 = 20 \text{ Ом}$; $E_1 = 5 \text{ В}$; $E_2 = 10 \text{ В}$.

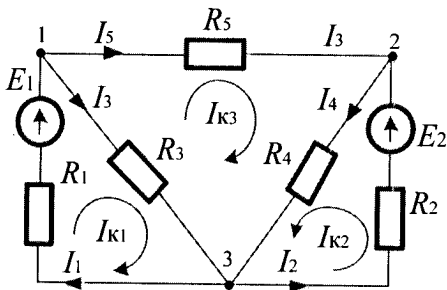


Рис. 3.3.1

контурів. Для нашого прикладу: $p = 5$; $q = 3$; $n = 5 - 3 + 1 = 3$.

На кроці 4 алгоритму у вибраних незалежних контурах довільно вказуємо напрям їх обходу, як показано на рис. 3.3.1. Користуючись кроком 5 алгоритму, для кожного вибраного контура запишемо рівняння, система яких матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3) \cdot I_{K1} - R_3 I_{K3} = E_1; \\ (R_2 + R_4) \cdot I_{K2} + R_4 \cdot I_{K3} = E_2; \\ (R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{K3} - R_3 \cdot I_{K1} + R_4 \cdot I_{K2} = 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

У цій системі рівнянь невідомими є контурні струми I_{K1} , I_{K2} , I_{K3} . Використовуючи крок 6 алгоритму, запишемо отриману систему у стандартній формі запису системи рівнянь алгебри для контурних струмів:

$$\begin{cases} R_{11} \cdot I_{K1} + R_{12} \cdot I_{K2} - R_{13} \cdot I_{K3} = E_{11}; \\ R_{21} \cdot I_{K1} + R_{22} \cdot I_{K2} + R_{23} \cdot I_{K3} = E_{22}; \\ -R_{31} \cdot I_{K1} + R_{32} \cdot I_{K2} + R_{33} \cdot I_{K3} = E_{33}, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

де: R_{KK} — власний опір k -го контура; $R_{KM} = R_{MK}$ — взаємний опір, що входить одночасно у k -й і m -й контури; E_{KK} — контурна ЕРС k -го контура.

Згідно кроку 7 алгоритму, знаходимо власні: $R_{11} = R_1 + R_3 = 5 + 10 = 15$ Ом; $R_{22} = R_2 + R_4 = 5 + 10 = 15$ Ом; $R_{33} = R_3 + R_4 + R_5 = 10 + 10 + 20 = 40$ Ом та взаємні опори контурів: $R_{12} = R_{21} = 0$ (загальних гілок

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму, довільно обираємо напрям струмів у кожному з елементів схеми. Використовуючи крок 2 алгоритму, позначимо відповідним чином вузли схеми (1, 2, 3). На кроці 3 алгоритму, користуючись формулою $n = p - q + 1$, визначаємо кількість незалежних

немає), $R_{13} = R_{31} = R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_{23} = R_{32} = R_4 = 10 \text{ Ом}$, а також контурні EPC : $E_{11} = E_1 = 5B$; $E_{22} = E_2 = 10B$; $E_{33} = 0B$. Користуючись кроком 8 алгоритму, підставляємо дані по власним і взаємним опорам, а також контурним EPC у систему рівнянь 3.3.2, у результаті чого отримаємо:

$$\begin{cases} 15 \cdot I_{K1} + 0 \cdot I_{K2} - 10 \cdot I_{K3} = 5; \\ 0 \cdot I_{K1} + 15 \cdot I_{K2} + 10 \cdot I_{K3} = 10; \\ -10 \cdot I_{K1} + 10 \cdot I_{K2} + 40 \cdot I_{K3} = 0. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Користуючись кроком 9 алгоритму, розв'язуємо систему рівнянь 3.3.3 й знаходимо контурні струми I_{K1} , I_{K2} , I_{K3} . Для їх визначення використовуємо будь-яке стандартне рішення системи рівнянь, наприклад, за правилом Крамера можна записати:

$$I_{K1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_{K3} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де: Δ – визначник матриці системи, складеної із значень R_{ij} ; Δ_i – визначник заміщеної матриці, отриманої шляхом заміни у матриці системи $\|R_{ij}\|$ відповідного стовпчика стовпчиком вільних членів.

Таким чином, визначник матриці системи буде дорівнювати

$$\Delta = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 15 & 10 \\ -10 & 10 & 40 \end{pmatrix} = 6000.$$

Визначники заміщеної матриці відповідно будуть мати такий вигляд:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 10 & 15 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} = 2500; \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -10 \\ 0 & 10 & 10 \\ -10 & 0 & 40 \end{pmatrix} = 4500;$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 15 & 10 \\ -10 & 10 & 0 \end{pmatrix} = -750.$$

Користуючись кроком 9 алгоритму, знаходимо контурні струми :

$$I_{K1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2500}{6000} = \frac{5}{12} A; \quad I_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4500}{6000} = \frac{3}{4} A;$$

$$I_{K3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-750}{6000} = -\frac{1}{8} A.$$

Згідно з кроком 10 алгоритму, використовуючи значення контурних струмів і перший закон Кірхгофа, обчислюємо істинні значення струмів у кожній гілці схеми:

$$I_1 = I_{K1} = \frac{5}{12} A; \quad I_2 = I_{K2} = \frac{3}{4} A; \quad I_3 = I_{K1} - I_{K3} = \frac{13}{24} A;$$

$$I_4 = I_{K2} + I_{K3} = \frac{5}{8} A; \quad I_5 = -I_{K3} = -\frac{1}{8} A. \text{ Знак (-) означає, що струм}$$

у схемі необхідно направити у протилежний бік.

Користуючись кроком 11 алгоритму, виконаємо перевірку правильності виконаного розрахунку струмів у кожній гілці схеми. Для цього використаємо перший закон Кірхгофа для вузлів (1, 2, 3) схеми.

Для вузла 1: $I_1 + I_5 - I_3 = 0; \quad \frac{5}{12} + \frac{1}{8} - \frac{13}{24} = 0.$ Для вузла 2: $I_2 - I_5 - I_4 = 0;$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{5}{8} = 0.$ Для вузла 3: $I_3 + I_4 - I_1 - I_2 = 0; \quad \frac{13}{24} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} - \frac{3}{4} = 0.$

Таким чином, розрахунок струмів у гілках схеми прикладу виконаний правильно.

3.4. Розрахунок методом вузлових напруг

Цей метод ґрунтується на тому, що струми в усіх гілках складного ланцюга можна розрахувати, якщо відома напруга на усіх його гілках.

На рис. 3.4.1, а представлена схема деякого складного ланцюга, що має шість гілок. Розглянемо одну з гілок цього ланцюга, розташовану між будь-якими двома вузлами «*k*» і «*m*», рис. 3.4.1, б.

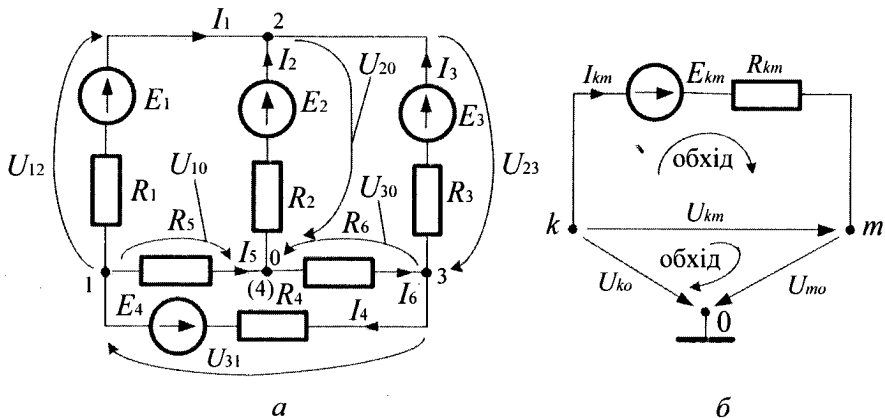


Рис. 3.4.1

Застосувавши другий закон Кірхгофа для цієї гілки і враховуючи, що $Y_{km} = 1/R_{km}$, отримаємо

$$I_{km} \cdot R_{km} + E_{km} - U_{km} = 0$$

або

$$I_{km} = (U_{km} - E_{km}) / R_{km} = Y_{km} \cdot (U_{km} - E_{km}). \quad (3.4.1)$$

У цій формулі струм, напруга і ЕРС позначені подвійними індексами. При цьому всі вони спрямовані (для зручності запису) від вузла «k» до вузла «m». Якщо реальні струми, напруга і ЕРС будуть спрямовані у протилежний бік, то вони увійдуть до рівняння 3.4.1 зі зворотним знаком (зі знаком -). Тут E_{km} і R_{km} - відомі з умови завдання величини. Якщо знайти напругу U_{km} , то струм I_{km} у цій гілці також буде знайдений.

У реальних схемах може бути n-гілок і, отже, n – невідомих напруг. Для їх знаходження необхідно заздалегідь знайти тільки ті з них, які діють між кожним з вузлів ланцюга й опорним вузлом «0» (обираються довільно). Вони називаються **вузловими напругами**. Для схеми рис. 3.4.1, а вузловими напругами є U_{10} , U_{20} , U_{30} . Усі

вони спрямовані до опорного вузла «0». Якщо вузлова напруга відома, то напруга між усіма іншими вузлами легко знаходиться відповідно до другого закону Кірхгофа, рис. 3.4.1, б, за формулою

$$U_{km} = U_{k0} - U_{m0} . \quad (3.4.2)$$

У нашому прикладі:

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} ; U_{31} = U_{30} - U_{10} ; U_{23} = U_{20} - U_{30} .$$

Помітимо, що якщо опорний вузол «0» заземлити, тобто прийняти його електричний потенціал рівним «0», то тоді вузлові напруги U_{10} , U_{20} і U_{30} будуть також електричними потенціалами вузлів 1, 2 і 3.

Тобто, **вузлова напруга є проміжною невідомою** для цього методу розрахунку. Відносно них складається система рівнянь. При цьому використовується перший закон Кірхгофа. Очевидно, що вузлових напруг менше, ніж струмів у гілках. Тому цей метод дозволяє істотно знизити порядок системи рівнянь у порівнянні з безпосереднім застосуванням першого й другого законів Кірхгофа.

Розглянемо складання системи рівнянь методом вузлової напруги. Згідно з першим законом Кірхгофа, алгебраїчна сума струмів будь-якого вузла ланцюга дорівнює нулю. Кожен з цих струмів визначається формулою 3.4.1. Тоді для кожного вузла ланцюга маємо

$$\sum I_{km} = \sum U_{km} \cdot Y_{km} - \sum E_{km} Y_{km} = 0$$

або

$$\sum Y_{km} \cdot (U_{k0} - U_{m0}) = \sum E_{km} \cdot Y_{km} ,$$

де: $\sum E_{km} \cdot Y_{km}$ – сума добутоків E_{PC} на провідність усіх гілок, відповідних до даного вузла ланцюга (дані величини відомі з умов завдання); $\sum Y_{km} \cdot (U_{m0} - U_{k0})$ – сума добутоків провідності на напругу гілок (Y_{km} – відома з умов завдання, а U_{m0} і U_{k0} – невідомі вузлові напруги). Виконуючи ряд нескладних перетворень отримаємо систему рівнянь відносно невідомих вузлових напруг ланцюга у такому виді:

$$\begin{cases} U_{10} \cdot Y_{11} + U_{20} \cdot Y_{12} + U_{30} \cdot Y_{13} = J_{11}; \\ U_{10} \cdot Y_{21} + U_{20} \cdot Y_{22} + U_{30} \cdot Y_{23} = J_{22}; \\ U_{10} \cdot Y_{31} + U_{20} \cdot Y_{32} + U_{30} \cdot Y_{33} = J_{33}, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

де: U_{10} , U_{20} , U_{30} – невідомі вузлові напруги; Y_{11} , Y_{22} , Y_{33} – **власні провідності вузлів**, тобто сума провідностей усіх гілок, які підходять до цього вузла; у рівняннях системи 3.4.3 вони **завжди входять зі знаком (+)**; $Y_{12} = Y_{21}$; $Y_{13} = Y_{31}$; $Y_{23} = Y_{32}$ – **взаємна провідність вузлів**, яка дорівнює сумі провідностей усіх гілок ланцюга, що знаходяться між вузлами 1-2, 1-3 і 2-3; їх чисельні значення **завжди входять у рівняння системи 3.4.3 зі знаком (-)**; J_{11} , J_{22} , J_{33} – відомі з умов завдання величини, що є сумою добутку *EPC* на провідність ($\sum E \cdot Y$) усіх гілок, що підходять до цього вузла. **Якщо E спрямована до вузла, то цей добуток $E \cdot Y$ для даної гілки береться зі знаком (+), а якщо E спрямована від вузла, – зі знаком (-)**. Помітимо, що добуток $E \cdot Y$ для кожної гілки можна розглядати як струм еквівалентного джерела струму цієї гілки.

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо вузлові напруги U_{10} , U_{20} , U_{30} , а потім напруги на усіх гілках ланцюга відповідно до формули 3.4.2 і, нарешті, струми в усіх її гілках, використовуючи формулу 3.4.1.

Якщо розгалуджений ланцюг має тільки два вузли (наприклад, трифазний ланцюг, який з'єднаний зіркою), то система 3.4.3 перетворюється на одне рівняння виду

$$U_{10} \cdot Y_{11} = J_{11}. \quad (3.4.4)$$

Алгоритм розрахунку ланцюгів методом вузлових напруг

1. Задовільно вибрати напрями струмів в усіх гілках ланцюга.
2. Пронумерувати у ланцюзі усі вузли.
3. Довільно обрати серед занумерованих на кроці 2 алгоритму опорний вузол у ланцюзі і позначити його індексом «0».
4. Визначити усі вузлові напруги у ланцюзі від вузлів ланцюга, позначених на кроці 2 алгоритму, і указати їх напрями до опорного вузла з індексом «0».

5. Скласти рівняння для кожного вузла ланцюга, використовуючи перший закон Кірхгофа.

6. Скласти систему рівнянь для усіх вузлів ланцюга, використовуючи крок 4 алгоритму.

7. Розв'язати систему рівнянь відносно вузлових напруг, використовуючи крок 5 алгоритму.

8. Знайти напругу на усіх гілках ланцюга, використовуючи крок 6 алгоритму.

9. Знайти струми в усіх гілках ланцюга, використовуючи крок 7 алгоритму.

10. Зробити перевірку розв'язання.

Приклад 3.4.1. Складіть систему рівнянь і визначте струми методом вузлових напруг в усіх гілках ланцюга, представленого на рис. 3.4.1, а.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, задовільно обираємо напрями струмів в усіх гілках ланцюга, як це показано на рис. 3.4.1, а. На кроці 2 алгоритму нумеруємо усі вузли у ланцюзі (їх чотири). Користуючись кроком 3 алгоритму, довільно, як опорний обираємо вузол 4 (записаний у дужках), і позначаємо його індексом «0». У нашому ланцюзі чотири вузли і, отже, три вузлових напруги U_{10} , U_{20} , U_{30} . Згідно з кроком 4 алгоритму, їх напрями до опорного вузла показані на рис. 3.4.1, а стрілками.

Використовуючи кроки 5 і 6 алгоритму, складаємо рівняння для кожного вузла ланцюга, а з них і систему рівнянь відносно невідомих вузлових напруг, які відповідають формулам 3.4.3. Тут власна провідність вузлів дорівнює: $Y_{11} = 1/R_1 + 1/R_5 + 1/R_4$; $Y_{22} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$; $Y_{33} = 1/R_3 + 1/R_6 + 1/R_4$, а взаємна матиме вигляд: $Y_{12} = Y_{21} = -1/R_1$; $Y_{13} = Y_{31} = -1/R_4$; $Y_{23} = Y_{32} = -1/R_3$. Вільні члени рівнянь системи будуть дорівнювати: $J_{11} = -E_1/R_1 - E_4/R_4$; $J_{22} = E_1/R_1 + E_2/R_2 + E_3/R_3$; $J_{33} = E_4/R_4 - E_3/R_3$.

На кроці 7 алгоритму розв'язуємо отриману систему рівнянь і визначаємо невідомі вузлові напруги U_{10} , U_{20} , U_{30} . А на кроці 8 алгоритму, у відповідності до формули $U_{km} = U_{k0} - U_{m0}$ і при заданих на рис. 3.4.1, а напрямках напруг гілок, – напруги на усіх

інших гілках ланцюга: $U_{12} = U_{10} - U_{20}$; $U_{31} = U_{30} - U_{10}$; $U_{23} = U_{20} - U_{30}$. Користуючись формулою 3.4.1, на кроці 9 алгоритму, знаходимо струми у гілках ланцюга. Струм I_1 спрямований від вузла 1 до вузла 2 і тому при прийнятій індексації струмів є струмом I_{12} . Тут, відповідно до формули 3.4.1, вузол $k = 1$, а вузол $m = 2$. Тоді $I_1 = I_{12} = Y_{12} \cdot (U_{12} - E_{12}) = -1/R_1 \cdot (U_{10} - U_{20} - E_1)$.

Аналогічно визначаються струми в усіх інших гілках ланцюга:

$$I_2 = I_{02} = Y_{02} \cdot (U_{02} - E_{02}) = -1/R_2 \cdot (-U_{20} - E_2), \text{ де } U_{02} = -U_{20},$$

$$Y_{02} = -1/R_2 \text{ і } E_{02} = E_2;$$

$$I_3 = I_{32} = Y_{32} \cdot (U_{23} - E_{32}) = -1/R_3 \cdot (U_{20} - U_{30} - E_3), \text{ де } U_{32} = U_{30} - U_{20},$$

$$Y_{32} = -1/R_3 \text{ і } E_{32} = E_3;$$

$$I_4 = I_{31} = Y_{31} \cdot (U_{31} - E_{31}) = -1/R_4 \cdot (U_{30} - U_{10} + E_4), \text{ де } U_{31} = U_{30} - U_{10},$$

$$Y_{31} = -1/R_4 \text{ і } E_{31} = -E_4;$$

$$I_5 = I_{10} = Y_{10} \cdot (U_{10} - E_{10}) = -U_{10}/R_5, \text{ де } Y_{10} = -1/R_5, \text{ } E_{10} = 0;$$

$$I_6 = I_{03} = Y_{03} \cdot (U_{03} - E_{03}) = 1/R_6 \cdot (-U_{30} - 0) = U_{30}/R_6,$$

$$\text{де } Y_{03} = -1/R_6 \text{ і } E_{03} = 0.$$

Виконати перевірку розрахунку, використовуючи перший закон Кірхгофа.

Приклад 3.4.2 Розрахуйте струми I_1, I_2, I_3 у гілках схеми методом вузлових напруг, рис. 3.4.2, при таких даних ЕРС і резисторах схеми:

$$E_1 = 5\text{В}; E_2 = 10\text{В}; R_1 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}; R_3 = 20 \text{ Ом}.$$

Розв'язання.

Використовуючи крок 1 алгоритму, довільно обираємо напрями струмів в усіх гілках ланцюга, як це показано на рис. 3.4.2. На кроці 2 алгоритму нумеруємо вузли у ланцюзі (їх

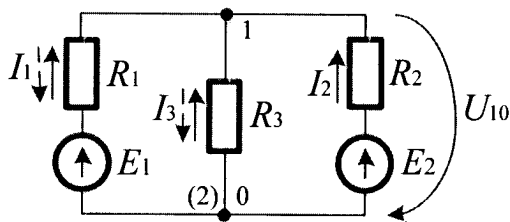


Рис. 3.4.2

два). Користуючись кроком 3 алгоритму, довільно, опорним обираємо вузол 2 і позначаємо його індексом «0». Оскільки у ланцюзі два вузли, то у ньому буде одна вузлова напруга U_{10} . На кроці 4 алгоритму встановлюємо її напрям до опорного вузла (див. рис. 3.4.2). Використовуючи кроки 5 і 6 алгоритму і формулу 3.4.4, складемо рівняння для вузла 1, яке матиме такий вигляд: $U_{10} \cdot Y_{11} = J_{11}$, де: $Y_{11} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35$ См – власна провідність вузла; $J_{11} = E_1/R_1 + E_2/R_2 = 1 + 1 = 2A$ – вільний член рівняння. Вузлова напруга U_{10} буде дорівнювати $U_{10} = \frac{J_{11}}{Y_{11}} = \frac{2 \cdot 100}{35} = \frac{40}{7} B$.

Використовуючи крок 9 алгоритму і формулу 3.4.1, знаходимо струми у гілках ланцюга, які будуть дорівнювати:

$$I_1 = Y_{10} \cdot (U_{10} - E_1) = -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{40}{7} - 5\right) = -\frac{1}{7} A, \text{ де } Y_{10} = -1/R_1;$$

$$I_2 = Y_{20} \cdot (U_{10} - E_2) = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{40}{7} - 10\right) = \frac{3}{7} A, \text{ де } Y_{20} = -1/R_2;$$

$$I_3 = Y_{30} \cdot (U_{10}) = -\frac{1}{20} \cdot \left(\frac{40}{7}\right) = -\frac{2}{7} A, \text{ де } Y_{30} = -1/R_3.$$

Із розрахунку видно, що струми I_1 і I_3 повинні бути перенаправлені, на рис. 3.4.2 вони показані пунктирною лінією. Користуючись кроком 10 алгоритму, виконуємо перевірку розрахунку. Для цього, наприклад, в узлі 1 визначаємо алгебраїчну суму струмів, яка буде доірівнювати $I_1 + I_3 = I_2 = 1/7 + 2/7 = 3/7$, що свідчить про правильність виконаних розрахунків.

3.5. Розрахунок методом суперпозиції

Цей метод застосовують для різних розрахунків (ланцюгів постійного і змінного струмів, електричних і магнітних полів і т. п.). Його інколи називають методом накладання. Він є прямим наслідком спільних властивостей лінійних рівнянь і може бути використаний до усіх електричних явищ, які описуються лінійними рівняннями. Якщо

Його застосовувати до електричних ланцюгів постійного струму, то, відповідно до цього методу, струм у будь-якій гілці складної схеми, яка має декілька джерел *EPC*, можна розраховувати як алгебраїчну суму струмів, що виникають у розглядуваних гілках при незалежній дії окремих *EPC* схеми. Тому у реальній схемі умовно замикаються усі джерела, окрім одного, проводиться розрахунок струмів у *k*-й гілці, викликаних дією тільки цього джерела (ΔI_{ki}). Потім залишається незамкненим наступне джерело і т.д. Тоді загальний струм *k*-ої гілки знаходиться як $I_k = \sum_{j=1}^n \Delta I_{kj}$, де *n* – число джерел у ланцюзі.

Алгоритм розрахунку ланцюгів методом суперпозиції

1. Довільно вибрати джерело *EPC* схеми (інші *EPC* уважати закороченими).

2. Позначити напрями струмів у гілках схеми від вибраного джерела *EPC*.

3. Визначити формули та розрахувати струми у гілках схеми вибраного джерела *EPC*.

4. Вибрати *n* – е джерело *EPC* схеми (інші *n* – 1 джерел *EPC* уважати закороченими).

5. Позначити напрями струмів у гілках схеми від *n*-го джерела *EPC*.

6. Визначити формули та розрахувати струми у гілках схеми від *n*-го джерела *EPC*.

7. Знайти алгебраїчну суму струмів у гілках схеми, обчислених на кроці 3,6 алгоритму.

8. Позначити напрями результуючих струмів у гілках схеми.

9. Виконати перевірку розрахунку струмів у гілках схеми, використовуючи перший закон Кірхгофа.

Для наочності дію алгоритму з розрахунку ланцюгів схем при використанні методу суперпозиції розглянемо на прикладі схеми з двома джерелами *EPC*.

Приклад 3.5.1. Розрахуйте струми I_1 , I_2 , I_3 у гілках схеми, рис. 3.5.1, *a*, методом суперпозиції, при: $E_1 = 5B$; $E_1 = 10B$; $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 20$ Ом.

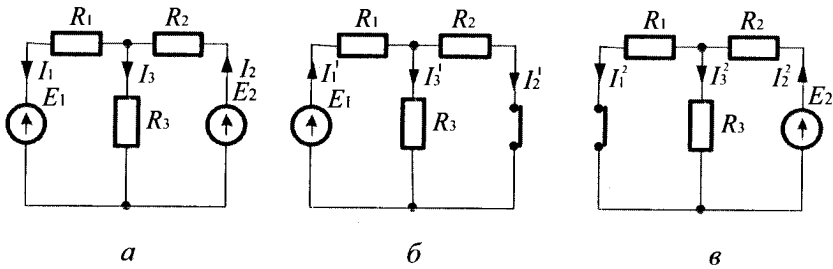


Рис. 3.5.1

Розв'язання. Згідно з кроком 1 алгоритму обираємо першою EPC E_1 , яка діє у схемі, а інші закорочуємо (E_2 у цей час закорочена), рис. 3.5.1, б.

Користуючись кроком 2 алгоритму, позначаємо напрями струмів у схемі при включеній EPC E_1 , рис. 3.5.1, б. Використовуючи крок 3 алгоритму, визначимо формули та розрахуємо струми, які протікатимуть у гілках резисторів R_1, R_2, R_3 схеми під дією EPC E_1 . Формули та розраховані струми I_1^1, I_2^1, I_3^1 будуть відповідно дорівнювати:

$$I_1^1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{5}{5 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20}} = \frac{3}{7} \text{ A};$$

$$I_2^1 = \frac{E_1 - I_1^1 \cdot R_1}{R_2} = \frac{5 - \frac{3}{7} \cdot 5}{10} = \frac{2}{7} \text{ A}; \quad I_3^1 = \frac{E_1 - I_1^1 \cdot R_1}{R_3} = \frac{5 - \frac{3}{7} \cdot 5}{20} = \frac{1}{7} \text{ A}.$$

Згідно з кроком 4 алгоритму для знаходження частки струмів I_1^2, I_2^2, I_3^2 закоротимо EPC E_1 , рис. 3.5.1, в. Користуючись кроком 5 алгоритму, позначаємо напрями струмів у схемі при включеній EPC E_2 , рис. 3.5.1, в. Використовуючи крок 6 алгоритму, визначимо формули та розрахуємо струми, які протікатимуть у гілках резисторів R_1, R_2, R_3 схеми під дією E_2 . Формули та розраховані струми I_1^2, I_2^2, I_3^2 будуть відповідно дорівнювати:

$$I_2^2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{10}{10 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20}} = \frac{5}{7} A;$$

$$I_1^2 = \frac{E_2 - I_2^2 \cdot R_2}{R_1} = \frac{10 - \frac{5}{7} \cdot 10}{5} = \frac{4}{7} A;$$

$$I_3^2 = \frac{E_2 - I_2^2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{10 - \frac{5}{7} \cdot 10}{20} = \frac{1}{7} A.$$

На кроці 7 алгоритму обчислюємо струми у гілках схеми, при включенні усіх джерел ЕРС: $I_1 = I_1^1 - I_1^2 = \frac{3}{7} - \frac{4}{7} = -\frac{1}{7} A$;

$$I_2 = I_2^2 - I_2^1 = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7} A; \quad I_3 = I_3^1 + I_3^2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7} A. \quad \text{При}$$

обчисленні ми отримали від'ємне значення першого струму. Це говорить про те, що струм I_1 у схемі рис. 3.5.1, *a* має напрям дії струму I_1^2 , який формує друга електрорушійна сила E_2 . Користуючись кроком 8 алгоритму, позначаємо напрями результуючих струмів у гілках схеми, рис. 3.5.1, *a*.

На кроці 9 алгоритму, використовуючи перший закон Кірхгофа, робимо перевірку розрахунку $I_1 + I_2 + I_3 = -1/7 + 3/7 - 2/7 = 0$. Таким чином, приклад розв'язаний правильно.

3.6. Розрахунок методом еквівалентного джерела

Метод еквівалентного джерела застосовують для розрахунку струму у будь-якій одній виділеній гілці складного ланцюга. У його основі лежить теорема про еквівалентне джерело, суть якої полягає у такому: будь-який складний електричний ланцюг постійного струму щодо виділеної гілки може бути представлений одним еквівалентним джерелом ЕРС або одним еквівалентним джерелом струму.

Розглянемо метод розрахунку, заснований на еквівалентному перетворенні складного ланцюга постійного струму в еквівалентне

джерело EPC . На рис. 3.6.1, a представлений складний ланцюг з багатьма джерелами та багатьма опорами у вигляді активного лінійного двополюсника. Потрібно визначити струм I у виділеному з цього ланцюга опорі R_H .

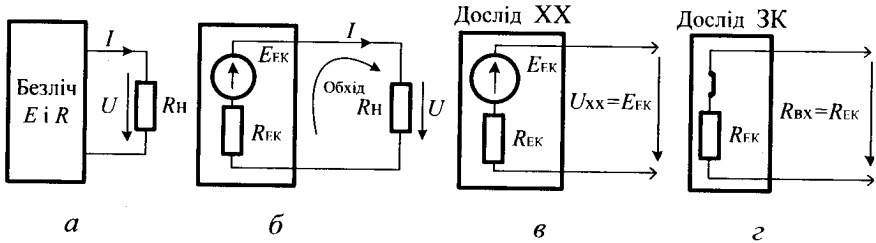


Рис. 3.6.1

Представимо двополюсник у вигляді еквівалентного джерела EPC з параметрами E_{EK} і R_{EK} , рис. 3.6.1, b , і за другим законом Кірхгофа отримаємо шуканий струм ланцюга, який буде дорівнювати

$$I = \frac{E_{EK}}{R_{EK} + R_H} \quad (3.6.1)$$

Невідомі величини E_{EK} і R_{EK} можна знайти з досліду холостого ходу (XX) і закорочення джерел (ЗК). При проведенні досліду XX, рис. 3.6.1, v , гілка з опором R_H розмикається і на її затискачах виникає напруга U_{XX} , рівна EPC еквівалентного джерела $U_{XX} = E_{EK}$. При проведенні досліду ЗК, рис. 3.6.1, z , відключаються усі EPC ланцюга й замінюються перемичками без опору. Тоді вхідний опір ланцюга стає рівним опору еквівалентного джерела $R_{BX} = R_{EK}$.

Алгоритм розрахунку струму у гільці ланцюга методом еквівалентного джерела

1. Довільно обрати гілку ланцюга схеми, у якій необхідно знайти струм.
2. Виконати дослід холостого ходу, для чого розімкнути обрану гілку ланцюга схеми й знайти напругу холостого ходу на її затискачах, використовуючи другий закон Кірхгофа.
3. Виконати дослід закорочення усіх джерел схеми й знайти внутрішній опір двополюсника відносно до затискачів обраної гілки.

4. Перетворити схему на еквівалентну схему активного двополюсника з увімкненим на затискачах гілки ланцюга резистора.

5. Розрахувати струм на затискачах схеми, використовуючи кроки 2, 3 і 4 алгоритму.

Для наглядності дію алгоритму з розрахунку струму у діагоналі мостової схеми з використанням методу еквівалентного джерела розглянемо на прикладі схеми, рис. 3.6.2, а.

Приклад 3.6.1. Розрахуйте струм I_5 методом еквівалентного джерела у діагоналі мостової схеми при таких даних: $R_1 = R_4 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 20 \text{ Ом}$; $R_5 = 30 \text{ Ом}$; $E = 10 \text{ В}$, рис.3.6.2, а.

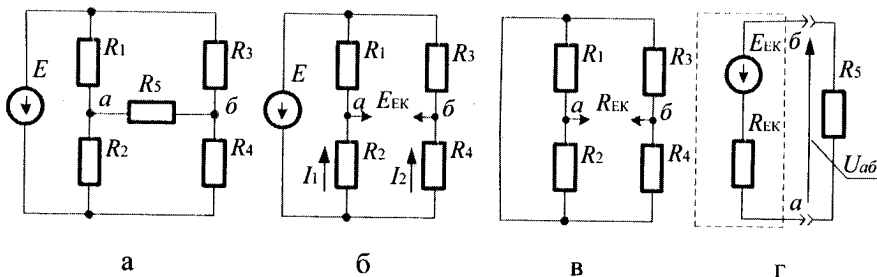


Рис. 3.6.2

Розв'язання. У відповідності до кроку 1 алгоритму і умовою прикладу, обираємо гілку ланцюга резистора R_5 , у якій необхідно знайти її струм. Користуючись кроком 2 алгоритму, знаходимо еквівалентну ЕРС на затискачах схеми $a - б$, рис. 3.6.2, б. Вона буде дорівнювати

$$\begin{aligned}
 E_{EK} = U_{ab} &= U_{R_2} - U_{R_4} = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 - \frac{E}{R_3 + R_4} \cdot R_4 = \\
 &= \frac{10}{10 + 20} \cdot 20 - \frac{10}{20 + 10} \cdot 10 = \frac{10}{3} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Згідно з кроком 3 алгоритму, знаходимо еквівалентний внутрішній опір двополюсника по відношенню до затискачів схеми, рис. 3.6.2, в

$$R_{EK} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} + \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = \frac{40}{3} \text{ Ом.}$$

Використовуючи крок 4 алгоритму, перетворимо схему прикладу на еквівалентну схему активного лінійного двополюсника з увімкненими на його затискачах гілки ланцюга резистора R_5 , рис.3.6.2, з. Тоді, згідно з кроком 5 алгоритму і законом Ома, струм у резисторі R_5 (діагоналі моста) буде дорівнювати

$$I_5 = \frac{E_{EK}}{R_5 + R_{EK}} = \frac{10}{3 \cdot \left(30 + \frac{40}{3}\right)} = \frac{1}{13} A.$$



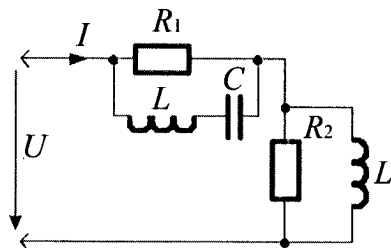
Контрольні запитання

1. Що називають ланцюгом із послідовним з'єднанням опорів?
2. Що називають ланцюгом із паралельним з'єднанням опорів?
3. Що називають ланцюгом із послідовно – паралельним з'єднанням опорів?
4. Що називають ланцюгом із паралельно – послідовним з'єднанням опорів?
5. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів постійного струму з використанням законів Кірхгофа.
6. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів постійного струму методом контурних струмів.
7. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів постійного струму методом вузлових напруг.
8. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів постійного струму методом суперпозиції.
9. Сформулюйте алгоритм розрахунку струму у будь-якій гілці ланцюга методом еквівалентного джерела.



Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть струм I у ланцюзі, що представлений на рисунку. Параметри усіх гілок ланцюга відомі: $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $L = 25 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $C = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. На вході ланцюга діє напруга 200В .

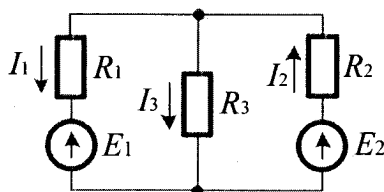


Відповідь: $I = 10A$.

2. Скільки рівнянь містить система для розрахунку струмів у гілках схеми, складених згідно із першим та другим законами Кірхгофа?

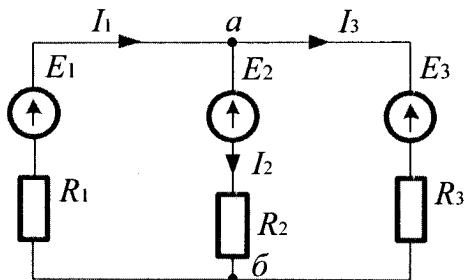
Відповідь: число рівнянь дорівнює числу гілок ланцюга.

3. Використовуючи закони Кірхгофа, розрахуйте струми у гілках схеми, яка приведена на рисунку, з такими даними: $E_1 = 5B$; $E_2 = 10B$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$.



Відповідь: $I_1 = 1 / 7A$; $I_2 = 3 / 7A$; $I_3 = 2 / 7A$.

4. Використовуючи метод вузлових напруг, розрахуйте струми у гілках схеми, яка приведена на рисунку, з такими даними: $E_1 = 20B$; $E_2 = 16B$; $E_3 = 10B$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$; $R_3 = 50 \text{ Ом}$.



Відповідь: $I_1 = 1,58 A$; $I_2 = 0,21 A$; $I_3 = 1,37 A$.

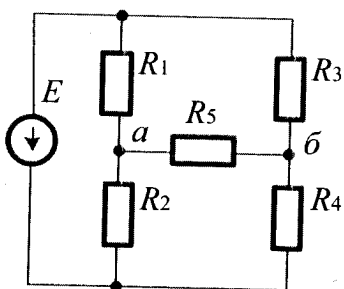
5. Використовуючи метод контурних струмів, розрахуйте струми у гілках схеми, умова якої представлена у задачі 4.

Відповідь: $I_1 = 1,58 \text{ A}$; $I_2 = 0,21 \text{ A}$; $I_3 = 1,37 \text{ A}$.

6. Використовуючи метод суперпозиції, розрахуйте струми у гільках схеми, умова якої наведена у задачі 3.

Відповідь: $I_1 = 1/7 \text{ A}$; $I_2 = 3/7 \text{ A}$; $I_3 = 2/7 \text{ A}$.

7. У схемі, що наведена на рисунку, розрахуйте струм I_5 методом еквівалентного джерела у діагоналі мостової схеми за таких умов: $R_1 = R_4 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 40 \text{ Ом}$; $R_5 = 50 \text{ Ом}$; $E = 40 \text{ В}$.



Відповідь: $I_5 = 4/23 \text{ A}$; $U_{ab} = 40/3 \text{ В}$.



Коментарі

Розрахунки електричних ланцюгів постійного струму з одним джерелом енергії та використанням законів Кірхгофа і вузлових напруг відповідають [9, 17]. Розрахунки електричних ланцюгів постійного струму методами контурних струмів, суперпозиції та еквівалентного джерела узяті з [5, 8].

Розділ 4

Ланцюги синусоїдального струму

4.1. Основні визначення

Означення 4.1.1. Синусоїдальним струмом називають періодичний струм, що змінюється у часі за законом синуса.

Для побудови синусоїдальної кривої необхідно узяти деякий відрізок I_m , рис. 4.1.1, довжина якого у масштабі побудови дорівнює максимальному значенню синусоїдальної величини. Назвемо його вектором синусоїдальної величини. У прямокутній системі координат направимо його спочатку по горизонтальній вісі, що і буде початковим його положенням у момент початку відліку часу при $t = 0$.

Вектор рухається з постійною кутовою швидкістю проти часової стрілки. За час періоду T вектор повертається на 2π радіан. Тому його кутова швидкість $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Оскільки у формулу кутової швидкості ω входить частота змінного струму, то кутову швидкість вектора називають **кутовою частотою**.

Якщо з моменту початку руху пройде деякий час t_1 , тоді вектор I_m повернеться на кут ωt_1 . Із кінця вектора I_m , який уже знаходиться у новому положенні, опустимо перпендикуляр на горизонтальну вісь. Довжина цього перпендикуляра буде дорівнювати $I_m \sin \omega t_1$. У деякий наступний момент часу вектор утворює з горизонтальною віссю кут ωt_2 , а довжина перпендикуляра, опущеного з його кінця, буде відповідно дорівнювати $I_m \sin \omega t_2$. Через четверту частину періода з моменту початку відліку часу, тобто у момент $t_3 = T/4$, вектор буде перпендикулярним до горизонтальної вісі, а його довжина буде дорівнювати $I_m \sin \omega t_3 = \sin(2\pi/T) \cdot (T/4) = I_m \sin(\pi/2) = I_m$.

Тепер поряд із колом, яке описується кінцем вектора, побудуємо у прямокутній системі координат криву залежності величини $I_m \sin \omega t$ від ωt або t . Це буде синусоїдальна крива за проміжок часу від $t = 0$ до $t = t_3$. У момент часу $t_3 = T/4$ синусоїдальна величина кривої досягає максимального значення I_m . Якщо вектор рухати далі по колу, то його величина зменшуватиметься (момент t_4). У момент $t_5 = T/2$, описавши дугу,

яка дорівнює π радіан, вектор займе горизонтальне положення. У цей момент $I_m \sin \omega t_4 = I_m \sin(2\pi/T) \cdot (T/2) = I_m \sin(\pi) = 0$, тобто синусоїдальна крива проходить через нульове значення. При подальшому переміщенні вектора по колу перпендикуляр $I_m \sin \omega t$ буде від'ємним (моменти t_6, t_7, t_8) і відповідно до цього, будуюмо вниз від горизонтальної вісі синусоїдальну криву. У цілому графік такого струму представлений на рис. 4.1.1.

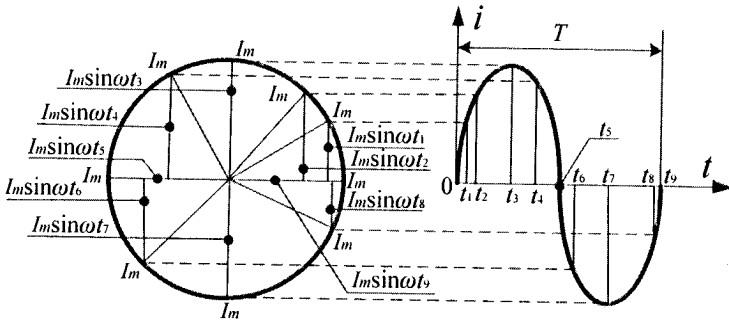


Рис. 4.1.1

Означення 4.1.2. Миттєвим значенням синусоїдального струму i називають струм у будь-який момент часу t .

Усі значення струму i , вищі за вісь t , вважаються позитивними, а нижче – негативними.

Означення 4.1.3. Амплітудою синусоїдального струму i називають максимальне його значення відносно вісі t і позначають I_m .

Означення 4.1.4. Періодом синусоїдального струму називають найменший час T , після закінчення якого значення струму повторюються.

Означення 4.1.5. Частотою синусоїдального струму називають число періодів струму за одну секунду й позначають f .

Частота струму і його період – величини взаємообернені: $f = 1/T$.

При теоретичних розрахунках часто використовують поняття про кутову частоту. Її позначають грецькою буквою ω й вимірюють в $1/s$. Кутова частота ω пов'язана з частотою f співвідношенням

$$\omega = 2\pi f. \tag{4.1.1}$$

Частоті $f = 50$ Гц відповідає кутова частота $\omega = 314$ 1/с. Усе, що було сказано вище про синусоїдальний струм, справедливо стосовно до синусоїдальної напруги й синусоїдальної ЕРС.

4.2. Аналітичне представлення струмів і напруг

Синусоїдальні значення струму й напруги виражаються аналітично так:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i); u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (4.2.1)$$

де: i і u – миттєві значення струму і напруги; I_m і U_m – амплітудні значення струму і напруги; ω – кутова частота струму і напруги пов'язана з частотою f у герцах співвідношенням 4.1.1; t – час, що пройшов від початку відліку, який обирається довільно (як зручно), оскільки на хід фізичного процесу зміни струму у часі сам вибір не впливає; $(\omega t + \psi_i)$ і $(\omega t + \psi_u)$ – фази струму і напруги, які є деякими кутами, вимірюваними у градусах (град.) або радіанах (рад.); ψ_i і ψ_u – початкові фази струму і напруги, тобто це фази $(\omega t + \psi_i)$ і $(\omega t + \psi_u)$ при $t = 0$, чисельні значення яких залежать від вибору моменту початку відліку часу.

Легко помітити, що при зміні часу t від 0 до ∞ , фази струму і напруги також змінюються від 0 до ∞ , але синуси цих фаз $\sin(\omega t + \psi_i)$ і $\sin(\omega t + \psi_u)$ змінюються лише у межах від +1 до -1. При цьому миттєві значення струму змінюються у діапазоні від $+I_m$ до $-I_m$, а миттєва напруга від $+U_m$ до $-U_m$.

Для повного визначення синусоїдального струму або напруги необхідно знати три величини: амплітуду, частоту й початкову фазу, на відміну від постійного струму і напруги, які характеризуються тільки однією величиною. Якщо відома прикладена до ланцюга синусоїдальна напруга, то це означає, що задані U_m , ω і ψ_u . А для визначення синусоїдального струму цього ланцюга необхідно визначити тільки дві величини I_m і ψ_i , оскільки частота струму ω така ж, як і у прикладеної напруги.

4.3. Способи графічного зображення струмів і напруг

Існує два способи графічного зображення синусоїдальних струмів і напруг: за допомогою графіків $i(\omega t)$ і $u(\omega t)$ у декартових координатах (подібно до рис. 4.1.1) і за допомогою векторів, що обертаються, у полярних координатах.

На рис. 4.3.1, *а* показано зображення струму у вигляді вектору, що має довжину I_m , обертається (як прийнято у теорії ланцюгів) **проти годинникової стрілки** з постійною кутовою швидкістю ω (відповідно до кутової частоти струму) відносно полюса «0» полярної системи координат.

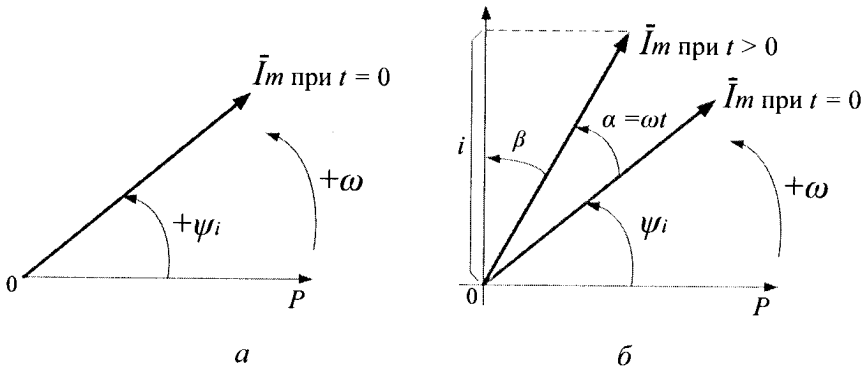


Рис. 4.3.1

Його положення на цьому рисунку зафіксоване у момент часу $t = 0$, при якому кут його нахилу до полярної вісі P складає величину, рівну початковій фазі $+\psi_i$ (позитивні початкові фази відкладають від полярної вісі проти годинникової стрілки, а негативні – за годинниковою).

Зображення струму у вигляді вектора, що обертається, органічно пов'язане з формулою 4.2.1 його зміни у часі. При обертанні вектора \bar{I}_m проти годинникової стрілки з постійною кутовою швидкістю ω проекція цього вектора на вісь, перпендикулярну полярній вісі, рис. 4.3.1, *б*, здійснює синусоїдальні коливання у часі. Насправді, нехай за час t , що пройшов від початку відліку вектор \bar{I}_m при своєму обертанні проти годинникової стрілки обернувся на кут $\alpha = \omega t$,

рис. 4.3.1, б. Тоді проекція цього вектора на вісь перпендикулярну полярній вісі складе $i = I_m \cos \beta = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

Помітимо, що із формули $\alpha = \omega t$ легко встановити зв'язок між ω і f . Якщо у цій формулі покласти $t = T$ (один період струму), то кут α складе 2π радіан (один оборот вектора струму). Тоді $2\pi = \omega T$ або $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$.

4.4. Векторні діаграми і їх застосування для розрахунку ланцюгів

Графіки струмів $i(\omega t)$ і напруги $u(\omega t)$ у декартових координатах іноді використовуються для ілюстрації електромагнітних процесів в електричних ланцюгах, але для практичних розрахунків не придатні.

При розв'язанні електротехнічних завдань широко використовується зображення струмів і напруги у вигляді векторів, що обертаються проти годинникової стрілки, положення яких на площині зафіксоване для моменту часу $t = 0$.

Приклад 4.4.1. Визначте синусоїдальний струм i у нерозгалуженій частині ланцюга, рис. 4.4.1, а, у якій паралельно включені два двополюсники 1 і 2 із струмами: $i_1 = 3 \sin(628t + 30^\circ) A$; $i_2 = 4 \sin(628t - 60^\circ) A$.

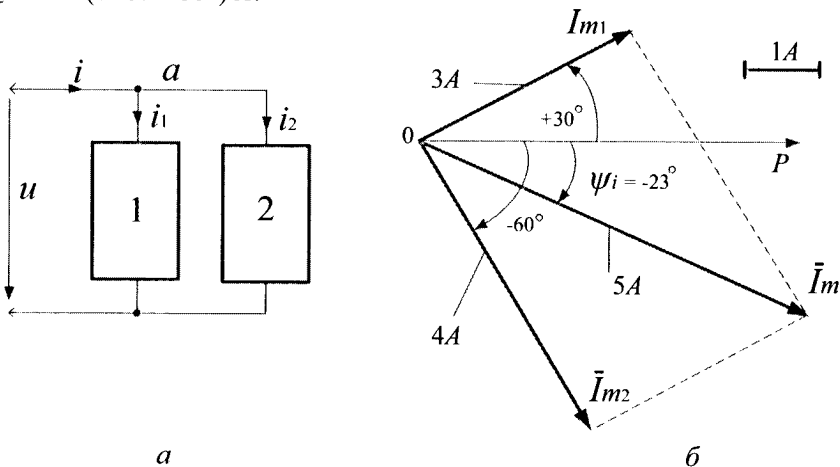


Рис. 4.4.1

Розв'язання. Для будь-якого моменту часу t для вузла a ланцюга справедливим є перший закон Кірхгофа $i - i_1 - i_2 = 0$ або $i = i_1 + i_2$. Отже, для знаходження струму i у нерозгалуженій частині ланцюга необхідно скласти синусоїди струмів i_1 і i_2 . Це легко зробити, якщо скористатися зображенням струмів у вигляді векторів у полярній системі координат, див. рис. 4.4.1, б. Для визначення загального струму потрібно визначити тільки дві величини, що характеризують його, – амплітуду I_m і початкову фазу ψ_i , оскільки частота струму $\omega = 628$ 1/С задана. Ці величини можна легко знайти графічно, склавши вектори \bar{I}_{m1} і \bar{I}_{m2} так, як це роблять у механіці при знаходженні вектора результуючих сил

$$\bar{I}_m = \bar{I}_{m1} + \bar{I}_{m2}. \quad (4.4.1)$$

Вектори початкових струмів і результат їх складання представлений на рис. 4.4.1,б. Там же показаний орієнтовно обраний масштаб. Тут довжина сумарного вектора дорівнює амплітуді загального струму I_m , а кут нахилу до полярної осі P , є початкова фаза ψ_i загального струму.

