Рівняння

Рівняння – це нетотожна рівність, в якій одна або кілька букв означають невідому величину. В загальному випадку рівняння з однією змінною має такий вигляд: $f_1(x) = f_2(x)$. Число, що при підстановці до рівняння перетворює його на тотожність називають розв'язком або коренем рівняння.

Задача розв'язання рівняння полягає в тому, щоб знайти такі значення змінної, при яких задані функції набувають однакових значень. При цьому слід обов'язково враховувати область існування обох функцій, що входять до рівняння.

Два рівняння називають рівносильними, якщо розв'язок одного є розв'язком іншого і навпаки або коли обидва рівняння не мають розв'язку.

Наприклад, рівняння $\sin x = 2$ і $x^2 + 1 = 0$ рівносильні, оскільки вони одночасно не мають розв'язку.

Якщо при розв'язанні рівнянь над обома частинами виконують перетворення, які не змінюють області визначення рівняння, то після перетворень утворюється рівняння, **рівносильне** даному.

При підготовці до ЗНО слід звернути особливу увагу на такі типи рівнянь: лінійні, квадратні, раціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні.

Лінійні рівняння

Розглянемо рівняння, що містить змінну в першому степені (і тільки в першому, тобто немає інших дій, крім додавання, віднімання і множення змінних на число).

$\frac{x+4}{3} + \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{x+4}{4}$. Помножимо ліву та праву частину рівняння на 12, щоб позбутися дробових виразів: $4(x+4) + 6(x-1) = 12 + 3(x+4)$. Після розкриття дужок отримаємо: $4x + 16 + 6x - 6 = 12 + 3x + 12$

Переносимо всі невідомі в ліву частину рівняння, всі відомі – в праву: $7x = 14$. Отримуємо відповідь: $x = 2$.

Квадратні рівняння

Рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ — рівняння другого степеня або квадратне рівняння. Якщо його переписати у вигляді $x^2 + px + q = 0$, то отримують так зване зведене квадратне рівняння. Розглянемо три основні способи розв'язання квадратних рівнянь: за формулами коренів (дискримінант), за оберненою теоремою Вієта, виділенням (вилученням) повного квадрата.

1. Корені квадратного рівняння знаходять за формулою: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, число $D = b^2 - 4ac$ називають дискримінантом квадратного рівняння.

Якщо $D < 0$, то рівняння не має коренів, якщо $D = 0$, то рівняння має один корінь, якщо $D > 0$, то два різних корені.

Приклад. $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

У такому рівнянні $a=3,\ b=-2,\ c=-1$. $D=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-1)=16$; $x_1=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\cdot3}=-\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\cdot3}=1$.

2. Надзвичайно важливу роль відіграє **теорема Вієта**:

Якщо x_1, x_2 - корені квадратного рівняння, то $\begin{cases} x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$, для зведеного рівняння: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=q \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$.

Розв'язання квадратного рівняння за оберненою теоремою Вієта полягає в підборі чисел, для яких виконується теорема Вієта. Наприклад, розглянемо рівняння $x^2-5x+6=0$. Якщо рівняння має корені, то $\begin{cases} x_1\cdot x_2=6 \\ x_1+x_2=5 \end{cases}$. Підбираємо пару чисел, для якої виконується перше рівняння, і перевіряємо, чи виконується для неї друге. В добутку 6 дають пари чисел 2 і 3 або 1 і 6. У сумі 5 дають 2 і 3, тому $x_1=2$, $x_2=3$. Зверніть увагу, що підбір набагато простіше здійснити, якщо корені цілі, тому цей метод раціональніший саме в такій ситуації.

Зауважимо, що умови теореми Вієта можна записати і для рівняння, що не має коренів. Тому якщо процес підбору коренів викликає труднощі або забирає забагато часу, радимо обчислити дискримінант і перевірити, чи рівняння має корені.

3. Розв'язання квадратного рівняння (виділенням) **вилученням повного квадрата** засноване на зведенні лівої частини рівняння до структури однієї з формул:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Розглянемо виділення повного квадрата на прикладах.