Шляхом безпосередніх вимірів знаходимо, що $I_m = 5A$ і $\psi_i = -23^\circ$ (знак « \rightarrow » узятий тому, що він розташований за годинниковою стрілкою від полярної вісі P). Таким чином, шуканий струм $i = 5\sin(628t - 23^\circ)$ А.

Приклад 4.4.2. Визначте загальну напругу u , прикладену до ланцюга, схема якого наведена на рис. 4.4.2,а, при умові, що синусоїдальна напруга u_1 і u_2 на затискачах двополюсників 1 і 2, включених у ланцюг послідовно, описується рівняннями: $u_1 = 30\sin(314t + 90^\circ)$ В; $u_2 = 50\sin(314t + 20^\circ)$ В.

Розв'язання. Для будь-якого моменту часу t для цього ланцюга справедливий другий закон Кірхгофа, згідно з яким $u_1 + u_2 - u = 0$ або $u = u_1 + u_2$. Для розв'язання прикладу представимо задану напругу у вигляді векторів, заданих у полярній системі координат. Тоді вектор загальної напруги \bar{U}_m знаходиться як сума векторів напруги послідовно з'єднаних двополюсників

$$\bar{U}_m = \bar{U}_{m1} + \bar{U}_{m2}. \quad (4.4.2)$$

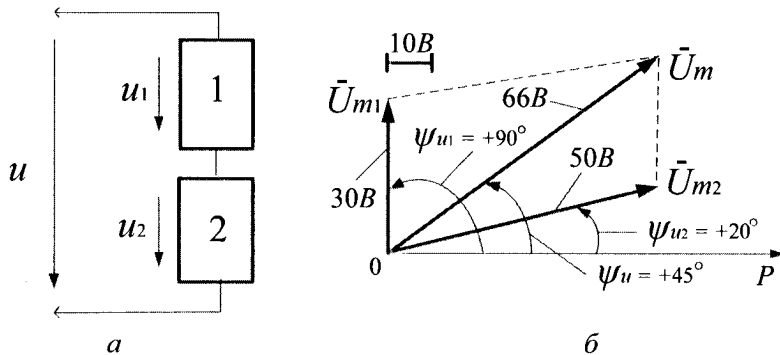


Рис. 4.4.2

Результати такого складання представлені на рис. 4.4.2, б. Там же показаний орієнтовно вибраний масштаб і для напруги. Безпосередньо з рис. 4.4.2, б визначимо, що $U_m = 66B$ і $\psi_u = +45^\circ$. Тому шукана напруга ланцюга $u = U_m \sin(314t + \psi_u) = 66 \sin(314t + 45^\circ) B$.

Сукупність векторів струмів і напруг електричних ланцюгів називають векторними діаграмами цих ланцюгів. Вони дозволяють замінити додавання (віднімання) синусоїдальних струмів (напруг) графічним способом, тим самим значно полегшити розрахунок ланцюгів синусоїдального струму.

4.5. Векторна форма законів Кірхгофа

При розрахунку ланцюгів у прикладах 4.4.1. і 4.4.2. були використані перший і другий закони Кірхгофа у векторній формі запису. Узагальнюючи співвідношення 4.4.1, сформулюємо перший закон Кірхгофа у найбільш загальному вигляді

$$\sum_{k=1}^K \bar{I}_k = 0, \tag{4.5.1}$$

де K – загальне число гілок, які підходять до вузла, але не менше трьох.

Означення 4.5.1. Геометрична сума векторів усіх струмів, що підходять до будь-якого вузла ланцюга, завжди дорівнює нулю.

При цьому вектори струмів, спрямованих до вузла, беруться у рівнянні 4.5.1 зі знаком (+), а вектори струмів, спрямованих від вузла, – зі знаком (-).

Узагальнюючи співвідношення 4.4.2, сформулюємо другий закон Кірхгофа у найбільш загальному вигляді

$$m \sum_{m=1}^M \bar{E}_m = \sum_{n=1}^N \bar{U}_n, \quad (4.5.2)$$

де M – число джерел, а N – число приймачів енергії у контурі.

Означення 4.5.2. Геометрична сума векторів усіх *ЕРС* будь-якого контура ланцюга завжди дорівнює сумі векторів напруг на усіх прийमाках цього контура.

При цьому вектори *ЕРС* і напруг, напрям яких співпадає з прийнятим напрямом обходу контура, беруться у рівнянні 4.5.2 зі знаком (+), а інші – зі знаком (-).

4.6. Фазові співвідношення між струмом і напругою

Якщо дві або декілька синусоїд мають однакові початкові фази, то це означає, що вони співпадають по фазі. На векторній діаграмі такі синусоїди розташовуються на одній прямій або паралельно одна одній.

Якщо дві синусоїди мають неоднакові початкові фази, то це означає, що вони не співпадають по фазі. Ту з двох синусоїд, фаза якої більша (з урахуванням знаку), називають випереджаючою по фазі, тоді іншу – такою, що відстає.

Так, з векторної діаграми, показаної на рис. 4.4.1, б, витікає, що струм i_1 випереджає загальний струм ланцюга i по фазі на кут 53° , а струм i_2 відстає від струму i по фазі на кут 37° . З векторної діаграми на рис. 4.4.2, б, слідує, що загальна напруга u випереджає напругу u_2 по фазі на кут 25° і відстає від напруги u_1 по фазі на кут 45° .

Необхідно відмітити, що кут між фазами не є довільною величиною. Він залежить від співвідношення між параметрами R , L і C електричного ланцюга, про що детально буде викладено нижче.

В електроенергетиці велике значення надають куту між фазами напруги й струму у ланцюзі. Він визначається як різниця початкових

фаз напруги і струму (з урахуванням їх власних знаків) і позначається грецькою буквою φ

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \tag{4.6.1}$$

На рис. 4.6.1 показано співвідношення між кутом зрушення фаз φ і початковими фазами напруги ψ_u і струму ψ_i (тут вони узяті позитивними).

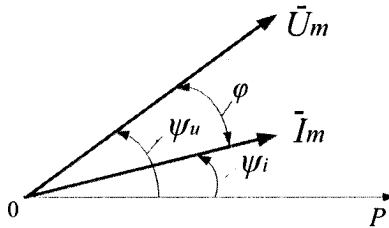


Рис. 4.6.1

Від величини кута зрушення фаз φ залежить ефективність роботи електричного ланцюга. Чим цей кут менший, тим ефективніше працює електричний ланцюг. Детальніше про вплив величини φ на роботу електричного ланцюга і способи його зменшення викладено у § 4.16.

4.7. Діючі значення струму і напруги

Поняття про діюче значення струму склалося історично під час переходу електроенергетики від використання мереж постійного струму до мереж змінного синусоїдального струму. Новий для того часу змінний струм порівнювали з постійним струмом по його здатності перетворювати електромагнітну енергію у теплову. Умовилися уважати синусоїдальний струм еквівалентним (рівноцінним) у цьому сенсі постійному струму, якщо він в опорі R за час T одного періоду виділяє таку ж кількість тепла, що і постійний струм. За цих умов кількість тепла, що виділяється постійним струмом, $W_{\text{пост}} = I^2 \cdot R \cdot T$, а кількість тепла, виділеного синусоїдальним

струмом, $W_{\text{син}} = \int_0^T i^2 \cdot R dt$. Уважаючи $W_{\text{пост}} = W_{\text{син}}$, знаходимо, що:

$$I^2 \cdot R \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot R dt \text{ або } I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} . \quad (4.7.1)$$

Отримане співвідношення визначає величину постійного струму I , еквівалентного синусоїдальному струму за тепловою дією. Цю величину називають **діючим значенням синусоїдального струму i** . Підставивши $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ у формулу 4.7.1 і виконавши інтегрування отримаємо

$$I = I_m / \sqrt{2} . \quad (4.7.2)$$

Таким чином, діюче значення синусоїдального струму у $\sqrt{2}$ раз (в 1,41 раз) менше за його амплітуди.

Аналогічна формула існує і для визначення діючого значення синусоїдальної напруги

$$U = U_m / \sqrt{2} . \quad (4.7.3)$$

Ці діючі значення синусоїдального струму і напруги є основними розрахунковими величинами.

Необхідно відмітити, що формула 4.7.1 справедлива не лише для синусоїдального струму, але і для періодичного струму будь-якої форми.

4.8. Прості ланцюги синусоїдального струму

До простих відносять ланцюги, що містять тільки опір R , тільки індуктивність L або тільки ємність C .

Розглянемо амплітудні й фазові співвідношення між струмом і напругою у цих ланцюгах. Для цього прикладемо до цих ланцюгів синусоїдальну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ і розрахуємо струм у кожній із них, тобто знайдемо його амплітуду і початкову фазу.

Ланцюг тільки з опором R

У цьому ланцюзі, табл. 1.8.1, струм визначають

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) .$$

Аналіз отриманого рівняння:

а) $I_m = U_m / R$, або діюче значення струму, $I = U / R$.

Опір R у ланцюзі синусоїдального струму називається активним, оскільки у ньому відбувається перетворення електромагнітної енергії у теплову. У великому діапазоні частот активний опір R практично є постійним. Величину, обернену до активного опору, називають активною провідністю і позначають $G = 1/R$. Тоді формула для струму набуває вигляду:

$I = U/R = U \cdot G$. Але це є закон Ома для ланцюга синусоїдального струму з активним опором.

б) Початкова фаза струму $\psi_u = \psi_i$, відповідно з формулою 4.6.1

$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$, тобто у ланцюзі з активним опором струм і напруга співпадають по фазі.

Ланцюг тільки з індуктивністю L

У такому ланцюзі, табл.1.8.1, струм визначають:

$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Аналіз отриманого рівняння:

а) $I_m = U_m / \omega L$ або діюче значення струму $I = U / X_L$.

Вираз, що стоїть у знаменнику $X_L = \omega L$ – це реактивно – індуктивний опір ланцюга. Він виникає як реакція магнітного поля ланцюга на процес зміни запасу енергії у ньому і не супроводжується тепловим явищем. Величину, яка є оберненою до індуктивного опору, називають індуктивною провідністю $b_L = 1/X_L = 1/\omega L$. Тоді формула для струму в індуктивності набуває вигляду $I = U/X_L = U \cdot b_L$. Це закон Ома для ланцюга синусоїдального струму з індуктивним опором.

б) Початкова фаза струму $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$ або $\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$, тобто у ланцюзі з індуктивністю струм відстає від напруги по фазі на 90° .

Ланцюг тільки з ємністю C

У такому ланцюзі, табл.1.8.1, струм визначають:

$$i = C \frac{du}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Аналіз отриманого рівняння:

а) $I_m = \frac{Um}{1/\omega C}$ або діюче значення струму $I = \frac{U}{X_C}$. Вираз $X_C = 1/\omega C$,

стоїть у знаменнику – це реактивно-ємнісний опір ланцюга. Він виникає як реакція електричного поля ланцюга на процес зміни запасу енергії у ньому і не супроводжується тепловими явищами. Величину, обернену ємнісному опору, називають ємнісною провідністю $b_C = 1/X_C = 1/(1/\omega C) = \omega C$.

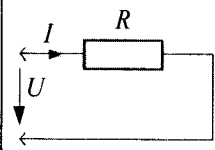
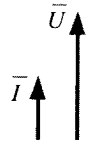
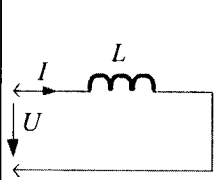
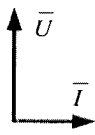
Тоді формула для струму у ємності отримує вид $I = U/X_C = U \cdot b_C$.

Це закон Ома для ланцюга синусоїдального струму з ємністю.

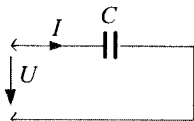
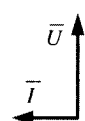
б) Початкова фаза струму $\psi_i = \psi_u + 90^\circ$, тобто у ланцюзі з ємністю струм випереджає прикладену напругу по фазі на 90° . При цьому відповідно до формули 4.6.1, $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$.

Результати дослідження простих ланцюгів синусоїдального струму представлені у табл.4.8.1. Там же приведені їх векторні діаграми, а на рис. 4.8.1 – осцилограми струмів і напруг для ланцюгів з R , L і C .

Таблиця 4.8.1

№ п/п	Схеми ланцюгів	Амплітудні співвідношення (закон Ома)	Фазові співвідношення (зрушення фаз)	Векторні діаграми
1		$I = \frac{U}{R} = U \cdot G$, де $G = \frac{1}{R}$	$\psi_i = \psi_u$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$	
2		$I = \frac{U}{X_L} = U \cdot b_L$, де $X_L = \omega \cdot L$, $b_L = 1/X_L = 1/\omega L$	$\psi_i = \psi_u - 90^\circ$ $b_L = 1/X_L = 1/\omega L$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$	

Продовження табл. 4.8.1

3		$I = \frac{U}{X_C} = U \cdot b_C,$ <p style="text-align: center;">де</p> $X_C = 1/\omega C,$ $b_C = 1/X_C = \omega C$	$\psi_i = \psi_u + 90^\circ.$ $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$	
---	---	---	---	---

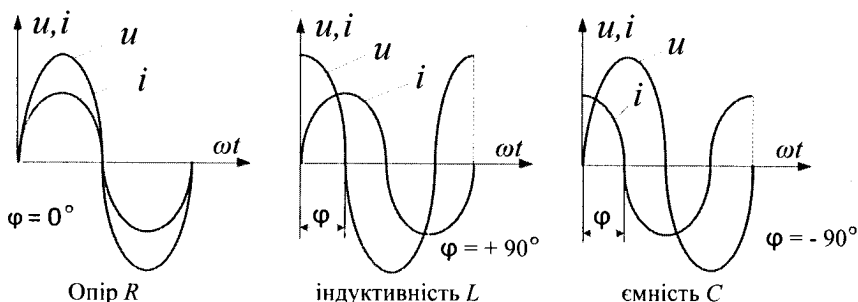


Рис. 4.8.1

4.9. Залежність активного, індуктивного та ємнісного опорів від частоти

Ці залежності представлені у вигляді графіка на рис. 4.9.1.

Активний опір R при низьких частотах практично не залежить від частоти напруги і залишається незмінною величиною, але індуктивний і ємнісний опори ланцюга синусоїдального струму залежать від частоти прикладеної напруги.

Індуктивний опір $X_L = \omega \cdot L$ змінюється прямо пропорційно частоті. При частоті $\omega \rightarrow 0$ $X_L \rightarrow 0$, і це підтверджує положення про те, що індуктивність у ланцюзі постійного струму не має опору.

Ємнісний опір $X_C = 1/\omega C$ змінюється обернено пропорційно до частоти: при $\omega \rightarrow 0$ ємнісний опір $X_C \rightarrow \infty$, що підтвержує відсутність струму у ємності ланцюга постійного струму, § 2.1.

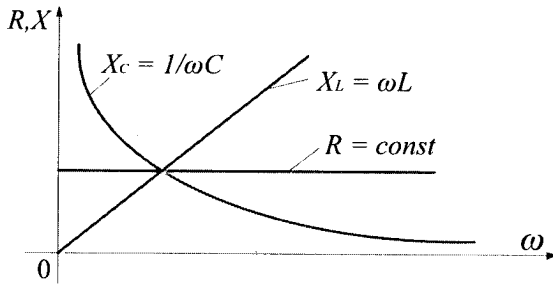


Рис. 4.9.1

4.10. Ланцюг із послідовним з'єднанням R, L, C

Відома прикладена до ланцюга синусоїдальна напруга $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ і параметри R, L, C ланцюга, рис. 4.10.1, *a*. Необхідно визначити струм ланцюга i , тобто його амплітуду I_m і початкову фазу ψ_i .

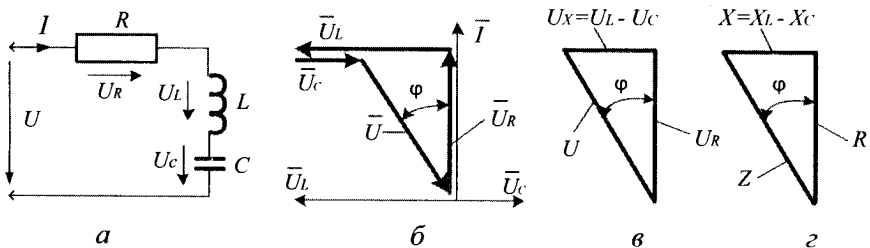


Рис. 4.10.1

У ланцюзі з послідовним з'єднанням R, L, C струм в усіх його елементах однаковий, а напруга різна. До такого ланцюга застосуємо другий закон Кірхгофа, який у векторній формі запису, відповідно до формули 4.5.2 має вигляд $\bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C - \bar{U} = 0$ або $\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$. Розв'язання поставленого завдання можна виконати за допомогою векторної діаграми. Вона приведена на рис. 4.10.1, *б* для випадку, коли $U_L > U_C$. Діаграму розпочинаємо будувати з вектора струму \bar{I} , відкладаючи його на площині рисунка вертикально угору (вибір довільний).

Відповідно до табл.4.8.1, вектор \bar{U}_R співпадає з вектором \bar{I} по фазі, вектор \bar{U}_L випереджає вектор \bar{I} по фазі на 90° , а вектор \bar{U}_C відстає від вектора \bar{I} по фазі на 90° .

Застосовуючи правило багатокутника для складання векторів і відкладаючи вектори \bar{U}_R , \bar{U}_L , \bar{U}_C один за одним, знаходимо вектор \bar{U} прикладеної до ланцюга напруги. Отриманий результат показує, що наявні значення напруги цього ланцюга (довжини векторів) співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника. Цей трикутник напруги показаний на рис. 4.10.1, в. Застосовуючи до цього трикутника теорему Піфагора, знаходимо

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2},$$

де $U_X = (U_L - U_C)$. (4.10.1)

Ураховуючи табл. 4.8.1, що: $U_R = I \cdot R$; $U_L = I \cdot X_L$; $U_C = I \cdot X_C$, отримаємо

$$U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I \sqrt{R^2 + X^2} \text{ або } U = I \cdot Z. \quad (4.10.2)$$

Ця формула є законом Ома для ланцюга синусоїдального струму з послідовним з'єднанням активного і реактивних опорів. Тут

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (4.10.3)$$

де Z – повний опір ланцюга.

Із формули 4.10.3 випливає, що активний R , реактивний X і повний Z опори даного ланцюга також співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника. Цей трикутник опорів показаний на рис. 4.10.1, г. Помітимо, що трикутник опорів подібний до трикутника напруги: поділивши усі сторони трикутника напруги на величину діючого значення струму I ланцюга, отримаємо трикутник опорів.

З векторної діаграми видно, що струм і напруга ланцюга не співпадають по фазі. Кут зрушення фаз φ визначається з трикутника напруги або трикутника опорів

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (4.10.4)$$

Цей кут по абсолютному значенню менший 90° . У нашому прикладі $U_L > U_C$, кут $\varphi > 0$ і ланцюг має індуктивний характер, рис. 4.10.2, а. Якщо $U_L < U_C$, то $\varphi < 0$ і ланцюг має ємнісний характер, рис. 4.10.2, б. Якщо $U_L = U_C$, то $\varphi = 0$ і ланцюг має чисто активний опір, рис. 4.10.2, в.

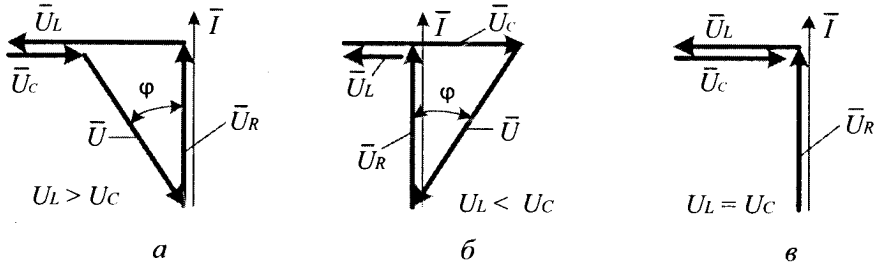


Рис. 4.10.2

На цьому завданні визначення струму ланцюга є вирішеним, а діюче значення струму визначається відповідно до формули 4.10.2, де Z – повний опір ланцюга, що складається із заданих в умові завдання величин. Початкова фаза струму визначається у відповідності з формулою 4.6.1

$$\psi_i = \psi_u - \varphi,$$

де ψ_u - початкова фаза напруги, відома з умов завдання, а φ – кут зрушення фаз між напругою і струмом, який визначається формулою 4.10.4.

Приклад 4.10.1. Визначте діюче значення напруги U у ланцюзі з послідовним з'єднанням R , L і C , якщо відомі діючі значення напруг на його елементах: $U_R = 80 \text{ В}$; $U_L = 100 \text{ В}$; $U_C = 40 \text{ В}$, рис. 4.10.1, а.

Розв'язання. Використовуючи формулу 4.10.1, отримасмо

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{80^2 + (100 - 40)^2} = 100 \text{ В}.$$

Приклад 4.10.2. Для ланцюга з послідовним з'єднанням елементів R і L , рис. 4.10.2, відомі діюче значення прикладеної напруги $U = 100 \text{ В}$ і параметри його елементів $R = 6 \text{ Ом}$, $L = 2,55 \text{ мГн}$.

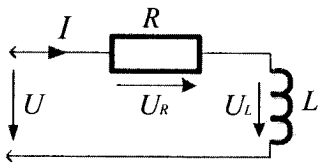


Рис. 4.10.2

Визначте діюче значення струму у ланцюзі і діючі значення напруг на R і L елементах, якщо у ланцюзі діє частота $f = 500$ Гц.

Розв'язання. Знаходимо кутову частоту у ланцюзі, яка дорівнює $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 500 = 3140$ 1/с. Використовуючи знайдену кутову частоту, оприділяємо індуктивний опір ланцюга, який дорівнює $X_L = \omega L = 3140 \cdot 2,55 \cdot 10^{-3} = 8$ Ом. Тепер повний опір ланцюга можна обчислити із формули

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ Ом}.$$

Знайшовши повний опір ланцюга, обчислюємо струм I у послідовно з'єднаному ланцюзі, користуючись формулою $I = U/Z = 100/10 = 10$ А. Знаючи струм I , обчислюємо окремо напруги на активному і індуктивному опорах:

$$U_R = I \cdot R = 10 \cdot 6 = 60 \text{ В}; \quad U_L = I \cdot X_L = 10 \cdot 8 = 80 \text{ В}.$$

4.11. Частотні характеристики ланцюга з послідовним з'єднанням R, L, C

В електричних ланцюгах частота джерела залишається незмінною ($f = 50$ Гц; $\omega = 314$ 1/с). Проте у ланцюгах автоматики, обчислювальної техніки, радіотехнічних ланцюгах частота може змінюватись у широких межах.

Означення 4.11.1. Частотною характеристикою ланцюга називають залежність струму, напруги, опору, кута зрушення фаз між напругою і струмом від частоти на його ділянках.

На рис. 4.11.1. показані деякі з них для ланцюга з послідовним з'єднанням R, L, C . При зміні частоти у широких межах активний опір R залишається постійним, індуктивний опір X_L змінюється прямо пропорційно частоті, а ємнісний опір X_C – обернено.

Повний опір Z змінюється складнішим способом. При зміні частоти від 0 до ω_0 він має ємнісний характер і зі збільшенням частоти змінюється від ∞ до R . При зміні частоти від ω_0 до ∞ він має

індуктивний характер і змінюється від R до безмежності. Струм ланцюга (при $U = const$) змінюється за формулою $I = U/Z$ і при частоті ω_0 досягає свого максимуму.

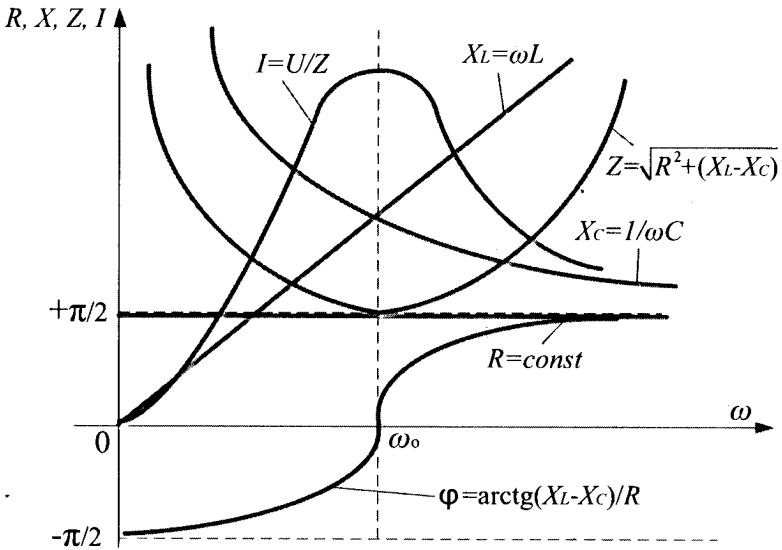


Рис. 4.11.1

Резонанс напруги

Означення 4.11.2. Резонансом напруги ланцюга називають режим його роботи, при якому $X_L = X_C$, а отже, і $U_L = U_C$.

Означення 4.11.3. Резонансною частотою ланцюга називають частоту ω_0 , при якій $X_L = X_C$, а отже, і $U_L = U_C$.

Векторна діаграма ланцюга при такому резонансі показана на рис. 4.10.2, в. Тут U_L і U_C рівні між собою, а їх вектори знаходяться у протифазі (кут зрушення фаз між ними 180°) і компенсують один одного. Уся напруга U прикладається на активний опір R , кут зрушення фаз між напругою і струмом ланцюга $\varphi = 0$. У цьому режимі роботи ланцюг є чисто активним, незважаючи на те, що у його складі є індуктивність і ємність. З умови $X_L = X_C$ витікає, що при резонансі напруги

$$\omega L = 1/\omega C \quad \text{або} \quad \omega^2 LC - 1 = 0. \quad (4.11.1)$$

Це є резонансне рівняння, яке показує співвідношення між R, L, C і ω при резонансі. Якщо в окремому випадку L і C відомі, то резонансна частота ланцюга з послідовним з'єднанням R, L, C має вигляд

$$\omega = 1/\sqrt{LC} . \tag{4.11.2}$$

При резонансі напруги струм досягає максимального значення, оскільки при цьому опір ланцюга мінімальний ($Z_{рез} = R$) і дорівнює його активному опору. Якщо при цьому виявляється, що $X_{Lрез} = X_{Cрез} > R$, то напруга на індуктивності і ємності (U_L і U_C) перевищує прикладену до ланцюга напругу, тобто виникає перенапруження на цих елементах ланцюга.

Явище резонансу напруги широко використовується у радіотехніці, при настроюванні контура ланцюга на резонанс, отримуючи при цьому найбільш можливий сигнал. В енергетичних ланцюгах резонансу напруги уникають через максимальний струм і можливі перенапруження на реактивних елементах ланцюга.

Приклад 4.11.1. До ланцюга з послідовним з'єднанням R, L і C , рис. 4.10.1, *a*, підключена синусоїдальна напруга з частотою $f = 50$ Гц і діючим значенням $U = 380$ В. Опір ланцюга $R = 5$ Ом, індуктивність ланцюга $L = 31,9$ мГн. Знайдіть величину ємності C для отримання резонансу напруги і визначіть, можливість перенапруження на індуктивності L при такому резонансі.

Розв'язання. Для отримання резонансу напруги знаходимо величину ємності C , скориставшись формулою 4.11.1, $C = 1/(\omega^2 L) = 1/(314 \cdot 31,9 \cdot 10^{-3}) = 0,00031794$ Ф = 317,94 мкФ. При резонансі напруг ємнісний і індуктивний опори ланцюга рівні $X_C = X_L = \omega L = 314 \cdot 31,9 \cdot 10^{-3} = 10$ Ом. Для визначення напруги на індуктивності L знаходимо діюче значення струму I ланцюга при резонансі $I = U/R = 380/5 = 76$ А. Тоді напруга на індуктивності L при резонансі $U = I \cdot X_L = 76 \cdot 10 = 760$ В. Ця напруга у два рази більше за прикладену. Таким чином, на індуктивності L має місце перенапруження. Цього і слід чекати, оскільки при резонансі $U_L/U_R = I \cdot X_L/I \cdot R = X_L/R = 10/5 = 2$.

Приклад 4.11.2. У ланцюгу з послідовним з'єднанням L і C , рис. 4.11.2, при заданій ємності $C = 15,92$ мкФ знайдіть величину індуктивності L , при якій ланцюг пропускає струм з частотою $f = 2000$ Гц без опору.

Розв'язання. Ланцюг з послідовним з'єднанням L і C , відповідно до формули 4.10.3, має нульовий опір ($R = 0$) при резонансі напруги, оскільки $X_L = X_C$. Відповідно до формули 4.11.1, $L = 1 / \omega^2 C = 1 / (2 \cdot 3,14 \cdot 2000)^2 \cdot 15,92 \cdot 10^{-6} = 0,000398 \text{ Гн} = 0,398 \text{ мГн}$.

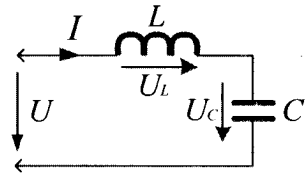


Рис. 4.11.2

Необхідно відмітити, що розглянутий у цьому прикладі ланцюг є складовою частиною багатьох електричних фільтрів.

4.12. Ланцюг із паралельним з'єднанням R, L, C

Відома прикладена до ланцюга, рис. 4.12.1, *а*, синусоїдальна напруга $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ і параметри R, L, C елементів схеми. Необхідно визначити струм ланцюга i , тобто його амплітуду I_m і початкову фазу ψ_i .

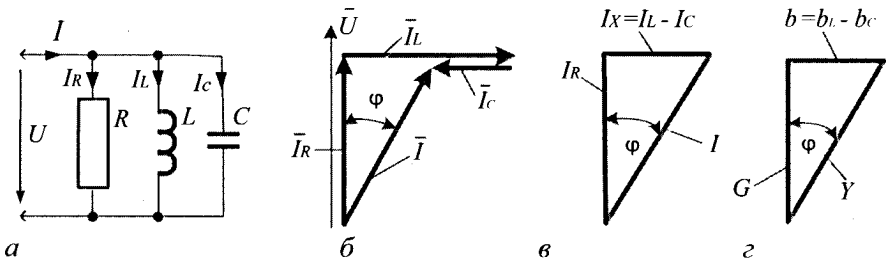


Рис. 4.12.1

У ланцюзі з паралельним з'єднанням R, L, C напруга на усіх його елементах однакова, а струми різні. Тут діє перший закон Кірхгофа, який, відповідно до формули 4.5.1, має вигляд: $\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$. Для вирішення завдання побудуємо векторну діаграму ланцюга. Вона показана на рис. 4.12.1, *б* за умови, що $I_L > I_C$. Діаграму починаємо будувати із загального для усього ланцюга вектора напруги \bar{U} , відкладаючи його на площині вертикально вгору (довільний вибір).

Потім будемо вектори \bar{I}_R , \bar{I}_L і \bar{I}_C . Вектор \bar{I}_R відкладаємо по одній лінії (паралельно) з вектором \bar{U} , оскільки струм і напруга в активному опорі R співпадають по фазі. Вектор \bar{I}_L відкладаємо під кутом 90° за годинниковою стрілкою до вектора \bar{U} , оскільки в індуктивності струм відстає від напруги на 90° . Нарешті, вектор \bar{I}_C відкладаємо під кутом 90° проти годинникової стрілки до вектора \bar{U} , оскільки у ланцюзі з ємністю струм випереджає напругу по фазі на 90° .

Складаючи ці вектори за правилом багатокутника (заздалегідь збудувавши їх один за одним), знаходимо результуючий вектор \bar{I} . З отриманої діаграми виходить, що діючі значення струмів гілок (довжини векторів) співвідносяться між собою, як сторони прямокутного трикутника 4.12.1, в. Застосовуючи теорему Піфагора, отримаємо

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_X^2}, \text{ де } I_X = (I_L - I_C). \quad (4.12.1)$$

У відповідності з табл. 4.8.1, отримаємо $I_R = U \cdot G$; $I_L = U \cdot b_L$; $I_C = U \cdot b_C$. Підставляючи ці значення струмів у формулу 4.12.1, знаходимо

$$I = U \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = U \sqrt{G^2 + b^2} \text{ або } I = U \cdot Y. \quad (4.12.2)$$

Ця формула є законом Ома для ланцюга з паралельним з'єднанням активних і реактивних опорів. Тут

$$Y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{G^2 + b^2}, \quad (4.12.3)$$

де Y – повна провідність досліджуваного ланцюга.

З формули 4.12.3 випливає, що активна G , реактивна b і повна Y провідності ланцюга співвідносяться між собою, як сторони прямокутного трикутника, рис. 4.12.1, з, подібного до трикутника струму: його можна отримати, якщо усі сторони трикутника струму поділити на діюче значення напруги ланцюга U . Порівнюючи між собою формули 4.12.3 і 4.10.1, помічаємо, що повна провідність Y і повний опір ланцюга Z є взаємно оберненими величинами: $Y = I/U$; $Z = U/I$. Звідси $Z = 1/Y$.

З векторної діаграми на рис. 4.12.1, б, вилітає, що струм і напруга ланцюга не співпадають по фазі. Кут зрушення фаз φ визначається або з трикутника напруги, або з трикутника струмів

$$\varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_R} = \arctg \frac{b_L - b_C}{G}. \quad (4.12.4)$$

Цей кут, як видно з діаграми, за абсолютним значенням менший 90° . Тут можливі три варіанти. Якщо $I_L > I_C$ ($b_L > b_C$), цей кут позитивний, рис. 4.12.2, а, і ланцюг має індуктивний характер. При $I_L < I_C$ ($b_L < b_C$) кут зрушення фаз негативний, рис. 4.12.1, б, і ланцюг має ємнісний характер. Якщо $I_L = I_C$ ($b_L = b_C$), то $\varphi = 0$ і опір ланцюга є активний, рис. 4.12.2, в.

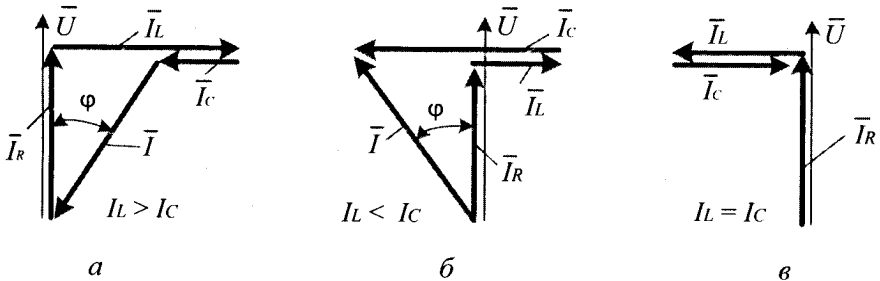


Рис. 4.12.2

Діюче значення струму визначається відповідно до формули 4.12.2, а початкова фаза струму φ - до формули 4.6.1.

Приклад 4.12.1. Для ланцюга з паралельним з'єднанням R, L, C гілок, рис. 4.12.1, а, знайдіть діюче значення струму I у ланцюзі при діючих значеннях струмів у гілках : $I_R = 3A$; $I_L = 9A$; $I_C = 5A$.

Розв'язання. Відповідно до формули 4.12.1, діюче значення струму I у ланцюзі дорівнює

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{3^2 + (9 - 5)^2} = 5A.$$

Приклад 4.12.2. Для ланцюга з паралельним з'єднанням гілок з R і C , рис. 4.12.3, відома прикладена напруга $U = 100 B$ і параметри паралельних гілок : $R = 3,33 \text{ Ом}$; $C = 25,4 \text{ мкФ}$.

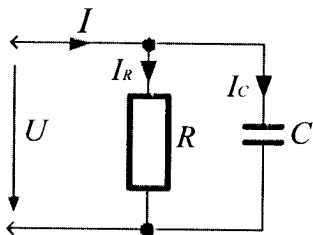


Рис. 4.12.3

Визначте діючі значення струмів I , I_R , I_C при частоті $f = 250$ Гц.

Розв'язання. Знаходимо кутову частоту у ланцюзі, яка дорівнює $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 250 = 1570$ 1/с. Визначаємо активну провідність $G = 1/R = 0,03$ См. Використовуючи знайдену кутову частоту, визначаємо ємнісну провідність ланцюга, яка дорівнює $b_C = \omega C = 1570 \cdot 25,4 \cdot 10^{-6} = 0,04$ См.

Знаходимо загальну провідність ланцюга за формулою $Y = \sqrt{G^2 + b_C^2} = 0,05$ См. Знайшовши загальну провідність ланцюга,

обчислюємо струм I у паралельно – з'єднаному ланцюзі, користуючись формулою $I = U \cdot Y = 100 \cdot 0,05 = 5$ А. Знаючи напругу U , обчислюємо окремо струми в активному і ємнісному опорах $I_R = U \cdot G = 100 \cdot 0,03 = 3$ А, $I_C = U \cdot b_C = 100 \cdot 0,04 = 4$ А.

Необхідно відмітити, що можливий і інший шлях розв'язання: спочатку знаходять струми у гілках ланцюгів, а потім – загальний струм. Можливість такого розв'язання прикладу надається читачеві самостійно.

4.13. Частотні характеристики ланцюга з паралельним з'єднанням R, L, C

При зміні частоти, прикладеної до ланцюга, змінюється реактивна провідність ланцюга, а отже, і багато інших електричних величин, наприклад, струми у різних елементах ланцюга, кут зрушення фаз φ . Залежності цих (і деяких інших) величин від частоти називають **частотними характеристиками ланцюга**.

На рис. 4.13.1 показані частотні характеристики струму й провідності для ланцюга з паралельним з'єднанням R, L, C .

При зміні частоти у широких межах активна провідність G залишається практично незмінною, індуктивна провідність b_L змінюється обернено пропорційно до частоти, а ємнісна провідність b_C – прямо пропорційно частоті. Повна провідність Y змінюється складнішим чином. При частотах від 0 до ω_0 вона має індуктивний

характер і зі збільшенням частоти зменшується від ∞ до G . При частотах від ω_0 до ∞ вона має ємнісний характер і зі збільшенням частоти збільшується від G до ∞ . При частоті ω_0 повна провідність ланцюга визначається як $Y = G$ і досягає найменшого значення.

Струм ланцюга (при $U = const$) змінюється відповідно до зміни Y і при частоті ω_0 досягає мінімального значення.

Резонанс струму

Означення 4.13.1. Резонансом струму ланцюга називають режим його роботи, при якому $b_L = b_C$, а отже, $I_L = I_C$.

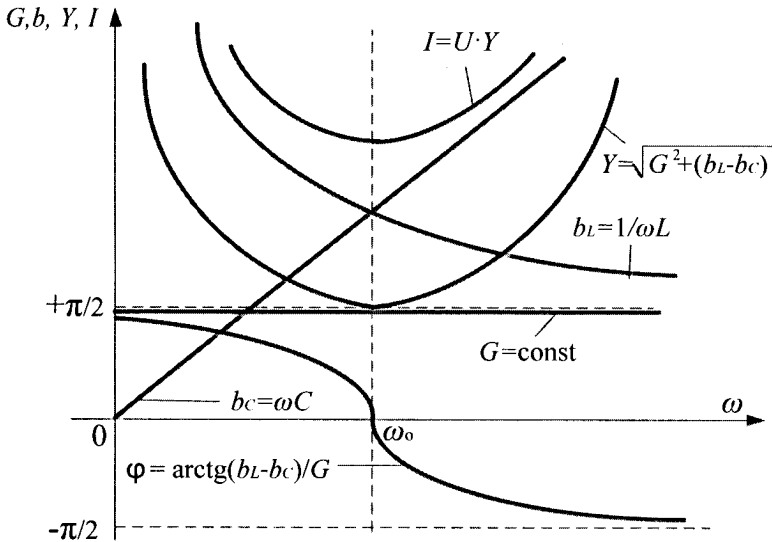


Рис. 4.13.1

Частоту ω_0 , при якій цей режим має місце, називають **резонансною частотою**. Векторна діаграма ланцюга при резонансі струмів представлена на рис. 4.12.2, в.

Тут діючі значення струмів I_L і I_C рівні між собою, а їх вектори $\bar{I}_L = \bar{I}_C$ знаходяться у протифазі (кут зрушення фаз між ними складає 180°) і компенсують один одного. У результаті увесь струм ланцюга I дорівнює струму в активній провідності G . При цьому кут зрушення фаз $\varphi = 0$ і ланцюг мають активний опір, попри те, що у ньому є індуктивність і ємність.

З умови $b_L = b_C$ випливає таке співвідношення між параметрами ланцюга і резонансною частотою

$$1/\omega L = \omega C \text{ або } \omega^2 LC - 1 = 0. \quad (4.13.1)$$

Якщо параметри L і C відомі, то резонансна частота визначається співвідношенням $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

При резонансі струмів - струм ланцюга мінімальний. Якщо при цьому виявляється, що $b_{L0} = b_{C0} > G$, то $I_{L0} = I_{C0} > I$, тобто струми в індуктивності і ємності при резонансі струмів більші загального струму ланцюга.

Резонанс струмів широко використовують в електроенергетиці. Електромережі усіх промислових підприємств є ланцюгами з активно-індуктивним навантаженням (двигуни, трансформатори, дроселі). Для поліпшення їх роботи паралельно цим ланцюгам підключають батареї конденсаторів, підбираючи їх ємність так, щоб кут зрушення фаз φ між напругою і струмом ланцюга був близьким до нуля.

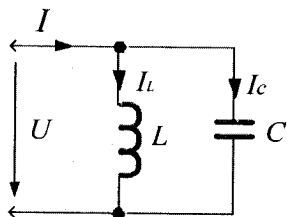


Рис. 4.13.2

Приклад 4.13.1. У ланцюга з паралельним з'єднанням L і C гілок, рис. 4.13.2, з індуктивністю $L = 0,796$ мГн знайдіть величину ємності, при якій ланцюг не пропустить через себе струм з частотою $f = 1000$ Гц.

Розв'язання. Ланцюг з паралельним з'єднанням L і C має нульову провідність при резонансі струмів. Скориставшись резонансним

рівнянням цього ланцюга, відповідно до формули 4.13.1, отримаємо

$$C_{рез} = 1/\omega^2 L = 1/(2\pi f)^2 L = 0,00003185 \text{ Ф} = 31,85 \text{ мкФ}.$$

Необхідно сказати, що розглянутий у цьому прикладі ланцюг є складовою частиною багатьох електричних фільтрів.

Приклад 4.13.2. Ланцюг з паралельним з'єднанням R і L гілок (модель промислового підприємства) підключений до синусоїдального струму з частотою $f = 50$ Гц, рис. 4.13.3.

Визначити ємність батареї конденсаторів, яку необхідно підключити паралельно указаному ланцюгу для досягнення у ньому резонансу струмів, якщо: $U = 220$ В; $I = 100$ А; $P = 11$ кВт.

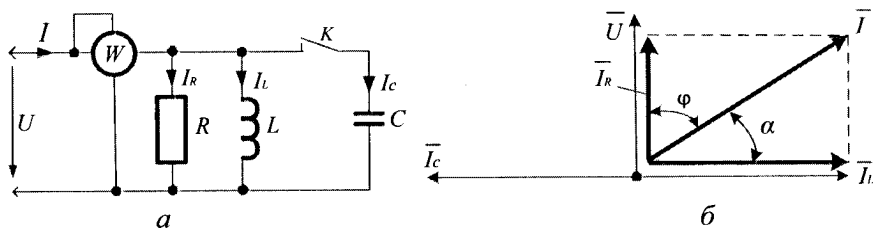


Рис. 4.13.3

Розв'язання. Цей ланцюг має індуктивний характер і, отже, струм у ньому відстає по фазі від прикладеної напруги. Для знаходження кута зрушення фаз φ використовуємо табл. 4.14.1, (поз.6). Звідси маємо $P/S = \cos\varphi$, а кут $\varphi = \arccos(110000/220 \cdot 100) = \arccos 0,5 = 60^\circ$. Вектор струму \bar{I} ланцюга (як це видно з векторної діаграми), показаної на рис. 4.13.3, б має дві складові: активну \bar{I}_R , співпадаючу по фазі з вектором \bar{U} і індуктивну \bar{I}_L , що відстає від \bar{U} на 90° .

Для досягнення резонансу необхідно так підібрати ємність батареї конденсаторів, щоб діюче значення струму цієї батареї I_C дорівнювало діючому значенню індуктивної складової I_L загального струму I : $I_C = I_L = I \cos\alpha = I \sin\varphi = I \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,87 = 87 \text{ A}$. За цих умов опір батареї конденсаторів синусоїдальному струму буде дорівнювати $X_C = U/I_C = 220/87 = 2,53 \text{ Ом}$. Тоді ємність батареї конденсаторів при резонансі струмів буде дорівнювати $C = 1/\omega X_C = 1/2\pi f X_C = 1/314 \cdot 2,53 = 0,0012588 \text{ Ф} = 1258,8 \text{ мкФ}$.

4.14. Потужність ланцюга синусоїдального струму

Електрична потужність у ланцюзі синусоїдального струму визначається як добуток діючого значення напруги U на діюче значення струму I для кожного з її елементів і для ланцюга у цілому, вимірюється вольт-амперами (ВА). Розрізняють три види потужності: активну (P); реактивну (Q) і повну (S).

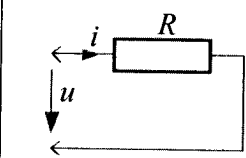
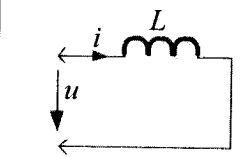
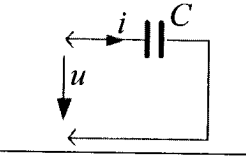
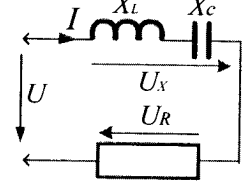
Потужність в активних опорах ланцюга називають активною (P). Вона характеризує швидкість перетворення електромагнітної енергії на теплову енергію й механічну роботу і вимірюється у ватах (Вт).

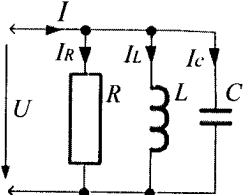
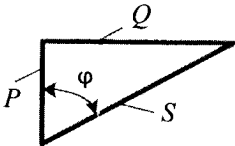
Потужність у реактивних опорах ланцюга називають реактивною (Q). Вона вимірюється (для її відмінності від активної потужності) у вольт-амперах реактивних (Var) і характеризує швидкість зміни запасу енергії в електричному й магнітному полях ланцюга, і не пов'язана з перетворенням енергії електромагнітного поля на теплову енергію.

Потужність на затискачах усього ланцюга, що складається з різних комбінацій з'єднань R , L і C , називають повною потужністю (S) і вимірюють у вольт-амперах (ВА). Вона характеризує швидкість подачі електричної енергії у цей ланцюг.

У табл. 4.14.1 приведені формули для розрахунку активної, реактивної і повної потужностей усіх ланцюгів, розглянутих у цьому розділі.

Таблиця 4.14.1

№ п/п	Схеми ланцюгів	Розрахункові формули	Одиниця виміру
1		$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G,$ де $G = 1/R$	Вт
2		$Q_L = U \cdot I = I^2 \cdot X_L = U^2 \cdot b_L,$ де $b_L = 1/X_L = 1/\omega L$	Вар
3		$Q_C = U \cdot I = I^2 \cdot X_C = U^2 \cdot b_C,$ де $b_C = 1/X_C = \omega C$	Вар
4		$P = U_R \cdot I = I^2 \cdot R$ $Q = U_X \cdot I = I^2 \cdot X = I^2 \cdot (X_L - X_C)$ $S = U \cdot I = I^2 \cdot Z,$ де $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Вт Вар ВА

5		$P = U \cdot I_R = U^2 \cdot G$ $Q = U \cdot I_X = U^2 \cdot (b_L - b_C)$ $S = U \cdot I = U^2 \cdot Y,$ де $Y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2}$	Вт Вар ВА
6		$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I$ $P = S \cdot \cos \varphi$ $Q = S \cdot \sin \varphi,$ де $\varphi = \arcsin Q/S = \arccos P/S$	ВА Вт Вар

Відмітимо, що активна P , реактивна Q і повна S потужності співвідносяться між собою як сторони прямокутного трикутника. Такий прямокутник показаний у табл. 4.14.1, поз.6. Для ланцюга з послідовним з'єднанням R, L, C його легко отримати, якщо усі сторони трикутника напруги, рис. 4.10.1, в, помножити на діюче значення струму I ланцюга. Для ланцюгів з паралельним з'єднанням R, L, C трикутник потужностей можна отримати, якщо усі сторони трикутника струмів, рис. 4.12.1, в, помножити на діюче значення U прикладеної напруги.

4.15. Поняття про коефіцієнти потужності й корисної дії ланцюга

В енергетиці значно поширене поняття про коефіцієнт потужності ланцюга, під яким розуміють відношення активної P і повної S потужностей ланцюга. Користуючись табл. 4.14.1, поз.6, маємо $P/S = \cos \varphi$.

Цей коефіцієнт показує, яка частина повної потужності перетвориться на тепло або інші види енергії. Енергетики прагнуть цю частину звести до одиниці, тобто мати $P = S$ або $\cos \varphi = 1$, при якому кут φ зрушення фаз між напругою і струмом ланцюга дорівнював би

нулю. Інакше кажучи, найбільш ефективним режимом роботи ланцюга є резонанс струмів. З цією метою на зажимах заводських і районних підстанцій підключають батареї конденсаторів, підбираючи їх ємність так, щоб у ланцюзі мав місце резонанс струмів. Енергетики називають такі дії компенсацією реактивної потужності.

Не слід плутати коефіцієнт потужності $\cos\varphi$ і коефіцієнт корисної дії η електроустановок. Коефіцієнт потужності показує, яка доля повної потужності S джерела перетвориться в активну потужність, а коефіцієнт корисної дії показує, наскільки ця активна потужність ефективно використовується у конкретних електричних установках, наприклад в електродвигунах.

Відомо, що потужність $P_{\text{вих}}$, яку електродвигун розвиває на валу менше споживаної з мережі активної потужності $P_{\text{вх}}$ за рахунок внутрішніх втрат ΔP на нагрів обмоток і сердечників, тертя в підшипниках, роботу вентилятора.

Коефіцієнт корисної дії електротехнічної установки – це відношення активної потужності на її виході до активної потужності на вході. Вимірюється він у відносних одиницях (чи у відсотках) і завжди менший одиниці (менше 100%) $\eta = P_{\text{вих}} / P_{\text{вх}} = (P_{\text{вх}} - \Delta P) / P_{\text{вх}} < 100\%$. Коефіцієнт корисної дії потужних електродвигунів досягає 80% і більше.

4.16. Підвищення коефіцієнта потужності ланцюга

Оскільки корисну роботу створює тільки активна потужність, то під підвищенням коефіцієнта потужності розуміють зменшення фазового зсуву між струмом і напругою у ланцюзі джерела електроенергії.

У практичному застосуванні ланцюги змінного струму мають активно-індуктивний характер (двигуни, трансформатори і т. п.). Тому еквівалентний ланцюг такого споживача електроенергії можна представити на рис. 4.16.1, а. Для схеми на рис. 4.16.1, а запишемо вираз для струму у лінії зв'язку джерела і споживача електроенергії

$$I = \frac{U}{Z}, \text{ де: } Z = \sqrt{R^2 + (X_L)^2}; \varphi = \arctg \frac{X_L}{R}.$$

При цьому у з'єднувальних дротах лінії підключення, реальний опір яких не дорівнює нулю, а складає величину $R_{л}$, матимуть місце втрати електроенергії $\Delta P = I^2 \cdot R_{л}$. Оскільки потужність, яка використовується споживачем, $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = const$, то $I = P / U \cos \varphi$. Таким чином, якщо збільшувати $\cos \varphi$ при незмінності споживаної джерелом електроенергії $P = const$, то величина струму I зменшується, і втрати потужності ΔP на з'єднувальних дротах також зменшуються.

Тому для підвищення $\cos \varphi$ використовують звичайну батарею компенсуючих конденсаторів, які включаються паралельно навантаженню (на рис. 4.16.1, а підключення компенсуючої ємності C показано штриховою лінією). Ефект включення компенсуючої ємності C показаний за допомогою векторної діаграми на рис. 4.16.1, б, шляхом уведення у неї додаткового ємного струму \bar{I}_C , випереджаючого \bar{U} на $+90^\circ$. Як впливає з рис. 4.16.1, б, струм \bar{I}_C викликає зменшення зсуву фаз до φ і зменшення величини модуля струму від $I_{рн}$ до I_p , де $I_{рн}$ – реактивний струм до компенсації, а I_p – реактивний струм після компенсації. Як правило, у більшості випадків виконується не повна компенсація, оскільки невеликий реактивний струм I_p при $\cos \varphi \geq 0,95$ практичного значення немає тому, що $I = \sqrt{I_{АН}^2 + I_p^2}$, а подальша компенсація потребує додаткової установки значної величини ємності, що часто економічно не обгрунтовано.

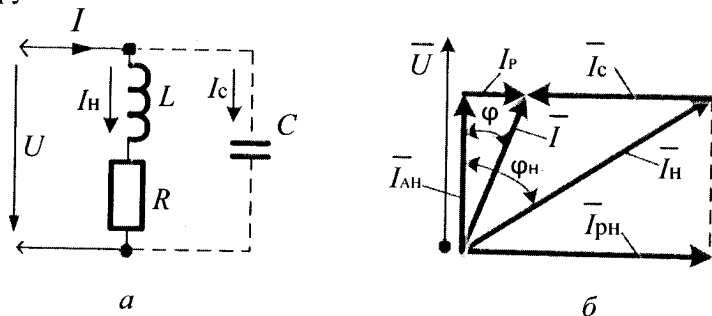


Рис. 4.16.1

Для визначення необхідної величини компенсуючої ємності C задаються нормативним значенням $\cos \varphi_i$ (звичайно у межах 0,9 ... 0,95). Привемо методику вибору величини компенсуючої ємності, виходячи з вимоги забезпечення заданого значення $\cos \varphi_i$. Нехай

реальний ланцюг володіє фазовим зсувом $\varphi_n = \arctg \frac{X_L}{R}$, що обумовлює наявність у ланцюзі реактивної потужності

$$Q_n = S \cdot \sin \varphi_n = \frac{P}{\cos \varphi_n} \cdot \sin \varphi_n = P \cdot \operatorname{tg} \varphi_n.$$

За рахунок включення компенсуючої ємності C величина реактивної потужності повинна зменшуватися до $Q_p = S \cdot \sin \varphi = P \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Отже, конденсатор повинен компенсувати частину реактивної (індуктивної) потужності $Q_C = Q_n - Q_p = P \cdot (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi)$. Ураховуючи

$$Q_C = U \cdot I_C = \frac{U^2}{X_C} = \omega \cdot C \cdot U^2, \text{ визначасмо величину } C, \text{ яка забезпечить}$$

$$\text{нормативний } \cos \varphi_i \text{ по формулі } C = \frac{Q_C}{\omega \cdot U^2} = \frac{P \cdot (\operatorname{tg} \varphi_n - \operatorname{tg} \varphi)}{\omega \cdot U^2}.$$

З цієї формули випливає, що при збільшенні напруги живлення необхідна ємність C зменшується. Слід зазначити також, що при збільшенні напруги живлення U необхідна ємність C , забезпечуюча заданий коефіцієнт потужності $\cos \varphi_i$, зменшується у квадратичній залежності. Це дозволяє зробити висновок про доцільність компенсації реактивних втрат на ділянках ліній з підвищеною напругою, якщо за умов прийнятої схеми енергопостачання таке можливо. Наведемо приклад розрахунку необхідної компенсуючої ємності.

Приклад 4.16.1. У цеху встановлено 30 однакових двигунів потужністю $P = 0,38 \text{кВ}$, які живляться напругою $U = 380 \text{В}$, частоти $f = 50 \text{Гц}$. Кожний двигун характеризується коефіцієнтом потужності споживання $\cos \varphi_n = 0,75$. Розрахуйте величину компенсуючої ємності, яка забезпечує сумарний $\cos \varphi_n = 0,885$.

Розв'язання. Визначимо сумарну активну потужність споживання 30 однакових двигунів $P_C = \sum_{i=1}^{30} P_i = 30 \cdot 0,38 = 11,4 \text{ кВт} = 11400 \text{ Вт}$.

Обчислимо реактивну потужність, яку необхідно компенсувати ємністю C

$$Q_C = P_C (tg \varphi_1 - tg \varphi_H) = 11400 \cdot (0,977 - 0,525) = 5159 \text{ Вар}$$

Розрахуємо необхідну компенсуючу ємність, яка буде дорівнювати

$$C = \frac{Q_C}{2\pi f \cdot U^2} = \frac{5159}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 380^2} = 0,00011378 \text{ Ф}$$

Отже, компенсуюча ємність C , яка забезпечить сумарний $\cos \varphi_H = 0,885$ при коефіцієнті потужності кожного електродвигуна $\cos \varphi_H = 0,75$, повинна мати не менше $113,78 \text{ мкФ}$.



Контрольні запитання

1. Чому змінний струм називають синусоїдальним?
2. Що називають кутовою частотою синусоїдального струму?
3. Що таке миттєве значення синусоїдального струму?
4. Що таке амплітудне значення синусоїдального струму?
5. Що таке період синусоїдального струму?
6. Що таке частота синусоїдального струму?
7. Запишіть амплітудне представлення синусоїдального струму й напруги.
8. Які існують способи графічного зображення струмів і напруг. Поясніть їх?
9. Що таке векторні діаграми струмів і напруг і де їх застосовують?
10. Запишіть векторну форму законів Кірхгофа.
11. Поясніть, які є фазові співвідношення між синусоїдальними струмами й напругами?
12. Поясніть, що називають діючим значенням у синусоїдальному струмі.
13. Які ви знаєте прості ланцюги синусоїдального струму?
14. Поясніть залежність активного, індуктивного та ємнісного опору ланцюга від частоти.
15. Охарактеризуйте ланцюг із послідовним з'єднанням гілок з R, L, C .
16. Охарактеризуйте ланцюг із паралельним з'єднанням гілок з R, L, C .
17. Визначте частотні характеристики ланцюгів із послідовним з'єднанням гілок з R, L, C .
18. Визначте частотні характеристики ланцюгів із паралельним з'єднанням гілок з R, L, C .

19. Що таке резонанс напруг і струмів?
20. Що таке резонансна частота ланцюга?
21. Визначте потужність ланцюга синусоїдального струму.
22. Визначте поняття про потужність ланцюга синусоїдального струму.
23. Визначте поняття про коефіцієнт корисної дії ланцюга синусоїдального струму.



Задачі для самостійного розв'язування

1. Для ланцюга, приведенного на рис. 4.10.1, *a*, відомі діючі значення напруги $U_R = 3B$, $U_L = 7B$ і $U = 5B$. Знайдіть діюче значення напруги на ємності C .

Відповідь: $U_C = 3B$.

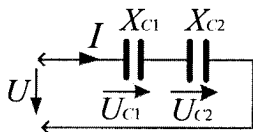
2. Для ланцюга, наведеного на рис. 4.12.1, *a*, відомі діючі значення струмів $I = 5A$, $I_R = 3A$, $I_L = 9A$. Знайдіть діюче значення струму у ємності C .

Відповідь: $I_C = 5A$.

3. Для ланцюга, представленого на рис. 4.10.2, відомі $U = 10B$, $R = 3\text{Ом}$, $X = 4\text{Ом}$. Знайдіть активну, реактивну і повну потужності ланцюга.

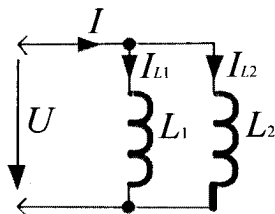
Відповіді: $P = 12\text{ Вт}$; $Q = 16\text{ Вар}$; $S = 20\text{ ВА}$.

4. Знайдіть сумарну величину ємності ланцюга C_Σ , наведеного на рисунку, якщо $C_1 = 4\text{ мкФ}$, $C_2 = 6\text{ мкФ}$.



Відповідь: $C_\Sigma = 2,4\text{ мкФ}$.

5. Знайдіть сумарну величину індуктивності ланцюга L_Σ , представленого на рисунку, якщо $L_1 = 6\text{ мГн}$, $L_2 = 6\text{ мГн}$.



Відповідь: $L_\Sigma = 3\text{ мГн}$.



Коментарі

Аналітичне представлення струмів і напруг, способи графічного зображення, векторні діаграми і їх застосування для розрахунків відповідають [2, 4]. Фазові співвідношення між струмом і напругою, діючі їх значення узяті з [2, 6]. Залежність активного, індуктивного та ємнісного опорів від частоти представлені відповідно до [3, 12], а потужність та підвищення коефіцієнта потужності ланцюга відповідають [17].

Розділ 5

Символічний метод та представлення у ньому параметрів ланцюгів синусоїдального струму

5.1. Основи методу

Розрахунок розгалужених ланцюгів синусоїдального струму за допомогою векторних діаграм, див. §4.4, є ускладненим, оскільки трикутники струмів і напруги не є (як правило) у таких ланцюгів прямокутними, і тоді теорема Піфагора до них є незастосовною. Вихід із цих ускладнень полягає у тому, що геометричне складання векторів струмів і напруг можна замінити алгебраїчним складанням їх проекцій у декартових координатах. Більш ефективний метод розрахунку подібних ланцюгів ґрунтується на використанні комплексних зображень синусоїдальних величин.

Означення 5.1.1. **Комплексним числом** називають суму дійсного і уявного числа, що представляє собою добуток дійсного числа на квадратний корінь із мінус одиниці, яку називають уявною одиницею і позначають буквою j .

Будь-який вектор на комплексній площині будемо зображувати як \dot{M} , рис. 5.1.1, замість вектора \vec{M} , як це ми зображали його при розгляді векторних діаграм, §4.4,

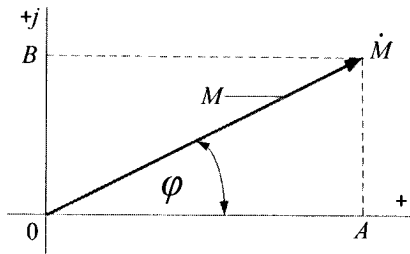


Рис. 5.1.1

де: M – модуль вектора \dot{M} ; A – дійсна складова вектора \dot{M} ; B – уявна складова вектора \dot{M} , $j = \sqrt{-1}$.

Прийнято вісь абсцис уважати віссю дійсних чисел і позначати (+), а вісь ординат – віссю уявних чисел і позначати (+j), як це показано на рис. 5.1.1. Тоді координати векторів по вісі абсцис будуть дійсними частинами комплексних чисел, а координати векторів по вісі ординат – уявними частинами комплексних чисел. За таких умов, наприклад, вектор \dot{M} запишеться у вигляді комплексного числа $\dot{M} = A + jB = M(\cos \varphi + j \sin \varphi)$. Використовуючи формулу Ейлера $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$, можна записати його як $\dot{M} = M \cdot e^{j\varphi}$. Вираз $\dot{M} = M \cdot e^{j\varphi}$ – показникова форма комплексного числа; $M = A + jB$ – його алгебраїчна форма; $\dot{M} = M(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ – його тригонометрична форма, причому:

$$M = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad A = M \cos \varphi; \quad B = M \sin \varphi; \quad \varphi = \arctg(B / A).$$

Такі початкові положення символічного методу. Він дозволяє замінити геометричні дії з векторами струмів і напруг діями алгебри з комплексними числами. При цьому слід завжди пам'ятати, що кожному вектору на площині відповідає комплексне число, а кожному комплексному числу відповідає вектор на цій площині.

Додавання і віднімання комплексних чисел

Означення 5.1.2. Додаванням комплексних чисел називають таке нове комплексне число, дійсна частина якого дорівнює алгебраїчній сумі дійсних частин, а уявна частина – алгебраїчній сумі уявних частин.

Означення 5.1.3. Відніманням комплексних чисел називають таке нове комплексне число, дійсна частина якого дорівнює алгебраїчній різниці дійсних частин, а уявна частина – алгебраїчній різниці уявних частин.

Додавання і віднімання комплексних чисел зручніше здійснювати у алгебраїчній формі. Математично це виглядає так:

$$\dot{M}_1 = A_1 + jB_1; \quad \dot{M}_2 = A_2 + jB_2; \quad \dot{M}_1 \pm \dot{M}_2 = \dot{M} = A + jB = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2).$$

Множення комплексних чисел

Означення 5.1.4. Множенням комплексних чисел називають таке нове комплексне число, модуль якого дорівнює добутку їх модулів, а аргумент – алгебраїчній сумі аргументів комплексних чисел, що перемножуються.

Множення комплексних чисел зручніше здійснювати у показниковій формі. Математично це виглядає так

$$\dot{M} = \dot{M}_1 \cdot \dot{M}_2 = M_1 \cdot M_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = M \cdot e^{j\varphi}.$$

Ділення комплексних чисел

Означення 5.1.5. Діленням комплексних чисел називають таке нове комплексне число, модуль якого дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника, а аргумент – алгебраїчній різниці аргументів діленого і дільника.

Ділення комплексних чисел краще здійснювати у показниковій формі. Математично це виглядає так

$$\dot{M} = \frac{\dot{M}_1}{M_2} = \frac{M_1}{M_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = M \cdot e^{j\varphi}.$$

Означення 5.1.6. Два комплексних числа є поєднаними, якщо їх співмножники мають однакові модулі й рівні за величиною, але протилежні за знаком аргументи.

Нехай задане комплексне число $\dot{M} = M \cdot e^{j\varphi}$. Тоді поєднаним до нього буде комплексне число $\dot{M}^* = M \cdot e^{-j\varphi}$. Добуток таких комплексних чисел завжди буде дорівнювати квадрату модуля співмножників, тобто

$$(\dot{M} = M \cdot e^{j\varphi}) \cdot (\dot{M}^* = M \cdot e^{-j\varphi}) = M^2.$$

Означення 5.1.7. Два комплексних числа є оберненими, якщо їх добуток дорівнює одиниці.

Нехай задано комплексне число $\dot{M} = M \cdot e^{j\varphi}$. Тоді оберненим до нього буде комплексне число $\frac{1}{\dot{M}} = \frac{1}{M} e^{-j\varphi}$. Добуток таких комплексних чисел завжди буде дорівнювати одиниці.

Множення комплексного числа на j і $(-j)$

Нехай задане комплексне число $\dot{M} = A + jB$. Необхідно помножити його на j і $(-j)$. При множенні відповідно отримасмо:

$$\dot{M}_1 = j \cdot \dot{M} = -B + j \cdot A \text{ (оскільки } j \cdot j = -1);$$

$$\dot{M}_2 = -j \cdot \dot{M} = B - j \cdot A \text{ (оскільки } j \cdot (-j) = 1).$$

Із рис. 5.1.1. випливає, що множення вектора \dot{M} на j викликає його поворот на комплексній площині на 90° проти годинникової стрілки, а при множенні на $(-j)$ – поворот на 90° за годинниковою стрілкою.

Комплексне представлення похідної синусоїдального струму

У задачах з електротехніки часто доводиться розглядати похідні від синусоїдальних величин. Наприклад,

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d(I_m \sin(\omega t + \varphi_i))}{dt} = \omega \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}),$$

що дозволяє записати $\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow j\omega \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$. Це є комплексне

представлення похідної від синусоїдального струму. Нагадаємо, що множення на j еквівалентно повороту вектора $\omega \dot{I}_m$ на 90° проти годинникової стрілки. Таким чином, при диференціюванні вектор похідної $\omega \dot{I}_m$ повертається проти годинникової стрілки на 90° щодо вектора \dot{I}_m .

На підставі розглянутого можна сформулювати практичне правило: **при диференціюванні синусоїдальної функції її комплексна амплітуда множиться на множник $j\omega$.**

Комплексне представлення інтеграла синусоїдального струму

У задачах з електротехніки часто доводиться розглядати інтеграли синусоїдальних величин. Наприклад,

$$\int_0^t i(t) dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\dot{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t} = -j \frac{\dot{I}_m}{\omega} e^{j\omega t}.$$

Це є комплексне представлення інтеграла синусоїдального струму. Нагадаємо, що множення на $-j$ еквівалентно повороту вектора $\frac{\dot{I}_m}{\omega}$ на 90° за годинниковою стрілкою. Таким чином, при

інтегруванні вектор $\frac{\dot{I}_m}{\omega}$ повертається за годинниковою стрілкою на 90° щодо вектора \dot{I}_m .

На підставі розглянутого можна сформулювати практичне правило: при інтегруванні синусоїдальної функції її комплексна амплітуда множиться на множник $-\frac{j}{\omega}$.

Деякі широко використовувані формули для дій над комплексними числами:

$$j = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1; \quad e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi; \quad e^{\pm j90^\circ} = \pm j;$$

$$e^{\pm j180^\circ} = -1; \quad e^{\pm j270^\circ} = \mp j;$$

$$e^{\pm j360^\circ} = 1; \quad \frac{1}{e^{\pm j\psi}} = e^{\mp j\psi}; \quad \frac{1}{\pm j} = \mp j.$$

Головними положеннями символічного методу є поняття про: комплексний струм і напругу; комплексний опір; комплексну провідність і комплексну потужність.

5.2. Комплексні струм і напруга

Положення векторів струму й напруги на комплексній площині, що поєднане з полярною системою координат, показано на рис. 5.2.1,

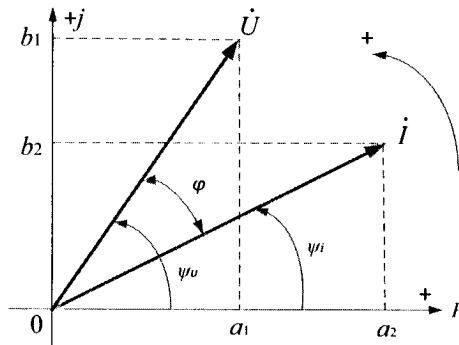


Рис. 5.2.1

де: \dot{U} – комплексне діюче значення напруги (скорочено – комплексна напруга); \dot{I} – комплексне діюче значення струму (скорочено – комплексний струм).

Аналітичний запис комплексних діючих значень \dot{U} і \dot{I} мають вигляд:

$$\dot{U} = a_1 + jb_1 = U \cdot e^{j\psi_u}; \quad \dot{I} = a_2 + jb_2 = I \cdot e^{j\psi_i}. \quad (5.2.1)$$

Ліва частина цих формул є алгебраїчною формою запису комплексної напруги і струму, а права частина – показниковою. У цих формулах: a_1 і a_2 – дійсні частини комплексних величин; b_1 і b_2 – уявні частини комплексних величин; U і I – модулі комплексних величин (діючі значення); ψ_u і ψ_i – аргументи комплексних величин (початкові фази). Складати і віднімати комплексні струми або комплексну напругу зручно в алгебраїчній формі, а множити і ділити – у показниковій формі.

Приклад 5.2.1. Запишіть комплексний струм $\dot{I} = 8 + j6A$ двополюсника, рис. 5.2.1, а, у показниковій формі.

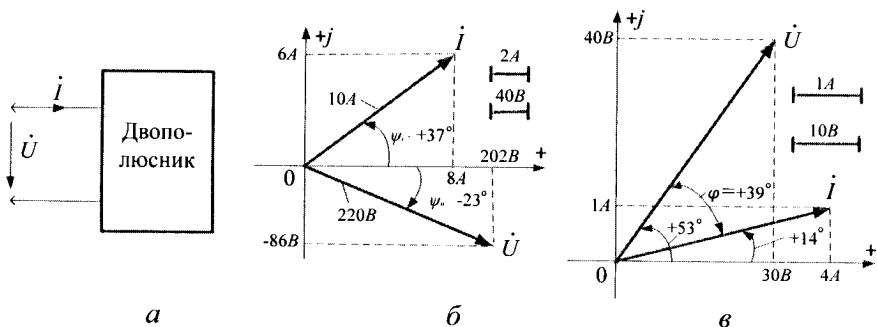


Рис. 5.2.1

Розв'язання. Відповідно до формули 5.2.1, маємо $\dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$, де:
 $I = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10A$; $\psi_i = \arctg \frac{+6}{8} = \arctg(+0,75) = +37^\circ$.

Таким чином, комплексний струм $\dot{I} = 8 + j6A$ двополюсника буде дорівнювати $\dot{I} = 10e^{j37^\circ} A$. Положення цього вектора на комплексній площині показано на рис. 5.2.1, б.

Приклад 5.2.2. Запишіть комплексну напругу $\dot{U} = 220 \cdot e^{-j23^\circ} V$ двополюсника, рис. 5.2.1, а, в алгебраїчній формі.

Розв'язання. Відповідно до формули 5.2.1, маємо $\dot{U} = a + jb$, де:
 $a = U \cdot \cos \psi_u = 220 \cdot \cos(-23)^\circ = 202 B$;
 $b = U \sin \psi_u = 202 \sin(-23)^\circ = -86 B$. Таким чином, комплексна напруга $\dot{U} = 220 \cdot e^{-j23^\circ} B$ двополюсника в алгебраїчній формі буде дорівнювати $\dot{U} = (202 - j86) B$. Положення цього вектора на комплексній площині показано на рис. 5.2,1, б.

Приклад 5.2.3. Відомі комплексна напруга $\dot{U} = (30 + j40) B$ і комплексний струм $\dot{I} = (4 + j) A$ на затискачах двополюсника, зображеного на рис. 5.2.1,а. Знайдіть: дійсне значення струму і напруги; кут зрушення фаз φ між напругою і струмом; побудуйте векторну діаграму двополюсника на комплексній площині.

Розв'язання. Перевішивши комплексну напругу і струм з алгебраїчної у показникову форму, отримасмо:

$$\dot{U} = U \cdot e^{j \arctg(40/30)} = \sqrt{30^2 + 40^2} \cdot e^{j \arctg(40/30)} = 50 e^{j53^\circ} B ;$$

$$\dot{I} = \sqrt{4^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg(1/4)} = 4,12 e^{j14^\circ} A ,$$

де: $I = 4,12 A$ – дійсне значення струму; $U = 50 B$ – дійсне значення напруги; $\psi_i = +14^\circ$ – початкова фаза струму; $\psi_u = +53^\circ$ – початкова фаза напруги; кут зрушення фаз φ між напругою і струмом $\varphi = \psi_u - \psi_i = 53^\circ - (+14^\circ) = +39^\circ$.

Знак (+) цього кута указує на індуктивний характер ланцюга (наявність у ньому опору R і індуктивності L). Векторна діаграма цього ланцюга приведена на рис. 5.2.1, в.

У розглянутих вище прикладах вектори \dot{U} і \dot{I} розташовувалися на комплексній площині у першому і четвертому квадрантах. При побудові векторних діаграм складних ланцюгів (трансформатор, асинхронний двигун) комплексні струми і напруга можуть розташовуватися у будь-якому з чотирьох її квадрантів, як це показано для струму \dot{I} на рис. 5.2.3.

На рис. 5.2.3. модуль струму I однаковий для усіх квадрантів і дорівнює $I = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тут же дані формули, що визначають його

алгебраїчну і показникову форми (номери квадрантів указані римськими цифрами I, II, III і IV):

$$I \rightarrow \dot{I} = a + jb = I \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j \arctg(b/a)};$$

$$II \rightarrow \dot{I} = -a + jb = I \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j(180^\circ - \arctg(b/a))} = -I \cdot e^{-j \arctg(b/a)};$$

$$III \rightarrow \dot{I} = -a - jb = I \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j(180^\circ + \arctg(b/a))} = -I \cdot e^{+j \arctg(b/a)};$$

$$IV \rightarrow \dot{I} = a - jb = I \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j(360^\circ - \arctg(b/a))} = I \cdot e^{-j \arctg(b/a)}.$$

Ті ж співвідношення справедливі й для комплексної напруги \dot{U} , розташованої у різних квадрантах комплексної площини.

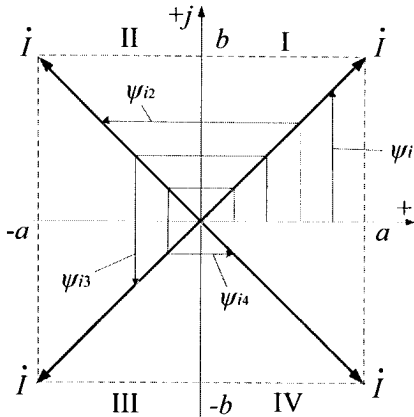


Рис. 5.2.3

5.3. Комплексні опір і провідність

Означення 5.3.1. Комплексним опором \dot{Z} називають відношення комплексної напруги \dot{U} до комплексного струму \dot{I}

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{I \cdot e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi},$$

де Z – повний опір ланцюга, а φ – кут зрушення між напругою і струмом. На комплексній площині вектор комплексного опору розташовується так, як це показано на рис. 5.3.1, а.

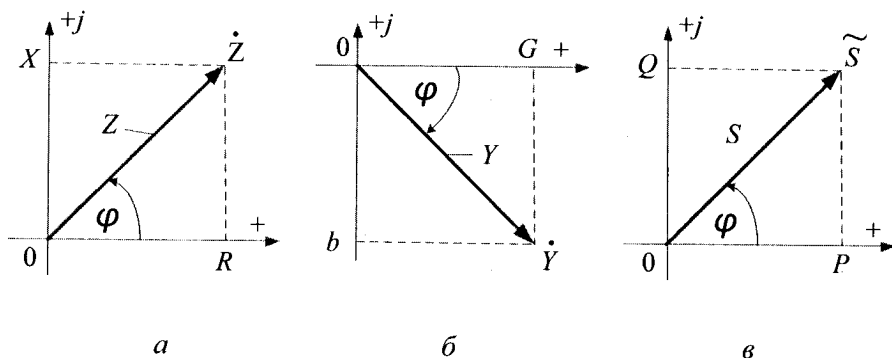


Рис. 5.3.1

Переходячи до алгебраїчної форми запису \dot{Z} , знаходимо, що його дійсна частина $Z \cdot \cos \varphi$ відповідає активному опору ланцюга R , рис. 4.10.1, z , а уявна частина $Z \cdot \sin \varphi$ відповідає реактивному опору X . Тому

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot \cos \varphi + jZ \cdot \sin \varphi = R + jX. \quad (5.3.1)$$

Таким чином, комплексний опір містить у собі повний опір ланцюга Z , активний опір R , реактивний опір X і кут зрушення фаз φ між напругою й струмом.

Слід відмітити, що комплексне число \dot{Z} не залежить (на відміну від струму і напруги) від початкових фаз струму й напруги. Дійсно, якщо вибрати початок відліку часу так, що $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то, як відомо, напруга $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ випереджає струм (для ланцюга з R і L) на той же кут φ , тобто $\psi_u = \psi_i + \varphi$. Якщо це записати у комплексній формі, то отримаємо

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{I \cdot e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

Означення 5.3.2. Комплексною провідністю \dot{Y} називають відношення комплексної струму \dot{I} до комплексної напруги \dot{U}

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \cdot e^{j\psi_i}}{U \cdot e^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} \cdot e^{j(\psi_i - \psi_u)} = Y \cdot e^{-j\varphi},$$

де Y – повна провідність ланцюга, а φ – кут зрушення фаз між напругою і струмом (знак мінус з'явився тут суто формально у результаті отримання оберненої величини від Z). Комплексна провідність \dot{Y} є величина, зворотна комплексному опорі \dot{Z} і дорівнює $\dot{Y} = 1/\dot{Z}$.

Положення вектору \dot{Y} на комплексній площині показано на рис. 5.3.1, б. Переходячи від показникової до алгебраїчної форми запису комплексної провідності, знаходимо, що її дійсна частина $Y \cdot \cos\varphi$ відповідає активній провідності ланцюга G , рис. 4.12.1, з, а його уявна частина $Y \cdot \sin\varphi$ – реактивній провідності b . Тому

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\dot{Z}} = Y \cdot e^{j\varphi} = Y \cdot \cos\varphi - jY \cdot \sin\varphi = G + jb. \quad (5.3.2)$$

Таким чином, комплексна провідність містить у собі повну провідність Y , активну провідність G , реактивну провідність b і кут зрушення фаз φ між напругою і струмом.

Слід відмітити, що формули 5.3.1 і 5.3.2 є законом Ома у комплексній формі запису для ділянки ланцюга з \dot{Z} або \dot{Y} . Ці формули мають узагальнений характер і справедливі для комплексних опорів і провідностей, що мають як активні, так і реактивні складові.

Приклад 5.3.1. В умовах прикладу 5.2.3. визначте активний, реактивний, повний опори ланцюга і кут зрушення фаз між напругою і струмом.

Розв'язання. Знаходимо комплексний опір ланцюга відповідно до формули 5.3.1.

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{50 \cdot e^{j53^\circ}}{4,1 \cdot e^{j14^\circ}} = 12,1 \cdot e^{j39^\circ} = 12,1 \cdot (\cos 39^\circ + j \sin 39^\circ) = \\ &= (9,4 + j7,6) \text{ Ом}, \end{aligned}$$

де: $12,1 = Z$ – повний опір ланцюга, Ом; $9,4 = R$ – активний опір ланцюга, Ом; $7,6 = X$ – реактивний опір ланцюга, Ом; $+39^\circ = \varphi$ – кут зрушення фаз між напругою і струмом ланцюга.

Виконайте розрахунок указаних параметрів прикладу 5.3.1 з використанням алгебраїчної форми запису комплексного числа. Результати порівняйте, зробіть висновки.

Приклад 5.3.2. В умовах прикладу 5.2.3. визначте активну, реактивну, повну провідність ланцюга і кут зрушення фаз між напругою і струмом.

Розв'язання. Знаходимо комплексну провідність ланцюга відповідно до формули 5.3.2.

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{4,12 \cdot e^{j14^\circ}}{50 \cdot e^{j53^\circ}} = 0,08 \cdot e^{-j39^\circ} = 0,08 \cdot \cos(-39^\circ) + j0,08 \sin(-39^\circ) = (0,064 - j0,052) \text{ См,}$$

де: $0,064 = G$ – активна провідність ланцюга, См; $0,052 = b$ – реактивна провідність ланцюга, См; $0,08 = Y$ – повна провідність ланцюга, См; $39^\circ = \varphi$ – кут зрушення фаз між напругою і струмом.

Виконайте розрахунок указаних параметрів прикладу 5.3.2 з використанням алгебраїчної форми запису комплексного числа. Результати порівняйте, зробіть висновки.

5.4. Комплексна потужність

Означення 5.4.1. Комплексною потужністю \tilde{S} називають добуток комплексної напруги \dot{U} на поєднаний комплексний струм \dot{I}^* ,

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot e^{j\psi_u} \cdot I \cdot e^{-j\psi_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = S \cdot e^{j\varphi},$$

де: S – повна потужність ланцюга; φ – кут зрушення фаз між напругою і струмом; $\dot{I}^* = I \cdot e^{-j\psi_i}$ – поєднаний комплексний струм, див. визначення 5.1.6; знак \sim над комплексною потужністю носить назву «тільда» і ставиться замість крапки тому, що потужність не є синусоїдою.

Так доводиться діяти формально для того, щоб у формулі комплексної потужності показник ступеня числа e відповідав куту зрушення фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Положення вектора \tilde{S} на комплексній

площині показано на рис. 5.3.1. в. Переходячи від показникової до алгебраїчної форми запису, знаходимо, що її дійсна частина $S \cdot \cos \varphi$ відповідає активній P , а уявна $S \cdot \sin \varphi$ – реактивній потужності ланцюга Q , рис. 5.3.1. в. Тому комплексну потужність ланцюга можна записати, як

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = S \cdot e^{j\varphi} = S \cdot \cos \varphi + jS \cdot \sin \varphi = P + jQ. \quad (5.4.1)$$

Таким чином, комплексна потужність ланцюга містить у собі повну потужність S , активну потужність P , реактивну потужність Q і кут зрушення фаз φ між напругою і струмом.

Приклад 5.4.1. В умовах прикладу 5.2.3 визначте активну, реактивну і повну потужності на затискачах двополюсника.

Розв'язання. Знаходимо комплексну потужність ланцюга по формулі 5.4.1. $\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 50 \cdot e^{j53^\circ} \cdot 4,12 \cdot e^{-j14^\circ} = 206 \cdot e^{j39^\circ}$ ВА, де: $\dot{U} = 50 \cdot e^{j53^\circ}$ В; $\dot{I}^* = 4,12 \cdot e^{-j14^\circ}$ А – поєднаний комплексний струм. Переходячи до алгебраїчної форми запису комплексної потужності, отримаємо

$$\tilde{S} = 206 \cdot e^{j39^\circ} = 206 \cos 39^\circ + j206 \cdot \sin 39^\circ = (160 + j130) \text{ВА},$$

де: $160 = P$ – активна потужність, Вт; $130 = Q$ – реактивна потужність, Вар; $206 = S$ – повна потужність, ВА; $39^\circ = \varphi$ – кут зрушення фаз між напругою і струмом (знак + свідчить про індуктивний характер ланцюга).

Виконайте розрахунок указаних параметрів прикладу 5.4.1 з використанням алгебраїчної форми запису комплексного числа. Результати порівняйте, зробіть висновки.

5.5. Закони Кірхгофа у комплексній формі

Закони Кірхгофа у комплексній формі запису є фактично модифікацією законів Кірхгофа у векторній формі запису, §4.5.

Перший закон Кірхгофа стосується вузлів ланцюга: алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^K \dot{I}_k = 0,$$

де k – число гілок ланцюга. При цьому комплексні струми, спрямовані на схемі до вузла ланцюга, беруть у рівнянні зі знаком (+), а спрямовані від вузла – зі знаком (-).

Другий закон Кірхгофа стосується до контурів ланцюга, алгебраїчна сума комплексних EPC контура дорівнює алгебраїчній сумі комплексних напруг на усіх комплексних опорах цього контура:

$$\sum_{m=1}^Q \dot{E}_q = \sum_{n=1}^N \dot{I}_n \cdot \dot{Z}_n,$$

де: Q – число джерел EPC контура; N – число комплексних опорів контура. При цьому комплексні EPC і струми беруться у рівнянні зі знаком (+), якщо їх напрям на схемі співпадає з довільно вибраним напрямом обходу контура і зі знаком (-), якщо не співпадає.



Контрольні запитання

1. Що таке символічний метод?
2. Що називають комплексним числом?
3. Що називають додаванням і відніманням комплексних чисел?
4. Що називають множенням і діленням комплексних чисел?
5. Які комплексні числа називають послідовними?
6. Які комплексні числа називають оберненими?
7. Визначте комплексне представлення похідної синусоїдального струму.
8. Визначте комплексне представлення інтегралу синусоїдального струму.
9. Зробіть аналітичний запис комплексних діючих значень напруги і струму.
10. Що таке комплексний опір і комплексна провідність?
11. Що таке комплексна потужність?
12. Запишіть перший і другий закони Кірхгофа у комплексній формі.



Задачі для самостійного розв'язування

1. Відомі напруга і струм на затискачах деякого двополюсника $u = 282 \cdot \sin(942t - 20^\circ) B$, $i = 14,1 \sin(942t - 50^\circ) A$. Запишіть струм і

напругу даного двополюсника у вигляді комплексних діючих значень у показниковій і алгебраїчній формах.

Відповідь: $\dot{U} = 200 \cdot e^{-j20^\circ} = (188 - j68,4)B$;

$$\dot{I} = 10 \cdot e^{j50^\circ} = (6,43 - j7,7)A .$$

2. Відомі комплексні значення напруги $\dot{U} = 100 \cdot e^{j30^\circ} B$ і струму

$$\dot{I} = 10 \cdot e^{j60^\circ} A .$$

Знайдіть миттєві значення струму і напруги, якщо частота струму $f = 50\text{Гц}$.

Відповідь: $i = 14,1 \sin(314t + 60^\circ) A$; $u = 141 \cdot \sin(314t + 30^\circ) B$

3. В умовах задачі 1 знайдіть активну, реактивну і повну потужність двополюсника.

Відповідь: $P = 1732 \text{ Вт}$; $Q = 1000 \text{ Вар}$; $I = 2000 \text{ ВА}$.



Коментарі

Інформація про комплексні струм, напругу, опір і провідність відповідає [9], а комплексна потужність і закони Кірхгофа у комплексній формі узяті з [9, 14, 17].

Розділ 6

Еквівалентні перетворення ланцюгів та резонанс у ланцюгах синусоїдального струму

6.1. Поняття про еквівалентні ланцюги

Поняття про еквівалентні ланцюги розглянемо на двополюсниках.

Означення 6.1.1. Двополюсником називають електричний ланцюг будь-якої складності, що має два вихідні затискачі.

Означення 6.1.2. Двополюсник називають активним, якщо він містить джерело енергії.

Означення 6.1.3. Двополюсник називають пасивним, якщо він не містить джерела енергії.

Помітимо, що усі розглянуті раніше електричні ланцюги були пасивними двополюсниками.

Означення 6.1.4. Два або декілька двополюсників називають еквівалентними (рівноцінними), якщо на їхніх затискачах однакові синусоїди струму і синусоїди напруги (інакше кажучи, зовнішні характеристики ланцюгів у еквівалентних двополюсників повинні залишитися незмінними).

Ці умови означають, що на затискачах усіх еквівалентних двополюсників однакові діючі значення струмів, напруги і кути зрушення фаз між напругою і струмом. Такі двополюсники можна замінювати один на інший без зміни режиму роботи іншого ланцюга.

З цього положення випливає, що пасивний двополюсник будь-якої складності можна еквівалентно замінити простим ланцюгом із послідовним або паралельним з'єднанням активного і реактивного опорів, як це показано на рис. 6.1.1.

Такі перетворення широко використовуються у теоретичній електротехніці для спрощення розрахунків складних ланцюгів.

Якщо двополюсник, показаний на рис. 6.1.1, *a*, еквівалентний окремо схемам (*б*) і (*в*), то ці схеми також еквівалентні одна одній.

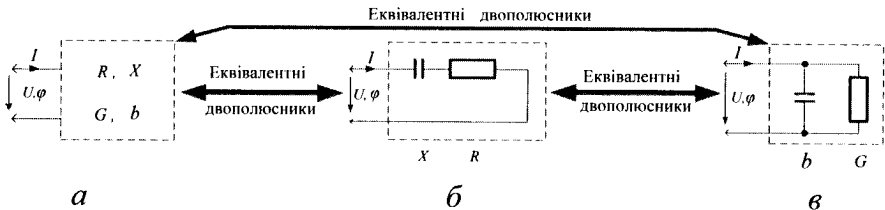


Рис. 6.1.1

Приклад 6.1.1. На затискачах пасивного двополюсника, рис. 6.1.1, *a* відомі миттєві значення напруги і струму: $u = 282 \cdot \sin(620t + 30^\circ) B$; $i = 14,1 \cdot \sin(628t + 70^\circ) A$. Знайдіть: дійсні значення струму і напруги на вході двополюсника; кут зрушення фаз між напругою і струмом; активний, реактивний і повний опори двополюсника; активну, реактивну й повну провідності двополюсника; активну, реактивну й повну потужності двополюсника.

Розв'язання. Для знаходження діючого значення струму й напруги скористаємось формулами 4.7.2 і 4.7.3. Підставивши у них максимальні значення струму й напруги, отримаємо:

$$U = U_m / \sqrt{2} = 282 / 1,41 = 200 B; \quad I = I_m / \sqrt{2} = 14,1 / 1,41 = 10 A.$$

Кут зрушення фаз φ між напругою і струмом визначається відповідно до формули 4.6.1, $\varphi = \psi_u - \psi_i = (+30^\circ) - (+70^\circ) = -40^\circ$. Знак (-) показує, що ланцюг має ємнісний характер.

Повний опір двополюсника визначається формулою $Z = U/I = 200/10 = 20$ Ом. При цьому на рис. 4.10.1, *z* його активний опір дорівнює $R = Z \cdot \cos \varphi = 20 \cdot \cos 40^\circ = 20 \cdot 0,77 = 15,3$ Ом, а реактивний - $X = Z \cdot \sin \varphi = 20 \cdot \sin 40^\circ = 20 \cdot 0,64 = 12,8$ Ом. **Відмітимо**, що визначаючи активний, реактивний і повний опори двополюсника, ми фактично визначаємо параметри еквівалентного йому послідовного ланцюга, рис. 6.1.1, *б*.

Повна провідність двополюсника визначається формулою $I/U = 10/200 = 0,05$ См. При цьому, із рис. 4.12.1, *z* слідує, що його активна провідність дорівнює $G = Y \cdot \cos \varphi = 0,05 \cdot \cos 60^\circ = 0,05 \cdot 0,77 = 0,038$ См, а реактивна - $b = Y \cdot \sin \varphi = 0,05 \cdot 0,64 = 0,032$ См. **Відмітимо**, що, визначаючи активну, реактивну й повну провідності двополюсника,

ми фактично знаходимо параметри еквівалентного йому паралельного ланцюга, рис. 6.1.1, в.

Повна потужність ланцюга $S=U \cdot I = 200 \cdot 10 = 2000$ ВА; активна потужність $P = S \cdot \cos \varphi = 2000 \cdot \cos 40^\circ = 2000 \cdot 0,77 = 1540$ Вт; реактивна потужність $Q = S \cdot \sin \varphi = 2000 \cdot \sin 40^\circ = 2000 \cdot 0,64 = 1280$ Вар.

Приклад 6.1.2. На затискачах пасивного активно – ємнісного двополюсника, рис. 6.1.1, а, відомі діючі значення струму, напруги й активної потужності: $I = 10$ А; $U = 200$ В; $P = 1000$ Вт. Визначте активний і реактивний (ємнісний) опори еквівалентного послідовного ланцюга, наведеного на рис. 6.1.1, б.

Розв'язання. Активний опір R ланцюга знаходимо згідно формули $R = P/I^2 = 1000/100 = 10$ Ом. Повний опір ланцюга знаходимо згідно формули $Z = U/I = 200/10 = 20$ Ом. Реактивний (ємнісний) опір ланцюга знаходимо згідно формули

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17,3 \text{ Ом}.$$

6.2. Перетворення послідовних ланцюгів на паралельні й навпаки

При такому перетворенні на затискачах ланцюга повинні залишитися незмінними \dot{U} і \dot{I} . Звідси випливає, що в еквівалентних ланцюгів \dot{Z} і \dot{Y} – взаємнозворотні величини:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}; \dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}; \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}.$$

Таким чином, для знаходження провідності еквівалентного паралельного ланцюга слід за відомим \dot{Z} визначити \dot{Y} , а для знаходження опорів еквівалентного послідовного ланцюга за відомою \dot{Y} знайти \dot{Z} .

Приклад 6.2.1. Для ланцюга з послідовним з'єднанням опорів R і X , рис. 6.2.2, а, знайдіть еквівалентний паралельний ланцюг з провідностями G і b_L , рис. 6.2.2, б.

Розв'язання. Комплексний опір \dot{Z} для послідовного ланцюга дорівнює $\dot{Z} = R + jX_L$. Провідність для еквівалентного паралельного ланцюга буде дорівнювати $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R + jX_L} \cdot \left(\frac{R - jX_L}{R - jX_L} \right) = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = G - jb_L$. Таким чином, провідність еквівалентного паралельного ланцюга буде дорівнювати:

$$G = \frac{R}{R^2 + X_L^2}; \quad b_L = -\frac{X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

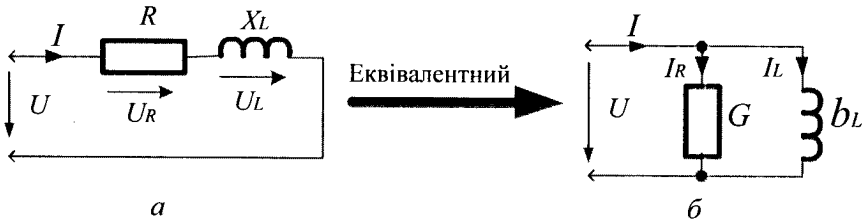


Рис. 6.2.2

Відмітимо, що знак (+) в уявній частині комплексного опору і знак (-) в уявній частині комплексної провідності вказує на індуктивний характер ланцюга, а протилежні знаки – на ємнісний характер.

У розглянутих еквівалентних ланцюгів опори R, X , провідності G, b – не зворотні величини. Взаємозворотними є тільки \dot{Z} і \dot{Y} , а також повний опір Z і повна провідність Y . Насправді, нехай величини активного й реактивного опору послідовного ланцюга дорівнюють $R = 3$ Ом і $X = 4$ Ом. Тоді величини провідностей еквівалентного паралельного ланцюга є рівними $G = 0,12$ См і $b = 0,16$ См. Ці значення G і b , як бачимо, не є зворотними величинами до початкових величин R і X , оскільки $1/G = R' = 8,33$ Ом і $1/b = X' = 6,25$ Ом. Проте, повний опір Z послідовного ланцюга дорівнює $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{25} = 5$ Ом і повна провідність у еквівалентному паралельному ланцюга

$Y = \sqrt{G^2 + b^2} = \sqrt{0,12^2 + 0,16^2} = \sqrt{0,04} = 0,2 \text{ См}$ є взаємозворотними величинами.

Приклад 6.2.2. Для ланцюга з паралельним з'єднанням активного R і ємнісного X_C опорів, рис. 6.2.3, а, знайдіть еквівалентний послідовний ланцюг з опорами R' і X' рис. 6.2.3, б.

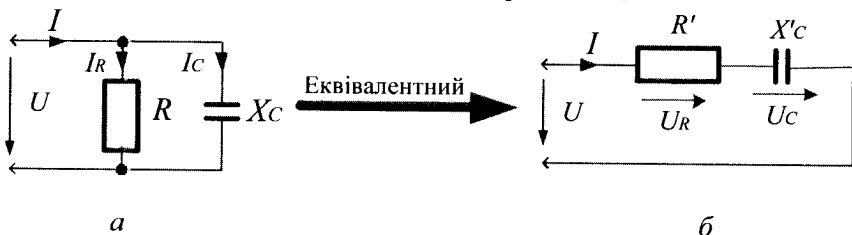


Рис.6.2.3

Розв'язання. З умов еквівалентності цих ланцюгів виходить, що комплексний опір послідовного ланцюга є зворотною величиною комплексної провідності цього ланцюга $\dot{Z} = 1/\dot{Y}$. Тут

$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_R} + \frac{1}{\dot{Z}_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{R} + j\frac{1}{X_C} = G + jb_C,$$

де $G = 1/R$ активна провідність, а $b_C = 1/X_C = -$ реактивна провідність початкового паралельного ланцюга. Тоді комплексний опір цього ланцюга буде дорівнювати

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{G + jb_C} \cdot \frac{(G - jb_C)}{(G - jb_C)} = \frac{G - jb_C}{G^2 + b_C^2} = \frac{G}{G^2 + b_C^2} - j\frac{b_C}{G^2 + b_C^2} = R' - jX',$$

де $R' = \frac{G}{G^2 + b_C^2}$ і $X' = \frac{b_C}{G^2 + b_C^2}$ відповідно активний і

реактивний опори еквівалентного послідовного ланцюга.

Нехай, наприклад, відомі величини активного і реактивного опорів початкового паралельного ланцюга $R = 33,3 \text{ Ом}$ і $X_C = 25 \text{ Ом}$. Тоді активна і реактивна провідності гілок цього ланцюга складає $G = 1/R = 0,03 \text{ См}$ і $b_C = 1/X_C = 0,04 \text{ См}$. При цьому, величини активного і ємнісного опорів еквівалентного послідовного ланцюга будуть дорівнювати:

$$R' = \frac{G}{G^2 + b_c^2} = \frac{0,03}{0,03^2 + 0,04^2} = \frac{0,03}{0,0025} = 12 \text{ Ом};$$

$$X'_c = \frac{b}{G^2 + b_c^2} = \frac{0,04}{0,0025} = 16 \text{ Ом}.$$

Тут також, як і у попередньому прикладі, ці опори не взаємно зворотні з початковими опорами R і X_C . Взаємно зворотними є тільки повний опір Z і повна провідність Y , які відповідно будуть дорівнювати :

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом};$$

$$Y = \sqrt{G^2 + b_c^2} = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2} = 0,05 \text{ См}.$$

6.3. Перетворення трикутних опорів на зірку й навпаки

У деяких розгалужених ланцюгах опору гілки сполучені між собою так, що ланцюг не може бути безпосередньо перетворений ні до послідовного, ні до паралельного з'єднання. Такими є з'єднання зіркою (умовне позначення $*$) і трикутником (умовне позначення Δ), показані на рис. 6.3.1.

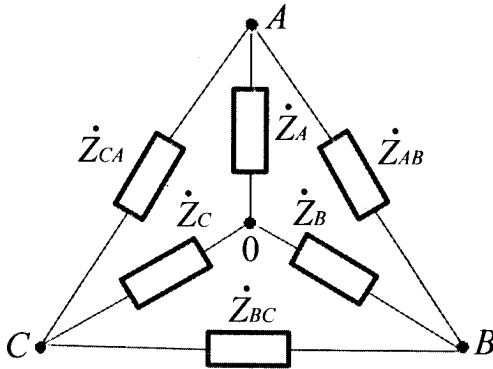


Рис. 6.3.1

Якщо відомі опори зірки $\dot{Z}_A, \dot{Z}_B, \dot{Z}_C$, то розрахунок опорів еквівалентного трикутника виконують так:

$$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_A + \dot{Z}_B + \frac{\dot{Z}_A \cdot \dot{Z}_B}{\dot{Z}_C}; \quad \dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_B + \dot{Z}_C + \frac{\dot{Z}_B \cdot \dot{Z}_C}{\dot{Z}_A}; \quad \dot{Z}_{CA} = \dot{Z}_C + \dot{Z}_A + \frac{\dot{Z}_C \cdot \dot{Z}_A}{\dot{Z}_B}.$$

При однакових комплексних опорах зірки ($\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \dot{Z}_*$), комплексні опори еквівалентного трикутника \dot{Z}_Δ також однакові і їх розраховують за формулою $\dot{Z}_\Delta = 3\dot{Z}_*$.

Якщо відомі опори трикутника $\dot{Z}_{CA}, \dot{Z}_{AB}, \dot{Z}_{BC}$, то розрахунок опорів еквівалентної зірки виконують так:

$$\dot{Z}_A = \frac{\dot{Z}_{AB} \cdot \dot{Z}_{CA}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}}; \quad \dot{Z}_B = \frac{\dot{Z}_{BC} \cdot \dot{Z}_{AB}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}}; \quad \dot{Z}_C = \frac{\dot{Z}_{CA} \cdot \dot{Z}_{BC}}{\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}}.$$

При однакових комплексних опорах трикутника ($\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_{CA} = \dot{Z}_\Delta$), комплексні опори еквівалентної зірки \dot{Z}_* також однакові і їх розраховують за формулою $\dot{Z}_* = \dot{Z}_\Delta / 3$.

Приклад 6.3.1. Знайдіть комплексний струм \dot{I} джерела ЕРС для ланцюга, приведеного на рис. 6.3.2, а, якщо: $\dot{E} = 30 \text{ В}$; $Z_0 = 0,8 \text{ Ом}$; $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_5 = 3 \text{ Ом}$; $\dot{Z}_3 = 10 \text{ Ом}$; $\dot{Z}_4 = 2 \text{ Ом}$ (для наглядності і спрощення розрахунку у даних для комплексних величин указані тільки активні елементи).

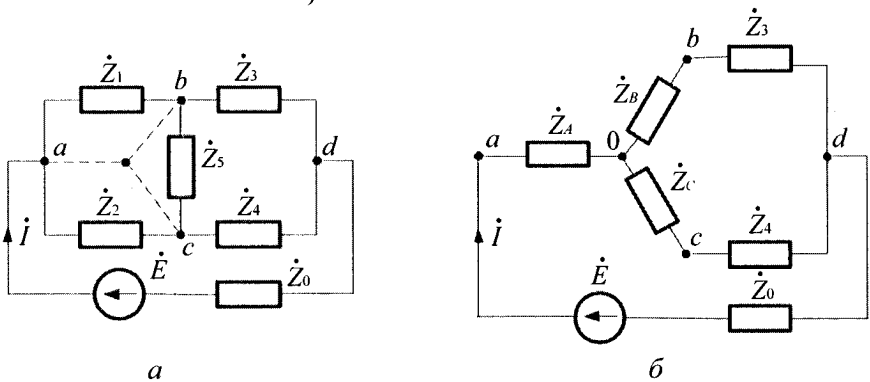


Рис. 6.3.2

Розв'язання. Схема, яка приведена на рис. 6.3.2, а, є мостовою і складається з комбінацій опорів із зірок і трикутників. З'єднання опорів \dot{Z}_1, \dot{Z}_3 і \dot{Z}_5 , а також \dot{Z}_2, \dot{Z}_4 і \dot{Z}_5 є зірками, а комбінації опорів $\dot{Z}_1, \dot{Z}_5, \dot{Z}_2$ і $\dot{Z}_3, \dot{Z}_4, \dot{Z}_5$ є трикутниками. Струм \dot{I} такого ланцюга легко розрахувати, якщо замінити одну із зірок ланцюга на еквівалентний трикутник або один з трикутників ланцюга на еквівалентну зірку. Замінюємо, наприклад, трикутник $\dot{Z}_1, \dot{Z}_5, \dot{Z}_2$ на еквівалентну зірку $\dot{Z}_A, \dot{Z}_B, \dot{Z}_C$. При цьому, мостова схема перетвориться у схему з послідовно-паралельним з'єднанням елементів, рис. 6.2.2, б. Опори трикутника $\dot{Z}_1, \dot{Z}_5, \dot{Z}_2$ однакові і тому опори еквівалентної зірки відповідно до формули $\dot{Z}_* = \dot{Z}_\Delta / 3$ будуть дорівнювати $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \dot{Z}_\Delta = 3/3 = 1$ Ом. Знаходимо опір гілки ланцюга відносно точок *a* і *d*

$$\dot{Z}_{ad} = \dot{Z}_A + \frac{(\dot{Z}_B + \dot{Z}_3) \cdot (\dot{Z}_C + \dot{Z}_4)}{\dot{Z}_B + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_C + \dot{Z}_4} = 1 + \frac{(1+1) \cdot (1+2)}{1+1+1+2} = 1+1,2 = 2,2 \text{ Ом.}$$

Знаходимо опір усього ланцюга $\dot{Z}_\Sigma = \dot{Z}_0 + \dot{Z}_{ad} = 0,8 + 2,2 = 3 \text{ Ом}$ і струм джерела *ЕРС*, який дорівнює $\dot{I} = \dot{E} / \dot{Z}_\Sigma = 30/3 = 10 \text{ А}$.

Пропонуємо читачеві самостійно знайти струм \dot{I} , заздалегідь перетворивши зірку $\dot{Z}_1, \dot{Z}_3, \dot{Z}_5$ на еквівалентний трикутник (використовуючи другий варіант розв'язання прикладу).

6.4. Перетворення джерела *ЕРС* на джерело струму й навпаки

У теорії ланцюгів джерела енергії зображують або у вигляді джерела *ЕРС* (послідовний ланцюг – рис. 6.4.1, а), або у вигляді джерела струму (паралельний ланцюг – рис. 6.4.1, б).

На цих схемах: \dot{E} – комплексна *ЕРС* джерела; \dot{Z}_0 – його комплексний внутрішній опір; \dot{J} – комплексний струм джерела струму; \dot{Y}_0 – його комплексна внутрішня провідність.

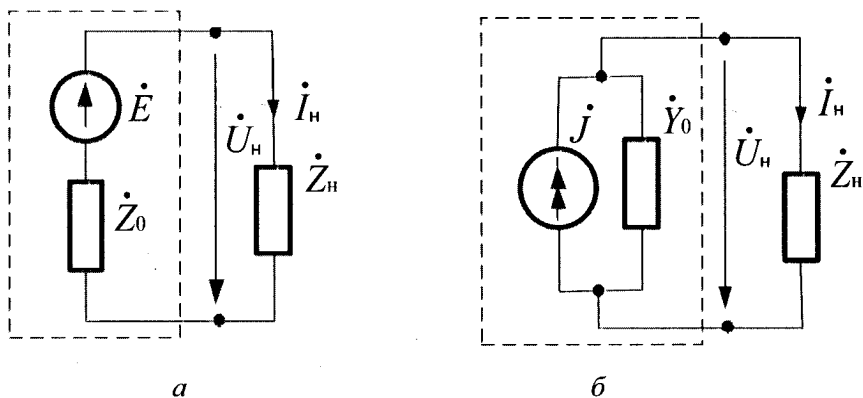


Рис. 6.4.1

У джерела ЕРС $\dot{E} = const$ і залишається незмінною при усіх режимах роботи (від холостого ходу до замикання). У джерела струму $\dot{J} = const$ і також не залежить від режиму роботи ланцюга.

Обидві схеми джерел рівноцінні і можуть бути еквівалентно перетворені одна в одну. З умов еквівалентності, § 6.1, випливає, що у еквівалентних схем:

$$\dot{J} = \dot{E} / \dot{Z}_0; \dot{Y}_0 = 1 / \dot{Z}_0; \text{ або } \dot{E} = \dot{J} / \dot{Y}_0; \dot{Z}_0 = 1 / \dot{Y}_0. \quad (6.4.1)$$

У ланцюгах, де підтримується незмінність напруги у споживачів, джерела енергії зображують на схемах, як правило, у вигляді джерел ЕРС, а у ланцюгах із стабілізованим струмом – у вигляді джерел струму.

Помітимо, що ідеальне джерело ЕРС ($\dot{Z}_0 = 0$) і ідеальне джерело струму ($\dot{Y}_0 = 0$) еквівалентно перетворити одне в одне неможливо.

Приклад 6.4.1. Два джерела ЕРС включені паралельно і працюють на спільний опір навантаження \dot{Z}_H , рис. 6.4.2, а.

Параметри джерел і опір навантаження відомі: $\dot{E}_1 = 120B$; $\dot{E}_2 = 115B$; $\dot{I} = \dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = (1 + j2)\text{Ом}$; $\dot{Z}_H = 10\text{Ом}$. Визначте дійсні значення струму і напруги в опорі навантаження \dot{Z}_H .

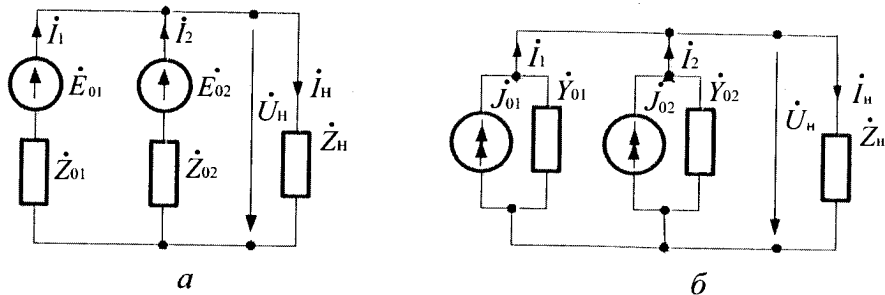


Рис. 6.4.2

Розв'язання. Перетворимо обидва джерела ЕРС на еквівалентні джерела струму, рис. 6.4.2, б, а скориставшись співвідношеннями 6.4.1, отримаємо:

$$J_1 = \frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}_{01}} = \frac{120}{1 + j2} = (24 - j48)A;$$

$$Y_{01} = \frac{1}{\dot{Z}_{01}} = \frac{1}{1 + j2} = (0,2 - j0,4)Cm;$$

$$J_2 = \frac{\dot{E}_2}{\dot{Z}_{02}} = \frac{150}{1 + j2} = (23 - j46)A;$$

$$Y_{02} = \frac{1}{\dot{Z}_{02}} = \frac{1}{1 + j2} = (0,2 - j0,4)Cm.$$

Об'єднавши паралельні джерела струму й провідності, будемо мати:

$$J = J_1 + J_2 = (47 - j94)A; Y_0 = Y_{01} + Y_{02} = (0,4 - j0,8)Cm.$$

У результаті цього перетворення отримаємо схему, представлену на рис. 6.4.1, б. Перетворивши результуюче джерело струму J на еквівалентне джерело ЕРС, і скориставшись співвідношеннями 6.4.1, отримаємо:

$$\dot{E} = \frac{J}{Y} = \frac{47 - j94}{0,4 - j0,8} = 117,5B;$$

$$\dot{Z}_0 = \frac{1}{\dot{Y}_0} = \frac{1}{0,4 + j0,8} = (0,5 - j1) \text{ Ом}.$$

Використовуючи отримані формули, будемо послідовний ланцюг, рис. 6.4.1, *a*, струм і напругу у якому обчислюємо за другим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_O + \dot{Z}_H} = \frac{117,5}{10,5 + j1} = (11,08 - j1,056) = 11,1 \cdot e^{-j5,5^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{U}_H = \dot{I}_H \cdot \dot{Z}_H = (11,08 - j1,056) \cdot 10 = 110,8 - j10,56 = 111,3 \cdot e^{-j5,5^\circ} \text{ B}.$$

Виходячи з обчислень, дійсні значення струму й напруги в опорі навантаження \dot{Z}_H будуть дорівнювати 11,1 A і 111,3 B відповідно.

6.5. Резонанс у ланцюгах синусоїдального струму

Поняття про резонанс напруги й резонанс струму розглянуті у § 4.11 і § 4.13. Для кращого і більш глибокого розуміння резонансу визначимо загальне його визначення та сформулюємо умови його виникнення.

Означення 6.5.1. Резонансом називають такий режим роботи електричного ланцюга, за якого струм і напруга у ньому співпадають по фазі.

Тобто кут зрушення фаз між напругою і струмом дорівнює нулю

$$\varphi = 0 \tag{6.5.1}$$

і ланцюг веде себе як активний опір.

Якщо ланцюг складається з послідовного з'єднаннях *R*, *L*, *C*, рис. 4.10.1, *a*, або шляхом еквівалентних перетворень може бути зведений до такого послідовного з'єднання, то із загальної умови резонансу випливає, що при резонансі у такому ланцюзі, відповідно до формули 4.10.4,

$$X_\Sigma = 0. \tag{6.5.2}$$

Тобто реактивний опір усього ланцюга дорівнює нулю.

Якщо ланцюг складається з паралельно з'єднаних R, L, C , рис. 4.12.1, a , або шляхом еквівалентних перетворень може бути зведений до такого з'єднання, то із загальної умови резонансу виходить, що при резонансі у такому ланцюзі, відповідно до формули 4.12.4,

$$b_{\Sigma} = 0. \quad (6.5.3)$$

Тобто реактивна провідність усього ланцюга дорівнює нулю.

Умови 6.5.1, 6.5.2, і 6.5.3, дозволяють знайти резонансне рівняння ланцюга, що установлює зв'язок між параметрами ланцюга і частотою, при якій можливий резонанс.

Якщо досліджуваний ланцюг шляхом перетворень приводиться до послідовного, то слід знайти його комплексний опір $\dot{Z}_{\Sigma} = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma}$ і прирівняти його уявну частину до нуля. Якщо ж досліджуваний ланцюг шляхом перетворень приводиться до паралельного, то слід знайти його комплексну провідність $\dot{Y}_{\Sigma} = G_{\Sigma} + jb_{\Sigma}$ і прирівняти його уявну частину до нуля.

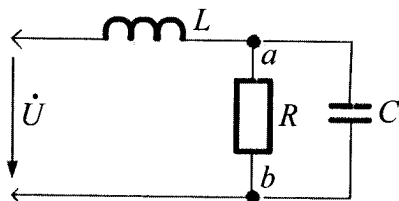


Рис. 6.5.1

Приклад 6.5.1. Знайдіть резонансне рівняння для ланцюга з послідовно-паралельним з'єднанням R, L, C , рис. 6.5.1.

Розв'язання. Даний ланцюг шляхом еквівалентних перетворень приводимо до послідовного ланцюга, тому умовою резонансу є співвідношення 6.5.2.

Для визначення реактивного опору X_{Σ} усього ланцюга слід знайти комплексний опір для нього і прирівняти його уявну частину до нуля. Прирівнюючи реактивний опір X_{Σ} до нуля, отримуємо резонансне рівняння, виражене через опори гілок

$$X_{\Sigma} = X_L - \left(\frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} \right) = 0.$$

Для визначення зв'язку між параметрами ланцюга і частотою, скористаємося співвідношеннями $X_L = \omega L, X_C = 1/\omega C$ і отримуємо

$$\omega L - \frac{\frac{1}{\omega C} \cdot R^2}{R^2 + 1/(\omega C)^2} = 0 \quad \text{або} \quad \omega L - \frac{\omega C R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} = 0.$$

Скорочуємо ліву й праву частину рівняння на $\omega \neq 0$. Потім приводимо дріб до спільного знаменника і прирівнюємо чисельник до нуля, оскільки, якщо він дорівнює нулю, то і дріб також буде дорівнювати нулю. У результаті отримуємо резонансне рівняння

$$\omega^2 L C^2 R^2 + L - C R^2 = 0.$$

Якщо параметри RLC ланцюга задані, то резонансну частоту визначають з цього рівняння так

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C R^2 - L}{C^2 R^2 L}} = \frac{1}{\sqrt{L C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{L}{C R^2}} = \frac{1}{\sqrt{L C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\rho}{R^2}},$$

де $\rho = \sqrt{L/C}$ – хвильовий опір ланцюга.

Відмітимо, що на відміну від ланцюга з послідовним або паралельним з'єднанням R, L, C резонансна частота такого ланцюга залежить не лише від L і C , але також і від величини R .

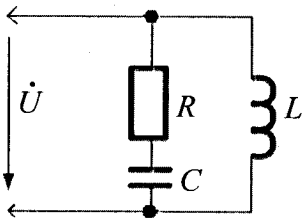


Рис. 6.5.2

Приклад 6.5.2. Знайдіть резонансне рівняння для ланцюга з паралельно-послідовним з'єднанням R, L, C , рис. 6.5.2.

Розв'язання. Цей ланцюг шляхом еквівалентного перетворення перетворюємо на паралельний ланцюг, тому умовою резонансу тут є співвідношення 6.5.3. Для знаходження реактивної провідності ланцюга визначаємо його комплексну провідність і прирівнюємо

нулю її уявну частину. Прирівнявши нулю реактивну провідність ланцюга, отримуємо резонансне рівняння

$$b_{\Sigma} = \left(\frac{X_C}{R^2 + X_C^2} - \frac{1}{X_L} \right) = 0.$$

Для визначення зв'язку між параметрами ланцюга і частотою використаємо співвідношення $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$ і отримаємо

$$\frac{1}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\omega C}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} - \frac{1}{\omega L} = 0.$$

Ліву частину цього рівняння приводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельник до нуля. Тоді $\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R^2 - 1 = 0$.

З цього рівняння можна визначити будь-який із параметрів ланцюга і резонансну частоту. Якщо параметри RLC відомі, то резонансна частота ω_0 знаходиться наступним чином

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - C^2 R^2} \cdot \left(\frac{L}{L}\right)} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{CR^2}{L}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}},$$

де $\rho = \sqrt{L/C}$ – хвильовий опір ланцюга.

Відмітимо, що резонансна частота досліджуемого у прикладі ланцюга залежить не лише від L і C (як це має місце у ланцюгах з послідовним і паралельним з'єднанням R , L , C), але і від активного опору R . Очевидно, що якщо $CR^2/L \geq 1$ ($R > \rho$), то резонанс у такому ланцюзі неможливий, оскільки частота ω є позитивним дійсним числом.

Приклад 6.5.3. Знайдіть резонансні частоти у ланцюзі з послідовно-паралельним з'єднанням двох індуктивностей і однієї ємності, рис. 6.5.3.

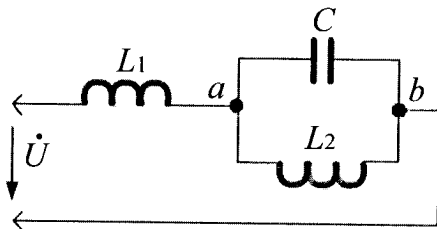


Рис. 6.5.3

Розв'язання. У цьому ланцюзі можливі два види резонансу: резонанс струмів на ділянці L_2C і резонанс напруг усього ланцюга. При резонансі струмів на ділянці L_2C резонансна частота згідно формули 4.13.2 визначається рівнянням $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_2C}$. Окрім цього, можливий резонанс напруг усього ланцюга за умови, що на ділянці ab переважає ємність. Таке явище має місце при частоті більшій, ніж ω_{01} (див. резонансні криві для ланцюга з паралельним з'єднанням індуктивності і ємності, наведені на рис. 4.13.1). Тому частота при резонансі напруг повинна бути більша резонансної частоти струму ($\omega_{02} > \omega_{01}$).

Для визначення частоти ω_{02} знаходимо реактивний опір ланцюга і прирівнюємо його до нуля $b_\Sigma = 0$. У нашому випадку немає активного опору у ланцюзі і тому $\dot{Z}_\Sigma = jX_\Sigma$, де

$$\dot{Z}_\Sigma = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)} = j\omega L_1 - j \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = j \left(\omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} \right).$$

Прирівнявши до нуля реактивний опір послідовного ланцюга, отримаємо таке резонансне рівняння

$$\omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} \quad \text{або} \quad L_1 - \frac{L_2}{\omega^2 L_2 C - 1}.$$

В останній формулі рівняння скоротили на $\omega \neq 0$. Тоді результуюче рівняння ланцюга буде дорівнювати $\omega^2 L_1 L_2 C - L_1 - L_2 = 0$. Звідси знаходимо резонанс напруг усього ланцюга

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{L_E C}},$$

де $L_\Sigma = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ – результуюча індуктивність ланцюга при резонансі напруг.

Очевидно, що $L_{\Sigma} < L_2$ і тому частота резонансу напруг усього ланцюга більше частоти резонансу струму на участку L_2C .

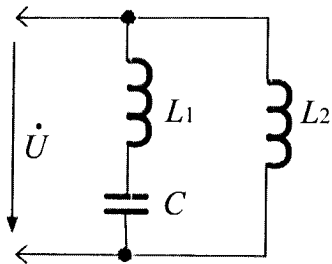


Рис. 6.5.4

Приклад 6.5.4. Знайдіть резонансні частоти ланцюга при паралельно-последовному з'єднанні двох індуктивностей і ємності, рис. 6.5.4.

Розв'язання. У даному ланцюзі можливі два види резонансу: резонанс напруги на ділянці з послідовним з'єднанням L_1C і резонанс струму усього ланцюга. При резонансі напруги з послідовним з'єднанням L_1C ,

відповідно до формули 4.11.2, маємо $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1C}$. Крім того, можливий резонанс струмів усього ланцюга, за умови, що на ділянці L_1C переважає ємність. Такий випадок може мати місце на частоті меншій, ніж ω_{01} (див. резонансні криві для ланцюга з послідовним з'єднанням L і C , представлені на рис. 4.11.1). Тому тут резонансна частота $\omega_{02} < \omega_{01}$.

Для визначення частоти ω_{02} знаходимо резонансне рівняння усього ланцюга за умови, що його реактивна провідність дорівнює нулю $b_{\Sigma} = 0$. У нашому випадку немає активного опору у ланцюзі, і тому $Y_{\Sigma} = jb_{\Sigma}$, де

$$\begin{aligned} Y_{\Sigma} = jb_{\Sigma} &= \left(\frac{1}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) = -j \frac{\omega C}{\omega^2 L_1 C - 1} - j \frac{1}{\omega L_2} = \\ &= -j \left(\frac{\omega C}{\omega^2 L_1 C - 1} + \frac{1}{\omega L_2} \right). \end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля реактивний опір ланцюга, отримаємо таке резонансне рівняння

$$\frac{\omega C}{\omega^2 L_1 C - 1} + \frac{1}{\omega L_2} = 0 \text{ або } \omega^2 L_2 C + \omega^2 L_1 C - 1 = 0.$$

Звідси знаходимо частоту резонансу струмів усього ланцюга

$$\omega^2(L_2C + L_1C) = 1 \quad \text{або} \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{L_EC},$$

де $L_\Sigma = L_1 + L_2$ - результуюча індуктивність ланцюга при резонансі струмів. Очевидно, що $L_\Sigma > L_1$ і тому частота резонансу напруги менша за частоту резонансу струму, $\omega_{02} < \omega_{01}$.



Контрольні запитання

1. Що називають двополюсником?
2. Які двополюсники називають еквівалентними?
3. Напишіть формули для перетворення послідовних ланцюгів на паралельні й навпаки.
4. Напишіть формули для еквівалентного перетворення опорів трикутника на опори зірки і навпаки.
5. Накресліть схеми джерел EPC і струму.
6. Чому в ідеальних джерелах EPC і струму еквівалентні перетворення одне в одне неможливі?
7. Що називають резонансом у ланцюгах синусоїдального струму?
8. Які ви знаєте три умови резонансу?
9. Що таке резонанс струму і напруги?



Задачі для самостійного розв'язування

1. Відомі напруга і струм на затискачах двополюсника: $u = 282 \sin(942t - 20^\circ) \text{ В}$; $i = 14,1 \sin(942t - 50^\circ) \text{ А}$. Знайдіть активний, реактивний і повний опір еквівалентного послідовного ланцюга.

Відповідь: $R = 17,3 \text{ Ом}$; $X = 10 \text{ Ом}$; $Z = 20 \text{ Ом}$.

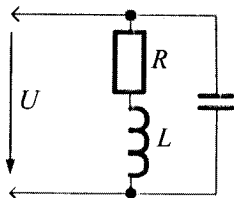
2. В умовах задачі 1 знайдіть активну, реактивну і повну провідності еквівалентного паралельного ланцюга.

Відповідь: $G = 0,043 \text{ См}$; $b = 0,025 \text{ См}$; $Y = 0,05 \text{ См}$.

3. На затискачах активно-індуктивного двополюсника відомі діючі значення струму, напруга і кут зрушення фаз між ними $U = 200 \text{ В}$, $I = 10 \text{ А}$, $\varphi = 30^\circ$. Визначте активну і індуктивну провідності паралельного ланцюга, еквівалентного даному двополюснику.

Відповідь: $G = 0,043 \text{ См}$; $b_L = 0,025 \text{ См}$.

4. Визначте реактивну провідність ланцюга, представленого на рисунку, використовуючи формули перетворення послідовної ділянки R і L в еквівалентну паралельну ділянку.



5. Комплексні опори усіх трьох гілок трикутника, рис. 6.3.1, однакові і дорівнюють $\dot{Z}_{\Delta} = (3+j9)$ Ом. Знайдіть комплексні опори еквівалентної зірки.

Відповідь: $\dot{Z}_* = (1+j3)$ Ом.

6. Відомі параметри джерела EPC : $\dot{E} = j10$ В; $\dot{Y} = +j1$ Ом. Визначте параметри еквівалентного джерела струму.

Відповідь: $\dot{J} = -10$ А; $\dot{Y} = +j1$ Ом.

7. Знайдіть вираз для резонансної частоти ланцюга, представленого на рисунку у задачі 4, якщо параметри R , L і C усіх його елементів відомі.



Коментарі

Перетворення послідовних ланцюгів на паралельні і навпаки, трикутних опорів на зірку і навпаки, а також перетворення джерел EPC у джерело струму і навпаки відповідають [6, 8]. Інформація про резонанс у ланцюгах синусоїдального струму узятя із [13, 16].

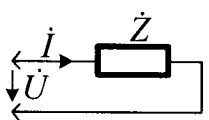
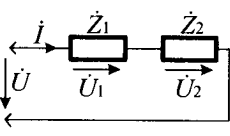
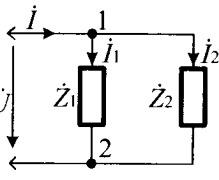
Розділ 7

Методи розрахунку ланцюгів синусоїдального струму

7.1. Розрахунок з одним джерелом енергії

До них належать ланцюги з послідовним, паралельним і змішаним з'єднанням опорів. Їх розрахунок здійснюється за допомогою закону Ома й законів Кірхгофа. Основні розрахункові формули символічного методу для ланцюгів з одним джерелом енергії наведені у табл.7.1.1.

Таблиця 7.1.1

№ п/п	Схеми ланцюгів	Закон Ома і закони Кірхгофа	Комплексні опори і провідності
1		$\dot{U} = \dot{I} \cdot \dot{Z}$ $\dot{I} = \dot{U} \cdot \dot{Y}$	$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}; \quad \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}$
2		$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ $\dot{U}_1 = \dot{I} \cdot \dot{Z}_1$ $\dot{U}_2 = \dot{I} \cdot \dot{Z}_2$ $\dot{U} = \dot{I} \cdot \dot{Z}_\Sigma$	$\dot{Z}_\Sigma = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$ $\dot{Y}_\Sigma = \frac{1}{\dot{Z}_\Sigma} = \frac{1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$
3		$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ $\dot{I}_1 = \dot{U} / \dot{Z}_1 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_1$ $\dot{I}_2 = \dot{U} / \dot{Z}_2 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_2$ $\dot{I} = \dot{U} / \dot{Z}_\Sigma = \dot{U} \cdot \dot{Y}_\Sigma$	$\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1}; \quad \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2}$ $\dot{Y}_\Sigma = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2$ $\dot{Z}_\Sigma = \frac{1}{\dot{Y}_\Sigma} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$

4		$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ i_1 &= \dot{U} / \dot{Z}_\Sigma = \dot{U} \cdot \dot{Y}_\Sigma \\ i_2 &= \dot{U}_{23} / \dot{Z}_2 = \dot{U}_{23} \cdot \dot{Y}_2 \\ i_3 &= \dot{U}_{23} / \dot{Z}_3 = \dot{U}_{23} \cdot \dot{Y}_3 \\ \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_{23}; \dot{U}_1 = i_1 \cdot \dot{Z}_1 \\ \dot{U}_{23} &= i_1 \cdot \dot{Z}_{23} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \dot{Z}_\Sigma &= \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{23} &= \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} \\ \dot{Y}_\Sigma &= \frac{1}{\dot{Z}_\Sigma}; \quad \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2} \\ \dot{Y}_3 &= \frac{1}{\dot{Z}_3}; \quad \dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} \end{aligned}$
5		$\begin{aligned} i &= i_{12} + i_3 \\ i_{12} &= \dot{U} / \dot{Z}_{12} = \dot{U} \cdot \dot{Y}_{12} \\ i_3 &= \dot{U} / \dot{Z}_3 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_3 \\ i &= \dot{U} / \dot{Z}_\Sigma = \dot{U} \cdot \dot{Y}_\Sigma \\ \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \\ \dot{U}_1 &= i_{12} \cdot \dot{Z}_1; \dot{U}_2 = i_{12} \cdot \dot{Z}_2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \dot{Z}_{12} &= \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \\ \dot{Y}_{12} &= \frac{1}{\dot{Z}_{12}} = \frac{1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \\ \dot{Y}_3 &= \frac{1}{\dot{Z}_3}; \quad \dot{Y}_\Sigma = \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_3 \\ \dot{Z}_\Sigma &= \frac{1}{\dot{Y}_\Sigma} = \frac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_3} \end{aligned}$

Приклад 7.1.1. Знайдіть комплексний опір ланцюга з послідовним з'єднанням активного $R = 2$ Ом і індуктивного опору $X_L = 1$ Ом в алгебраїчній і показниковій формі.

Розв'язання. Згідно з поз. 1 і 2 табл.7.1.1, маємо: $\dot{Z}_R = R = 2$ Ом; $\dot{Z}_L = jX_L = j1$ Ом. Тоді, згідно з позицією 2 табл.7.1.1, отримаємо:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L = 2 + j1 = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1}{2}} = 2,24 \cdot e^{j27,5^\circ} \text{ Ом,} \quad \text{де}$$

$\dot{Z} = 2 + j1$ – алгебраїчна, а $\dot{Z} = 2,24 \cdot e^{j27,5^\circ}$ – комплексна форма представлення ланцюга. У цій формулі повний опір $Z = 2,24$ Ом, а кут зсуву фаз $\varphi = 27,5^\circ$.

Приклад 7.1.2. Знайдіть комплексну провідність ланцюга з паралельним з'єднанням активного $R = 33,3 \text{ Ом}$ і ємнісного опору $X_C = 25 \text{ Ом}$ в алгебраїчній і показниковій формі.

Розв'язання. Згідно з поз.1 і 3 табл. 7.1.1 маємо:

$$\dot{Y}_R = \frac{1}{\dot{Z}_R} = \frac{1}{R} = 0,03 \text{ См}; \quad \dot{Y}_C = \frac{1}{\dot{Z}_C} = \frac{1}{-jX_C} = +j\frac{1}{25} = +j0,04 \text{ См.}$$

Тоді, використовуючи поз.3 табл. 7.1.1, отримаємо

$$\dot{Y}_\Sigma = \dot{Y}_R + \dot{Y}_C = 0,03 + j0,04 = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2} \cdot e^{\arctg(0,04/0,03)} = 0,05 \cdot e^{j53^\circ} \text{ См,}$$

де: $Y = 0,05$ – повна провідність ланцюга у См; $\varphi = 53^\circ$ – кут зрушення фаз між напругою і струмом (знак «плюс» показує, що ланцюг має ємнісний характер).

Приклад 7.1.3. Знайдіть діюче значення струму й напруги у ланцюзі з послідовним з'єднанням активного $R = 6 \text{ Ом}$ та індуктивного $X_L = 8 \text{ Ом}$ опорів, рис. 7.1.1, а, до якого прикладено діюче значення синусоїдальної напруги величиною $U=100 \text{ В}$. Розв'язання виконати символічним методом з побудовою векторної діаграми ланцюга на комплексній площині. Струм ланцюга і напруги на активному та індуктивному опорах записати у вигляді синусоїд.

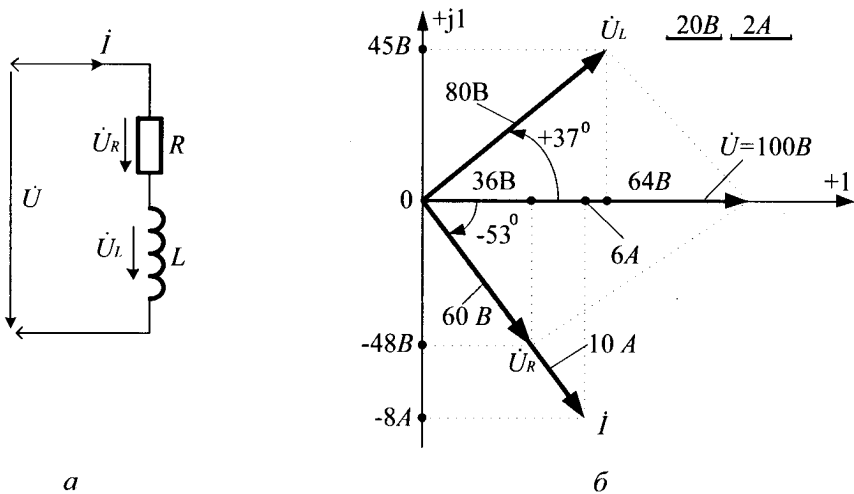


Рис. 7.1.1

Розв'язання. Користуючись поз. 2 табл.7.1.1, розв'язання розпочинаємо із знаходження комплексного опору ланцюга

$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L = R + jX_L = 6 + j8 = 100 \cdot e^{\arctg 8/6} = 10 \cdot e^{j53^\circ} \text{ Ом.}$$

Далі знаходимо комплексний струм ланцюга

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{100 \cdot e^{j\psi_u}}{10 \cdot e^{j53^\circ}} = \frac{100 \cdot e^{j0_u}}{10 \cdot e^{j53^\circ}} = 10 \cdot e^{-j53^\circ} = \\ &= 10 \cdot [\cos(-53^\circ) + j10 \cdot \sin(-53^\circ)] = 10 \cdot \cos 53^\circ - j10 \cdot \sin 53^\circ = \\ &= (6 - j8) \text{ A.} \end{aligned}$$

Початкова фаза прикладеної напруги ψ_u не задана і тому її величину приймаємо (довільно) рівною нулю, оскільки результат розрахунку ланцюга від величини початкової фази напруги не залежить. З останньої формули випливає, що діюче значення струму дорівнює $I = 10 \text{ A}$. Використовуючи поз.2 табл.7.1.1, знаходимо комплексну напругу \dot{U}_R на активному опорі, яка дорівнює

$$\begin{aligned} \dot{U}_R &= \dot{i} \cdot \dot{Z}_R = \dot{i} \cdot R = 10 \cdot e^{-j53^\circ} \cdot 6 = 60 \cdot e^{-j53^\circ} = 60 \cdot \cos(-53^\circ) + \\ &+ j60 \cdot \sin(-53^\circ) = (36 - j48) \text{ B.} \end{aligned}$$

У цій формулі діюче значення напруги на активному опорі – $U_R = 60 \text{ B}$. У наступній дії знаходимо комплексну напругу \dot{U}_L на індуктивному опорі

$$\begin{aligned} \dot{U}_L &= \dot{i} \cdot \dot{Z}_L = \dot{i} \cdot jX_L = (10 \cdot e^{-j53^\circ} \cdot j8) = (10 \cdot e^{-j53^\circ} \cdot 8 \cdot e^{j90^\circ}) = \\ &= 80 \cdot e^{+j37^\circ} = 80 \cdot \cos 37^\circ + j80 \cdot \sin 37^\circ = (64 + j48) \text{ B.} \end{aligned}$$

У цій формулі діюче значення напруги на індуктивному опорі буде дорівнювати $U_L = 80 \text{ B}$.

Для перевірки розрахунків використаємо другий закон Кірхгофа у комплексній формі запису $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = (36 - j48) + (64 + j48) = 100 \text{ B}$, що свідчить про правильність розв'язаного прикладу.

Векторна діаграма ланцюга, побудована на комплексній площині, показана на рис. 7.1.1, б, і графічно пояснює аналітичне розв'язання прикладу.

Тепер записуємо синусоїди струму і напруги на активному опорі R і індуктивному опорі X_L , використовуючи для цього результати розв'язання прикладу 7.1.1:

$$i = 10\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ A}; u_R = 60\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ B};$$

$$u_L = 80\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 37^\circ) \text{ B}.$$

Приклад 7.1.4. Знайдіть діючі значення струмів у гілках ланцюга з паралельним з'єднанням активного $R = 33,3$ Ом та індуктивного $X_L = 25$ Ом опорів, рис. 7.1.2, а, до якого підключене діюче значення синусоїдальної напруги величиною $U=100$ В.

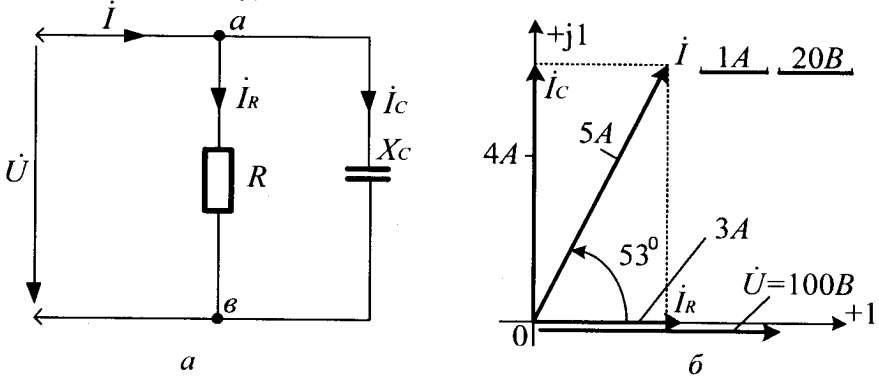


Рис. 7.1.2

Розв'язання виконати символічним методом з побудовою векторної діаграми ланцюга на комплексній площині. Струми у гілках записати у вигляді синусоїд.

Розв'язання. Існують три варіанти розв'язання прикладу: а) через провідності гілок, б) через опір гілок, в) за допомогою першого закону Кірхгофа.

Варіант розв'язання через провідності гілок

Використовуючи поз. 1 і 3 табл. 7.1.1, знаходимо комплексні

провідності гілок: $\dot{Y}_R = \frac{1}{\dot{Z}_R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{33,3} = 0,03 \text{ См};$

$$\dot{Y}_C = \frac{1}{\dot{Z}_C} = \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{-j25} = +j0,04 \text{ См і сумарну комплексну}$$

провідність усього ланцюга

$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_C = 0,03 + j0,04 = 0,05e^{+j53^\circ} \text{ См.}$$

Визначаємо комплексний струм ланцюга, використовуючи поз. 3 табл.7.1.1.

$$\dot{I} = \dot{U} \cdot \dot{Y} = 100 \cdot e^{j\psi_u} \cdot 0,05 \cdot e^{+j53^\circ} = 5 \cdot e^{+j53^\circ} = 5 \cdot (\cos 53^\circ + j \sin 53^\circ) = (3 + j4) \text{ A.}$$

Початкова фаза напруги ψ_u в умовах прикладу не задана і для спрощення розрахунків уважатимемо її рівною нулю, оскільки її величина не впливає на кінцевий результат. Із останньої формули випливає, що діюче значення загального струму ланцюга $I = 5 \text{ A}$. Користуючись формулами поз. 3 табл.7.1.1, визначаємо комплексний струм у гілці ланцюга з активним опором $\dot{I}_R = \dot{U} \cdot \dot{Y}_R = 100 \cdot 0,03 = 3 \text{ A}$. Тут комплексний струм дорівнює його дійсному значенню. Визначаємо комплексний струм у гілці ланцюга з ємнісним опором $\dot{I}_C = \dot{U} \cdot \dot{Y}_C = 100 \cdot e^{j0} \cdot j0,04 = j4 = 4 \cdot e^{j90^\circ} \text{ A}$. У цій формулі діюче значення струму $I_C = 4 \text{ A}$.

Перевірку розв'язання виконаємо за першим законом Кірхгофа, складеним для вузла (а) ланцюга

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = \dot{U} \cdot \dot{Y}_R = 3 + j4 = 5 \cdot e^{+j53^\circ} \text{ A.}$$

Отриманий результат відповідає струму ланцюга \dot{I} , знайденому вище приведеним способом. Таким чином, можна вважати, що задача розв'язана вірно.

Побудована на комплексній площині векторна діаграма ланцюга, приведена на рис. 7.1.1, б, наочно пояснює виконане вище розв'язання.

Використовуючи результати розв'язання прикладу, записуємо синусоїди струмів гілок: $i = 5\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 53^\circ) \text{ A}$; $i_R = 3\sqrt{2} \cdot \sin \omega t \text{ A}$; $i_C = 4\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$.

Варіант розв'язання через опори гілок

Користуючись поз. 1 і 3 табл. 7.1.1, виконаємо розв'язання даного прикладу у загальному вигляді:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_R \cdot \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}; \quad \dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_R}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_C}. \quad \text{Перевірка:}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C.$$

Варіант розв'язання за допомогою першого закону Кірхгофа

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_R}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_C}; \quad \dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C. \quad \text{Перевірка:} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}},$$

де $\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_R \cdot \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C}.$

Надаємо читачеві можливість виконати усі обчислення для останніх двох варіантів рішень і переконатися у тому, що результати розрахунків усіх трьох варіантів збігаються між собою.

Приклад 7.1.5. До ланцюга з послідовно-паралельним з'єднанням R, L, C , рис. 7.1.2, а, підключена синусоїдальна напруга частотою $f = 150$ Гц і діючим значенням напруги $U = 100$ В. Параметри ланцюга: $R = 1$ Ом; $L = 1,06$ мГн; $C = 531$ мкФ. Знайдіть діючі струми і напруги у гілках ланцюга, побудуйте його векторну діаграму на комплексній площині.

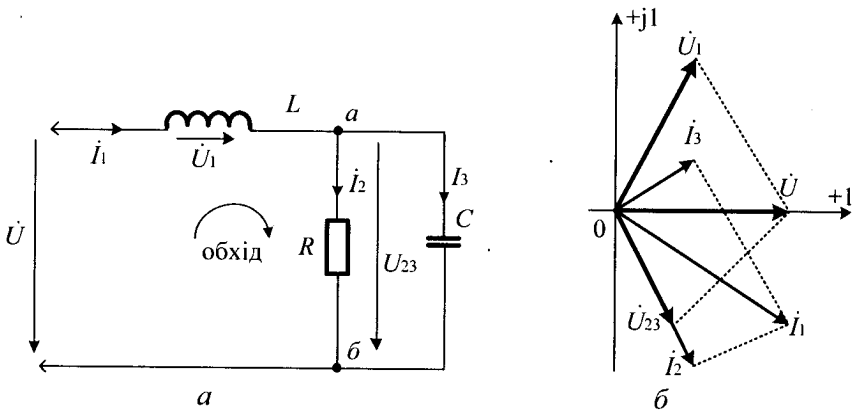


Рис. 7.1.2

Розв'язання. Для розрахунку ланцюгів синусоїдального струму зі змішаним з'єднанням R , L , C і одним джерелом енергії у даному і слідуєчому прикладі використаємо формули наведені у табл.7.1.1, позиції 4 і 5. У відповідності з формулами табл.7.1.1, визначаємо комплексні опори усіх трьох гілок ланцюга:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_R &= R = 1 \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j942 \cdot 1,06 \cdot 10^{-3} = j1 \text{ Ом}; \\ Z_C &= -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{942 \cdot 531 \cdot 10^{-6}} = -j2 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

У цих формулах кутова частота ланцюга $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 150 = 942 \text{ 1/с}$. Визначаємо комплексний опір усього ланцюга у відповідності з поз.4, табл.7.1.1

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\Sigma &= \dot{Z}_L + \frac{\dot{Z}_R \cdot \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} \cdot \left(\frac{R + jX_C}{R + jX_C} \right) = \\ &= jX_L + \frac{X_C^2 \cdot R - jX_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} = \frac{X_C^2 \cdot R}{R^2 + X_C^2} + \left(X_L - \frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} \right) = R_\Sigma + jX_\Sigma, \end{aligned}$$

$$\text{де: } R_\Sigma = \frac{X_C^2 \cdot R}{R^2 + X_C^2} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ Ом}; \quad X_\Sigma = \left(X_L - \frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} \right) = 1 - \frac{2}{5} = 0,6 \text{ Ом}.$$

Таким чином, комплексний опір буде дорівнювати $\dot{Z}_\Sigma = 0,8 + j0,6 = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} \cdot e^{j\arctg(0,6/0,8)} = 1 \cdot e^{j37^\circ} \text{ Ом}$.

У відповідності з формулою, поз.4 табл. 7.1.1, визначаємо комплексний струм ланцюга

$$I_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_\Sigma} = \frac{100 \cdot e^{j\psi_u}}{1 \cdot e^{+j37^\circ}} = \frac{100 \cdot e^{j0_u}}{1 \cdot e^{+j37^\circ}} = 100 \cdot e^{-j37^\circ} = (80 - j60) \text{ А}.$$

У цій формулі початкову фазу напруги ψ_u , яка не задана в умові прикладу, приймаємо рівною нулю (для простоти розрахунків), оскільки від її величини результат розв'язання не залежить. Діюче значення струму $I_1 = 100 \text{ А}$. Для визначення комплексних струмів \dot{I}_2 і

\dot{I}_3 попередньо знаходимо комплексну напругу \dot{U}_{23} . У відповідності з другим законом Кірхгофа для лівого контура ланцюга, вибравши напрямок його обходу за годинниковою стрілкою, маємо $\dot{U}_1 + \dot{U}_{23} - \dot{U} = 0$. Звідси $\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{U}_1$. У свою чергу, за законом Ома визначаємо

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_L = 100 \cdot e^{-j37^\circ} \cdot j1 = 100 \cdot e^{-j37^\circ} \cdot 1 \cdot e^{+j90^\circ} = 100 \cdot e^{+j53^\circ} = \\ &= 100 \cdot \cos 53^\circ + j100 \cdot \sin 53^\circ = (60 + j80) \text{ В.} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \dot{U}_{23} &= \dot{U} - \dot{U}_1 = 100 - (60 + j80) = (40 - j80) = \\ &= \sqrt{40^2 + 80^2} \cdot e^{j \arctg(-80/40)} = 89 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Модулі комплексних напруг \dot{U}_1 і \dot{U}_{23} дорівнюють $U_1 = 100 \text{ В}$ і $U_{23} = 89 \text{ В}$.

Користуючись поз.4 табл. 7.1.1, знаходимо комплексні струми в активному і смісному опорі ланцюга:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\dot{Z}_R} = \frac{89 \cdot e^{-j63^\circ}}{1} = 89 \cdot e^{-j63^\circ} = (40 - j80) \text{ А};$$

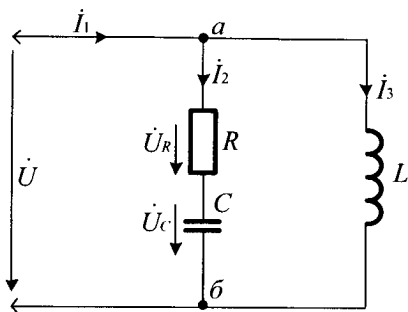
$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\dot{Z}_C} = \frac{89 \cdot e^{-j63^\circ}}{-j2} = \frac{89 e^{-j63^\circ}}{2 \cdot e^{-j90^\circ}} = 44,5 \cdot e^{+j27^\circ} = (40 + j20) \text{ А.}$$

Модулі (діючі значення) комплексних струмів \dot{I}_2 і \dot{I}_3 дорівнюють $I_2 = 89 \text{ А}$ і $I_3 = 44,5 \text{ А}$.

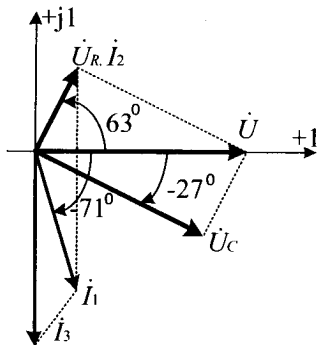
Перевірку розв'язання здійснюємо, використовуючи перший закон Кірхгофа для вузла (а) ланцюга $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (40 - j80) + (40 + j20) = (80 - j60) \text{ А}$, що говорить про вірність виконаного розрахунку.

Векторна діаграма ланцюга, побудована на комплексній площині, рис. 7.1.2,б, є графічним підтвердженням правильності аналітичного розв'язання прикладу.

Приклад 7.1.6. До ланцюга з паралельно-послідовним з'єднанням R , L , C , рис. 7.1.3, а, підключена синусоїдальна напруга, дійсне значення якої $U = 100 \text{ В}$. Опори ланцюга: $R = 1 \text{ Ом}$; $X_L = 1 \text{ Ом}$; $X_C = 2 \text{ Ом}$.



a



б

Рис. 7.1.3

Розрахуйте значення струмів і напруг у гілках ланцюга та побудуйте його векторну діаграму на комплексній площині.

Розв'язання. У відповідності до формул поз. 5 табл. 7.1.1, розрахуємо комплексні провідності гілок. Комплексна провідність лівої гілки

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= \frac{1}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = \frac{1}{R - jX_C} \cdot \left(\frac{R + jX_C}{R + jX_C} \right) = \frac{R + jX_C}{R^2 + jX_C^2} = \frac{R}{R^2 + jX_C^2} + \\ &+ j \frac{X_C}{R^2 + jX_C^2} = \frac{1 + j2}{5} = 0,2 + j0,4 = 0,45 \cdot e^{j63^\circ} \text{ См.} \end{aligned}$$

Комплексна провідність правої гілки

$$\dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_L} = \frac{1}{+jX_L} = -j \frac{1}{X_L} = -j1 \text{ См. Комплексна провідність}$$

усього ланцюга

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\Sigma &= \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \left(\frac{R}{R^2 + jX_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{R^2 + X_C^2} - \frac{1}{X_L} \right) = G_\Sigma + jb_\Sigma = \\ &= 0,2 - j0,6 = 0,63 \cdot e^{-j71^\circ} \text{ См.} \end{aligned}$$

Знак (-) перед символом (j) указує на індуктивний характер ланцюга.

Знайшовши провідності гілок, визначаємо комплексні струми в усіх гілках ланцюга:

1. Загальний струм

$$\dot{I}_1 = \dot{U} \cdot Y_{\Sigma} = 100 \cdot e^{j0} \cdot 0,63 \cdot e^{-j71^\circ} = 63 \cdot e^{-j71^\circ} = (20 - j60) A;$$

2. Струм у лівій гілці

$$\dot{I}_2 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_1 = 100 \cdot (0,2 + j0,4) = (20 + j40) = 45 \cdot e^{+j63^\circ} A;$$

3. Струм у правій гілці

$$\dot{I}_3 = \dot{U} \cdot \dot{Y}_2 = 100 \cdot (-j1) = -j100 = 100 \cdot e^{-j90^\circ} A.$$

Із знайдених комплексних струмів випливає, що модулі (діючі значення) відповідних комплексних струмів будуть дорівнювати: $I_1=63 A$; $I_2=45 A$; $I_3=100 A$. У цих формулах початкова фаза напруги прийнята рівною нулю ($\psi_u = 0$).

Перевірку розрахунків здійснюємо за допомогою першого закону Кірхгофа, записаного для вузла (а) ланцюга $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (20 + j40) + (-j100) = (20 - j60) A$. Ця величина збігається з знайденим раніше значенням струму іншим способом, що свідчить про правильність розв'язання.

Користуючись поз.5 табл. 7.1.1, визначаємо комплексні напруги \dot{U}_R і \dot{U}_C :

$$\dot{U}_R = \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_R = (20 + j40) \cdot 1 = (20 + j40) = 45 \cdot e^{j63^\circ} B;$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_C = (20 + j40) \cdot (-j2) = (80 - j40) = 89 \cdot e^{-j27^\circ} B.$$

Із знайдених комплексних напруг випливає, що модулі (діючі значення) відповідних комплексних напруг будуть дорівнювати: $U_R = 45 B$; $U_C = 89 B$, при цьому $U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = 100 B$.

Векторна діаграма ланцюга, побудована на комплексній площині, рис. 4.11, б, графічно підтверджує правильність аналітичного розв'язання.

7.2. Розрахунок із використанням законів Кірхгофа

Для розрахунку ланцюга цим методом необхідно скласти систему рівнянь, загальне число яких відповідає числу невідомих струмів. Першими складають найпростіші рівняння, використовуючи перший закон Кірхгофа. При цьому, число таких рівнянь береться на одиницю менше загального числа вузлів ланцюга (останнє рівняння є наслідком усіх попередніх і не несе нічого нового). Рівняння, що залишилися до повної системи, складають за другим законом Кірхгофа для будь-яких довільно обраних контурів ланцюга.

Заздалегідь слід задати (довільно) напрям комплексних струмів в усіх гілках ланцюга і напрями обходів вибраних контурів. Довільність цього вибору не впливає на кінцевий результат розрахунку.

При складанні рівнянь за першим законом Кірхгофа усі комплексні струми, спрямовані до вузла ланцюга, беруться зі знаком (+), а спрямовані від вузла – зі знаком (-).

При складанні рівнянь за другим законом Кірхгофа усі комплексні *EPC* і струми, що співпадають з обраним напрямом обходу контура, беруться зі знаком (+), а ті, що не співпадають – зі знаком (-).

Алгоритм розрахунку з використанням законів Кірхгофа

1. Якщо у ланцюзі декілька варіантів джерел, то необхідно привести ланцюг до одного варіанту, шляхом перетворенням джерела струму на еквівалентне джерело *EPC* або навпаки.

2. Довільно обрати напрями струмів в усіх гілках розглядуємої схеми.

3. Обрати контури у схемі й довільно вибрати напрями їх обходу.

4. Скласти число рівнянь за першим законом Кірхгофа на одиницю менше числа вузлів у схемі.

5. За другим законом Кірхгофа скласти усі недостатні рівняння для будь-яких довільно обраних контурів схеми.

6. Розв'язати отриману систему рівнянь відносно невідомих струмів схеми, наприклад, шляхом зниження порядку системи рівнянь.

7. Виконати перевірку розв'язання, використовуючи усі вузли схеми.

Дію алгоритму розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 7.2.1. Два джерела електроенергії працюють паралельно на одне навантаження, рис. 7.2.1, а.

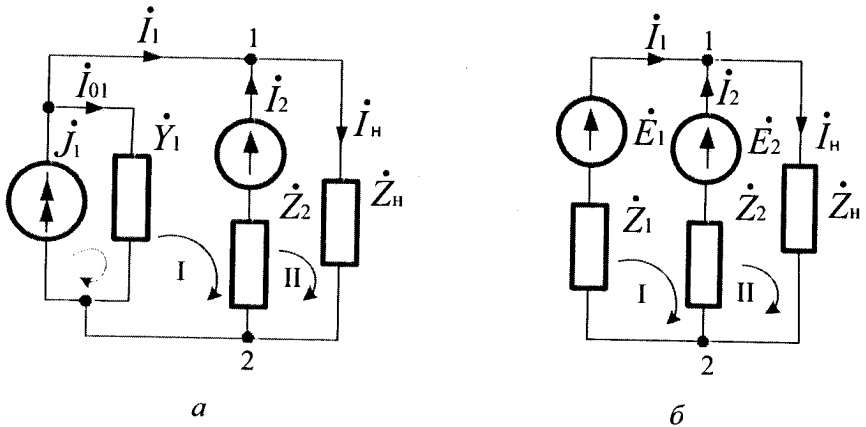


Рис. 7.2.1

Параметри джерел і навантаження відомі: $J_1 = (24 - j48) \text{ A}$; $Y_1 = (0,2 - j0,4) \text{ См}$; $E_2 = 115 \text{ В}$; $Z_2 = (1 + j2) \text{ Ом}$; $Z_H = 10 \text{ Ом}$. Знайдіть комплексні струми в усіх гілках ланцюга.

Розв'язання. Можливі два варіанти розв'язання цього прикладу: з перетворенням джерела струму на еквівалентне джерело *EPC* і без такого перетворення.

Розв'язання із перетворенням джерела струму на еквівалентне джерело *EPC*

Використовуючи крок 1 алгоритму, перетворимо джерело струму на еквівалентне джерело *EPC*, застосовуючи правила §6.4, отримаємо:

$$E_1 = J \cdot Z_1 = (24 - j48) \cdot (1 + j2) = 24 - j48 + j48 + 96 = 120 \text{ В};$$

$$Z_1 = 1/Y_1 = 1/(0,2 - j0,4) = (1 + j2) \text{ Ом}.$$

При цьому схема ланцюга набуває вигляду, представленого на рис. 7.2.1, б. У цьому ланцюзі необхідно знайти три невідомі струми. Тому система рівнянь повинна містити три рівняння: одне складене за першим законом Кірхгофа (у ланцюзі тільки два вузли), а решта два – за другим законом Кірхгофа. Користуючись кроком 2 алгоритму,

обираємо напрями комплексних струмів в усіх гілках ланцюга, а на кроці 3 алгоритму обираємо напрям обходу двох довільно вибраних контурів так, як це показано на рис. 7.2.1, б. Використовуючи кроки 4 і 5 алгоритму, складаємо систему рівнянь, у результаті чого отримаємо:

$$\begin{cases} \text{вузол 1} \rightarrow \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_H = 0; \\ \text{контур 1} \rightarrow \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_{01} - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_{02} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \\ \text{контур 2} \rightarrow \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_{02} + \dot{I}_H \cdot \dot{Z}_H = \dot{E}_2. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

На кроці 6 алгоритму знижуємо порядок системи рівнянь 7.2.1. З цією метою виразимо струм \dot{I}_2 через \dot{I}_1 і \dot{I}_H . Із першого рівняння знаходимо, що $\dot{I}_2 = \dot{I}_H - \dot{I}_1$. Підставивши значення \dot{I}_2 у друге й третє рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_1 - (\dot{I}_H - \dot{I}_1) \cdot \dot{Z}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \\ (\dot{I}_H - \dot{I}_1) \cdot \dot{Z}_2 + \dot{I}_H \cdot \dot{Z}_H = \dot{E}_2. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) - \dot{I}_H \cdot \dot{Z}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \\ -\dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{I}_H \cdot (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H) = \dot{E}_2. \end{cases}$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot (2 + j4) - \dot{I}_H \cdot (1 + j2) = 5; \\ -\dot{I}_1 \cdot (1 + j2) + \dot{I}_H \cdot (11 + j2) = 115. \end{cases} \quad (7.2.2)$$

На кроці 7 алгоритму розв'язуємо отриману систему рівнянь і знаходимо струми \dot{I}_1 і \dot{I}_H . Використовуючи теорію визначників, отримаємо основний визначник системи

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (2 + j4) & -(1 + j2) \\ -(1 + j2) & (11 + j2) \end{vmatrix} = (2 + j4) \cdot (11 + j2) - (1 + j2) \cdot (1 + j2) = \\ &= 17 + j44 = 47,2 \cdot e^{j68,8^\circ}. \end{aligned}$$

Перший додатковий визначник отримують з основного шляхом заміни першого стовпчика вільними членами

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -(1+j2) \\ 115 & (11+j2) \end{vmatrix} = 5 \cdot (11+j2) + 115 \cdot (1+j2) = 170 + j240 = 294 e^{j54,7^\circ}$$

Другий додатковий визначник отримують з основного шляхом заміни другого стовпчика вільними членами

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} (2+j4) & 5 \\ -(1+j2) & 115 \end{vmatrix} = 115 \cdot (2+j4) + 5 \cdot (1+j2) = 235 + j470 = 525 e^{j63,4^\circ}$$

Використовуючи основний і додаткові визначники, отримують комплексні струми \dot{I}_1 і \dot{I}_H так:

$$\dot{I}_1 = \Delta_1 / \Delta = 294 \cdot e^{j54,7^\circ} / 47,2 \cdot e^{j68,8^\circ} = 6,23 \cdot e^{-j14^\circ} = (6,04 - j1,52) A;$$

$$\dot{I}_H = \Delta_2 / \Delta = 525,5 \cdot e^{j63,4^\circ} / 47,2 \cdot e^{j68,8^\circ} = 11,1 \cdot e^{-j5,4^\circ} = (11,06 - j1,04) A.$$

Згідно з першим законом Кірхгофа, комплексний струм \dot{I}_2 для вузла 1 буде дорівнювати

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_H - \dot{I}_1 = (11,06 - j1,04) - (6,04 - j1,52) = (5,02 + j0,48) = 5,04 \cdot e^{j55^\circ}$$

Згідно з кроком 7 алгоритму, перевірку рішення можна здійснити, використавши другий закон Кірхгофа для будь-якого з контурів ланцюга. Надаємо читачеві можливість виконати це самостійно.

Розв'язання без перетворення джерела струму на еквівалентне джерело ЕРС

У ланцюзі на рис. 7.2.1, а три невідомі струми: \dot{I}_{01} , \dot{I}_2 і \dot{I}_H , де \dot{I}_{01} - струм у внутрішній провідності джерела струму. Він пов'язаний із струмами \dot{J}_1 і \dot{J}_2 співвідношенням, що випливає з першого закону Кірхгофа: $\dot{J}_1 - \dot{I}_{01} = \dot{I}_1$ або $\dot{I}_{01} = \dot{J}_1 - \dot{I}_1$. Напрями струмів \dot{I}_1 , \dot{I}_2 і \dot{I}_H приймаємо тут такими, як і на рис. 7.2.1, б.

Для розрахунку такого ланцюга складаємо три рівняння за законами Кірхгофа, аналогічно попередньому випадку і з урахуванням того, що $\dot{Z}_1 = 1 / \dot{Y}_1$, а $\dot{I}_1 = \dot{J}_1 - \dot{I}_{01}$, отримуємо:

$$\begin{cases} (J_1 - I_{01}) + \dot{I}_2 - \dot{I}_H = 0; \\ -\dot{I}_{01} \cdot \dot{Z}_1 - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_2 = -\dot{E}_2; \\ \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{I} \cdot \dot{Z}_H = \dot{E}_2. \end{cases} \quad (7.2.3)$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо струми \dot{I}_{01} , \dot{I}_2 і \dot{I}_H , а також $\dot{I}_1 = J_1 - \dot{I}_{01}$. Результат розв'язання повинен у точності відповідати розрахунку, виконаному з попереднім перетворенням джерела струму на еквівалентне джерело ЕРС. Для доведення цього покажемо, що система рівнянь 7.1.1 тотожна системі рівнянь 7.2.3:

а) третє рівняння 7.2.3 тотожне першому рівнянню 7.2.1, оскільки правий контур ланцюга залишився без змін при вказаних вище перетвореннях джерела струму;

б) перше рівняння 7.2.3 тотожне першому рівнянню 7.2.1 оскільки $\dot{I}_1 = J_1 - \dot{I}_{01}$;

в) друге рівняння 7.2.3, з урахуванням того що $\dot{I}_{01} = J_1 - \dot{I}_1$, набуває виду: $-(J_1 - \dot{I}_1) \cdot \dot{Z}_1 - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_2 = -\dot{E}_2$ або $J_1 \cdot \dot{Z}_0 + \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_1 - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_2 = -\dot{E}_2$. Тут $J_1 \cdot \dot{Z}_1 = \dot{E}_1$ ЕРС еквівалентного джерела. Перенісши цю величину у праву частину рівняння, отримаємо $\dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_1 - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_2 = -\dot{E}_2 + \dot{E}_1$, що повністю відповідає другому рівнянню системи 7.2.1.

Надаємо читачеві можливість самостійно зробити усі обчислення й переконатися у тому, що результати обох варіантів розрахунку однакові.

7.3. Метод контурних струмів

В основі методу лежить уявлення про незалежні контури, по яких протікають незалежні один від одного контурні струми. Незалежним називають контур, який містить хоча б одну нову гілку.

На рис. 7.2.1, б показана схема ланцюга, у якому можна виділити два незалежних контури. У кожному з двох незалежних контурів

ланцюга протікає свій контурний струм. На рис. 7.2.1, б показані довільно (за годинниковою стрілкою) прийняті напрями дії контурних струмів \dot{I}_{K1} , \dot{I}_{K2} у незалежних контурах ланцюга.

Контурні струми – проміжні невідомі цього методу розрахунку. Відносно них складають систему рівнянь (використовують другий закон Кірхгофа). Легко помітити, що контурних струмів менше, ніж струмів у гілках ланцюга. Це дозволяє знизити порядок системи рівнянь у порівнянні з розв’язанням задачі, який використовує перший і другий закони Кірхгофа.

Методика складання рівнянь для контурних струмів

Методику складання рівнянь для контурних струмів розглянемо на прикладі першого контура, рис. 7.2.1, б. Складене для нього рівняння за другим законом Кірхгофа має вигляд $\dot{I}_{K1} \cdot (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) - \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$. У лівій частині цього рівняння представлена уся напруга першого контура. Тут $\dot{I}_{K1} \cdot (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)$ – напруга, що створюється першим контурним струмом в усіх опорах першого контура; $-\dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_2$ – напруга, що створюється в опорі \dot{Z}_2 першого контура струмом $-\dot{I}_{K2}$ другого контура, що діє протилежно струму \dot{I}_{K1} і тому узята зі знаком (-). Права частина рівняння складається з алгебраїчної суми ЕРС першого контура. Тут \dot{E}_1 спрямована згідно з напрямом струму \dot{I}_{K1} і, отже, входить у рівняння зі знаком (+), а \dot{E}_2 спрямована зустрічно контурному струму \dot{I}_{K1} і має знак (-). Усі опори першого контура $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$ позначимо як \dot{Z}_{11} і назвемо власним опором першого контура, а опір \dot{Z}_2 , який входить і у другий контур позначимо як \dot{Z}_{12} і назвемо взаємним опором. ЕРС першого контура, $\dot{E}_1 - \dot{E}_2$, які діють у першому контурі, позначимо як \dot{E}_{11} і назвемо контурною ЕРС. Узагальнюючи вище сказане на усю систему ланцюга для рис. 7.2.1, б, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_{11} - \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_{12} = \dot{E}_{11}; \\ -\dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_{21} + \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_{22} = \dot{E}_{22}, \end{cases} \quad (7.3.1)$$

де: \dot{Z}_{11} і \dot{Z}_{22} - **власні опори** відповідно першого і другого контурів, які знаходяться як $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$ і $\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_H$;

\dot{Z}_{12} і \dot{Z}_{21} - **взаємні опори** контурів, які дорівнюють $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = \dot{Z}_2$;

\dot{E}_{11} і \dot{E}_{22} - **контурна ЕРС** першого і другого незалежних контурів, які визначаються як $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$ і $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2$.

Усі власні опори входять у рівняння 7.3.1 зі знаком (+), а взаємні опори зі знаком (-) тому, що контурні струми суміжних контурів спрямовані зустрічно. У контурних ЕРС, джерело ЕРС береться зі знаком (+), якщо напрями її дії співпадає з напрямом дії контурного струму а якщо ні – зі знаком (-).

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо контурні струми \dot{I}_{K1} і \dot{I}_{K2} , але на цьому розв'язання задачі не завершується, оскільки потрібно знайти ще струми в усіх гілках ланцюга. У зовнішній гілці (у нашому прикладі це гілка з опором \dot{Z}_H) її струм дорівнює контурному струму \dot{I}_{K2} (з урахуванням знака). У внутрішній суміжній гілці, опір \dot{Z}_2 , струми гілок у відповідності з першим законом Кірхгофа дорівнюють алгебраїчній сумі контурних струмів суміжних контурів $\dot{I}_2 = \dot{I}_{K1} - \dot{I}_{K2}$. У другій зовнішній гілці струм дорівнює $\dot{I}_1 = \dot{I}_{K1}$, рис. 7.2.1,б.

Якщо у ланцюзі є джерело струму (як це показано на рис. 7.2.1, а), його можна перетворити в еквівалентне джерело ЕРС за відомими з попереднього викладу правилами. Якщо цього не робити, тоді слід довільно вибрати у ланцюзі контур, через який замикається струм \dot{J}_1 джерела. Це буде контур з відомим струмом і його уведення не викличе підвищення порядку системи рівнянь. На його опорі виникає напруга $\dot{Z} \cdot \dot{J}$, величина якої відома з умов прикладу і яку слід урахувати зі знаком «+» або «-» у рівнянні того незалежного контура, до складу якого входить цей опір. При цьому, якщо струм \dot{J} співпадає з контурним струмом суміжного контура, напруга $\dot{Z} \cdot \dot{J}$ береться зі знаком (+), а якщо ні – зі знаком (-).

Алгоритм розрахунку з використанням контурних струмів

1. Якщо у ланцюзі діє декілька варіантів джерел, то необхідно привести ланцюг до одного варіанту, шляхом перетворення джерела струму на еквівалентне джерело *ЕРС*, або довільно вибрати у ланцюзі джерела струму додатковий контур з наступним його уведенням у суміжний контур.

2. Довільно обрати контури й напрями контурних струмів у них.

3. Визначити відповідно вузли схеми.

4. Обрати незалежні контури у схемі. Число незалежних контурів визначити формулою $n = p - q + 1$, де: p – число гілок; q – число вузлів схеми.

5. Записати рівняння для кожного обраного контура, використовуючи власні, взаємні опори та контурні алгебраїчні *ЕРС*. При цьому, якщо контурний струм суміжного контура направлений проти власного контурного струму, то полярність падіння напруги на суміжній гілці береться зі знакои (-), а якщо співпадає – зі знаком (+).

6. Визначити значення власного і взаємного опору та контурні алгебраїчні *ЕРС*.

7. Підставити дані кроку 6 алгоритму у систему рівнянь, яку отримано на кроці 5 алгоритму.

8. Знайти контурні струми шляхом розв'язання системи рівнянь, отриманої на кроці 7 алгоритму.

9. Знайти істинні струми у гілках схеми, користуючись знайденими контурними струмами на кроці 8 алгоритму.

10. Виконати перевірку розрахунку струмів у гілках ланцюга, використовуючи вузли схеми, визначені на кроці 2 алгоритму.

Дію алгоритму розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 7.3.1. В умовах прикладу 7.2.1. визначити струми в усіх гілках ланцюга методом контурних струмів.

Розв'язання. Розрахунок може бути виконаний як із попереднім перетворенням джерела струму на еквівалентне джерело *ЕРС*, так і без такого перетворення.

Розв'язання із перетворенням джерела струму на еквівалентне джерело *ЕРС*

Використовуючи крок 1 алгоритму, перетворимо джерело струму в еквівалентне джерело *ЕРС*, застосовуючи правила §6.4, отримаємо:

$$\dot{E} = \dot{J} \cdot \dot{Z}_1 = (24 - j48) \cdot (1 + j2) = 24 - j48 + j48 + 96 = 120B;$$

$$\dot{Z}_1 = 1/Y_1 = 1/(0,2 - j0,4) = (1 + j2)\text{Ом}.$$

При цьому схема ланцюга набуває вигляду, наведеного на рис. 7.2.1, б.

Користуючись кроком 2 алгоритму, довільно вибираємо контури і напрями контурних струмів у гілках схеми ланцюга, а на кроці 3 алгоритму визначаємо його вузли так, як це показано на рис. 7.2.1, б. Використовуючи крок 4 алгоритму, оприділяємо кількість незалежних контурів за формулою $n = p - q + 1$, де: p – число гілок; q – число вузлів схеми. Оскільки число гілок $p = 3$, а число вузлів $q = 2$, то відповідно до формули кількість незалежних контурів у схемі прикладу ланцюга дорівнює $n = 2$.

Використовуючи крок 5 алгоритму, складаємо систему рівнянь з використанням контурних струмів і контурних EPC , у результаті чого отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{I}_{K1} \cdot (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) - \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \\ -\dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_2 + \dot{I}_{K2} \cdot (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H) = \dot{E}_2. \end{cases}$$

Користуючись кроком 6 алгоритму, визначаємо власні й взаємні опори та контурні EPC . Власні опори контурів будуть дорівнювати: $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (1+j2) + ((1+j2)) = (2+j4)$ Ом; $\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_H = (1+j2) + 10 = (11+j2)$ Ом. Взаємні опори однакові й дорівнюють $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = \dot{Z}_2 = -(1+j2)$ Ом. Вони узяті зі знаком $(-)$ тому, що контурні струми у кожному із суміжних контурів спрямовані зустрічно один одному. Контурні EPC будуть дорівнювати: $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = 120 - 115 = 5B$; $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2 = 115B$.

На кроці 7 алгоритму підставляємо значення власних і взаємних опорів та контурні EPC у систему рівнянь, яку знайшли на кроці 5 алгоритму, і отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{I}_{K1} \cdot (2 + j4) - \dot{I}_{K2} \cdot (-(1 + j2)) = 5; \\ -\dot{I}_{K1} \cdot (-(1 + j2)) + \dot{I}_{K2} \cdot (11 + j2) = 115. \end{cases}$$

На кроці 8 алгоритму знаходимо контурні струми \dot{I}_{K1} , \dot{I}_{K2} , розв'язуючи отриману на кроці 7 алгоритму систему рівнянь за допомогою теорії визначників.

Головний визначник системи буде дорівнювати

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2+j4) & -(1+j2) \\ -(1+j2) & (11+j2) \end{vmatrix} = (2+j4) \cdot (11+j2) - (1+j2) \cdot (1+j2) = \\ = 17 + j44 = 47,2 \cdot e^{j68,8^\circ}.$$

Перший додатковий визначник отримують з основного шляхом заміни першого стовпчика вільними членами

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -(1+j2) \\ 115 & (11+j2) \end{vmatrix} = 5 \cdot (11+j2) + 115 \cdot (1+j2) = 170 + j240 = 294 e^{j54,7^\circ}.$$

Другий додатковий визначник отримують з основного шляхом заміни другого стовпчика вільними членами

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (2+j4) & 5 \\ -(1+j2) & 115 \end{vmatrix} = 115 \cdot (2+j4) + 5 \cdot (1+j2) = 235 + j470 = 525 \cdot e^{j63,4^\circ}.$$

Використовуючи основний і додаткові визначники, отримаємо контурні струми \dot{I}_{K1} і \dot{I}_{K2} :

$$\dot{I}_{K1} = \Delta_1 / \Delta = 294 \cdot e^{j54,7^\circ} / 47,2 \cdot e^{j68,8^\circ} = 6,23 \cdot e^{-j14^\circ} = (6,04 - j1,52) A;$$

$$\dot{I}_{K2} = \Delta_2 / \Delta = 525,5 \cdot e^{j63,4^\circ} / 47,2 \cdot e^{j68,8^\circ} = 11,1 \cdot e^{-j5,4^\circ} = (11,06 - j1,04) A.$$

Знаходимо струми в усіх гілках ланцюга. Напрямок струму \dot{I}_1 у лівій гілці ланцюга співпадає з контурним струмом \dot{I}_{K1} і тому $\dot{I}_{K1} = \dot{I}_1 = (6,04 - j1,25) A$. Напрямок струму \dot{I}_H у правій гілці ланцюга співпадає з контурним струмом \dot{I}_{K2} і тому $\dot{I}_{K2} = \dot{I}_H = (11,06 - j1,04) A$. Струм \dot{I}_2 у середній гілці ланцюга дорівнює алгебраїчній сумі контурних струмів $\dot{I}_2 = \dot{I}_{K1} - \dot{I}_{K2} = (11,06 - j1,04) - (6,04 - j1,52) = (5,02 + j0,48) A$. Тут струм \dot{I}_{K2} узятий зі знаком (+), оскільки він

співпадає з напрямком струму \dot{I}_2 , а контурний струм \dot{I}_{K1} узятий зі знаком (-), оскільки його напрям протилежний струму \dot{I}_2 .

На кроці 10 алгоритму виконується перевірка розрахунку струмів у гілках схеми. Надаємо читачеві можливість виконати це самостійно.

Розв'язання без перетворення джерела струму на еквівалентне джерело ЕРС

Згідно з кроком 2 алгоритму, обираємо напрямки струмів в усіх гілках ланцюга, показаного на рис. 7.2.1, а такими ж, як і на рис. 7.2.1, б. Користуючись кроками 3 і 4 алгоритму, визначаємо незалежні контури як і у попередньому розрахунку, направивши контурні струми у них, як і раніше, за годинниковою стрілкою. Користуючись кроком 1 алгоритму, для відомого струму \dot{J}_1 обираємо простий контур (його ми не нумеруємо), що складається з джерела струму і опору $\dot{Z}_1 = 1/\dot{Y}_1$. Напрямок контурного струму у ньому приймаємо за напрямком дії струму \dot{J}_1 , тобто за годинниковою стрілкою. Цей струм створює в опорі \dot{Z}_1 напругу $\dot{J}_1 \cdot \dot{Z}_1$, величина якої відома з умови прикладу і має бути врахована у рівнянні для першого незалежного контура. При цьому, у процесі розв'язання системи ця напруга має бути перенесена у праву частину рівняння зі зворотним знаком.

Використовуючи крок 5 алгоритму, складаємо систему рівнянь за зразком формул системи 7.3.1 і отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_{11} - \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_{12} - \dot{J} \cdot \dot{Z}_1 = \dot{E}_{11}; \\ -\dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_{21} + \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_{22} = \dot{E}_{22}, \end{cases}$$

або (7.3.2)

$$\begin{cases} \dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_{11} - \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_{12} = \dot{E}_{11} + \dot{J} \cdot \dot{Z}_1; \\ -\dot{I}_{K1} \cdot \dot{Z}_{21} + \dot{I}_{K2} \cdot \dot{Z}_{22} = \dot{E}_{22}. \end{cases}$$

Згідно з кроком 6 алгоритму, тут, як і у попередньому варіанті розрахунку, власні опори контурів будуть дорівнювати: $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (1+j2) + ((1+j2) = (2+j4)$ Ом; $\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_H = (1+j2) + 10 = (11+j2)$ Ом, а взаємні однакові і дорівнюють $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = \dot{Z}_2 =$

$= -(1+j2)$ Ом. Вони узяті зі знаком (-) тому, що контурні струми у кожному із суміжних контурів спрямовані зустрічно один одному. Проте, сума *EPC* першого контура не відповідає попередньому варіанту розрахунку і складає $\dot{E}_{11} = -115B$, а другого дорівнює $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2 = 115B$.

Система рівнянь 7.3.2 тотожна системі рівнянь 7.3.1, оскільки, відповідно до формули перетворення джерела струму на еквівалентне джерело *EPC* $\dot{J} \cdot \dot{Z}_1 = \dot{E}_1 = 120B$ і права частина першого рівняння $\dot{E}_{11} + \dot{J} \cdot \dot{Z}_1 = -115 + 120 = 5B$ така ж, як і у попередньому прикладі. Тому подальше розв'язання прикладу таке ж, як і у попередньому варіанті.

Примітка. Розрахунок ланцюгів синусоїдального струму з застосуванням розв'язання шляхом перетворення джерела струму на еквівалентне джерело *EPC* і без такого перетворення є дійсним (може бути використаним) і для розрахунку ланцюгів постійного струму методом контурних струмів, § 3.4.

7.4. Метод вузлових напруг

Цей метод ґрунтується на тому, що струми в усіх гілках складного ланцюга можна розрахувати, якщо відома напруга на усіх його гілках.

На рис. 7.4.1, *a* представлена схема деякого складного ланцюга, що має шість гілок. Розглянемо одну з гілок цього ланцюга, розташовану між будь-якими двома вузлами «*k*» і «*m*», рис. 7.4.1, *б*.

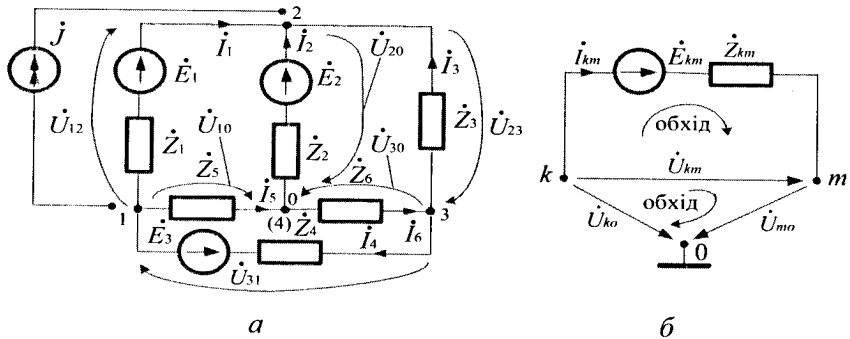


Рис. 7.4.1

Застосувавши другий закон Кірхгофа для цієї гілки і ураховуючи, що $\dot{Y}_{km} = 1/\dot{Z}_{km}$, отримаємо

$$\dot{I}_{km} \cdot \dot{Z}_{km} + \dot{E}_{km} = \dot{U}_{km}$$

або

$$(7.4.1)$$

$$\dot{I}_{km} = (\dot{U}_{km} - \dot{E}_{km}) / \dot{Z}_{km} = \dot{Y}_{km} \cdot (\dot{U}_{km} - \dot{E}_{km}).$$

У цій формулі струм, напруга і *EPC* позначені подвійними індексами. При цьому усі вони спрямовані (для зручності запису) від вузла «*k*» до вузла «*m*». Якщо реальні струми, напруга і *EPC* будуть спрямовані у протилежний бік, то вони увійдуть до рівняння 7.4.1 зі зворотним знаком (зі знаком -). Тут \dot{E}_{km} і \dot{Z}_{km} - відомі з умови завдання величини. Якщо знайти напругу \dot{U}_{km} , то струм \dot{I}_{km} у цій гілці також буде знайдений.

У реальних схемах може бути *n*-гілок і, отже, *n* - невідомих напруг. Для їх знаходження необхідно заздалегідь знайти тільки ті з них, які діють між кожним з вузлів ланцюга і базовим вузлом «0» (вибираються довільно). Вони називаються **вузловими напругами**. Для схеми рис. 7.4.1, *a* вузловими напругами є \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} , \dot{U}_{30} . Усі вони спрямовані до базового вузла «0». Якщо вузлова напруга відома, то напруга між усіма іншими вузлами легко знаходиться відповідно до другого закону Кірхгофа, рис. 7.4.1, *б*, за формулою

$$\dot{U}_{km} = \dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}. \quad (7.4.2)$$

У нашому прикладі $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}$; $\dot{U}_{31} = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10}$; $\dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}$.

Відмітимо, що якщо базовий вузол «0» заземлити, тобто прийняти його електричний потенціал рівним «0», то тоді вузлові напруги \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} і \dot{U}_{30} будуть також електричними потенціалами вузлів 1, 2 і 3.

Тобто, **вузлова напруга є проміжною невідомою** для цього методу розрахунку. Відносно них складається система рівнянь. При цьому використовується перший закон Кірхгофа. Очевидно, що вузлових напруг менше, ніж струмів у гілках. Тому цей метод дозволяє істотно знизити порядок системи рівнянь порівняно з безпосереднім застосуванням першого і другого законів Кірхгофа.

Розглянемо складання системи рівнянь за методом вузлової напруги. Згідно з першим законом Кірхгофа, алгебраїчна сума комплексних струмів будь-якого вузла ланцюга дорівнює нулю. Кожен із цих струмів визначається формулою 7.4.1. Тоді для кожного вузла ланцюга маємо

$$\sum \dot{I}_{km} = \sum \dot{U}_{km} \cdot \dot{Y}_{km} + \sum \dot{E}_{km} \cdot \dot{Y}_{km} = 0$$

або

$$\sum \dot{Y}_{km} \cdot (\dot{U}_{k0} - U_{m0}) = -\sum \dot{E}_{km} \cdot \dot{Y}_{km},$$

де: $\sum \dot{E}_{km} \cdot \dot{Y}_{km}$ - сума добутків *EPC* на провідність усіх гілок, відповідних до даного вузла ланцюга (дані величини відомі з умов завдання); $\sum \dot{Y}_{km} \cdot (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0})$ - сума добутків провідності на напругу гілок (\dot{Y}_{km} - відома з умов завдання, а \dot{U}_{k0} і \dot{U}_{m0} - невідома вузлова напруга). Виконавши ряд нескладних перетворень, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих вузлових напруг ланцюга у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{11} + \dot{U}_{20} \cdot \dot{Y}_{12} + \dot{U}_{30} \cdot \dot{Y}_{13} = \dot{J}_{11}; \\ \dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{21} + \dot{U}_{20} \cdot \dot{Y}_{22} + \dot{U}_{30} \cdot \dot{Y}_{23} = \dot{J}_{22}; \\ \dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{31} + \dot{U}_{20} \cdot \dot{Y}_{32} + \dot{U}_{30} \cdot \dot{Y}_{33} = \dot{J}_{33}, \end{cases} \quad (7.4.3)$$

де: $\dot{U}_{10}, \dot{U}_{20}, \dot{U}_{30}$ - невідомі вузлові напруги; $\dot{Y}_{11}, \dot{Y}_{22}, \dot{Y}_{33}$ - **власні провідності вузлів**, тобто сума провідностей усіх гілок, які підходять до цього вузла; у **рівняннях системи 7.4.3** вони завжди входять зі знаком (+); $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}$; $\dot{Y}_{13} = \dot{Y}_{31}$; $\dot{Y}_{23} = \dot{Y}_{32}$ - **взаємна провідність вузлів**, яка дорівнює сумі провідностей усіх гілок ланцюга, що знаходяться між вузлами 1-2, 1-3 і 2-3; їх чисельні значення завжди входять у **рівняння системи 7.4.3** зі знаком (-); $\dot{J}_{11}, \dot{J}_{22}, \dot{J}_{33}$ - відомі з умов завдання величини, що є сумою добутку *EPC* на провідність ($\sum \dot{E} \cdot \dot{Y}$) усіх гілок, що підходять до цього вузла. **Якщо \dot{E} спрямована до вузла, то цей добуток $\dot{E} \cdot \dot{Y}$ для даної гілки**

береться зі знаком (+), а якщо \dot{E} спрямована від вузла, – зі знаком (-). Помітимо, що добуток $\dot{E} \cdot \dot{Y}$ для кожної гілки можна розглядати як струм еквівалентного джерела струму цієї гілки.

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо вузлові напруги \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} , \dot{U}_{30} , а потім напруги на усіх гілках ланцюга відповідно до формули 7.4.2 і, нарешті, струми в усіх її гілках, використовуючи формулу 7.4.1.

Якщо розгалуджений ланцюг має тільки два вузли (наприклад, трифазний ланцюг, який з'єднаний зіркою), то система 7.4.3 перетворюється на одне рівняння виду

$$\dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{11} = \dot{J}_{11}. \quad (7.4.4)$$

Алгоритм розрахунку методом вузлових напруг

1. Задовільно обрати напрями струмів в усіх гілках ланцюга.
2. Занумерувати у ланцюзі усі вузли.
3. Довільно обрати серед занумерованих на кроці 2 алгоритму опорний вузол у ланцюзі й позначити його індексом «0».
4. Визначити усі вузлові напруги у ланцюзі від вузлів ланцюга, позначених на кроці 2 алгоритму, і поставити їх напрями до базового вузла з індексом «0».
5. Скласти рівняння для кожного вузла ланцюга, використовуючи перший закон Кірхгофа.
6. Скласти систему рівнянь для усіх вузлів ланцюга, використовуючи крок 4 алгоритму.
7. Розв'язати систему рівнянь відносно вузлових напруг, використовуючи крок 5 алгоритму.
8. Знайти комплексну напругу на усіх гілках ланцюга, використовуючи крок 6 алгоритму.
9. Знайти комплексний струм в усіх гілках ланцюга, використовуючи крок 7 алгоритму.
10. Зробити перевірку розв'язання.

Приклад 7.4.1. Складіть систему рівнянь і визначте комплексні струми в усіх гілках ланцюга, приведеного на рис. 7.4.1, а.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, задовільно обираємо напрями струмів в усіх гілках ланцюга, як це показано на рис. 7.4.1, а. На кроці 2 алгоритму нумеруємо усі вузли у ланцюзі (їх

чотирі). Користуючись кроком 3 алгоритму, довільно, у якості базового вибираємо вузол 4 (записаний у дужках), і позначаємо його індексом «0». У нашому ланцюзі чотири вузли і, отже, три вузлових напруги \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} , \dot{U}_{30} . Згідно кроку 4 алгоритму їх напрями до базового вузла показані на рис. 7.4.1, а стрілками.

Використовуючи кроки 5 і 6 алгоритму, складаємо рівняння для кожного вузла ланцюга, а з них і систему рівнянь відносно невідомих вузлових напруг, які відповідають формулам 7.4.3. Тут власна провідність вузлів дорівнює: $\dot{Y}_{11} = 1/\dot{Z}_1 + 1/\dot{Z}_5 + 1/\dot{Z}_4$; $\dot{Y}_{22} = 1/\dot{Z}_1 + 1/\dot{Z}_2 + 1/\dot{Z}_3$; $\dot{Y}_{33} = 1/\dot{Z}_3 + 1/\dot{Z}_6 + 1/\dot{Z}_4$, а взаємна матиме вигляд: $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} = -1/\dot{Z}_1$; $\dot{Y}_{13} = \dot{Y}_{31} = -1/\dot{Z}_4$; $\dot{Y}_{23} = \dot{Y}_{32} = -1/\dot{Z}_3$. Вільні члени рівнянь системи будуть дорівнювати:

$$\dot{J}_{11} = -\dot{E}_1/\dot{Z}_1 - \dot{E}_3/\dot{Z}_4;$$

$$\dot{J}_{22} = \dot{E}_1/\dot{Z}_1 + \dot{E}_2/\dot{Z}_2 + 0/\dot{Z}_3 = \dot{E}_1/\dot{Z}_1 + \dot{E}_2/\dot{Z}_2;$$

$$\dot{J}_{33} = \dot{E}_3/\dot{Z}_4 - 0/\dot{Z}_3 = \dot{E}_3/\dot{Z}_4.$$

На кроці 7 алгоритму розв'язуємо отриману систему рівнянь і визначаємо невідомі вузлові напруги \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} , \dot{U}_{30} . А на кроці 8 алгоритму, у відповідності з формулою $\dot{U}_{km} = \dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}$ і при заданих на рис. 7.4.1, а напрямках напруг гілок, – комплексні напруги на усіх інших гілках ланцюга: $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}$; $\dot{U}_{31} = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10}$; $\dot{U}_{23} = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}$. Користуючись формулою 7.4.1, на кроці 9 алгоритму, знаходимо струми в усіх гілках ланцюга. Струм \dot{I}_1 спрямований від вузла 1 до вузла 2 і тому при прийнятій індексації струмів є струмом \dot{I}_{12} . Тут, відповідно з формулою 7.3.1, вузол $k = 1$, а вузол $m = 2$. Тоді

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} = \dot{Y}_{12} \cdot (\dot{U}_{12} - \dot{E}_{12}) = -1/\dot{Z}_1 \cdot (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20} - \dot{E}_1),$$

$$\text{де } \dot{Y}_{12} = -1/\dot{Z}_1 \text{ і } \dot{E}_{12} = \dot{E}_1.$$

Аналогічним чином визначаються струми в усіх інших гілках ланцюга :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{02} = \dot{Y}_{02} \cdot (\dot{E}_{02} + \dot{U}_{02}) = \dot{Y}_{02} \cdot (\dot{E}_2 - \dot{U}_{02}), \text{ де } \dot{U}_{02} = -\dot{U}_{20} \text{ і } \dot{E}_{02} = \dot{E}_2;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{32} = \dot{Y}_{32} \cdot (\dot{U}_{32} - \dot{E}_{32}) = -\dot{Y}_{32} \cdot (\dot{U}_{30} - \dot{U}_{20} - 0), \text{ де } \dot{Y}_{32} = -\dot{Y}_{30} \text{ і } \dot{E}_{32} = 0;$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{31} = \dot{Y}_{31} \cdot (\dot{U}_{31} + \dot{E}_{31}) = -\dot{Y}_{31} \cdot (\dot{U}_{30} - \dot{U}_{10} + \dot{E}_3), \text{ де } \dot{Y}_{31} = -\dot{Y}_{30} \text{ і } \dot{E}_{31} = -\dot{E}_3;$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{10} = \dot{Y}_{10} \cdot (\dot{U}_{10} - \dot{E}_{10}) = -\dot{Y}_{10} \cdot (\dot{U}_{10} - 0) = -\dot{U}_{10} / \dot{Z}_5, \text{ де } \dot{Y}_{10} = -\dot{Y}_{50} \text{ і } \dot{E}_{10} = 0 ;$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_{03} = \dot{Y}_{03} \cdot (\dot{U}_{03} - \dot{E}_{03}) = -\dot{Y}_{03} \cdot (-\dot{U}_{30} - 0) = \dot{U}_{30} / \dot{Z}_6, \text{ де } \dot{Y}_{03} = -\dot{Y}_{30} \text{ і } \dot{E}_{03} = 0 .$$

За наявності у ланцюзі джерела струму його вплив урахуємо у правій частині рівнянь 7.4.3 для тих вузлів, до яких це джерело підключене. Струм джерела, спрямований до вузла, входить у праву частину рівняння зі знаком (+), а спрямований від вузла – зі знаком (-). Якщо, наприклад, до вузлів 1 і 2 ланцюга, представленого на рис. 7.4.1, а, підключене джерело струму \dot{J} , то система рівнянь 7.4.3 набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{11} + \dot{U}_{20} \cdot \dot{Y}_{12} + \dot{U}_{30} \cdot \dot{Y}_{13} = \dot{J}_{11} - \dot{J}; \\ \dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{21} + \dot{U}_{20} \cdot \dot{Y}_{22} + \dot{U}_{30} \cdot \dot{Y}_{23} = \dot{J}_{22} + \dot{J}; \\ \dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{31} + \dot{U}_{20} \cdot \dot{Y}_{32} + \dot{U}_{30} \cdot \dot{Y}_{33} = \dot{J}_{33}. \end{cases}$$

Тут струм джерела увійшов до правої частини першого рівняння зі знаком (-) тому, що він спрямований від вузла 1, а до правої частини другого рівняння зі знаком (+) тому, що він спрямований до вузла 2. Третє рівняння залишилося без змін тому, що до вузла 3 джерело струму \dot{J} не приєднане.

Приклад 7.4.2. Знайдіть комплексні струми методом вузлової напруги у гілках ланцюга з наступними параметрами: $\dot{E}_1 = 120V$; $\dot{E}_2 = 115V$; $\dot{Z}_1 = (1+j2) \text{ Ом}$; $\dot{Z}_2 = (1+j2) \text{ Ом}$; $\dot{Z}_H = 10 \text{ Ом}$, рис. 7.4.2.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, задовільно вибираємо напрями струмів в усіх гілках ланцюга, як це показано на рис. 7.4.2. На кроці 2 алгоритму нумеруємо вузли у ланцюзі (їх два).

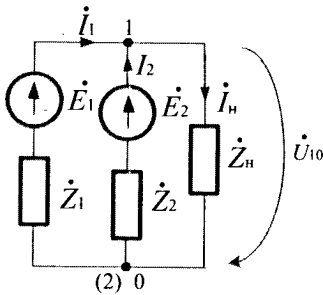


Рис. 7.4.2

Користуючись кроком 3 алгоритму, довільно, у якості опорного вибираємо вузел 2 і позначаємо його індексом «0». У нашому ланцюзі два вузли і, отже, одна вузлова напруга \dot{U}_{10} . На кроці 4 алгоритму установлюємо її напрям до опорного вузла (див. рис. 7.4.2).

Використовуючи кроки 5 і 6 алгоритму і формулу 7.4.4, складаємо рівняння для вузла 1, яке матиме наступний вигляд $\dot{U}_{10} \cdot \dot{Y}_{11} = \dot{J}_{11}$, де:

$$\dot{Y}_{11} = 1/\dot{Z}_{01} + 1/\dot{Z}_{02} + 1/\dot{Z}_H = 1/(1 + j2) + 1/(1 + j2) + 1/10 = 0,5 - j0,8 = 0,94 \cdot e^{-j58^\circ} \text{ СМ}$$
 – власна провідність вузла;

$$\dot{J}_{11} = \dot{E}_1/\dot{Z}_{01} + \dot{E}_2/\dot{Z}_{02} = 120 \cdot (0,2 - j0,4) + 115 \cdot (0,2 - j0,4) = (47 - j94) = 105 \cdot e^{-j63,4^\circ} \text{ А}$$
 – вільний член рівняння. Користуючись кроком 7 і 8 алгоритму, знаходимо вузлову напругу \dot{U}_{10}

$$\dot{U}_{10} = \frac{J_{11}}{Y_{11}} = \frac{105 \cdot e^{-j63,4^\circ}}{0,94 \cdot e^{-j58^\circ}} = 111,7 \cdot e^{-j5,4^\circ} \text{ В.}$$

На кроці 9 алгоритму, використовуючи формулу 7.4.1, знаходимо струми у гілках ланцюга, які будуть дорівнювати:

$$\dot{I}_1 = -\dot{Y}_1 \cdot (\dot{U}_{10} - \dot{E}_1) = -(0,2 - j0,4) \cdot (120 - 110,9 + j10,56) = (6,04 - j1,49) \text{ А, де } \dot{Y}_1 = 1/\dot{Z}_1;$$

$$\dot{I}_2 = \dot{Y}_2 \cdot (\dot{E}_2 - \dot{U}_{10}) = (0,2 - j0,4) \cdot (115 - 110,9 + j10,56) = (5,4 - j0,47) \text{ А, де } \dot{Y}_2 = 1/\dot{Z}_2;$$

$$\dot{I}_H = \dot{Y}_H \cdot (\dot{U}_{10}) = 0,1 \cdot (110,9 - j10,56) = (11,09 - j1,056) \text{ А, де } \dot{Y}_H = 1/\dot{Z}_H.$$

Відмітимо, що отримані значення струмів співпадають із результатами знаходження таких же струмів у прикладах 7.2.1 і 7.3.1.

7.5. Метод суперпозиції

Цей метод розрахунку заснований на фундаментальному фізичному принципі суперпозиції. Стосовно електричних кіл він формулюється так: струм у будь-якій гілці електричного ланцюга є алгебраїчною сумою струмів у цій гілці від дії кожного з джерел енергії цього ланцюга окремо.

Застосовуючи принцип суперпозиції для розрахунку ланцюга, слід по черзі залишати у ній тільки одне джерело енергії і для кожної такої схеми розраховувати струми в усіх її гілках. Реальні струми гілок є результатом накладання цих струмів від дії кожного джерела енергії окремо. При формуванні схеми з одним будь-яким джерелом енергії усі *EPC* інших джерел замінюють короткозамкненими перемичками, а у джерел струму розмикають гілки зі струмом, залишаючи у ланцюзі гілки з внутрішнією провідністю джерела цього струму. **Зауважимо, що метод суперпозиції застосовують тільки до лінійних електричних ланцюгів, у яких опори гілок не залежать від величини струмів і напруг і при усіх перетвореннях ланцюгів залишаються постійними величинами.**

Алгоритм розрахунку методом суперпозиції

1. Довільно обрати джерело *EPC* розглядуваної схеми (решту *EPC* уважати закороченими).
2. Позначити напрями струмів у гілках схеми від вибраного джерела *EPC*.
3. Розрахувати струми у гілках схеми обраного джерела *EPC*.
4. Вибрати $n - e$ джерело *EPC*, а решту $n - 1$ джерел *EPC* уважати закороченими.
5. Позначити напрями струмів у гілках схеми від $n - e$ джерела *EPC*.
6. Розрахувати струми у гілках схеми від $n - e$ джерела *EPC*.
7. Знайти алгебраїчну суму струмів у гілках схеми, обчислених на кроці 3,6 алгоритму.
8. Позначити напрями результуючих струмів у гілках схеми розглядуваного джерела *EPC*.
9. Виконати перевірку розрахунку струмів у гілках схеми, використовуючи перший закон Кірхгофа.

Для наочності, дію алгоритму з розрахунку ланцюгів схем при використанні методу суперпозиції розглянемо на прикладі схеми з двома джерелами *EPC*.

Приклад 5.5.1. Знайдіть комплексні струми методом суперпозиції у гілках ланцюга з такими параметрами: $\dot{E}_1=120B$; $\dot{E}_2=115 B$; $\dot{Z}_1=(1+j2) \text{ Ом}$; $\dot{Z}_2=(1+j2) \text{ Ом}$; $\dot{Z}_H=10 \text{ Ом}$, рис. 7.5.1,а.

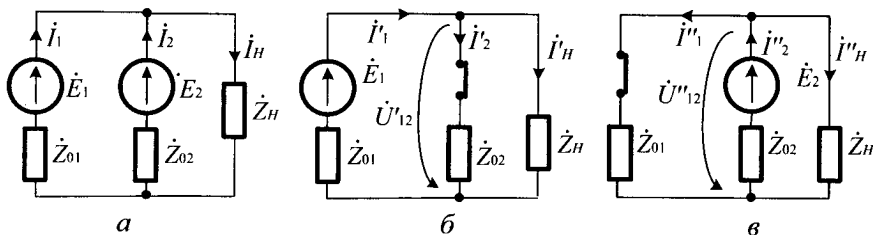


Рис. 7.5.1

Розв'язання. Згідно з кроком 1 алгоритму першою обираємо *ЕРС* \dot{E}_1 , яка діє у схемі, а решту закорочуємо (\dot{E}_2 у цей час закорочена), рис. 7.5.1, б.

Користуючись кроком 2 алгоритму, позначаємо напрями струмів у схемі при включеній *ЕРС* \dot{E}_1 , рис. 7.5.1, б. Використовуючи крок 3 алгоритму, розрахуємо струми, які протікатимуть у гілках резисторів \dot{Z}_1 , \dot{Z}_2 , \dot{Z}_H схеми під дією *ЕРС* \dot{E}_1 . Параметри для усього ланцюга (опір, струми і напруги) при дії джерела \dot{E}_1 будуть дорівнювати:

$$\text{опір} - \dot{Z}'_{\Sigma} = \dot{Z}_1 + \left[\frac{(\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_H)}{(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H)} \right] = 1 + j2 + \left[\frac{(1 + j2)(10)}{(1 + j2 + 10)} \right] = (2,2 + j3,6) \text{ Ом};$$

$$\text{струм} - \dot{I}'_{\Sigma} = \dot{E}_1 / \dot{Z}'_{\Sigma} = 120 / (2,2 + j3,6) = (264 - j432) / 178 = (1483 - j2426) A;$$

$$\text{напруга} - \dot{U}'_{12} = \dot{E}_1 - \dot{U}'_1 = \dot{E}_1 - \dot{I}'_1 \cdot \dot{Z}_1 = 120 - (63,3 + j54) = (56,6 - j5,4) B;$$

$$\text{струм} - \dot{I}'_2 = \dot{U}'_{12} / \dot{Z}_2 = (56,6 - j5,4) / (1 + j2) = (9,17 - j23,74) A;$$

$$\text{струм} - \dot{I}'_H = \dot{U}'_{12} / \dot{Z}_H = (56,6 - j5,4) / 10 = (5,7 - j0,54) A.$$

Згідно з кроком 4 алгоритму для знаходження частки струмів \dot{I}''_1 , \dot{I}''_2 , \dot{I}''_H закоротимо *ЕРС* \dot{E}_1 , рис. 7.5.1, в. Користуючись кроком 5 алгоритму, позначаємо напрями струмів у схемі при включеній *ЕРС* \dot{E}_2 , рис. 7.5.1, в. Використовуючи крок 6 алгоритму, розрахуємо

струми, які протікатимуть у гілках резисторів \dot{Z}_{01} , \dot{Z}_{02} , \dot{Z}_H схеми під дією \dot{E}_2 . Параметри для усього ланцюга (опір, струми і напруги) при дії джерела \dot{E}_2 будуть дорівнювати:

опір - $\dot{Z}_\Sigma'' = \dot{Z}_{02} + [(\dot{Z}_{01} \cdot \dot{Z}_H) / (\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_H)] = (2,2 + j3,6)$ Ом;

струм- $\dot{I}_2'' = \dot{E}_2 / \dot{Z}_\Sigma'' = 115 / (2,2 + j3,6) = 14,21 - j23,26$ А;

напруга- $\dot{U}_{12}'' = \dot{E}_2 - \dot{I}_2'' \cdot \dot{Z}_{02} = 115 - [(14,2 - j23,26)(1 + j2)] = (54,3 - j5,14)$ В;

струм- $\dot{I}_1'' = \dot{U}_{12}'' / \dot{Z}_{01} = (54,3 - j5,14) / (1 + j2) = (44 - j1342) / 5 = (8,8 - j2268)$ А;

струм- $\dot{I}_H'' = \dot{U}_{12}'' / \dot{Z}_H = (54,3 - j5,14) / 10 = (5,43 - j0,514)$ А.

На кроці 7 алгоритму знаходимо реальні струми в усіх трьох гілках ланцюга при одночасній дії обох джерел енергії, зіставляючи напрямки струмів і застосовуючи принцип суперпозиції й перший закон Кірхгофа:

$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' - \dot{I}_1'' = (14,83 - j24,26) - (8,8 - j22,18) = (6,03 - j1,58)$ А;

$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' - \dot{I}_2'' = (14,21 - j23,26) - (9,17 - j23,74) = (5,04 + j0,48)$ А;

$\dot{I}_H = \dot{I}_H' + \dot{I}_H'' = (5,7 - j0,54) + (5,43 - j0,514) = (11,13 - j1,05)$ А.

На кроці 8 алгоритму визначаємо, що результуючі напрями струмів у гілках досліджуваної схеми під дією двох джерел ЕРС будуть мати вигляд, який представлено на рис. 7.5.1,а.

На кроці 9 алгоритму, використовуючи перший закон Кірхгофа, робимо перевірку $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_H = (6,03 - j1,58) + (5,04 + j0,48) - (11,13 - j1,05) \approx 0$. Таким чином, приклад розв'язаний правильно.

Зауважимо, що отриманий результат практично збігається з результатами розрахунку такого ланцюга іншими методами розрахунку, використаними у прикладах 7.2.1, 7.3.1 та 7.4.2.

7.6. Метод еквівалентного джерела

Метод еквівалентного джерела застосовують для розрахунку струму у будь-якій одній виділеній гілці складного ланцюга синусоїдального струму. У його основі лежить теорема про еквівалентне джерело, суть якої полягає у такому: будь-який

складний електричний ланцюг синусоїдального струму щодо виділеної гілки може бути представлений одним еквівалентним джерелом *EPC* або одним еквівалентним джерелом струму.

Розглянемо метод розрахунку, заснований на еквівалентному перетворенні складного ланцюга синусоїдального струму на еквівалентне джерело *EPC*. На рис. 7.6.1, *a* представлений складний ланцюг із багатьма джерелами та багатьма опорами у вигляді активного двополюсника. Потрібно визначити струм \dot{I} у виділеному з цього ланцюга опорі \dot{Z} .

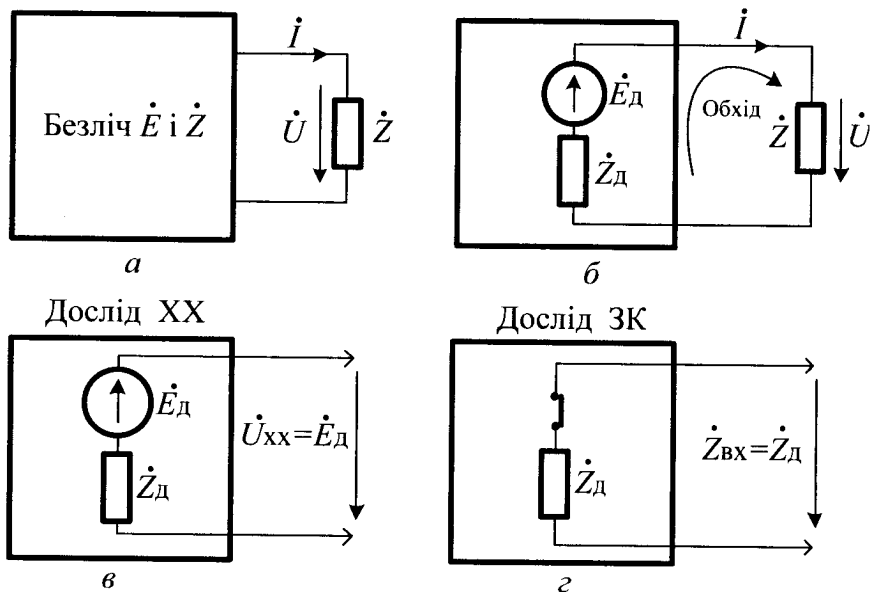


Рис. 7.6.1

Представимо двополюсник у вигляді еквівалентного джерела *EPC* з параметрами \dot{E}_d і \dot{Z}_d , рис. 7.6.1, *б*, і за другим законом Кірхгофа отримаємо шуканий струм ланцюга, який буде дорівнювати

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_d}{\dot{Z}_d + \dot{Z}} \quad (7.6.1)$$

Невідомі величини \dot{E}_d і \dot{Z}_d можна знайти з досліду холостого ходу (ХХ) і закорочення джерела (ЗК). При проведенні досліду ХХ, рис. 7.6.1, в, гілка з опором \dot{Z} розмикається, і на її затискачах виникає напруга \dot{U}_{XX} , рівна ЕРС еквівалентного джерела $\dot{U}_{XX} = \dot{E}_d$. При проведенні досліду ЗК, рис. 7.6.1, з, відключаються всі ЕРС ланцюга і замінюються перемичками без опору. Тоді вхідний опір ланцюга стає рівним опору еквівалентного джерела $\dot{Z}_{BX} = \dot{Z}_d$.

Алгоритм розрахунку струму у гілці ланцюга методом еквівалентного джерела

1. Довільно обрати гілку ланцюга схеми, у якій необхідно знайти струм.
2. Виконати дослід холостого ходу, для чого розімкнути обрану гілку ланцюга схеми і знайти напругу холостого ходу на її затискачах, використовуючи другий закон Кірхгофа.
3. Виконати дослід закорочення усіх джерел схеми і знайти внутрішній опір двополюсника по відношенню до затискчів обраної гілки.
4. Перетворити розглядувану схему на еквівалентну схему активного двополюсника з увімкненими на його затискачах гілки ланцюга резистора.
5. Розрахувати струм на затискачах схеми, використовуючи кроки 2 і 4 алгоритму.

Дію алгоритму з розрахунку струму у гілці складного ланцюга з використанням методу еквівалентного джерела розглянемо на прикладі конкретної схеми.

Приклад 7.6.1. Для ланцюга, приведеного на рис. 7.6.2, а, з вихідними даними: $\dot{E}_1 = 120 \text{ В}$; $\dot{E}_2 = 115 \text{ В}$; $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = (1 + j2) \text{ Ом}$; $\dot{Z}_H = 10 \text{ Ом}$, визначте струм в опорі \dot{Z}_H методом еквівалентного джерела.

Розв'язання. Згідно кроку 1 алгоритму, виділяємо зі схеми гілку з опором \dot{Z}_H , а всю іншу частину ланцюга представляємо у вигляді еквівалентного джерела ЕРС, рис. 7.6.2, а, пунктирний прямокутник.

Користуючись кроком 2 алгоритму, проводимо дослід холостого ходу. Для цього, розімкнемо гілку \dot{Z}_H і знайдемо напругу \dot{U}_{XX} на її затискачах, рис. 7.6.2, б, пунктирний прямокутник. Досліджуючи ланцюг, що утворився, помічаємо, що у лівому його контурі протікає струм \dot{I} , а у правому контурі струму немає. Склавши рівняння за другим законом Кірхгофа для лівого контура, отримаємо $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \dot{I} \cdot (\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02})$, у результаті чого знайдемо струм у лівому контурі $\dot{I} = (\dot{E}_1 - \dot{E}_2) / 2 \cdot \dot{Z}_{01} = 5 / (2 + j4) = (10 - j20) / 20 = (0,5 - j1) \text{ А}$. Склавши рівняння за другим законом Кірхгофа для правого контуру ланцюга, отримаємо $\dot{E}_2 = \dot{U}_{XX} - \dot{I} \cdot \dot{Z}_{02}$, звідки знайдемо напругу холостого ходу, яка буде дорівнювати

$$\begin{aligned} \dot{U}_{XX} &= \dot{E}_2 + \dot{I} \cdot \dot{Z}_{02} = 115 + (0,5 + j1)(1 + j2) = \\ &= 115 + [0,5 - j0,1 + j0,1 + 2] = 115 + 2,5 = 117,5 \text{ В.} \end{aligned}$$

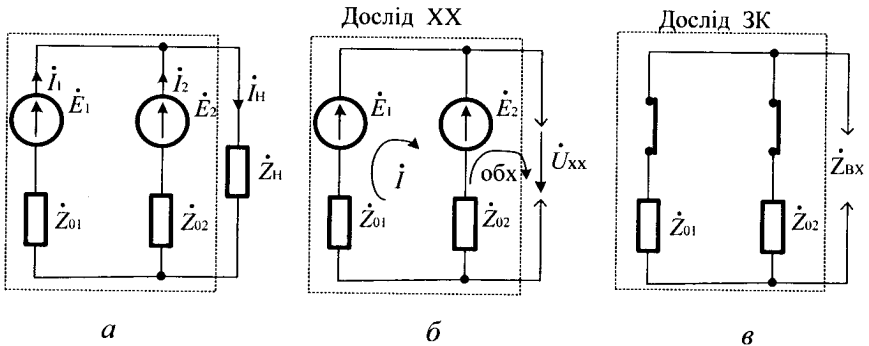


Рис. 7.6.2

Ця напруга є *EPC* еквівалентного джерела $\dot{U}_{XX} = \dot{E}_D = 117,5 \text{ В}$. Згідно кроку 3 алгоритму, проводимо дослід закорочення джерел. Для цього у схемі рис. 7.6.2, б видаляємо джерела *EPC* \dot{E}_1 , \dot{E}_2 і замінюємо їх короткозамкненими перемичками, отримуючи схему, приведену на рис. 7.6.2, в. На кроці 4 алгоритму перетворюємо схему, отриману на кроці 3 алгоритму, на еквівалентну схему активного двополюсника з якої знаходимо, що $\dot{Z}_{BX} = \dot{Z}_{XX} = \left[(\dot{Z}_{01} \cdot \dot{Z}_{02}) / (\dot{Z}_{01} + \dot{Z}_{02}) \right] = (0,5 + j1)$

Ом. На кроці 5 алгоритму, використовуючи кроки 2 і 3, розраховуємо струм на затискачах схеми у виділеній гілці ланцюга у відповідності з формулою 7.6.1, який дорівнює

$$\begin{aligned} \dot{I}_H &= [\dot{E}_r / (\dot{Z}_r + \dot{Z}_H)] = 117,5 / (0,5 + j1 + 10) = 117,5 / (10,5 + j1) = \\ &= (1233,75 - j117,5) / 111,25 = (11,09 - j1,056) \text{ A.} \end{aligned}$$

Зауважимо, що знайдений струм \dot{I}_H збігається з його значенням, отриманим у результаті розв'язання цієї задачі іншими, раніше розглянутими методами розрахунку у прикладах: 7.2.1; 7.3.1; 7.4.2.

Якщо у ланцюзі є джерело струму, наприклад, як у схемі рис. 7.2.1, а, то при розв'язанні такого прикладу це джерело струму необхідно попередньо перетворити на еквівалентне джерело ЕРС і далі вести розрахунок ланцюга згідно з запропонованим вище алгоритмом. Якщо цього не робити, то при проведенні досліду ЗК, джерело \dot{E}_2 замінити короткозамкненою перемичкою, а гілку з джерелом струму \dot{J}_1 розімкнути (його внутрішню провідність \dot{Y}_{01} залишити у схемі). Читачеві пропонуємо самостійно виконати таке розв'язання і отримати результат, що збігається з наведеними вище розв'язаннями.



Контрольні запитання

1. Які є схеми ланцюгів з'єднання з одним джерелом енергії?
2. Як розраховують комплексний опір ланцюгів із послідовним з'єднанням?
3. Як розраховують комплексний опір ланцюгів із паралельним з'єднанням?
4. Як розраховують комплексний опір ланцюгів із послідовно-паралельним з'єднанням?
5. Як розраховують комплексний опір ланцюгів із паралельно-послідовним з'єднанням?
6. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів синусоїдального струму з використанням законів Кірхгофа.

7. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів синусоїдального струму з використання методів контурних струмів.
8. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів синусоїдального струму з використанням методів вузлових напруг.
9. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів синусоїдального струму з використанням методу суперпозиції.
10. Сформулюйте алгоритм розрахунку ланцюгів синусоїдального струму з використанням методу еквівалентного джерела.



Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть струми у гілках схеми рис.7.2.1,*a*, використовуючи закони Кірхгофа.
2. Знайдіть струми у гілках схеми рис.7.4.2, використовуючи метод контурних струмів і метод суперпозиції. Результати порівняйте і зробіть висновки.
3. Знайдіть струми у гілках схеми рис.7.2.1,*a* методом вузлових напруг.
4. Розрахуйте струм \dot{I}_H у гілці ланцюга прикладу 7.5.1. методом еквівалентного джерела.

Відповідь: $\dot{I}_H = (11,09 - j1,056) \text{ A}$.



Коментарі

Методи розрахунку з одним джерелом енергії узяті з [5, 7, 9,], а розрахунок з використанням законів Кірхгофа – з [2, 4]. Методи контурних струмів і вузлових напруг слідуєть [4], а методи суперпозиції й еквівалентного джерела – [12, 14].

Розділ 8

Розрахунок ланцюгів синусоїдального струму із взаємною індуктивністю

8.1. Загальні положення

Якщо при зміні у часі струму в одній котушці на затискачах іншої виникає ЕРС, то такі котушки називають індуктивно зв'язаними. Це, наприклад, котушки на сталевих сердечниках електричних машин і апаратів, дроти ліній електропередач, а також багато інших електротехнічних пристроїв. На рис. 8.1.1, а показані дві ідеальні (без активних опорів) котушки індуктивності.

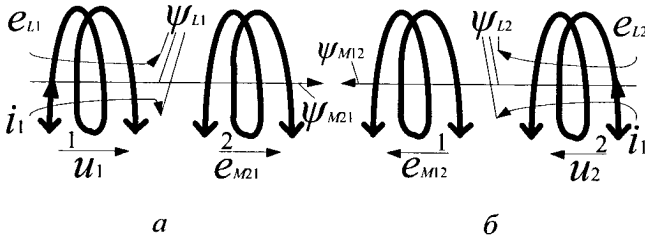


Рис. 8.1.1

При протіканні у першій котушці синусоїдального струму i_1 у ній виникає магнітне поле, що характеризує потокозчеплення самоіндукції ψ_{L1} . Це потокозчеплення, відповідно до закону електромагнітної індукції, індукує у першій котушці ЕРС самоіндукції $e_{L1} = -d\psi_{L1} / dt$.

Напряга на цій котушці u_1 чисельно дорівнює цій ЕРС, але спрямована у протилежний бік і тому має зворотний знак $u_1 = -e_{L1} = +\frac{d\psi_{L1}}{dt} = L \frac{di_1}{dt}$. Тут $\psi_{L1} = L_1 i_1$, де L_1 – індуктивність першої котушки. У символічній формі запису ця напруга має вигляд $\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1$, де $\omega L_1 = X_{L1}$ – індуктивний опір першої котушки синусоїдального струму.

За наявності магнітного зв'язку між котушками 1 і 2, деяка частина потокозчеплення самоіндукції першої котушки ψ_{L1} проникає у другу котушку. Ця його частина називається потокозчепленням взаємної індукції другої котушки, викликана струмом i_1 першої котушки.

Потокозчеплення ψ_{M21} індукуює у другій котушці ЕРС взаємної індукції $e_{M21} = -\frac{d\psi_{M21}}{dt}$. Ставлення потокозчеплення взаємної

індукції ψ_{M21} до струму у першій котушці i_1 є взаємна індуктивність цих котушок $\psi_{M21}/i_1 = M_{21}$. Взаємна індуктивність також, як і власна індуктивність, вимірюється у генрі (Гн). З урахуванням останнього співвідношення, ЕРС взаємної індукції другої котушки

набуває вигляду $e_{M21} = -\frac{d\psi_{M21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$. Аналогічні міркування

можна навести і для випадку, коли синусоїдальний струм i_2 протікає тільки по другій котушці, рис. 8.1.1, б. Потокозчеплення самоіндукції ψ_{L2} другої котушки індукуює у ній електрорушійну силу самоіндукції

$e_{L2} = -(d\psi_{L2}/dt)$. Напряга на другій котушці рівна їй за величиною і протилежна за знаком $u_2 = -e_{L2} = +d\psi_{L2}/dt = L_2 di_2/dt$. Тут

$\psi_{L2} = L_2 i_2$, де L_2 – індуктивність другої котушки. У символічній формі запису ця напряга має вигляд $\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2$, де $\omega L_2 = X_{L2}$ – індуктивний опір другої котушки синусоїдального струму. Деяка частина потокозчеплення самоіндукції ψ_{L2} проникає у першу

котушку і утворює там потокозчеплення взаємної індукції ψ_{M12} . Воно індукуює у першій котушці ЕРС взаємної індукції

$e_{M12} = -d\psi_{M12}/dt$. Відношення потокозчеплення взаємної індукції ψ_{M12} до струму у другій котушці i_2 є взаємна індуктивність цих двох

котушок $\psi_{M12}/i_2 = M_{12}$. З урахуванням цього, співвідношення ЕРС взаємної індуктивності у першій катушці $e_{M21} = -M_{21} di_2/dt$.

Зауважимо, що для лінійних електричних ланцюгів взаємна індуктивність двох котушок не залежить від того, яким чином вона

була визначена експериментально $\frac{\Psi_{M12}}{i_2} = \frac{\Psi_{M21}}{i_1} = M_{12} = M_{21} = M$.

Вона є їхнім спільним параметром і не залежить від величин потокозчеплень і струмів, а визначається тільки конструкцією котушок, їх взаємним розташуванням і магнітними властивостями навколишнього середовища.

Приближаючи котушки одну до одної, ми збільшуємо M , а відсуваючи їх одну від одної – зменшуємо M . Найбільшою взаємною індуктивністю володіють дві котушки, навиті одна на одну, рис. 8.1.2, а, а найменшою – розташовані своїми осями під кутом 90° одна до одної, рис. 8.1.2, б, або далеко віддалені одна від одної. При одночасному протіканні струмів в обох котушках, відповідно з принципом накладення, маємо розподіл їх магнітних потоків, указаний на рис. 8.1.2, в.

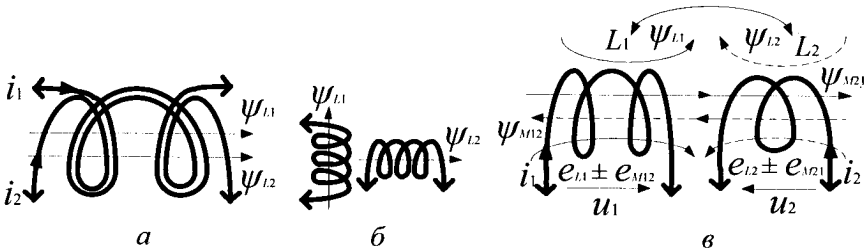


Рис. 8.1.2

Тут у кожній з котушок індуються одночасно дві електрорушійні сили: EPC самоіндукції і EPC взаємоіндукції. Тому напруги u_1 і u_2 кожної індуктивно зв'язаної котушки мають дві складові: одна з них u_1 викликана дією EPC самоіндукції, а інша u_M – дією EPC взаємної індукції:

$$u_1 = u_{L1} \pm u_{M12} = \frac{d\psi_{L1}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad (8.1.1)$$

$$u_2 = u_{L2} \pm u_{M21} = \frac{d\psi_{L2}}{dt} \pm \frac{d\psi_{M21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (8.1.2)$$

У формулах 8.1.1 і 8.1.2 знаки (+) або (-) у других складових напруг залежать від взаємного напрямлення магнітних потоків самоіндукції і взаємної індукції у котушках.

Знак (+) береться у тому випадку, коли потоки самоіндукції і взаємної індукції збігаються за напрямом. Таке з'єднання котушок називають узгодженим включенням. Якщо потоки самоіндукції і взаємної індукції не збігаються за напрямом, то береться знак (-), і таке з'єднання котушок називають зустрічним (неузгодженим) включенням.

На рис. 8.1.3, а показані приклади узгодженого, а на рис. 8.1.3, б – зустрічного включення двох індуктивно зв'язаних котушок.

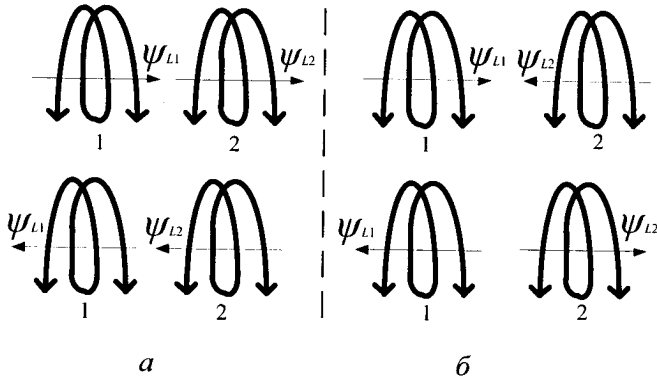


Рис. 8.1.3

На електричних схемах індуктивно зв'язані котушки зображуються так, як це показано на рис. 8.1.4.

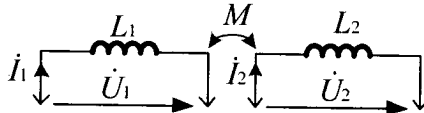


Рис. 8.1.4

Переходячи до комплексної форми запису напруг на індуктивно зв'язаних котушках, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (8.1.3)$$

де: $j\omega L_1 \dot{I}_1$ і $j\omega L_2 \dot{I}_2$ – комплексні напруги першої та другої котушок, викликані діями струмів \dot{I}_1 і \dot{I}_2 ; $\pm j\omega M \dot{I}_2$ – додаткова складова напруги

першої котушки, викликана струмом \dot{I}_2 другої котушки; $\pm j\omega M\dot{I}_1$ – додаткова складова напруги другої котушки, викликана струмом \dot{I}_1 першої котушки. У формулах 8.1.3 знак (+) відповідає узгодженому включенню котушок, а знак (-) – зустрічному включенню.

Спосіб включення індуктивно зв'язаних котушок визначається для кожного конкретного ланцюга експериментально і вказується на його схемі шляхом маркування «початок» котушок у вигляді жирних крапок (знак •) або зірочок (*). При цьому діє таке правило: якщо струми у котушках спрямовані щодо «початку» в одному напрямку, то включення котушок є узгодженим, а якщо у протилежному – зустрічним.

На рис. 8.1.5 дано кілька прикладів узгодженого і зустрічного включення індуктивно зв'язаних котушок, залежно від маркування їх «початку» і прийнятого у них напрямів комплексних струмів.

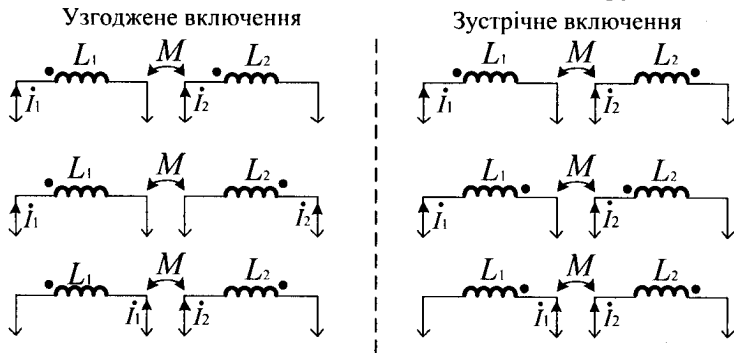


Рис. 8.1.5

8.2. Розрахунок ланцюгів із послідовним з'єднанням двох індуктивностей

Визначення комплексного струму \dot{I} ланцюга при узгодженому й зустрічному включенні двох індуктивностей, якщо вони послідовно з'єднані і для них відомі параметри R_1, L_1, R_2, L_2 , взаємна індуктивність M , частота ω мережі і комплексна напруга \dot{U} , рис. 8.2.1, відбувається так.

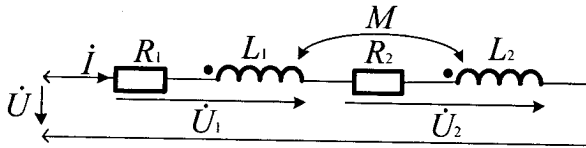


Рис. 8.2.1

Відповідно до другого закону Кірхгофа, маємо $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, де: $\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \dot{I} \pm j\omega M \dot{I}$; $\dot{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2) \cdot \dot{I} \pm j\omega M \dot{I}$.

Тоді $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = [(R_1 + R_2) + j\omega \cdot (L_1 + L_2 \pm 2M)] \cdot \dot{I} = \dot{Z}_\Sigma \cdot \dot{I}$, де $\dot{Z}_\Sigma = (R_1 + R_2) + j\omega \cdot (L_1 + L_2 \pm 2M) = R_\Sigma + j\omega L_\Sigma$.

Аналіз \dot{Z}_Σ показує, що його величина залежить від способу включення котушок. При узгодженому включенні $\dot{Z}_\Sigma = (R_1 + R_2) + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2M)$, а при зустрічному включенні $\dot{Z}_\Sigma = (R_1 + R_2) + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2M)$. Таким чином, при узгодженому включенні \dot{Z}_Σ більше, ніж при зустрічному, за рахунок зміни реактивного опору кола: $X_{L \text{ узг}} = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M$; $X_{L \text{ зус}} = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M$.

Зауважимо, що за усіх умов $X_{L1} + X_{L2} - 2X_M > 0$, тобто $X_{L1} + X_{L2} > 2X_M$, так як \dot{Z}_Σ завжди позитивне і є індуктивним опором. Негативне значення \dot{Z}_Σ означало б перетворення цього опору у ємнісне, чого не може бути фізично.

Алгоритм розрахунку струмів і напруг у ланцюгах із послідовним з'єднанням індуктивностей

1. Знайти повний опір ланцюга при узгодженому (зустрічному) включенні індуктивностей.
2. Знайти діюче значення струму при узгодженому (зустрічному) включенні індуктивностей.
3. Знайти діюче значення напруги при узгодженому (зустрічному) включенні індуктивностей на першій котушці.
4. Знайти діюче значення напруги при узгодженому (зустрічному) включенні індуктивностей на другій котушці.

Приклад 8.2.1. Для ланцюга з послідовним з'єднанням двох індуктивно з'єднаних котушок, рис. 8.2.1, відомі їх опори й діюче значення прикладеної напруги: $X_1 = 20 \text{ Ом}$; $X_2 = 30 \text{ Ом}$; $X_M = 5 \text{ Ом}$; $R_1 = R_2 = 0$; $U = 120 \text{ В}$. Визначте струми ланцюга, а також діючі значення напруг на кожній із котушок при узгодженому й зустрічному їх включенні.

Розв'язання. При відсутності у ланцюзі активних опорів завдання можна вирішити, користуючись тільки модулями комплексних струмів, напруг і опорів. Використовуючи крок 1 алгоритму, знаходимо повний опір ланцюга при узгодженому включенні котушек індуктивностей

$$Z_{\Sigma \text{ узГ}} = X_1 + X_2 + 2X_M = 20 + 30 + 10 = 60 \text{ Ом}.$$

На кроці 2 алгоритму обчислюємо діюче значення струму у ланцюзі $I_{\text{узГ}} = U / Z_{\Sigma \text{ узГ}} = 120 / 60 = 2 \text{ А}$. Користуючись кроком 3 алгоритму, знаходимо діюче значення напруги на першій котушці індуктивності $U_1 = I_{\text{узГ}} Z_{1 \text{ узГ}} = I_{\text{узГ}} (X_1 + X_M) = 2 \cdot 25 = 50 \text{ В}$,

де $Z_{1 \text{ узГ}} = (X_1 + X_M)$, а на кроці 4 алгоритму – діюче значення напруги на другій котушці індуктивності

$$U_2 = I_{\text{узГ}} Z_{2 \text{ узГ}} = I_{\text{узГ}} (X_2 + X_M) = 2 \cdot 35 = 70 \text{ В},$$

де $Z_{2 \text{ узГ}} = (X_2 + X_M)$.

Аналогічно використовуючи кроки алгоритму при зустрічному включенні індуктивностей, знаходимо повний опір ланцюга, який дорівнює $Z_{\Sigma \text{ звС}} = X_1 + X_2 - 2X_M = 20 + 30 - 10 = 40 \text{ Ом}$, а діюче значення струму обчислюємо, як $I_{\text{звС}} = U / Z_{\Sigma \text{ звС}} = 120 / 40 = 3 \text{ А}$.

Діюче значення напруги на першій котушці дорівнює

$$U_1 = I_{\text{звС}} Z_{1 \text{ звС}} = I_{\text{звС}} (X_1 - X_M) = 3 \cdot 15 = 45 \text{ В},$$

а на другій – $U_2 = I_{\text{звС}} Z_{2 \text{ звС}} = I_{\text{звС}} (X_2 - X_M) = 3 \cdot 25 = 75 \text{ В}$.

Тут $Z_{1 \text{ звС}} = (X_1 - X_M)$, $Z_{2 \text{ звС}} = (X_2 - X_M)$.

Алгоритм розрахунку взаємної індуктивності котушок

1. Знайти опір ланцюга при узгодженому включенні котушок.
2. Знайти опір ланцюга при зустрічному включенні котушок.

3. Знайти різницю опорів у ланцюгах при узгодженному і зустрічному включенні котушок.

4. Знайти величину взаємної індуктивності котушок.

Приклад 8.2.2. Визначте величину опору взаємної індуктивності M двох послідовно індуктивно зв'язаних котушок, рис. 8.2.1, якщо $R_1 = R_2 = 0$ при незмінному діючому значенні прикладеної напруги $U = 120$ В. Діюче узгоджене значення струму у включених котушках дорівнює $I_{узг} = 2A$, а зустрічне – $I_{звс} = 6A$.

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму знаходимо опір ланцюга при узгодженному включенні котушок

$$Z_{узг} = \frac{U}{I_{узг}} = \frac{120}{2} = 60 = (X_1 + X_2 + 2X_M) \text{ Ом.}$$

Виристовуючи крок 2 алгоритму обчислюємо опір ланцюга при зустрічному включенні котушок

$$Z_{звс} = \frac{U}{I_{звс}} = \frac{120}{6} = 20 = (X_1 + X_2 - 2X_M) \text{ Ом.}$$

На кроці 3 алгоритму знаходимо різницю цих опорів $Z_{узг} = Z_{звс} = 4X_M = 60 - 20 = 40$ Ом, а на кроці 4 алгоритму – величину взаємної індуктивності котушок $X_M = 40/4 = 10$ Ом.

8.3. Розрахунок ланцюгів із паралельним з'єднанням двох індуктивностей

Для ланцюгів із паралельним з'єднанням двох індуктивностей, рис. 8.3.1, відомі їхні параметри R_1, R_2, L_1, L_2 , взаємна індуктивність M , частота ω і комплексна напруга \dot{U} . Означення комплексних струмів \dot{I}_1 і \dot{I}_2 при узгодженному і зустрічному включенні даних індуктивностей відбувається у такий спосіб.

Згідно з другим законом Кірхгофа, складаємо рівняння індуктивних котушок відповідно до формул 8.1.3, і отримаємо:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для першої котушки} \quad \dot{U} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ \text{для другої котушки} \quad \dot{U} = \pm j\omega M \dot{I}_1 + \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2). \end{array} \right\} \quad (8.3.1)$$

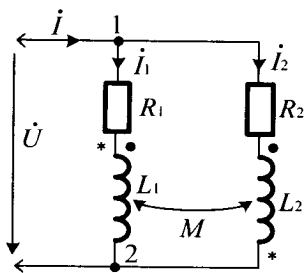


Рис. 8.3.1

У цих рівняннях знак (+) береться при узгодженному включенні (як це показано на рис. 8.3.1 символами •), а знак (-) – при зустрічному (на рис. 8.3.1 показано символами *).

Увівши для скорочення запису позначення:

$$(R_1 + j\omega L_1) = \dot{Z}_1; \quad (R_2 + j\omega L_2) = \dot{Z}_2; \\ j\omega M = \dot{Z}_M,$$

отримаємо рівняння (8.3.1) у такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 \pm \dot{Z}_M \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{U} &= \pm \dot{Z}_M \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.2)$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь за допомогою теорії визначників:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де Δ – головний визначник системи, який дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \pm \dot{Z}_M \\ \pm \dot{Z}_M & \dot{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2;$$

Δ_1 – перший додатковий визначник, який отримують із головного заміною першого стовпчика вільними членами рівнянь 8.3.2

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U} & \pm \dot{Z}_M \\ \dot{U} & \dot{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{U} \cdot \dot{Z}_2 \mp \dot{U} \cdot \dot{Z}_M = \dot{U} \cdot (\dot{Z}_2 \mp \dot{Z}_M),$$

де: знак (-) відповідає уже узгодженному, а знак (+) – зустрічному включенню котушок; Δ_1 – другий додатковий визначник, який отримують із головного заміною другого стовпчика вільними членами рівнянь 8.3.2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{U} \\ \pm \dot{Z}_M & \dot{U} \end{vmatrix} = \dot{U} \cdot (\dot{Z}_1 \mp \dot{Z}_M),$$

де: знак (-) також відповідає узгодженному, а знак (+) – зустрічному включенню котушок.

Тоді сруми \dot{I}_1, \dot{I}_2 у котушках індуктивності відповідно будуть дорівнювати:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{U} \cdot (\dot{Z}_2 \mp \dot{Z}_M)}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\dot{U} \cdot (\dot{Z}_1 \mp \dot{Z}_M)}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}.$$

Загальний струм ланцюга знаходимо відповідно до першого закону Кірхгофа для вузла 1: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$.

Алгоритм розрахунку струмів у ланцюгах з паралельним з'єднанням індуктивностей

1. Скласти рівняння для кожної з індуктивних котушок з урахуванням їх взаємної індуктивності та узгодженого або зустрічного включення, використовуючи при цьому другий закон Кірхгофа.

2. Розв'язати отримані на кроці 1 алгоритму рівняння за допомогою теорії визначників, обчисливши відповідні комплексні струми у гілках індуктивностей ланцюга.

3. Знайти загальний комплексний струм у ланцюзі, використовуючи перший закон Кірхгофа.

Приклад 8.3.1. Визначте діючі значення струмів $\dot{I}, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ у гілках ланцюга при зустрічному включенні індуктивних котушок, якщо опори двох паралельно включених котушок і діюче значення прикладеної напруги відомі: $X_1 = 3 \text{ Ом}; X_2 = 2 \text{ Ом}; X_M = 1 \text{ Ом}, (R_1 = R_2 = 0); U = 10 \text{ В}$, рис. 8.3.1.

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму, складаємо рівняння для зустрічного включення котушек індуктивностей згідно з другим законом Кірхгофа. При зустрічному включенні у рівняннях 8.3.2 у доданків виду $j\omega M \dot{I}$ повинен стояти знак (-). Крім того, за відсутності активних опорів котушок, рівняння можна скласти тільки

для модулів напруг, струмів і опорів, не застосовуючи символічного методу. За цих умов отримуємо:

$$\begin{cases} U = X_1 \cdot I_1 - X_M \cdot I_2; \\ U = -X_M \cdot I_1 + X_2 \cdot I_2. \end{cases}$$

На кроці 2 алгоритму розв'язуємо отриману на кроці 1 алгоритму систему рівнянь. Для цього підставляємо чисельні значення відомих величин і знаходимо:

$$\begin{cases} 10 = 3I_1 - I_2; \\ 10 = -I_1 + 2I_2. \end{cases}$$

Вирішуємо цю систему за допомогою теорії визначників.

Головний визначник системи буде дорівнювати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5.$$

Знаходимо перший і другий додаткові визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 10 = 30; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 30 + 10 = 40.$$

Звідки діючи значення струмів I_1 і I_2 будуть дорівнювати

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{30}{5} = 6 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{40}{5} = 8 \text{ A}.$$

Використовуючи крок 3 алгоритму знаходимо загальний комплексний струм у ланцюзі $I = I_1 + I_2 = 14$.

8.4. Розрахунок ланцюгів із трансформаторним зв'язком між котушками

Такий ланцюг представлено на рис. 8.4.1, у якого котушки індуктивностей не мають один з одним провідникових з'єднань. Відомі параметри обох котушок індуктивностей R_1, R_2, L_1, L_2 , їх взаємна індуктивність M , частота ω і комплексна напруга \dot{U}_1 . Визначення комплексних струмів котушок при узгодженому і зустрічному їх включенні відбувається у такий спосіб.

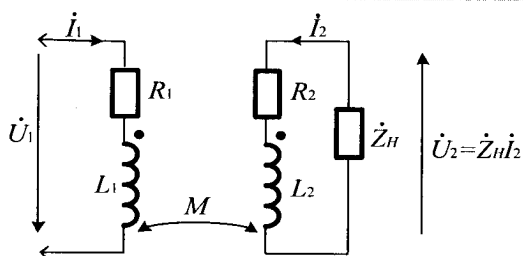


Рис. 8.4.1

Складаємо рівняння для лівого і правого контурів ланцюга у відповідності до формул 8.1.3 і отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ 0 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \dot{I}_2 + \dot{Z}_H \dot{I}_2. \end{cases} \quad (8.4.1)$$

У цих рівняннях знак (+) відповідає узгодженому, а знак (-) – зустрічному включенню котушок. Зауважимо, що у рівняннях 8.4.1 $\dot{Z}_H \dot{I}_2 = \dot{U}_2$. Позначивши: $(R_1 + j\omega L_1) = \dot{Z}_1$; $(R_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}_H) = \dot{Z}_2$; $j\omega M = \dot{Z}_M$, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 \pm \dot{Z}_M \cdot \dot{I}_2; \\ 0 = \pm \dot{Z}_M \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{I}_2. \end{cases} \quad (8.4.2)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо комплексні струми \dot{I}_1 і \dot{I}_2 обох котушок ланцюга. Для розв'язання застосовуємо теорію визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \pm \dot{Z}_M \\ \pm \dot{Z}_M & \dot{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 & \pm \dot{Z}_M \\ 0 & \dot{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{Z}_2 \dot{U}_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{U}_1 \\ \pm \dot{Z}_M & 0 \end{vmatrix} = \mp \dot{Z}_M \cdot \dot{U}_1; \quad \dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{U}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\mp \dot{Z}_M \dot{U}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}.$$

Замітимо, що знак (-) у чисельнику \dot{I}_2 відповідає узгодженому з'єднанню котушок, а знак (+) – зустрічному.

Алгоритм розрахунку струмів у ланцюгах з трансформаторним зв'язком між котушками

1. Скласти рівняння для лівого і правого контурів котушок з урахуванням їх взаємної індуктивності та узгодженого або зустрічного включення.

2. Розв'язати отримані на кроці 1 алгоритму рівняння за допомогою теорії визначників, обчисливши відповідні комплексні струми для лівого і правого контурів котушки.

Застосування даного алгоритму аналогічно застосуванню алгоритму для розрахунку струмів у ланцюгах з паралельним з'єднанням індуктивностей, див. приклад 4.3.1.

Розглянемо, більш цікавий з практичної точки зору, приклад визначення взаємної індуктивності M трансформаторного зв'язку між котушками.

Приклад 8.4.1. Визначте взаємну індуктивність M трансформаторного зв'язку між котушками X_1 та X_2 , рис. 8.4.2.

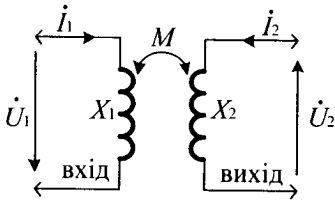


Рис. 8.4.2

Котушки без активних опорів, до котушки X_1 прикладено синусоїдальну напругу частоти $f = 500$ Гц, а котушка X_2 розімкнута. Діюче значення струму у котушці X_1 становить 10 А, а напруга на розімкнутих затискачах котушки X_2 дорівнює $U_2 = 50$ В.

Розв'язання. При відсутності активних опорів котушок ($R_1 = R_2 = 0$) рівняння 8.4.1 можна скласти тільки для модулів струмів, напруг і опорів не застосовуючи символічного методу. З урахуванням, що правий контур ланцюга розімкнутий ($I_2 = 0$), маємо:

$$U_1 = I_1 X_1; \quad 0 = \pm I_1 X_M + U_2, \quad \text{де: } X_1 = \omega L_1, \quad X_M = \omega M.$$

При цьому, з другого рівняння випливає, що $\pm X_M = -U_2 / I_1$ або $|X_M| = U_2 / I_1 = 5$ Ом. Тоді величина взаємної індуктивності котушок

$$\text{буде дорівнювати } M = \frac{X_M}{\omega} = \frac{5}{2\pi f} = \frac{5}{6,28 \cdot 500} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

8.5. Еквівалентні перетворення ланцюгів із взаємною індуктивністю

Якщо дві індуктивно зв'язані котушки мають загальний вузол, то таку частину схеми можна замінити еквівалентною схемою без індуктивних зв'язків. У табл.8.5.1 показані ділянки схем з індуктивними зв'язками між двома котушками і еквівалентні їм схеми без індуктивних зв'язків.

Таблиця 8.5.1

№ п/п	Ділянка ланцюга з індуктивним зв'язком	Еквівалентна ділянка ланцюга без індуктивного зв'язку
1	<p>Узгоджене увімкнення</p>	
2	<p>Зустрічне увімкнення</p>	
3	<p>Узгоджене увімкнення</p>	
4	<p>Зустрічне увімкнення</p>	

Приклад 8.5.1. У ланцюзі з трансформаторним зв'язком двох ідеальних котушок індуктивності, показаних на рис. 8.5.1, а, відомо: діюче значення напруги $U = 100 \text{ В}$; індуктивні опори котушок $X_1 = 8 \text{ Ом}$, $X_2 = 4 \text{ Ом}$; опір їх взаємної індуктивності $X_M = 3 \text{ Ом}$. Знайдіть струм I_1 у лівому контурі ланцюга.

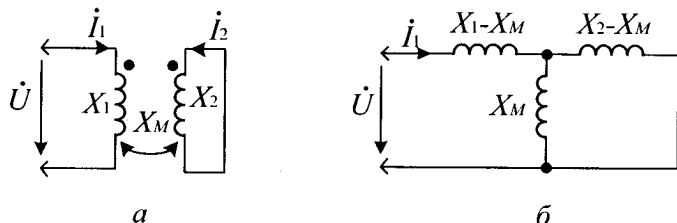


Рис. 8.5.1

Розв'язання. Перетворимо ланцюг з індуктивним зв'язком в еквівалентний ланцюг без індуктивного зв'язку, рис. 8.5.1, б, використавши для цього позицію 3 табл. 8.5.1. Тоді, загальний (еквівалентний) комплексний опір ланцюга буде дорівнювати

$$X_{\Sigma} = j(X_1 - X_M) + \frac{j(X_2 - X_M)jX_M}{j(X_2 - X_M) + jX_M} = j5 + j0,75 = j5,75 \text{ Ом},$$

а комплексний струм $-I_1 = \dot{U} / \dot{Z}_E = 100e^{j0} / j5,75 = -j17,4 \text{ А}$.

Представляємо читачеві самостійно переконатися у тому, що розрахунок даного ланцюга без еквівалентної заміни індуктивного зв'язку призводить до того ж результату.



Контрольні запитання

1. Які котушки називають індуктивно зв'язаними?
2. Що називають потокозчепленням і коли воно виникає?
3. Що таке взаємна індукція і коли вона виникає?
4. Як змінюється взаємна індукція при зближенні і віддаленні двох індуктивних котушок?
5. За яких умов взаємна індукція буде найбільшою, а за яких найменшою?
6. Що таке узгоджене й зустрічне включення двох індуктивно зв'язаних котушок?



Задачі для самостійного розв'язування

1. В умовах прикладу 8.2.1 (рис. 8.2.1) визначте струм ланцюга при узгодженому і зустрічному увімкненні індуктивно зв'язаних котушок, використовуючи символічний метод.

Відповідь: $\dot{I}_{узГ} = -j2 \text{ A}$; $\dot{I}_{звС} = -j3 \text{ A}$.

2. В умовах прикладу 8.3.1 (рис. 8.3.1) визначте струми при узгодженому і зустрічному увімкненні індуктивно зв'язаних котушок, використовуючи символічний метод.

Відповідь: при узгодженому: $\dot{I}_1 = -j2 \text{ A}$; $\dot{I}_2 = -j4 \text{ A}$; при зустрічному: $\dot{I}_1 = -j6 \text{ A}$; $\dot{I}_2 = -j8 \text{ A}$.

3. До ланцюга з трансформаторним зв'язком двох котушок, рис. 8.4.2, прикладена напруга, діюче значення якої $U_1 = 100 \text{ В}$. Індуктивний опір першої котушки $X_1 = 10 \text{ Ом}$, а опір взаємної індуктивності $X_M = 5 \text{ Ом}$. Визначте діюче значення напруги U_2 , індукованого на розімкнутих затискачах другої котушки.

Відповідь: $U_2 = 50 \text{ В}$.

4. Ланцюг з послідовним з'єднанням двох ідеальних ($R=0$) індуктивно-зв'язаних котушок має при узгодженому їх включення $X_{звГ} = 80 \text{ Ом}$, а при зустрічному включенні $X_{звС} = 20 \text{ Ом}$. Визначте величину опору взаємної індуктивності цих котушок.

Відповідь: $X_M = 15 \text{ Ом}$.



Коментарі

Розрахунок ланцюгів з послідовним і паралельним з'єднанням двох індуктивностей відповідає [6, 10], а розрахунок ланцюгів із трансформаторним зв'язком між котушками і еквівалентні перетворення ланцюгів із взаємною індуктивністю слідують [4, 15, 18].

Розділ 9

Трифазні ланцюги синусоїдального струму

9.1. Основні свідчення

Трифазні ланцюги синусоїдального струму отримали широке розповсюдження в електроенергетиці. Вони мають дві основні переваги перед однофазними (двопровідними) ланцюгами:

1. Подвійна економія кольорового металу при передачі однієї й тієї ж потужності.

2. Можливість отримання магнітного поля, що обертається, на базі якого створено простий і надійний трифазний асинхронний двигун.

Джерелом енергії у трифазних ланцюгах служить трифазний генератор, схематичний пристрій якого показано на рис. 9.1.1, а.

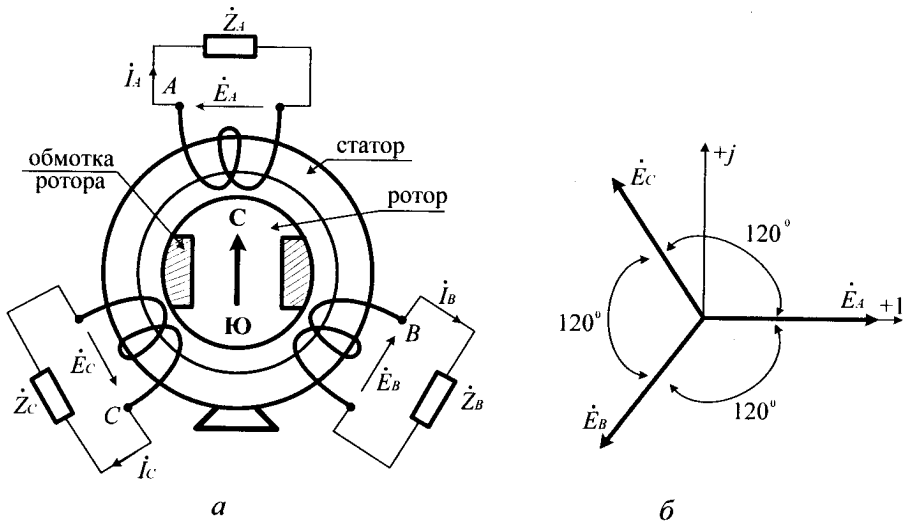


Рис. 9.1.1

Генератор складається зі статора (нерухома частина) і ротора (рухома частина). На статорі у спеціальних пазах на його внутрішній поверхні розташовані три однакові обмотки, зміщені одна відносно одної у просторі на кут 120° (на рис. 9.1.1, а ці обмотки показані умовно). Їх початки позначені заголовними буквами *A*, *B*, *C*. Ротор генератора являє собою електромагніт постійного струму, обмотка якого живиться від окремого джерела постійного струму через два контактних кільця, розташованих на валу. Ротор влаштований так, що його магнітне поле розподіляється у зазорі уздовж внутрішньої поверхні статора за законом косинуса. При обертанні ротора з деякою постійною швидкістю, його магнітне поле індукує в обмотках статора (відповідно до закону електромагнітної індукції: $e_{\text{інд}} = -d\psi/dt$) три однакові синусоїдальні *ЕРС*, зміщені одна відносно одної по фазі на 120° . Вони утворюють симетричну систему, яка у вигляді векторної діаграми представлена на рис. 9.1.1, б. Розташувавши *ЕРС* обмотки *A* уздовж вісі дійсних чисел комплексної площини, отримаємо запис *ЕРС* у наступному вигляді:

$$\dot{E}_A = E_A; \dot{E}_B = E_A e^{j240^\circ} = E_A e^{-j120^\circ}; \dot{E}_C = E_A e^{j120^\circ}, \quad (9.1.1)$$

де $E_A = E_B = E_C$ – дійсні значення фазних *ЕРС* генератора.

Величину $e^{+j120^\circ} = a$ називають *фазовим множником*. Використовуючи його у формулах 9.1.1, отримаємо:

$$\dot{E}_A = E_A; \dot{E}_B = a^2 \cdot E_A; \dot{E}_C = a \cdot E_A. \quad (9.1.2)$$

Необхідно відмітити, що:

$$a = e^{j120^\circ} = (-0,5 + j0,87); \quad a^2 = e^{j240^\circ} = (-0,5 - j0,87);$$

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (9.1.3)$$

З урахуванням формули 9.1.3 очевидно, що сума трьох векторів симетричної системи фазних *ЕРС* генератора, показаних на рис. 9.1.1, б, дорівнює нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = \dot{E}_A(1 + a + a^2) = 0. \quad (9.1.4)$$

Розробником трифазних кіл є М. О. Доліво-Добровольський. Уперше трифазний ланцюг був продемонстрований у Франкфурті-на-Майні у 1891 р. на міжнародній електротехнічній виставці. Він визнаний в усьому світі як ланцюг оптимальної системи для виробництва, передачі і розподілу електричної енергії.

Якщо до обмоток генератора, рис. 9.1.1, *а*, під'єднати навантажувальні опори, вийде найпростіший (незв'язаний) трифазний ланцюг, що складається з трьох окремих двопровідних ланцюгів, які називають *фазами*. Для відмінності один від одного їх позначають буквами *A*, *B*, *C*. На рис. 9.1.1, *а* цими літерами позначені початки фазних обмоток генератора.

Термін «фаза», що вживається тут, має технічний сенс («фаза перегоріла», «коротке замикання фази», «обрив фази» і т.д.). Його слід відрізнити від терміна «фаза», використовуваного у теорії ланцюгів синусоїдального струму для позначення стадії розвитку синусоїди струму, напруги або *ЕРС* і має фізичний зміст кута, вимірюваного у градусах або радіанах. Трифазні ланцюги, які з'єднують зіркою, мають умовне позначення – \blacktriangle , а трикутником – Δ .

9.2. Трифазні ланцюги, з'єднані зіркою

При з'єднанні зіркою кінці усіх трьох обмоток генератора з'єднують в один спільний вузол, який називають нейтральним вузлом генератора або *нейтраллю*. Так же роблять і з фазними приймачами, які утворюють нейтральний вузол трифазного приймача. При цьому три зворотних дроти окремих фаз об'єднують в один, і система з шестипровідникової стає чотирирою, як це показано на рис. 9.2.1, *а*.

Дроти, що йдуть від генератора до приймачів, називають лінійними, а дріт, що з'єднує нейтральні точки генератора і приймача, називають нейтральним. Показані на цьому рисунку напрями дії *ЕРС* струмів і напруг відповідають напрямам, прийнятим у більшості підручників із теорії електричних ланцюгів.

Особливості трифазного ланцюга, з'єданого зіркою

1. Для струмів у лінійних дротах, які, не розгалужуючись, потрапляють у дроти фаз приймачів, діє таке співвідношення

$$I_{\Phi} = I_{л}.$$

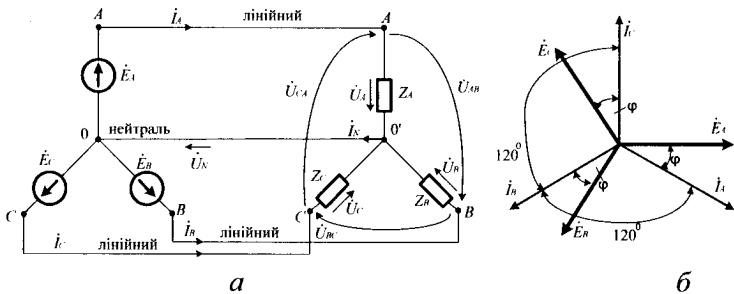


Рис. 9.2.1

2. Струм у нейтральному дроті \dot{I}_N дорівнює алгебраїчній сумі комплексних струмів усіх трьох фаз. Відповідно до першого закону Кірхгофа для нейтрального вузла приймача «0» маємо

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N. \quad (9.2.1)$$

За відсутності або при обриві нейтрального дроту отримаємо

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (9.2.2)$$

Якщо генератор виробляє симетричну систему фазних E_{PC} , рис. 9.1.1, б, і, крім того, комплексні опори усіх трьох фаз ланцюга однакові $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \dot{Z}_\phi = R \pm jX$, то комплексні струми,

обумовлені відповідно до закону Ома ($\dot{I}_\phi = \dot{U}_\phi / \dot{Z}_\phi$), мають однакові діючі значення і зрушені один відносно одного по фазі на кут у 120° (як це показано на рис. 9.1.1, б). Вони утворюють симетричну систему фазних струмів і при цих умовах

$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Отже, струм у нейтральному дроті відсутній і цей провід фактично не потрібен.

Розглянутий вище режим роботи трифазного ланцюга називають *симетричним*. У цьому режимі працюють усі трифазні приймачі, наприклад, трифазні двигуни, нагрівальні печі тощо. Вони мають три однакові обмотки і не потребують нейтрального провода. Однофазні ж приймачі, наприклад, лампи освітлення або побутові прилади при

з'єднанні їх зіркою вимагають нейтрального дроту для підтримки однакової напруги на усіх трьох фазах ланцюга.

3. Трифазні ланцюги, з'єднані зіркою, широко використовуються в електроенергетиці для передачі електромагнітної енергії на великі відстані. Спрощена схема такого ланцюга показана на рис. 9.2.2. Цей ланцюг є трьохпровідний і наочно демонструє свої переваги у порівнянні з подачею тієї ж потужності трьома однофазними ланцюгами. Енергетики прагнуть включати однофазні приймачі енергії так, щоб навантаження кожної з трьох фаз лінії електропередачі (ЛЕП) було рівномірним.

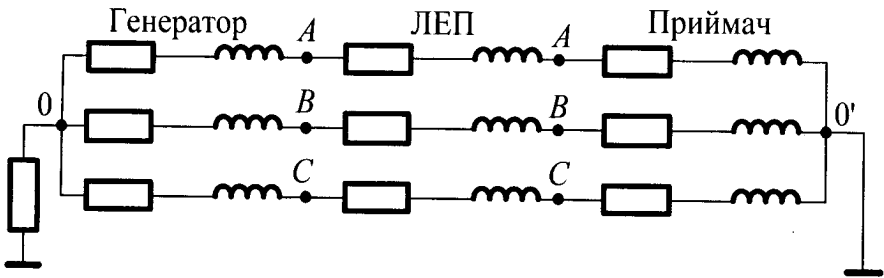


Рис. 9.2.2

Можлива несиметрія у ЛЕП компенсується нейтральним дротом, у якості якого використовують землю (система з заземленою нейтраллю).

5. При з'єднанні зіркою, рис. 9.2.1, а, розрізняють фазні й лінійні напруги. Фазні напруги $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ діють між початком і кінцем кожної фази. Їх напрямок прийнято позначати у відповідності з напрямком фазних струмів (від початку фази до її кінця – до нейтральної точки 0). Лінійні напруги $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ діють між лінійними дротами, а їх напрямок позначають за часовою стрілкою.

Згідно з другим законом Кірхгофа для кожного з двох контурів, утворених одним лінійним і двома фазними напругами, маємо:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (9.2.3)$$

Дані співвідношення у вигляді векторної діаграми представлені на рис. 9.2.3, а. На цій діаграмі дана несиметрична система фазних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ і показано, як на її основі побудувати систему лінійних напруг $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$.

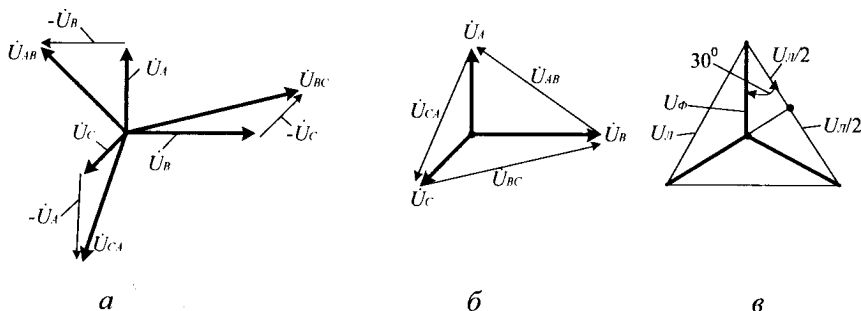


Рис. 9.2.3

Для побудови, наприклад, вектора лінійної напруги \dot{U}_{AB} треба скласти відповідно до формулами 9.2.3 вектор фазної напруги \dot{U}_A з вектором \dot{U}_B , узятим зі зворотним знаком: $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A + (-\dot{U}_B)$. Якщо отриманий таким чином вектор \dot{U}_{AB} перенести паралельно самому собі так, щоб його кінець збігся з кінцем вектора \dot{U}_A , то його початок співпаде з кінцем вектора \dot{U}_B , рис. 9.2.3, б. Аналогічним чином слід вчинити і при побудові векторів \dot{U}_{BC} і \dot{U}_{CA} : $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B + (-\dot{U}_C)$; $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C + (-\dot{U}_A)$, як це показано на векторній діаграмі, рис. 9.2.3, а. Перенісши ці вектори паралельно самим собі аналогічно попередньому, отримаємо, що вектор лінійної напруги \dot{U}_{BC} розташується між кінцями векторів фазних напруг \dot{U}_B і \dot{U}_C , а вектор лінійної напруги \dot{U}_{CA} – між кінцями векторів фазних

напруг \dot{U}_C і \dot{U}_A . Такий варіант зображення векторів фазних і лінійних напруг показаний на рис. 9.2.3, б. **Зауважимо**, що обидві векторні діаграми ідентичні і широко використовуються у навчальній літературі для наочної демонстрації співвідношень між фазними і лінійними напругами.

У окремому випадку, якщо система векторів фазних напруг симетрична, то система векторів лінійних напруг також симетрична і утворює рівносторонній трикутник, рис. 9.2.3, в, з геометрії якого випливає, що діючі значення (довжини векторів) лінійних напруг у $\sqrt{3}$ більші діючих значень фазних напруг. Справді:

$$U_{л/2} = U_{\phi} \cos 30^{\circ} = U_{\phi} \sqrt{3}/2. \text{ Звідси}$$

$$U_{л} = \sqrt{3} \cdot U_{\phi}. \quad (9.2.2)$$

6. При з'єднанні приймачів зіркою сума усіх трьох комплексних лінійних напруг дорівнює нулю $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$. Це положення випливає з другого закону Кірхгофа і наочно ілюструється векторною діаграмою, рис. 9.2.3, б.

9.3. Трифазні ланцюги, з'єднані трикутником

При з'єднанні трифазного ланцюга трикутником, рис. 9.3.1, кінець обмотки фази A генератора з'єднується з початком обмотки B , кінець обмотки B з початком обмотки C , кінець обмотки C з початком обмотки A , утворюючи замкнутий контур. При цьому, у справного генератора на холостому ході у замкнутому його контурі немає струму, так як відповідно до формули 9.1.4 сума фазних E_{PC} у цьому контурі дорівнює нулю.

При з'єднанні ланцюга трикутником фактично об'єднується прямий провід фази A зі зворотним проводом фази C , прямий провід фази B зі зворотним проводом фази A , прямий провід фази C зі зворотним проводом фази B . З початку фаз A , B і C генератора

відходять три проводи до приймачів енергії. Вони називаються *лінійними*. Напрямки дії лінійних струмів \dot{I}_A, \dot{I}_B і \dot{I}_C прийнято на рис. 9.3.1 таке ж, як і при з'єднанні зіркою – від генератора до приймача.

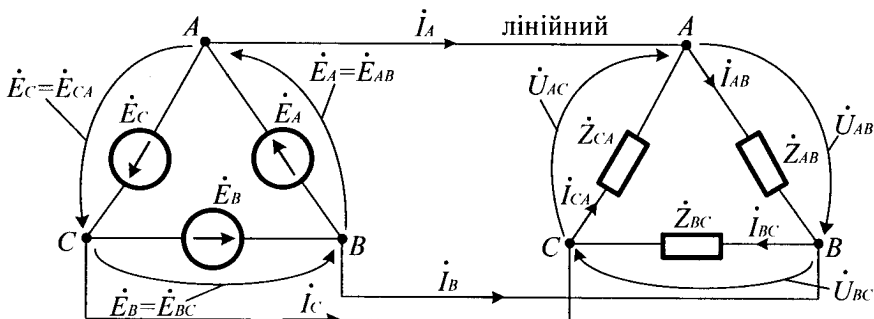


Рис. 9.3.1

Зауважимо, що при з'єднанні трикутником фазні E_{PC} генератора і фазні опори приймачів виявляються включеними між початками фаз A і B, B і C, C і A . Тому фазні E_{PC} і фазні опори зручно тут позначати подвійними індексами: $\dot{E}_A = \dot{E}_{AB}; \dot{E}_B = \dot{E}_{BC}; \dot{E}_C = \dot{E}_{CA}; \dot{Z}_A = \dot{Z}_{AB}; \dot{Z}_B = \dot{Z}_{BC}; \dot{Z}_C = \dot{Z}_{CA}$. Це ж відноситься до фазних струмів і фазних напруг, напрямки дії яких позначають за годинниковою стрілкою.

Особливості трифазного ланцюга, з'єданого трикутником

1. Напряга між лінійними проводами одночасно є і фазною напругою: $\dot{U}_л = \dot{U}_\phi$. При цьому сума комплексних лінійних напруг усіх трьох фаз (відповідно до другого закону Кірхгофа) дорівнює нулю

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0. \tag{9.3.1}$$

2. Сума комплексних струмів усіх трьох лінійних проводів дорівнює нулю $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Це положення легко довести за

допомогою першого закону Кірхгофа, якщо попередньо перетворити трикутник опорів на еквівалентну зірку.

3. При з'єднанні трифазного ланцюга трикутником розрізняють фазні $\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ і лінійні $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ струми. Застосовуючи перший закон Кірхгофа до вузлів A, B і C трифазного приймача, отримаємо такі співвідношення між цими струмами:

$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$. Ці співвідношення у вигляді векторної діаграми приведені на рис. 9.3.2, *а*, де представлена

несиметрична система фазних струмів $\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}$ і \dot{I}_{CA} і показано, що вектори лінійних струмів розташовані між кінцями векторів фазних струмів. Графічні побудови тут подібні до побудов для фазних і лінійних напруг на рис. 9.2.3, *а* і 9.2.3, *б*. Для вектора \dot{I}_A , наприклад,

маємо, що $\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} + (-\dot{I}_{CA})$. Якщо цей вектор перенести паралельно самому собі так, щоб його кінець збігся з кінцем вектора \dot{I}_{AB} , то його початок співпаде з кінцем вектора \dot{I}_{CA} . Аналогічно відбувається і з векторами \dot{I}_B і \dot{I}_C .

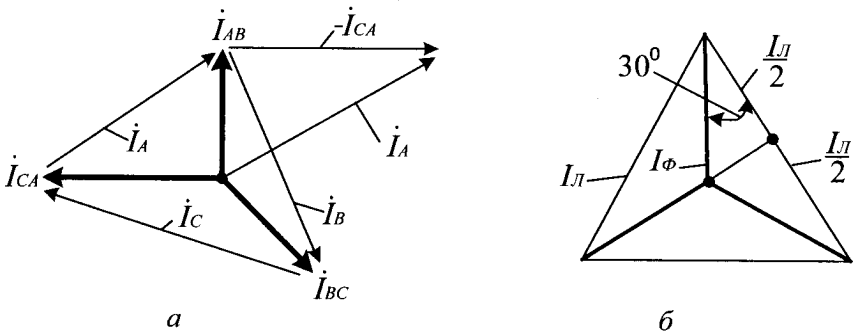


Рис. 9.3.2

У окремому випадку, при симетрії системи векторів фазних струмів рис. 9.3.2, б, система векторів лінійних струмів виходить також симетричною і утворює рівносторонній трикутник, з якого випливає, що діючі значення (довжини векторів) лінійних струмів у

3 більше діючих значень фазних струмів

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi. \quad (9.3.2)$$

4. З'єднання трикутником не застосовується для передачі електромагнітної енергії на великі відстані з огляду на те, що струми у лінійних проводах більші ніж струми у фазах приймачів (у $\sqrt{3}$ раз при симетричному режимі роботи) і це з'єднання менш економічно у порівнянні із з'єднанням зіркою.

9.4. Розрахунок трифазних ланцюгів

Трифазні ланцюги можуть працювати у двох основних режимах – симетричному і несиметричному. Симетричний режим роботи трифазного ланцюга має місце при таких умовах: генератор виробляє симетричну систему *EPC*, рис. 9.1.1, б і, крім того, комплексні опори усіх трьох фаз приймача однакові (симетричний приймач). Приклад такого режиму роботи розглянуто вище, у §9.2 п.3. Очевидно, що при симетричному режимі достатньо провести розрахунок тільки однієї фази трифазного ланцюга (наприклад, фази *A*). Струми інших фаз матимуть із фазою *A* однакові амплітуди (а також і діючі значення) і зрушені по фазі щодо своїх фазних напруг на один і той же кут φ . При цьому один щодо одного струми усіх трьох фаз будуть зрушені по фазі на $\pm 120^\circ$, як це показано на рис. 9.2.1, б.

Несиметричний режим роботи трифазного ланцюга має місце у тих випадках, коли хоча б одна з двох умов симетричного режиму відсутня. При цьому необхідно проводити розрахунки струмів і напруг усіх трьох фаз, використовуючи відомі методи розрахунку ланцюгів синусоїдального струму.

Приклад 9.4.1. Трифазний ланцюг, рис. 9.2.1, а, складається з генератора, який виробляє симетричну *EPC* з діючим значенням $E = 220\text{В}$ і симетричного приймача, з'єданого зіркою, опір кожної

фази якого становить $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = \dot{Z}_\Phi = R = 22\text{Ом}$. Виконайте повний розрахунок ланцюга, що працює у симетричному режимі і визначте струми і напруги усіх трьох фаз приймача, напругу між нейтральними вузлами генератора (0) і приймача (0'), струм у нейтральному дроті, а також побудуйте векторну діаграму ланцюга на комплексній площині.

Згідно з умовою прикладу, алгоритм його розв'язання має такі кроки.

1. Проставити напрями дії EPC , струмів і напруг у ланцюзі.
2. Визначити комплексні фазні EPC генератора.
3. Визначити комплексні лінійні напруги приймача, використовуючи другий закон Кірхгофа.
4. Визначити комплексні фазні напруги приймача, використовуючи другий закон Кірхгофа.
5. Визначити комплексну напругу між нейтральними вузлами приймача й генератора.
6. Визначити комплексні фазні (вони ж лінійні) струми приймача, використовуючи закон Ома.
7. Побудувати векторну діаграму струмів і напруг досліджуваного ланцюга.

Розв'язання. Викорстовуючи крок 1 алгоритму, проставляємо у ланцюзі напрями дії EPC , струмів і напруг відповідно до рис. 9.2.1, а. На кроці 2 алгоритму визначаємо комплексні фазні EPC генератора. Для цього поєднуємо EPC фази A з віссю дійсних чисел, рис. 9.1.1, а, і отримаємо:

$$\dot{E}_A = 220B; \quad \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190)B;$$

$$\dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190)B.$$

Користуючись кроком 3 алгоритму, визначаємо комплексні лінійні напруги приймача. Для цього скористаємося другим законом Кірхгофа для контурів ланцюга, утворених фазними EPC генератора і лінійними напругами трифазного приймача:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{E}_A - \dot{E}_B = [220 - (-110 - j190)] = (330 + j190) = \\ &= \sqrt{330^2 + 190^2} \cdot e^{j \arctg \frac{190}{330}} = 380e^{j30^\circ} B; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = [(-110 - j190) - (-110 + j190)] = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = [(-110 + j190) - 220] = -330 + j190 = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}.$$

Діючі значення усіх трьох лінійних напруг однакові й становлять $\dot{U}_L = 380 \text{ В}$. Правильність проведених обчислень перевіряємо, скориставшись формулою 9.3.1. Пропонуємо читачеві переконатися у цьому самостійно.

На кроці 4 алгоритму визначаємо комплексні фазні напруги приймача. Відповідно з другим законом Кірхгофа безпосередньо зі схеми ланцюга знаходимо, що за наявності нейтрального проводу вони рівні фазним ЕРС генератора: $\dot{U}_A = \dot{E}_A = 220 \text{ В}$;
 $\dot{U}_B = \dot{E}_B = 220 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ В}$; $\dot{U}_C = \dot{E}_C = 220 \cdot e^{+j120^\circ} \text{ В}$.

Діючі значення усіх трьох фазних напруг однакові ($\dot{U}_\phi = 220 \text{ В}$) і у 3 разів менше лінійних напруг ($\dot{U}_L = 380 \text{ В}$), як це і впливає з загальної теорії відповідно § 9.2 і формули 9.2.3.

Користуючись кроком 5 алгоритму, визначаємо комплексну напругу \dot{U}_N між нейтральними вузлами приймача і генератора. Для цього використаємо формулу 7.4.4 методу вузлових напруг, § 7.4, згідно з якою у нашому прикладі це напруга $\dot{U}_N = \dot{J}_{11} / \dot{Y}_{11} = 0$, так як $\dot{Y}_N = \infty$ (нейтральний провід не має кінцевого опору), а $\dot{J}_{11} = \dot{E}_A \dot{Y}_A + \dot{E}_B \dot{Y}_B + \dot{E}_C \dot{Y}_C \neq 0$ і є кінцевим числом.

На кроці 6 алгоритму визначаємо комплексні фазні (вони ж лінійні) струми приймача, використовуючи закон Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_A} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\dot{Z}_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{22} = 10e^{-j120^\circ} = (-5 - j8,7)A;$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{Z}_C} = \frac{220e^{+j120^\circ}}{22} = 10e^{+j120^\circ} = 10(-0,5 + j8,7) = (-5 + j8,7)A.$$

Значення струмів в усіх трьох фазах ланцюга однакові і дорівнюють $I_\phi = 10A$. Вектори цих струмів утворюють симетричну систему, і їх сума, що визначає струм у нейтральному дроті \dot{I}_N відповідно до формули 9.2.1, дорівнює нулю. Отже, при симетричному режимі роботи нейтральний провід для нормальної роботи ланцюга непотрібний.

Відповідно до кроку 7 алгоритму, будемо векторну діаграму струмів і напруг досліджуваного ланцюга, яка представлена на рис. 9.4.1. у двох варіантах.

У першому варіанті, рис. 9.4.1, а, усі вектори виходять із початку координат комплексної площини. У другому варіанті, рис. 9.4.1, б, вектори лінійних напруг перенесені паралельно самим собі так, щоб вони розташувалися між кінцями відповідних векторів фазних напруг і утворили рівносторонній трикутник.

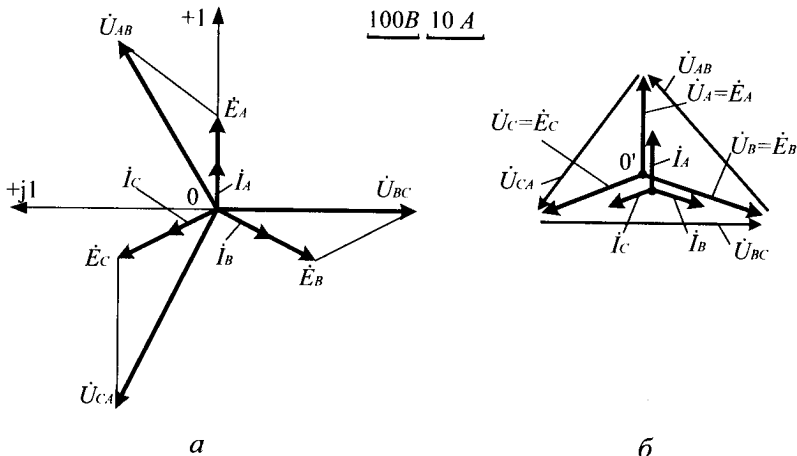


Рис. 9.4.1

З цієї діаграми видно, що при симетричному режимі роботи достатньо розрахувати струми й напруги тільки однієї з фаз ланцюга, наприклад, фази *A*. Струми й напруги інших двох фаз будуть такими ж за діючим значеннями, але зрушені щодо фази *A* по фазі на кут $\pm 120^\circ$. Крім того з рівностороннього трикутника випливає, що $U_{л} = \sqrt{3} \cdot U_{\phi}$.

Приклад 9.4.2. Три однакові навантажувальні опори $\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_{CA} = \dot{Z}_{\phi} = (30 + j40)\text{Ом}$ з'єднані трикутником і підключені до трифазного генератора, фазні обмотки якого з'єднані у зірку, рис. 9.4.2.

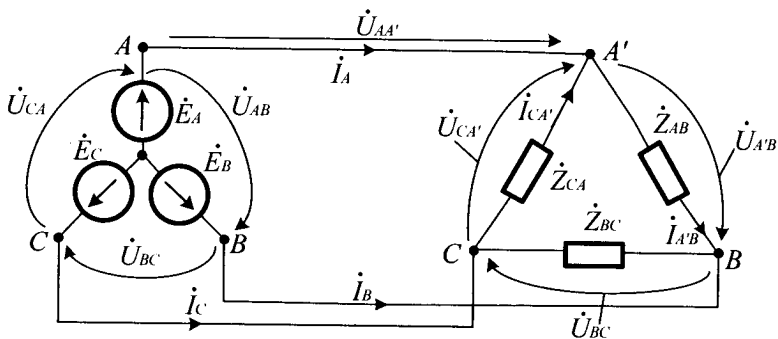


Рис. 9.4.2

Генератор виробляє симетричну систему фазних *EPC* з діючим значенням $E_{\phi} = 380\text{В}$. Розрахуйте струм у лінійному дроті *AA'* і напругу на навантажувальному опорі, а також побудуйте векторну діаграму струмів і напруг трифазного приймача.

Згідно з умовами прикладу, алгоритм його розв'язання має такі кроки.

1. Проставити напрями дії *EPC*, струмів і напруг у ланцюзі.
2. Визначити фазні напруги приймача.
3. Визначити діючі значення струму в одній із фаз приймача.
4. Знайти кут зрушення фаз ϕ між напругою і струмом у фазі, використовуючи кроки 2 і 3 алгоритму.
5. Знайти діючі значення напруг і струмів у фазах приймача.
6. Знайти діючі значення лінійних струмів.

7. Побудувати векторну діаграму струмів і напруг досліджуваного ланцюга.

Розв'язання. Цей трифазний ланцюг працює у симетричному режимі, тому для розв'язання прикладу досить розрахувати тільки одну його фазу (наприклад, фазу $A'B$ приймача). Для цього, використовуючи крок 1 алгоритму, приймаємо напрями напруг і струмів у ланцюзі, відповідно рис. 9.2.1, a і рис. 9.3.1. На кроці 2 алгоритму визначаємо фазні значення напруг приймача. Діючі значення лінійних ЕРС трифазного генератора у 3 більше діючих значень його фазних ЕРС і складають $E_{л} = \sqrt{3} \cdot U_{\phi} = 600V$. Дроти лінії електропередачі у нашому прикладі не мають опору, тому діючі значення фазних напруг приймача, з'єданого трикутником дорівнюють $U_{\phi} = E_{л} = 600V$. Таким чином, напруга на фазах $A'B$, BC , CA' становить 660 В. На кроці 3 алгоритму визначаємо діюче значення струму у фазі $A'B$ приймача $I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{z_{\phi}} = \frac{660}{50} = 13A$, де

$$Z_{\phi} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом.}$$

Користуючись кроком 4 алгоритму, знаходимо кут зрушення фаз ϕ між напругою і струмом у фазі $A'B$, який буде дорівнювати $\phi = \arctg X/R = \arctg 40/30 = 53^{\circ}$. На цей кут (ланцюг має індуктивний характер) струм I_{AB} у фазі $A'B$ відстає від прикладеної напруги U_{AB} .

На кроці 5 алгоритму знаходимо діючі значення напруг і струмів у фазах BC і CA' приймача, які є такими, як і у фазі $A'B$, але їх вектори зрушені щодо векторів фази $A'B$ на кут 120° . У фазі BC на 120° за годинниковою стрілкою, а у фазі CA' на 120° проти годинникової стрілки.

Використовуючи крок 6 алгоритму, знаходимо діючі значення лінійних струмів. У нашому випадку трифазний ланцюг працює у симетричному режимі і тому діючі значення лінійних струмів у 3 разів більше діючих значень фазних струмів. Тоді

$I_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot I_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 13 = 25 \text{ A}$. Отже, струм у будь-якому лінійному проводі дорівнює 25 A .

На кроці 7 алгоритму необхідно побудувати векторну діаграму струмів і напруг трифазного приймача, яку пропонуємо читачеві виконати самостійно за зразком, як показано на рис. 9.2.1, б.

Приклад 9.4.3. Два симетричних трифазних приймача, з'єднані трикутником і включені у трифазний ланцюг із діючим значенням лінійної напруги $U_{\text{л}} = 360 \text{ В}$, рис. 9.4.3, а.

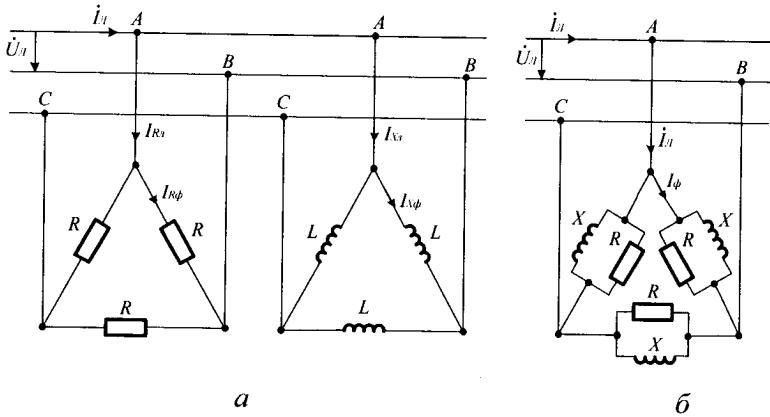


Рис. 9.4.3

Опори фаз приймачів $R=40 \text{ Ом}$, $X=30 \text{ Ом}$. Необхідно визначити струм в одному з лінійних проводів ланцюга.

Згідно умови прикладу, алгоритм його розв'язання має наступні кроки.

1. Замінити приймачі, які включені між собою паралельно одним еквівалентним приймачем.
2. Визначити провідність кожної фази еквівалентного приймача, отриманого на кроці 1 алгоритму.
3. Розрахувати струм у кожній фазі еквівалентного приймача, отриманого на кроці 2 алгоритму.
4. Знайти струм у лінійному проводі симетричного трифазного приймача.

Розв'язання. Кожна з фаз обох приймачів AB , BC і CA знаходиться під однаковою лінійною напругою. Тому можна уважати, що ці

приймачі включені між собою паралельно і, використовуючи крок 1 алгоритму, заміняємо їх одним еквівалентним приймачем, як це показано на рис. 9.4.3, б. Дійсне значення напруги на кожній фазі приймача дорівнює лінійній нарузі ланцюга $U_\phi = U_\Pi = 360 \text{ В}$.

На кроці 2 алгоритму розраховуємо провідність кожної фази еквівалентного приймача

$$\begin{aligned}
 Y &= \sqrt{G^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{(0,025)^2 + (0,033)^2} = \sqrt{0,000625 + 0,001109} = \\
 &= \sqrt{0,001734} = 0,0416 \text{ См.}
 \end{aligned}$$

Користуючись кроком 3 алгоритму, розраховуємо струм у кожній фазі еквівалентного приймача $I_\phi = U \cdot Y = 360 \cdot 0,0416 = 15 \text{ А}$.

На кроці 4 алгоритму знаходимо значення струму у лінійному проводі симетричного трифазного ланцюга, який буде дорівнювати $I_\Pi = \sqrt{3} \cdot I_\phi = \sqrt{3} \cdot 15 = 26 \text{ А}$.

Приклад 9.4.4. Два симетричних трифазних реактивних приймача включені у трифазний ланцюг із діючим значенням лінійної напруги $U_\Pi = 360 \text{ В}$, рис. 9.4.4, а.

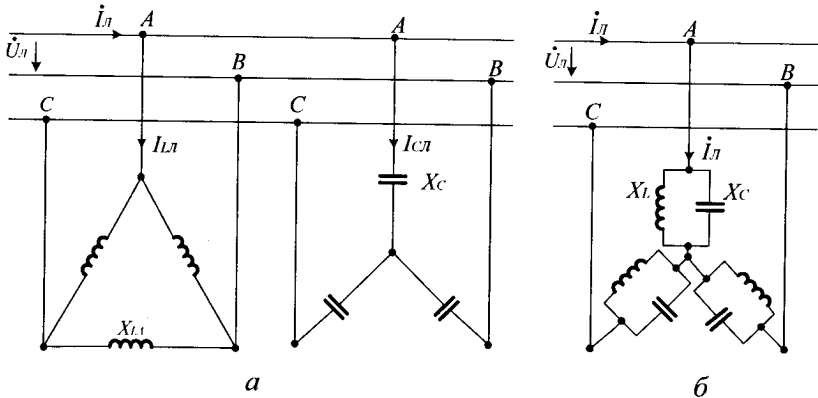


Рис. 9.4.4

Індуктивний приймач з'єднаний трикутником, а ємнісний приймач – зіркою. Опори приймачів відомі: $X_{L\Delta} = 228 \text{ Ом}$, $X_C = 76 \text{ Ом}$. Визначте струм в одному із лінійних проводів ланцюга. Згідно з умовою прикладу, алгоритм його розв'язання має такі кроки.

1. Перетворити індуктивний трикутник приймача на еквівалентну зірку.
2. Об'єднати індуктивну зірку трифазного приймача, отриману на кроці 1 алгоритму, на еквівалентний трифазний приймач.
3. Знайти загальну провідність кожної фази еквівалентного трифазного приймача, отриманого на кроці 2 алгоритму.
4. Знайти струм у лінійному проводі симетричного трифазного приймача.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, перетворимо (для зручності обчислень) індуктивний трикутник на еквівалентну зірку, скориставшись §6.3, $X_{L*} = \frac{X_{L\Delta}}{3} = \frac{228}{3} = 76 \text{ Ом}$.

Оскільки ми отримали два симетричних трифазних приймача, з'єднані зіркою, які включені між собою паралельно, то, користуючись кроком 2 алгоритму, об'єднуємо їх в один еквівалентний трифазний приймач, схема якого приведена на рис. 9.4.4, б. На кроці 3 алгоритму знаходимо загальну провідність кожної фази такого приймача, яка буде дорівнювати

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{X_{L*}}\right)^2 - \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{76}\right)^2 - \left(\frac{1}{76}\right)^2} = 0.$$

Використовуючи крок 4 алгоритму, обчислюємо струм у лінійному проводі. Оскільки в еквівалентних зірках ланцюга має місце резонанс струмів, то струм у лінійному проводі, відповідно до формули 4.12.2, дорівнює нулю.

Приклад 9.4.5. Три однофазних приймача з опорами: $R=55 \text{ Ом}$; $X_L = 44 \text{ Ом}$ і $X_C = 36,6 \text{ Ом}$ об'єднані у зірку й підключені до симетричного трифазного генератора, з'єданого зіркою з діючим значенням фазної ЕРС $E_\phi = 220 \text{ В}$, рис. 9.4.5. Знайдіть струм у нейтральному проводі трифазного ланцюга.

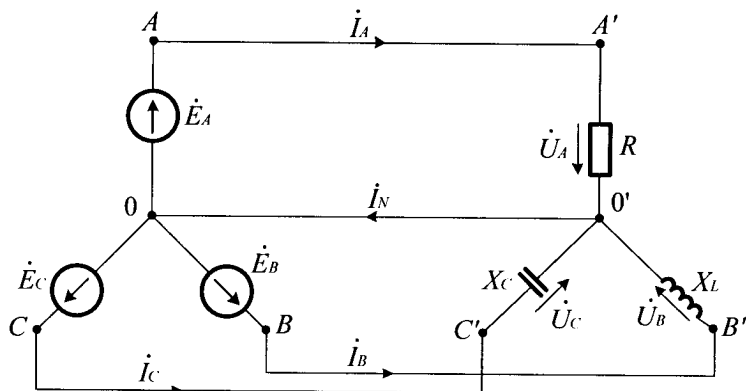


Рис. 9.4.5

Згідно з умовами прикладу, алгоритм його розв'язання має такі кроки.

1. Обрати у схемі напрямки струмів і напруг.
2. Поєднати EPC фази A з віссю дійсних чисел комплексної площини і записати систему фазних рівнянь EPC генератора.
3. Записати задані умовами опори фаз приймача у комплексній формі.
4. Обчислити струми в усіх трьох фазах приймача, використовуючи закон Ома.
5. Визначити комплексний струм і його модуль у нейтральному проводі.

Розв'язання. Представлений на рис. 9.4.5. трифазний ланцюг працює у несиметричному режимі і вимагає розрахунку усіх трьох фаз. Для цього, користуючись кроком 1 алгоритму, вибираємо напрями струмів і напруг відповідно до рис. 9.2.1, *a*. На кроці 2 алгоритму поєднуємо EPC фази A з віссю дійсних чисел комплексної площини і записуємо систему фазних рівнянь EPC генератора за аналогією з формулами 9.1.2:

$$\dot{E}_A = 220B; \quad \dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = (-110 - j190)B;$$

$$\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190)B.$$

Використовуючи крок 3 алгоритму, записуємо опори фаз приймача у комплексній формі: $\dot{Z}_A = R = 55 \text{ Ом}$; $\dot{Z}_B = 44 \cdot e^{j90^\circ} = j44 \text{ Ом}$;

$Z_C = 36,6 \cdot e^{-j90^\circ} = -j36,6$ Ом. Оскільки у даному ланцюзі лінійні дроти і нейтральний провід не мають опорів, то, відповідно до другого закону Кірхгофа, маємо: $\dot{U}_A = \dot{E}_A$; $\dot{U}_B = \dot{E}_B$; $\dot{U}_C = \dot{E}_C$.

На кроці 4 алгоритму визначаємо струми в усіх трьох фазах приймача, використовуючи закон Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{Z}_A} = \frac{220}{55} = 4A;$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\dot{Z}_B} = \frac{220 \cdot e^{j240^\circ}}{44 \cdot e^{j90^\circ}} = 6 \cdot e^{+j150^\circ} = (-4,3 + j2,5)A;$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{Z}_C} = \frac{220 \cdot e^{j120^\circ}}{36,6 \cdot e^{-j90^\circ}} = 6 \cdot e^{+j210^\circ} = (-5,2 - j3)A.$$

Використовуючи крок 5 алгоритму, визначаємо комплексний струм у нейтральному дроті, скориставшись формулою 9.2.1

$$\begin{aligned} \dot{I}_N &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 4 + (-4,3 + j2,5) + (-5,2 - j3) = \\ &= (-5,5 - j0,5) = 5,52 \cdot e^{j\left(180^\circ + \arctg \frac{0,5}{5,5}\right)} = 5,52 \cdot e^{+j185^\circ} A. \end{aligned}$$

Зауважимо, що для переведення комплексного струму з алгебраїчної у показникову форму використані рис. 5.2.3 і додана до нього формула для третього квадранта комплексної площини. Виходячи із цього, модуль струму у нейтральному проводі дорівнює $I_N = 5,52 A$.

9.5. Потужність трифазного ланцюга

Комплексна потужність трифазного ланцюга дорівнює сумі комплексних потужностей усіх трьох його фаз

$$\tilde{S}_{3\phi} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C, \tag{9.5.1}$$

де \tilde{S}_A , \tilde{S}_B і \tilde{S}_C відповідають формулі 5.4.1:

$$\tilde{S}_A = \dot{U}_A \dot{I}_A^* = S_A e^{j\psi_A} = P_A + jQ_A;$$

$$\tilde{S}_B = \dot{U}_B \dot{I}_B^* = S_B e^{j\psi_B} = P_B + jQ_B;$$

$$\tilde{S}_C = \dot{U}_C \dot{I}_C^* = S_C e^{j\psi_C} = P_C + jQ_C.$$

Тут \dot{I}_A^* , \dot{I}_B^* і \dot{I}_C^* – поєднані комплексні струми відповідним комплексним струмам фаз \dot{I}_A , \dot{I}_B і \dot{I}_C . З урахуванням формули 9.5.1, для комплексної потужності трифазного ланцюга отримаємо

$$\tilde{S}_{3\phi} = \sum P_\phi + j \sum Q_\phi,$$

(9.5.2)

де

$$\sum P_\phi = P_A + P_B + P_C \text{ і } \sum Q_\phi = Q_A + Q_B + Q_C.$$

У окремому випадку, при симетричному режимі роботи трифазного ланцюга, маємо: $P_{3\phi} = 3P_\phi$; $Q_{3\phi} = 3Q_\phi$;
 $S_\phi = U_\phi I_\phi = \sqrt{P_\phi^2 + Q_\phi^2}$. З урахуванням формул 9.2.2 і 9.3.2 при з'єднанні приймачів, як зіркою, так і трикутником отримаємо:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi; \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi;$$

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} = \sqrt{(P_{3\phi})^2 + (Q_{3\phi})^2}.$$

(9.5.3)

Приклад 9.5.1. В умовах прикладу 9.4.3 визначте активну, реактивну і повну потужності еквівалентного трифазного приймача, який має такі вихідні дані: $U_{\text{Л}} = 360 \text{ В}$; $I_{\text{Л}} = 26 \text{ А}$; $G = 0,025 \text{ См}$; $b = 0,033 \text{ См}$.

Згідно з умовами прикладу, алгоритм його розв'язання має наступні кроки.

1. Знайти кут зсуву між напругою і струмом фази.
2. Розрахувати активну, реактивну й повну потужність приймача.

3. Зробити перевірку розрахунків.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, знаходимо кут зсуву між напругою і струмом фази $\varphi = \arctg b/G = \arctg 0,033/0,025 = 53^{\circ}$. На кроці 2 алгоритму, використовуючи формулу 9.5.3 розраховуємо активну, реактивну й повну потужність приймача, які відповідно будуть доіснювати:

$$P_{3\varphi} = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} \cos\varphi = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 \cdot \cos 53^{\circ} = 9716 \text{ Вт} = 9,716 \text{ кВт};$$

$$Q_{3\varphi} = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} \sin\varphi = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 \cdot \sin 53^{\circ} = 12954 \text{ Вар} = 12,954 \text{ кВар};$$

$$S_{3\varphi} = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} = 1,73 \cdot 360 \cdot 26 = 16193 \text{ ВА} = 16,193 \text{ кВА}.$$

Користуючись кроком 3 алгоритму, робимо перевірку розрахунків за формулою $S_{3\varphi} = \sqrt{P_{3\varphi}^2 + Q_{3\varphi}^2}$, яка показує, що приклад розв'язаний вірно. Надаємо читачеві переконатися у цьому самостійно.



Контрольні запитання

1. Що називають трифазним ланцюгом синусоїдального струму?
2. Які бувають трифазні ланцюги синусоїдального струму?
3. Що є джерелом енергії у трифазному ланцюзі синусоїдального струму?
4. З чого складається генератор трифазного ланцюга синусоїдального струму?
5. Як розташовуються вектори *ЕРС* трифазного генератора уздовж вісі дійсних чисел на комплексній площині?
6. У якому трифазному ланцюзі використовують нейтральний провід і для яких цілей?
7. Які є особливості трифазного ланцюга з'єданого зіркою?
8. Які є особливості трифазного ланцюга з'єданого трикутником?
9. У чому полягає різниця між симетричним і несиметричним трифазним ланцюгом?
10. Що розуміють під потужністю трифазного ланцюга?
11. Що розуміють під комплексною потужністю трифазного ланцюга?



Задачі для самостійного розв'язування

1. В умовах прикладу 9.4.1 визначте діюче значення струмів і напруг приймача при обриві фази A ($\dot{Z} = \infty$) і наявності нейтрального дроту.

Відповідь: $I_A = 0 A$; $I_B = 10 A$; $I_C = 10 A$; $I_N = 10 A$.

2. В умовах прикладу 9.4.1 визначте діюче значення струмів і напруг приймача при обриві фази B ($\dot{Z} = \infty$) і відсутності нейтрального дроту. Визначте також напругу між нейтральними вузлами приймача і генератора.

Відповідь: $I_A = 8,7 A$; $I_B = 0 A$; $I_C = 8,7 A$; $U_A = 190 B$;

$U_B = 380 B$; $U_C = 190 B$; $U_N = 110 B$.

$I_A = 8,7 A$; $I_B = 0 A$; $I_C = 8,7 A$; $U_A = 190 B$;

$U_B = 380 B$; $U_C = 190 B$; $U_N = 110 B$.

3. В умовах прикладу 9.4.1 визначте діюче значення струмів приймача при закороченні фази B і відсутності нейтрального дроту. Визначте також напругу між нейтральними вузлами приймача і генератора.

Відповідь: $I_A = 17,3 A$; $I_B = 30 A$; $I_C = 17,3 A$; $U_N = 220 B$.

4. В умовах прикладу 9.4.1 визначте активну, реактивну і повну потужність трифазного приймача.

Відповідь: $P = S = 6600 \text{ Вт}$; $Q = 0 \text{ Вар}$.

5. В умовах прикладу 9.4.2 визначте активну, реактивну і повну потужність трифазного приймача.

Відповідь: $P = 15,49 \text{ кВт}$; $Q = 20,56 \text{ Вар}$; $S = 25,74 \text{ кВА}$.



Коментарі

Інформація про трифазні ланцюги, з'єднані зіркою і трикутником відповідає [1, 9], а інформація про розрахунок і потужність трифазних ланцюгів узятя із [6, 11, 13].

Розділ 10

Перехідні процеси

10.1.Класичний метод

Основні поняття й визначення

У попередніх розділах були розглянуті усталені (стаціонарні) процеси, які характеризуються тим, що струми і напруги або незмінні у часі (ланцюги постійного струму), або є періодичними функціями часу (ланцюги синусоїдального струму).

Реальні електричні процеси завжди відрізняються від стаціонарних, оскільки будь-яка неперіодична зміна типу дії, параметрів ланцюга або структури схеми викликає порушення стаціонарності режиму.

Означення 10.1.1. Перехідним називають процес, який виникає в електричних ланцюгах під час переходу від одного стаціонарного режиму до іншого. Перехідні процеси виникають за певних умов, наприклад, комутації.

Означення 10.1.2. Комутацією називають зміну параметрів або схеми ланцюга, підключення або відключення джерела електричної енергії, зміну напруги на вході ланцюга.

Якщо ланцюг містить тільки активні опори, то комутація миттєво «викликає» відповідні зміни струмів і напруг у гілках схеми. Але за наявності реактивних елементів у схемі комутація супроводжується появою і перехідних процесів. Теоретично тривалість перехідного процесу є нескінченною, а практично залежить від параметрів ланцюга й вимірюється для низькочастотних ланцюгів мілісекундами або мікросекундами.

Перехідні процеси у деяких ланцюгах пристроїв автоматики та систем управління є робочими режимами, але іноді вони супроводжуються небажаними явищами: на певних ділянках ланцюгів виникають перенапруги і так звані надструми. Тому дослідження й розрахунок перехідних процесів є важливою інженерною задачею.

Метою вивчення перехідних процесів в електричних ланцюгах уважатимемо встановлення характеру зміни у часі струмів і напруг на окремих елементах ланцюга після миттєвої комутації вхідної напруги (струму) аж до їх сталих значень.

Нагадаємо, що електрична енергія $W_E = \frac{C \cdot U_C^2}{2}$, накопичена конденсатором C і електромагнітна енергія $W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}$, накопичена котушкою індуктивності L , не можуть змінюватися миттєво. На цьому постулаті й базуються два основних закони комутації в електричних ланцюгах.

Означення 10.1.3. Першим законом комутації називають закон, згідно з яким струм в індуктивності у початковий момент часу після комутації залишається таким, яким він був безпосередньо до комутації, а потім плавно змінюється, тобто $i_L(0-) = i_L(0+)$, де $i_L(0-), i_L(0+)$ – струм в індуктивності відповідно до комутації і у початковий момент після неї.

Означення 10.1.4. Другим законом комутації називають закон, згідно з яким напруга на конденсаторі у початковий момент часу після комутації залишається такою ж, якою вона була безпосередньо до комутації, а потім плавно змінюється, тобто $U_C(0-) = U_C(0+)$, де $U_C(0-), U_C(0+)$ – напруга на конденсаторі безпосередньо до комутації і у початковий момент після неї.

Тобто, напруга $u(t)$ на обкладинках конденсатора C і струм $i(t)$ в індуктивності L не можуть змінюватися стрибкоподібно, а лише протягом певного інтервалу часу. Неможливість миттєвих змін пояснюється кінцевою швидкістю розповсюдження електромагнітної

енергії (енергії магнітного поля котушки $W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}$ та енергії

електричного поля конденсатора $W_E = \frac{C \cdot U_C^2}{2}$).

Математичні основи методу

Розглянемо основні принципи класичного методу дослідження електричних ланцюгів у перехідному режимі на прикладі

напруги послідовно з'єднаних опору R , індуктивності L і ємності C , рис. 10.1.1.

Користуючись другим законом Кірхгофа, складемо лінійне диференціальне рівняння цього ланцюга для будь-якого

момента часу перехідного режиму, наприклад, після замикання ключа

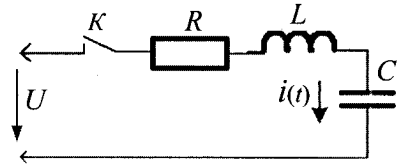


Рис. 10.1.1

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt = u(t). \quad (10.1.1)$$

Якщо це рівняння продиференціювати у часі, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку, у якого у якості коефіцієнтів виступають параметри ланцюга або їхні комбінації

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (10.1.2)$$

Повне розв'язання лінійного диференційного рівняння з постійними коефіцієнтами знаходять у вигляді суми часткового рішення неоднорідного рівняння і загального розв'язання відповідного однорідного рівня. Оскільки, праворуч у рівнянні є напруга (або струм) джерела зовнішньої сили, то часткове його розв'язання отримують з аналізу сталого режиму після комутації. Тому цей режим називають **вимушеним** і відповідно струми або напруги, визначені при цьому режимі, називають вимушеними.

Однорідне диференціальне рівняння отримують з рівняння 10.1.2 шляхом вилучення його правої частини. Фізично це значить, що досліджуваний ланцюг «звільняється» від зовнішньої вимушеної сили. Струми або напруги, визначені при розв'язанні однорідного рівняння, називають **вільними**. Вони є результатом дії внутрішніх джерел ланцюга: ЕРС самоіндукції, які виникають в індуктивності L та конденсаторі C , коли вони не урівноважені зовнішніми силами.

Таким чином, дійсний (перехідний) струм у відповідності з принципом суперпозиції дорівнює сумі вимушеного й вільного струмів $i(t) = i_{вм}(t) + i_{вл}(t)$.

Існують різні методи розв'язання однорідного диференційного рівняння

$$\frac{d^2 i_{en}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_{en}(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i_{en}(t) = 0. \quad (10.1.3)$$

Класичний метод полягає у знаходженні розв'язання у вигляді суми експонент

$$i(t)_{en} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (10.1.4)$$

У рівнянні 10.1.4 кількість доданків визначає порядок диференційного рівняння. Користуючись 10.1.4 отримують характеристичне рівняння, з якого знаходять корені p_1, p_2 , а сталі інтегрування A_1, A_2 визначають із початкових умов.

Означення 10.1.5. Початковими умовами називають значення струму $i_L(-0)$ в індуктивності L та напруги $u_C(-0)$ на ємності C до моменту комутації. Розрізняють нульові та ненульові початкові умови.

Означення 10.1.6. Нульовими початковими умовами називають умови, за яких первинний запас енергії в усіх реактивних елементах ланцюга дорівнює нулю.

За нульових початкових умов, коли $i_L(-0) = 0$, $u_C(-0) = 0$, індуктивність у початковий момент часу після комутації еквівалентна розриву ланцюга, а ємність – короткому замиканню.

Означення 10.1.7. Ненульовими початковими умовами називають умови, при яких хоча б в одному накопичувальному елементі первинний запас енергії є ненульовим.

У випадку ненульових початкових умов, тобто коли $i_L(-0) \neq 0$, $u_C(-0) \neq 0$, індуктивність у перший момент після комутації еквівалентна джерелу струму $i_L(-0)$, а ємність – джерелу ЕРС $u_C(-0)$.

Означення 10.1.8. Початковими значеннями називають значення усіх електричних величин та їх похідних безпосередньо після комутації, тобто у момент часу $t = (+0)$.

Означення 10.1.9. Незалежними початковими значеннями називають значення $i_L(+0)$ і $u_C(+0)$.

Означення 10.1.10. Залежними початковими значеннями називають значення усіх струмів і напруг, крім значень i_L і u_C , а також

їх похідних при $t = 0$. Залежні початкові значення обчислюють за незалежними, використовуючи закони Кірхгофа.

Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом

1. Визначити примусові складові значення струму (напруги).
2. Скласти диференційне рівняння електричної рівноваги ланцюга.
3. Для розв'язання диференційного рівняння кроку 2 алгоритму знаходимо його характеристичне рівняння і визначаємо корені.
4. Записати вираз для вільної складової струму (напруги), залежно від числа та виду коренів рівняння, див. примітку.
5. Розрахувати сталі інтегрування за допомогою початкових умов для функцій та їх похідних. Для цього визначені початкові умови підставити у вираз для вільної складової струму (напруги).
6. Знайти отримане алгебраїчне рівняння з урахуванням знайдених сталих інтегрування, підсумувавши вирази для вільних і вимушених складових струму (напруги).

Примітка. Наприклад, для рівнянь третього ступеня вільна складова записується так: якщо корені p_1, p_2, p_3 є дійсними й різними, тоді $i_e = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}$; якщо корені p_1, p_2, p_3 є дійсними й рівними, тоді $i_e = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) e^{p_1 t}$; якщо корінь p_1 – дійсний, а корені p_2 та p_3 – дійсними й рівними, тоді $i_e = A_1 e^{p_1 t} + (A_2 + A_3 t) e^{p_1 t}$; якщо корінь p_1 – дійсний, а корені p_2 та p_3 – комплексні спряжені ($p_{2,3} = -\delta \pm j\omega_e$), тоді $i_e = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{-\delta t} \sin(\omega_e t + \gamma)$.

Приклад 10.1.1. Знайдіть закон зміни струму при перехідному процесі у RL ланцюзі при його закороченні, рис. 10.1.2, а.

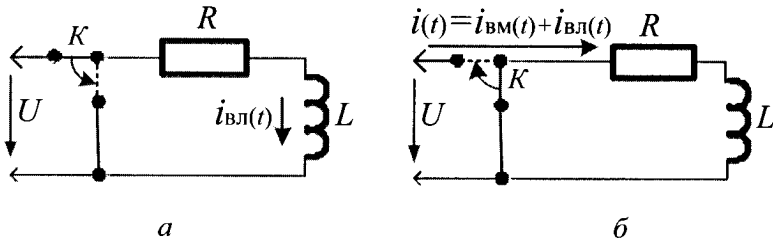


Рис. 10.1.2

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму, визначаємо вимушену складову значення струму $i_{вм}(t)$. Вона дорівнює нулю, оскільки до комутації у ланцюзі протікав струм $i(0-) = U/R$, а після комутації його не буде, так як у короткозамкненому контурі зовнішня напруга $U = 0$. Тобто, струм у перехідному режимі буде дорівнювати струму вільного режиму $i(t) = i_{вм}(t) + i_{вл}(t) = i_{вл}(t)$. Використовуючи крок 2 алгоритму і другий законом Кірхгофа, складемо диференційне рівняння електричної рівноваги короткозамкненого ланцюга

$$L \frac{di_{вл}(t)}{dt} + Ri_{вл}(t) = 0.$$

На кроці 3 алгоритму для розв'язку диференційного рівняння першого порядку знаходимо його характеристичне рівняння $Lp + R = 0$, єдиним корнем якого є $p = -R/L$. Користуючись кроком 4 алгоритму, записуємо вираз для вільної складової струму у вигляді

експоненти, яка має наступний вигляд $i(t) = i_{вл}(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$.

Використовуючи крок 5 алгоритму, визначимо сталу інтегрування A . Згідно з першим законом комутації у момент $t = 0$ у ланцюзі з індуктивністю L струм буде мати те значення, яке мав до комутації $i(0-) = U/R$, тобто, при $t = 0$, $i(0) = i_{вл}(0) = U/R$. Після підстановки

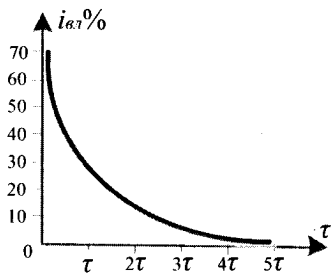
цих значень у розв'язання отримаємо $A = U/R$. На кроці 6 алгоритму отримаємо алгебраїчне рівняння з урахуванням знайдених сталих

інтегрування, яке буде мати вигляд $i(t) = i_{вл}(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$. Із

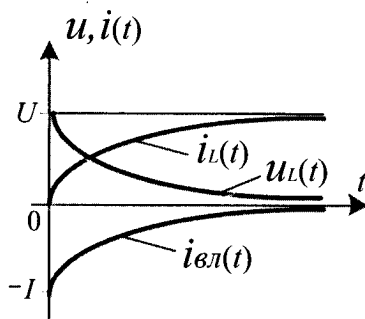
отриманого рівняння слідує, що струм у короткозамкненому RL ланцюзі, починаючи з початкового його значення U/R , зменшується за експоненціальним законом. Теоретично це зменшення відбувається до безмежності, а практично закінчується після декількох часток секунди у залежності від параметрів ланцюга.

Величину R/L позначимо через τ і назвемо сталою часу перехідного процесу $\tau = R/L$. Стала часу залежить від параметрів ланцюга, вільний струм у ланцюзі зменшується тим швидше, чим

менше значення R і більше значення L . Таким чином, змінюючи ці параметри, можливо керувати швидкістю зменшення вільного струму $i_{вл}(t)$ і відповідно, перехідним процесом. На рис. 10.1.3, *a* наведений графік зміни вільного струму $i_{вл}(t)$ у короткозамкненому RL ланцюзі у залежності від часу $i_{вл}(t) = f(t)$, який практично закінчується в інтервалі $t = (4 \dots 5)\tau$.



a



б

Рис. 10.1.3

Приклад 10.1.2. Знайдіть закони зміни струму $i(t)$ і напруги самоіндукції $u_L(t)$ на котушці з індуктивністю L у момент включення RL ланцюга на постійну напругу, рис. 10.1.2, *б*.

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму, визначаємо вимушене значення струму $i_{вм}$ у ланцюзі. Вимушений струм – це струм, який установиться у ланцюзі після закінчення перехідного процесу і буде дорівнювати $i_{вм} = U/R$. Тобто, він буде визначатись тільки опором R . У такому випадку, струм у перехідному режимі буде складатись із значення вимушеного струму і струму вільного режиму $i(t) = i_{вм}(t) + i_{вл}(t)$. Використовуючи крок 2 алгоритму і другий законом Кірхгофа, складемо диференціальне рівняння електричної рівноваги ланцюга при його включенні $R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = U$. Звідси, вільний струм визначається шляхом розв'язання однорідного диференційного рівняння першого порядку $L \frac{di_{вл}(t)}{dt} + Ri_{вл}(t) = 0$. На

кроці 3 алгоритму для розв'язання диференційного рівняння першого порядку знаходимо його характеристичне рівняння $Lp + R = 0$, єдиним корнем якого є $p = -R/L$. Користуючись кроком 4 алгоритму, записуємо вираз для вільної складової струму у вигляді

експоненти, яка має наступний вигляд $i_{вн}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, де $\tau = R/L$.

Тоді загальний струм перехідного процесу буде дорівнювати

$i(t) = i_{вн}(t) + i_{ст}(t) = U/R + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. Використовуючи крок 5 алгоритму, визначимо сталу інтегрування A з початкових умов. До моменту включення ланцюга при $t = 0$, струму у ланцюзі не було, $i(0) = 0$. Таким чином, після підстановки указаних значень будемо мати

$0 = U/R + A \rightarrow A = -U/R$. Звідки $i_{вн}(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. З

урахуванням знайдених сталих інтегрування, на кроці 6 алгоритму отримаємо алгебраїчне рівняння для струму, яке буде мати наступний

вигляд $i(t) = U/R - (U/R) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. На кроці 6 алгоритму

отримаємо також алгебраїчне рівняння для напруги самоіндукції $u_L(t)$, яке буде дорівнювати

$u(t) = U - U_R = U - i_L(t) \cdot R = U - U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Графік струмів $i(t)$, $i_{вн}(t)$ та напруги самоіндукції $u_L(t)$ приведений на рис. 10.1.3, б. З рис. 10.1.3, б слідує, що струм перехідного процесу при включенні RL ланцюга на постійну напругу U з часом експоненціально збільшується від нуля до вимушеного значення, а струм $i_{вн}(t)$ експоненціально зменшується від $-I$ до нуля. Вони будуть експоненціально збільшуватись (зменшуватись) тим повільніше, чим більша стала часу. А напруга самоіндукції $u_L(t)$ у цей час зменшується за експоненціальним законом від значення, рівного прикладеній напрузі U (при $t = 0$), до нуля (після закінчення перехідного і встановлення вимушеного режиму).

Приклад 10.1.3. Знайдіть закон зміни напруги $u_C(t)$ на обкладинках конденсатора C та струму $i(t)$ в RC ланцюзі при розряді конденсатора на активний опір R , рис. 10.1.4, а.

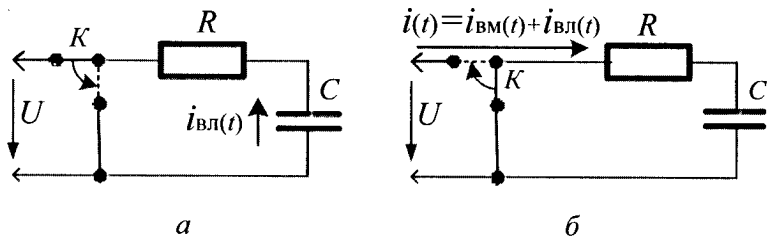


Рис. 10.1.4

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму, визначаємо вимушене значення струму $i_{вм}(t)$ у ланцюзі. Конденсатор був заряджений від джерела постійної напруги до значення U .

Оскільки у момент розряду конденсатор C замикається на опір R , а зовнішня напруга на ньому у цей час буде дорівнювати нулю, то вимушене значення струму у ланцюзі теж дорівнює нулю. Тобто, дійсна напруга на конденсаторі й струм у ланцюзі будуть визначатись їхніми вільними складовими $u_c(t) = u_{вл}(t)$, $i(t) = i_{вл}(t)$.

Використовуючи крок 2 алгоритму і другий закон Кірхгофа, а також урахуваючи, що $i(t) = \frac{dq_{вл}(t)}{dt} = C \frac{du_{вл}(t)}{dt}$, складемо диференціальне рівняння електричної рівноваги короткозамкненого RC ланцюга, яке матиме наступний вид

$$Ri(t) + u_{вл}(t) = 0 \rightarrow RC \frac{du_{вл}(t)}{dt} + u_{вл}(t) = \tau \cdot \frac{du_{вл}(t)}{dt} + u_{вл}(t) = 0,$$

де $\tau = RC$ – стала часу ланцюга, яка відображає закономірність зміни у часі напруги при відключенні від джерела.

На кроці 3 алгоритму, для розв'язання отриманого диференційного рівняння, знаходимо його характеристичне рівняння $RCp + 1 = 0$, єдиним корнем якого є $p = -1/RC$. Користуючись кроком 4 алгоритму, записуємо вираз для вільної складової напруги у вигляді експоненти, яка має наступний вигляд

$u_c(t) = u_{вл}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. Використовуючи крок 5 алгоритму, визначимо сталу інтегрування A з початкових умов. Згідно з другим законом комутації у момент комутації напруга на конденсаторі буде

мати те значення, яке було до комутації і далі почне змінюватись. До комутації напруга на конденсаторі дорівнює прикладеній напрузі U , тобто, при $t = 0$ $u_{\text{вн}}(t) = U$. Після підстановки цих значень отримаємо сталу інтегрування $A = U$. З урахуванням знайденої сталої інтегрування, на кроці 6 алгоритму, отримаємо алгебраїчне рівняння для напруги, яке буде мати наступний вигляд $u_c(t) = u_{\text{вн}}(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Напруга на конденсаторі при його розряді на активний опір R з часом загасає за експоненціальним законом, розпочинаючи з початкового значення U , яке було у момент часу $t = (-0)$. Розряд конденсатора відбувається тим бистріше, чим менша стала часу ланцюга. На кроці 6 алгоритму також знаходимо струм розряду у RC ланцюзі, який буде дорівнювати

$$i(t) = i_{\text{вн}}(t) = C \frac{du_{\text{вн}}(t)}{dt} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \text{ Із рівняння слідує, що}$$

він загасає за тим самим експоненціальним законом, за яким загасає напруга на конденсаторі C , рис. 10.1.5, а.

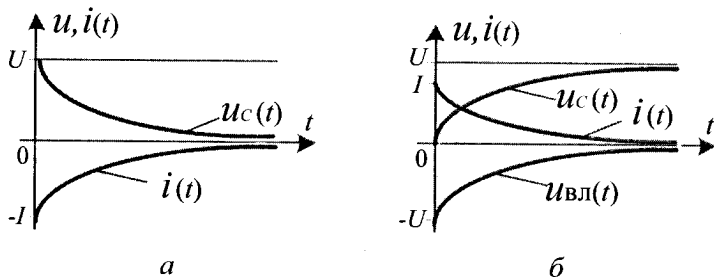


Рис. 10.1.5

Приклад 10.1.4. Знайдіть закон зміни напруги $u_c(t)$ на обкладках конденсатора C та струму $i(t)$ у RC ланцюзі при підключенні його до напруги U , рис. 10.1.4, б.

Розв'язання. Користуючись кроком 1 алгоритму, визначаємо вимушене значення напруги $u_{\text{вн}}(t)$ на конденсаторі. Вимушена напруга – це напруга, яка установиться на конденсаторі після закінчення перехідного процесу. У такому випадку, напруга у перехідному режимі буде складатись із значення вимушеної напруги

$u_{\text{вм}}(t)$ і напруги вільного режиму $u_{\text{вл}}(t)$, тобто $u_c(t) = u_{\text{вм}}(t) + u_{\text{вл}}(t)$. Використовуючи крок 2 алгоритму і другий законом Кірхгофа, складемо диференціальне рівняння електричної рівноваги ланцюга при його включенні $RC \frac{du_{\text{вл}}(t)}{dt} + u_{\text{вл}}(t) = U$. Звідси вільна напруга визначається шляхом розв'язання однорідного диференційного рівняння першого порядку $RC \frac{du_{\text{вл}}(t)}{dt} + u_{\text{вл}}(t) = 0$. На кроці 3 алгоритму для розв'язання диференційного рівняння першого порядку знаходимо його характеристичне рівняння $RCp + 1 = 0$, єдиним корнем якого є $p = -1/RC$. Користуючись кроком 4 алгоритму, запишемо вираз для вільної складової напруги у вигляді експоненти, яка має наступний вигляд $u_{\text{вл}}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. На кроці 5 алгоритму визначимо сталу інтегрування A з початкових умов, використовуючи рівняння $u_c(t) = u_{\text{вм}}(t) + u_{\text{вл}}(t)$. Згідно з другим законом комутації у момент комутації напруга на конденсаторі буде мати те значення, яке було до комутації і далі почне змінюватись. До комутації напруга на конденсаторі дорівнює «0» тобто, при $t = 0$ $u_c(t) = 0$. Після підстановки цих значень у рівняння $u_c(t) = u_{\text{вм}}(t) + u_{\text{вл}}(t)$ отримаємо сталу інтегрування $A = -U$. Звідси $u_{\text{вл}}(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. З урахуванням знайденої сталої інтегрування, на кроці 6 алгоритму, отримаємо алгебраїчне рівняння для напруги $u_c(t)$, яка дорівнює сумі напруг вимушеного і вільного режимів $u_c(t) = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, і алгебраїчне рівняння для струму $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. Із першого рівняння слідує, що $u_c(t)$ досягає свого вимушеного значення $u_{\text{вм}}(t) = U$ через час, який визначається величиною $\tau = RC$, а із другого – що зарядний струм $i(t)$ змінюється від значення $U/R = I$ за експоненціальним законом таке, як і $u_{\text{вл}}(t)$, рис. 10.1.5, б.

10.2. Операторний метод

Операторний метод є універсальним і придатним для розрахунку перехідних процесів за наявності вхідної напруги будь-якої форми, що має аналітичний вираз. У основі операторного методу лежить пряме перетворення Лапласа

$$f(t) \cdot u(t) \xrightarrow{\cdot} F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \text{ де: } f(t) \text{ — оригінал}$$

тимчасової функції; $F(p)$ – зображення функції $f(t)$ за Лапласом; $u(t)$ – ступінчата одинична функція, що визначається як

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}; \text{ знаки } \xrightarrow{\cdot} \text{ або } L[] \text{ — символи перетворення}$$

Лапласа; $p = \delta + j\omega$ – оператор Лапласа.

Існує також зворотнє перетворення Лапласа

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) = \int_{\delta - j\omega}^{\delta + j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dt.$$

Значне спрощення застосування операторного методу дають таблиці відповідності $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, розраховані для найбільш використовуваних в електротехніці функцій, табл. 10.2.1. Це дає можливість без будь-яких додаткових обчислень знаходити зображення $F(p)$ за оригіналом $f(t)$, а також $f(t)$ за $F(p)$.

Таблиця 10.2.1

$f(t) \cdot u(t)$	$F(p)$	$f(t) \cdot u(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{\tau}{p + 1}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(p + 1)}$

Продовження табл. 10.2.1

$f(t) \cdot u(t)$	$F(p)$
$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left(\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	$\frac{1}{(\tau_1 p + 1) \cdot (\tau_2 p + 1)}$
$1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left(\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	$\frac{1}{p (\tau_1 p + 1) \cdot (\tau_2 p + 1)}$
$\frac{1}{\sqrt{1-Z^2}} \cdot e^{-Z\omega_0 t} \left[\sin(\omega_0 \sqrt{1-Z^2} \cdot t) \right]$	$\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 + 2Z \cdot \left(\frac{p}{\omega_0} \right) + 1}$ <i>при $Z < 1$</i>
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}} \cdot e^{-Z\omega_0 t} \left[\sin(\omega_0 \sqrt{1-Z^2} \cdot t - \varphi) \right],$ $\text{де } \varphi = \text{arctg} \sqrt{1-Z^2} / (-Z)$	$\frac{1}{p \cdot \left[\left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 + 2Z \cdot \left(\frac{p}{\omega_0} \right) + 1 \right]}$ <i>при $Z > 1$</i>

При розрахунках електричних ланцюгів операторним методом є корисними декілька теорем операційного числення, що дозволяють значно спростити заміну тимчасових функцій їх операторними зображеннями, що широко використовується у практиці розрахунку електричних і електронних схем.

Теорема відповідності. Якщо $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, то $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$.

Теорема лінійності. Якщо C_1, C_2, \dots, C_n – постійні множники, то

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \xrightarrow{\cdot} \sum_{i=1}^n C_i F_i(p), \text{ де } f_i(t) \xrightarrow{\cdot} F_i(p).$$

Теорема лімітів: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p)$ – для початкового значення $f(0)$;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) \text{ – для сталого значення } f(\infty).$$

Теорема диференціювання. Якщо $f(t) \dot{\rightarrow} F(p)$, то

$$\frac{df(t)}{dt} \dot{\rightarrow} p \cdot F(p) - f(0), \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \dot{\rightarrow} p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0) \text{ і т. д.}$$

Якщо початкові умови рівні нулю, то узяття похідної від $f(t)$ рівноцінно множенню її зображення $F(p)$ на оператор « p », тому оператор « p » часто називають оператором диференціювання.

Теорема інтегрування. Якщо $f(t) \dot{\rightarrow} F(p)$, то

$$\int_0^t f(t) dt \dot{\rightarrow} F(p)/p. \text{ Тобто, за нульових початкових умов}$$

інтегрування, узяття інтеграла від $f(t)$ рівносильно множенню зображення $F(p)$ на оператор $1/p$, який називають оператором інтегрування.

Теорема подібності. Якщо $f(t) \dot{\rightarrow} F(p)$, то $f\left(\frac{t}{a}\right) \dot{\rightarrow} \frac{1}{a} F(ap)$,

де a – стала величина.

Зображення постійної величини. Якщо $A = const$, то $A \dot{\rightarrow} \frac{A}{p}$.

Необхідно також сказати, що пряме перетворення Лапласа з точністю до змінної співпадає з прямим перетворенням Фур'є

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{j\omega t} dt, \text{ що дозволяє отримувати зображення}$$

тимчасових функцій у комплексній формі.

Тому при розрахунку електричних ланцюгів для переходу від комплексної форми представлення функції $F(j\omega)$ до її операторного зображення $F(p)$ достатньо простої заміни аргумента ($j\omega$) на аргумент (p). Відповідно до цього правила опору елементів електричного ланцюга в операторній формі мають наступний вигляд:

$$R(p) = R; X_C(p) = \frac{1}{pC}; X_L(p) = pL.$$

Виконуючи таку заміну, можна здійснювати перетворення зображення вхідної напруги $U_{вх}(p)$ як за звичайними законами

ланцюгів постійного струму, так і при комплексному зображенні цих величин. Відзначимо, що в операторному вигляді, так само як і у комплексній формі, залишаються справедливими перший і другий закони Кірхгофа.

Для першого закону Кірхгофа – $\sum_{i=3}^N I_i(p) = 0$, де N – число операторних струмів у вузлі.

Для другого закону Кірхгофа – $\sum_{i=1}^N U_i(p) = \sum_{j=1}^M E_j(p)$, де N – число операторних приймачів контура; M – число джерел ЕРС, що входять у цей контур.

Алгоритм розрахунку перехідних процесів операторним методом

1. Записати опори гілок ланцюга в операторній формі.
2. Записати зображення величин, що визначають (струм, напругу) за операторною схемою, використовуючи будь-який закон або метод для їх знаходження.
3. Перевести операторні вирази, знайдені на кроці 2 алгоритму, до виду, згідно з яким необхідно виконувати умови задачі.
4. Знайти оригінал параметрів величин, які визначають струм, напругу, використовуючи таблицю відповідності перетворень зображення $F(p)$ за оригіналом $f(t)$ і навпаки.

Приклад 10.2.1. Знайдіть закон зміни струму $i(t)$ у ланцюзі й напруги $u_L(t)$ на індуктивності L при його підключенні до напруги U , рис. 10.2.1, б.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, запишемо такі операторні відображення для елементів схеми ланцюга:

$$R(p) = R; \quad X_L(p) = pL; \quad u(t) \xrightarrow{\cdot} u(p) = \frac{U}{p}.$$

На кроці 2 алгоритму, використовуючи операторні відображення з кроку 1 алгоритму, знаходимо струм у RL ланцюзі в операторній формі

$$i(p) = \frac{u(p)}{R + pL} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{p \cdot (1 + p\tau)},$$

а також напругу на індуктивності

$$u_L(p) = i(p) \cdot pL = \frac{u(p)}{R + pL} \cdot pL = \frac{U \cdot \tau}{(1 + p\tau)} = U \cdot \frac{\tau}{1 + p\tau}.$$

На кроці 4 алгоритму, використовуючи табл.10.2.1, маємо $i(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, $u_L(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, що відповідає аналогічному результату, отриманому при розв'язанні даного прикладу класичним методом.

Приклад 10.2.2. Знайдіть закон зміни напруги $u_C(t)$ на обкладинках конденсатора C та струму $i(t)$ у RC ланцюзі при його підключенні до напруги U , рис. 10.1.4, б.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, запишемо наступні операторні відображення для елементів схеми ланцюга:

$$R(p) = R; \quad X_C(p) = \frac{1}{pC}; \quad u(t) \xrightarrow{\cdot} u(p) = \frac{U}{p}.$$

На кроці 2 алгоритму, використовуючи операторні відображення з кроку 2 алгоритму, знаходимо струм у RC ланцюзі в операторній формі

$$i(p) = \frac{u(p)}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U \cdot pC}{p \cdot (R \cdot pC + 1)} = \frac{U \cdot C}{p\tau + 1} = \frac{U}{R} \cdot \frac{\tau}{p\tau + 1} = I \cdot \frac{\tau}{p\tau + 1}.$$

На цьому ж кроці алгоритму також знаходимо й напругу на конденсаторі C

$$u_C(p) = X_C(p) \cdot i(p) = \frac{U \cdot C}{pC(p\tau + 1)} = U \cdot \frac{1}{p \cdot (p\tau + 1)}.$$

Користуючись кроком 4 алгоритму і табл.10.2.1, маємо $u(t) = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, $i(t) = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ що відповідає аналогічному результату отриманому при розв'язанні даного прикладу класичним методом.

Приклад 10.2.3. Знайдіть струм $i(t)$ у послідовному RLC ланцюзі і напругу $u_C(t)$ на конденсаторі C , а також визначте умови існування у ланцюзі коливального і аперіодичного перехідного процесу при підключенні до його входу постійної напруги U , рис. 10.1.1.

Розв'язання. Використовуючи крок 1 алгоритму, запишемо наступні операторні відображення для елементів схеми ланцюга:

$$R(p) = R; \quad X_L(p) = pL; \quad X_C(p) = \frac{1}{pC}; \quad u(t) \xrightarrow{\bullet} u(p) = \frac{U}{p}.$$

На кроці 2 алгоритму, використовуючи операторні відображеннями з кроку 2 алгоритму, знаходимо струм у RLC ланцюзі

$$i(p) = \frac{u(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{u(p) \cdot pC}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{U \cdot C}{LCp^2 + RCp + 1}$$

і напругу на конденсаторі C

$$u_C(p) = i(p) \cdot X_C(p) = \frac{u(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{u(p)}{LCp^2 + RCp + 1} =$$

$$= \frac{u(p)}{a_2 p^2 + a_1 p + 1},$$

де: $a_2 = LC$; $a_1 = RC$.

На кроці 3 алгоритму отриманий вираз для $u_C(p)$ представимо у наступному вигляді $a_2 p^2 u_C(p) + a_1 p u_C(p) + u_C(p) = u(p)$.

Скориставшись теоремою про зображення похідних, це рівняння представимо у вигляді диференційного рівняння зв'язку $u_C(t)$ і U при

нульових початкових умовах $a_2 \cdot \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U$.

Очевидно, що його характеристичне рівняння співпадає зі знаменником виразу для $u_C(t)$, прирівняним до нуля, тобто

$a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$, а загальне розв'язання диференційного рівняння знаходимо у вигляді $u_C(t) = C_1 \cdot e^{p_1 t} + C_2 \cdot e^{p_2 t} + C_3$, де: p_1, p_2 – корені характеристичного рівняння. При дійсних коренях p_1 і p_2 , $u_C(t)$ є аперіодичною функцією. Якщо ж p_1 і p_2 – комплексні зв'язані корені, то $u_C(t)$ є коливальною функцією.

Отже, умови періодичності або коливання напруги $u_C(t)$ на конденсаторі визначаються тільки знаком дискримінанта характеристичного рівняння. Іншими словами, обидва корені

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2}$$

будуть дійсними, якщо $4a_2 < a_1$ або

комплексними поєднаними, якщо $4a_2 > a_1$. Розглянемо обидва випадки докладніше.

Випадок 1. Нехай корені p_1 і p_2 – дійсні й негативні ($a_2 > 0$ і $a_1 > 0$).

Уведемо позначення $Z = a_1 / 2\sqrt{a_2}$. Враховуючи вираз характеристичного опору RLC ланцюга $\rho = \sqrt{L/C}$, можна записати $Z = R/2\rho$. Ця величина називається коефіцієнтом загасання перехідного процесу у RLC ланцюзі. Незавжди показати, що умова $4a_2 < a_1^2$ забезпечується лише при $Z > 1$.

Знаючи величини R, L і C , можна обчислити значення p_1 і p_2 , що дозволяє представити рівняння для $u_C(p)$ у вигляді

$$u_C(p) = \frac{u(p)}{a_2(p-p_1) \cdot (p-p_2)} = \frac{u(p)}{(\tau_1 p + 1) \cdot (\tau_2 p + 1)},$$

де: $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$; $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$ – постійні часу аперіодичної ланки другого порядку, що описує RLC ланцюг при $Z \geq 1$.

Ураховуючи, що $u(p) = U/p$ (зображення постійної величини),

отримаємо $u_C(p) = \frac{u(p)}{p \cdot (\tau_1 p + 1) \cdot (\tau_2 p + 1)}$. Тоді на кроці 4

алгоритму, використовуючи табл.10.2.1, визначаємо оригінал функції напруги на конденсаторі C

$$u_c(t) = U \cdot \left[1 + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \left(\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right].$$

Графік отриманої функції, що визначає характер зміни напруги на конденсаторі C при $Z > 1$ і стрибкоподібній зміні вхідної напруги, приведений на рис. 10.2.1, а.

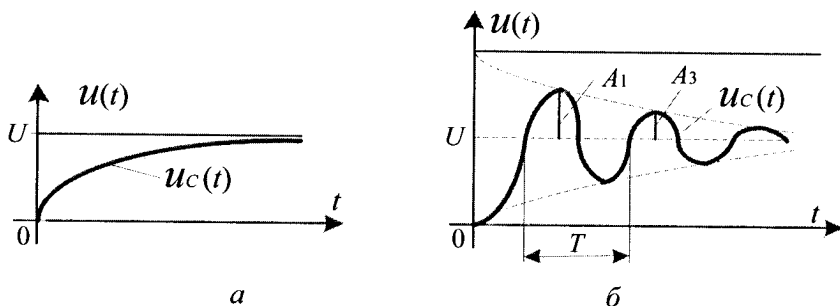


Рис. 10.2.1

Напруга $u_c(t)$ у RLC ланцюзі також, як і у RC ланцюзі, змінюється монотонно по експоненціальному закону, але якщо у RC ланцюзі, вона описується диференціальним рівнянням першого порядку (похідна $du_c(t)/dt$ при $t = 0$ дорівнює U/τ), то у RLC ланцюзі, вона описується диференціальним рівнянням другого порядку $d^2u_c(t)/dt^2 = 0$. У цьому їх принципова відмінність при $Z > 1$.

Випадок 2. Корені p_1 і p_2 – комплексні поєднані. Як слідує з характеристичного рівняння, дійсна частина обох коренів, дорівнює a_1/a_2 , завжди негативна при $a_1 > 0$ і $a_2 > 0$, що забезпечує затухаючий характер коливань перехідного процесу.

Умова комплексності коренів виконується при $Z < 1$, а значення коренів визначається очевидною рівністю

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm j \frac{2\sqrt{a_2}}{2a_2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_2}},$$

де $j = \sqrt{-1}$.

Увівши позначення $\omega_0 = 1/\sqrt{a_2} = 1/\sqrt{LC}$ – частота власних коливань RLC ланцюга, остаточно отримаємо

$$p_{1,2} = -Z \cdot \omega_0 \pm j\omega_0 \cdot \sqrt{1 - Z^2} = -\alpha \pm j\omega_{зат},$$

де $\omega_{зат} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - Z^2}$ — частота затухаючих коливань у RLC ланцюзі; $\alpha = Z\omega_0$ – коефіцієнт зменшення амплітуди затухаючих коливань.

Очевидно, при $R = 0$, $Z = 0$, $\omega_{зат} = \omega_0$ і з урахуванням $Z = a_1 / 2\sqrt{a_2}$ вираз для $u_C(t)$ матиме вигляд

$$u_C(p) = \frac{u(p)}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2Z \cdot \left(\frac{p}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{U}{p \cdot \left[\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2Z \cdot \left(\frac{p}{\omega_0}\right) + 1\right]},$$

що, відповідно до табл.10.2.1 перетворень Лапласа визначимо оригінал функції напруги на конденсаторі C , використовуючи крок 4 алгоритму

$$u_C(t) = U \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - Z^2}} \cdot e^{-Z\omega_0 t} [\sin(\omega_{зат} \cdot t - \varphi)] \right\},$$

де $\varphi = \arctg -\frac{\sqrt{1 - Z^2}}{Z}$.

Залежність $u_C(t)$ для RLC ланцюга при $Z < 1$ представлена на рис. 10.2.1, б, де T – період затухаючих коливань, який дозволяє знайти

$$\omega_{зат} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{і} \quad \alpha = \frac{\ln(A_1 / A_3)}{T}.$$

Таким чином, якщо експериментально отриманий графік $u_C(t)$, то після визначення величин α і $\omega_{зат}$, значення ω_0 і Z можуть бути

розраховані з системи рівності
$$\begin{cases} \alpha = Z \cdot \omega_0, \\ \omega_{\text{зм}} = \omega_0 \sqrt{1 - Z^2}. \end{cases}$$

Очевидно, що частота власних коливань ω_0 визначається тільки величинами L і C , проте частота затухаючих коливань, як і коефіцієнт загасання, залежать і від значення активного опору контура R .



Контрольні запитання

1. Що називають перехідним процесом?
2. За яких умов у ланцюзі виникають перехідні процеси?
3. Сформулюйте закони комутації.
4. Що називають сталим режимом у перехідному процесі?
5. Які є методи розрахунку перехідних процесів?
6. Поясніть фізичний сенс сталої часу для ланцюгів RL і RC . Як залежить стала часу від величини R для кожного з цих ланцюгів?
7. У чому полягає касичний метод аналізу перехідних процесів? Поясніть поняття вільної та вимушеної складової струму (напруги).
8. У чому полягає ідея операторного методу? Які функції можуть бути перетворені за Лапласом?
9. Запишіть формулу прямого перетворення Лапласа. Назвіть його основні властивості.
10. Сформулюйте основні теореми щодо властивостей перетворення Лапласа.
11. Сформулюйте закони Ома й Кірхгофа в операторній формі.
12. Поясніть поняття операторного опору.



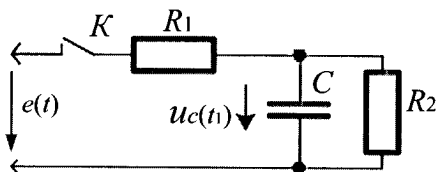
Задачі для самостійного розв'язування

1. Опір $R = 50$ Ом та незаряжена ємність $C = 5$ мкФ з'єднані послідовно і увімкнені при $t = 0$ до джерела ЕРС $E = 20$ В. Визначте струм перехідного процесу у ланцюзі.

Відповідь: $i(t) = 0,4e^{-4000t}$ А.

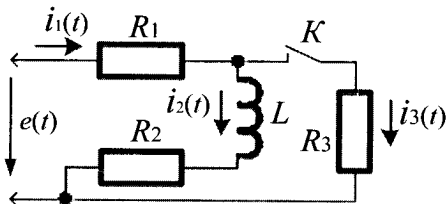
2. Під час дії джерела постійної напруги $E = 120$ В у ланцюзі після замикання ключа K встановився усталений режим. Визначте напругу на

конденсаторі через $t_1 = 0,1$ с після розмикання ключа, якщо $C = 2$ мкФ, $R_1 = R_2 = 50$ кОм.



Відповідь: $u_c(t_1) = 23$ В.

3. Після замикання ключа K у ланцюзі, який приведений на рисунку, знайдіть початкове значення струму $i_3(t)$, його вільну і вимушену складові.



Дано: $E = 30$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 10$ Ом; $L = 2$ мГн.

Відповідь: $i_3(+0) = 0,75$ А; $i_{3вл} = 0,45 \cdot e^{-6250t}$ А; $i_{3вм} = 0,3$ А.

4. Електричний ланцюг складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 2$ Ом, $C = 10$ мкФ. Визначте операторним методом струм $i(t)$, якщо до ланцюга при $t = 0$ підключили вхідну напругу $u(t) = 5$ В.

Відповідь: $i(t) = 2,5 \cdot e^{-50t}$ А.

5. Електричний ланцюг складається з послідовно з'єднаних елементів $R = 2$ Ом, $L = 1$ Гн. Визначте операторним методом струм $i(t)$, якщо до ланцюга при $t = 0$ підключили вхідну напругу $u(t) = 10$ В.

Відповідь: $i(t) = 5 \cdot (1 - e^{-0,5t})$ А.



Коментарі

Перехідні процеси, розрахунки перехідних процесів класичним методом узяті з [10, 15]. Основи операторного методу, розрахунки перехідних процесів операторним методом слідуєть [10].

Література

1. *Аполлонский С.М., Леонтьев В.В.* Электротехника и электроника. Трехфазные электрические цепи. – СПб.: СЗТУ, 2006 – 244 с.
2. *Атабеков Г. И.* Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969 – 424 с.
3. *Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук В.И.* Основы теории цепей. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.
4. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. 10 – е изд. – М.: Гардарики, 2002 – 638 с.
5. *Бирюков В.Н., Попов В.П., Семенов В.И.* Сборник задач по теории цепей. – М.: Высш. шк., 1998. – 338 с.
6. *Евсеев М.Е.* Теоретические основы электротехники. – СПб. СЗТУ, 2006 – 244 с.
7. *Зевеке И.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В.* Основы теории цепей.– М.: Энергоатомиздат, 1989. – 495 с.
8. *Иванов И.И., Равдоник В.С.* Электротехника.– М.: Высш. шк., 1984 – 375 с.
9. *Коваль Ю.О., Гринченко Л. В., Милютченко І.О., Рибін О.І.* Основы теорії кіл за заг. редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди. Ч.1: – Х.: ТОВ “Компанія СМІТ”, 2008. – 482 с.
10. *Коваль Ю.О., Гринченко Л.В., Милютченко І.О., Рибін О.І.* Основы теорії кіл за заг. редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди. Ч.2: – Х.: ТОВ “Компанія СМІТ”, 2008. – 560 с.
11. *Лосев А. К.* Теория линейных электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1985. – 496 с.
12. *Нейман Л.Р., Демирчан К.С.* Теоретические основы электротехники. Т. 1–3-е изд.– Л.: Энергоиздат, 1981.– 475 с
13. *Паначевний Б.І.* Електротехніка. – Х.: Торнадо, 1999 – 288с.
14. *Попов В.П.* Основы теории цепей. Изд. 3-е, испр. – М.: Высш. шк., 2000.– 575 с.
15. *Татур Т.А., Татур В.Е.* Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях.– М.: Высш. шк., 2001. – 407 с.
16. *Фриск В. В.* Основы теории цепей. – М. : ИП Радио – Соорт, 2002. – 288 с.
17. *Четверухин Б.М., Прокудин Г.С.* Основы электротехники и электроники. - К.: Европейский университет, 2002. – 150 с.
18. *Шебес М.Р., Каблукова М.В.* Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с.

Зміст

Передмова 3

Розділ 1. Електричний ланцюг, його елементи і параметри

1.1. Визначення електричного ланцюга 5
 1.2. Графічне позначення електричного ланцюга і його елементів 8
 1.3. Напрямок дії *EPC*, струмів і напруг 9
 1.4. Закони електричних ланцюгів 10
 1.5. Параметри електричних ланцюгів 11
 1.6. Поняття про лінійні й нелінійні електричні ланцюги 14
 1.7. Ідеальні елементи електричного ланцюга 15
 1.8. Співвідношення між струмом і напругою в ідеальних
 елементах електричного ланцюга 16
Контрольні запитання 18
Задачі для самостійного розв'язування 18
Коментарі 19

Розділ 2. Ланцюги постійного струму

2.1. Деякі особливості ланцюгів постійного струму 20
 2.2. Закон Ома і закони Кірхгофа для ланцюгів постійного струму 20
 2.3. Еквівалентні схеми джерел електроенергії постійного струму 21
 2.4. Режими роботи електричних ланцюгів 24
 2.5. Енергетичні співвідношення у ланцюгах постійного струму 27
 2.6. Потужність та баланс потужностей ланцюга постійного струму 29
Контрольні запитання 30
Задачі для самостійного розв'язування 30
Коментарі 31

Розділ 3. Методи розрахунку електричних ланцюгів постійного струму

3.1. Розрахунок з одним джерелом енергії 32
 3.2. Розрахунок з використанням законів Кірхгофа 36
 3.3. Розрахунок методом контурних струмів 40
 3.4. Розрахунок методом вузлових напруг 43
 3.5. Розрахунок методом суперпозиції 49
 3.6. Розрахунок методом еквівалентного джерела 52
Контрольні запитання 55
Задачі для самостійного розв'язування 55
Коментарі 57

Розділ 4. Ланцюги синусоїдального струму

4.1. Основні визначення	58
4.2. Аналітичне представлення струмів і напруг	60
4.3. Способи графічного зображення струмів і напруг	61
4.4. Векторні діаграми і їх застосування для розрахунку ланцюгів	62
4.5. Векторна форма законів Кірхгофа.....	64
4.6. Фазові співвідношення між струмом і напругою	65
4.7. Діюче значення струму і напруги.....	66
4.8. Прості ланцюги синусоїдального струму	67
4.9. Залежність активного, індуктивного та ємнісного опорів від частоти	70
4.10. Ланцюг з послідовним з'єднанням R, L, C	71
4.11. Частотні характеристики ланцюга з послідовним з'єднанням R, L, C	74
4.12. Ланцюг з паралельним з'єднанням R, L, C	77
4.13. Частотні характеристики ланцюга з паралельним з'єднанням R, L, C	80
4.14. Потужність ланцюга синусоїдального струму	83
4.15. Поняття про коефіцієнти потужності й корисної дії ланцюга.....	85
4.16. Підвищення коефіцієнта потужності ланцюга.....	86
<i>Контрольні запитання</i>	89
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	90
<i>Коментарі</i>	91

Розділ 5. Символічний метод та представлення у ньому параметрів ланцюгів синусоїдального струму

5.1. Основи методу	92
5.2. Комплексні струм і напруга.....	96
5.3. Комплексні опір і провідність	99
5.4. Комплексна потужність.....	102
5.5. Закони Кірхгофа у комплексній формі	103
<i>Контрольні запитання</i>	104
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	104
<i>Коментарі</i>	105

Розділ 6. Еквівалентні перетворення ланцюгів та резонанс у ланцюгах синусоїдального струму

6.1. Поняття про еквівалентні ланцюги	106
6.2. Перетворення послідовних ланцюгів на паралельні і навпаки.....	108
6.3. Перетворення трикутних опорів на зірку й навпаки	111
6.4. Перетворення джерела EPC на джерело струму і навпаки	113

6.5. Резонанс у ланцюгах синусоїдального струму	116
<i>Контрольні запитання</i>	122
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	122
<i>Коментарі</i>	123

Розділ 7. Методи розрахунку ланцюгів синусоїдального струму

7.1. Розрахунок з одним джерелом енергії.....	124
7.2. Розрахунок з використанням законів Кірхгофа.....	135
7.3. Метод контурних струмів.....	139
7.4. Метод вузлових напруг.....	146
7.5. Метод суперпозиції.....	153
7.6. Метод еквівалентного джерела	155
<i>Контрольні запитання</i>	159
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	160
<i>Коментарі</i>	160

Розділ 8. Розрахунок ланцюгів синусоїдального струму із взаємною індуктивністю

8.1. Загальні положення	161
8.2. Розрахунок ланцюгів із послідовним з'єднанням двох індуктивностей	165
8.3. Розрахунок ланцюгів із паралельним з'єднанням двох індуктивностей	168
8.4. Розрахунок ланцюгів із трансформаторним зв'язком між котушками	171
8.5. Еквівалентне перетворення ланцюгів із взаємною індуктивністю	174
<i>Контрольні запитання</i>	175
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	176
<i>Коментарі</i>	176

Розділ 9. Трифазні ланцюги синусоїдального струму

9.1. Основні свідчення	177
9.2. Трифазні ланцюги, з'єднані зіркою	179
9.3. Трифазні ланцюги, з'єднані трикутником.....	183
9.4. Розрахунок трифазних ланцюгів.....	186
9.5. Потужність трифазних ланцюгів.....	196
<i>Контрольні запитання</i>	198
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	199
<i>Коментарі</i>	199

Розділ 10. Перехідні процеси	
10.1. Класичний метод.....	200
10.2. Операторний метод.....	211
<i>Контрольні запитання</i>	220
<i>Задачі для самостійного розв'язування</i>	200
<i>Коментарі</i>	221
Література	222

Навчальне видання

М.П. МАТВІЄНКО

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Підручник

Керівник видавничого проекту *Зарицький В. І.*
Комп'ютерний дизайн *Щербина О. П.*
Авторська редакція

Підписано до друку 12.05.2016. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. аркушів – 13,19. Обл.-вид. аркушів – 6,77.
Тираж 300

«Видавництво Ліра-К»
Свідоцтво № 3981, серія ДК.
03067, м. Київ, вул. Прилужна 14, оф. 42
тел./факс (044) 247-93-37; 450-91-96
Сайт: lira-k.com.ua, редакція: zv_lira@ukr.net



Матвієнко Микола Павлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри електронних приладів і автоматики Контотопського інституту Сумського державного університету, академік Академії енергетики України (48 років науково-педагогічного стажу). Галузь наукової і педагогічної діяльності – обчислювальна техніка, електроніка та електротехніка. Автор 115 наукових і навчально-методичних праць, в тому числі одна монографія та одинадцять навчальних посібників і підручників.