Приклад 1. $x^2+4x-5=0$.

Перепишемо рівняння у вигляді: $x^2+2\cdot x\cdot 2-5=0$, щоб отримати вигляд ідентичний формулі. a відповідає x, а b відповідає 2, тому, щоб отримати ліву частину формули, додамо і віднімемо 2^2.

$x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2-5=0$ або $(x+2)^2-9=0$, тоді $(x+2)^2=3^2$, що дає $\left[\begin{array}{l} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{array}\right.$, звідки $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Приклад 2. $x^2-x-2=0$.

Оскільки двійки, відповідної подвоєному добутку у формулі скороченого множення немає в записі, то утворимо її: $x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-2=0$, тоді у виразі $a^2-2ab+b^2$ роль a грає x, а роль b - $\frac{1}{2}$, тому $x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=0$, після чого $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0$, тоді $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Приклад 3 .

$2x^2-3x+1=0$.

Для зручності винесемо 2 за дужки: $2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+1=0$ і далі будемо виділяти повний квадрат у дужках:

$$2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)+1=0;$$

$$2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)+1=0;$$

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+1=0;$$

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}=0;$$

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{8};$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16};$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \\ x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4} \\ x=\frac{3}{4}-\frac{1}{4} \end{array}\right.;$$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Відповідь: $x\in\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

Приклад 4. $x^2+x+1=0$.

$x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+1=0$;

$x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=0$;

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0$;

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$;

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$ – рівняння не має розв'язків, оскільки в лівій частині рівняння квадрат – величина невід'ємна, а в правій частині – від'ємне число, тобто рівність неможлива. Отже, рівняння не має розв'язків.

Розклад квадратного тричлена на множники

Якщо x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то квадратний тричлен ax^2+bx+c можна розкласти на множники: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

Наприклад, $x^2-4x+3=\left(x-1\right)\left(x-3\right)$.

Раціональні рівняння

Рівняння, що містять тільки многочлени, називають раціональними. Якщо многочлени входять до рівняння у вигляді частки, то рівняння називають дробово-раціональним.

При розв'язанні раціональних рівнянь застосовують розклад на множники, властивості пропорції, заміну змінної.

Рівняння, що зводяться до квадратних

Розглянемо кілька типів рівнянь, що зводяться до квадратних (групуванням, виділенням повного квадрата, заміною змінних).

1) **Рівняння, що містять взаємно обернені вирази.**

Взаємно оберненими виразами називають вирази, що в добутку дають 1, наприклад: 2 і $\frac{1}{2}$; $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$; $\sqrt{x}$ і $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x\neq 0$); 2^x і 2^{-x}; tgx і $ctgx$ $\left(x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right)$.

Якщо замінити один із таких виразів на іншу змінну, то утвориться квадратне рівняння відносно неї.

Наприклад, рівняння: $x^2+x+2-\frac{2}{x^2+x+1}=0$ можна переписати у вигляді $x^2+x+1-2\cdot\frac{1}{x^2+x+1}+1=0$, воно містить взаємно обернені вирази x^2+x+1 і $\frac{1}{x^2+x+1}$. Замінимо $x^2+x+1=t\neq 0$ і отримаємо квадратне рівняння $t-\frac{2}{t}+1=0$, що після перетворень дасть розв'язки $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$. Повертаючись до змінної x, отримаємо: $\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=-2 \end{array}\right.$, перше з яких має корені $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$, а друге коренів не має.

2) **Однорідні рівняння.**

Розглянемо рівняння вигляду $a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0$, де $f(x), g(x)$ – функції довільного вигляду (показникові, тригонометричні, ірраціональні).

Рівняння зводиться до квадратного діленням на квадрат однієї з функцій, наприклад, на $g^2(x)$ (за умови, що $g(x)\neq 0$).

$$a\cdot\frac{f^2(x)}{g^2(x)}+b\cdot\frac{f(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}+c\cdot\frac{g^2(x)}{g^2(x)}=0$$

$a\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2+b\cdot\frac{f(x)}{g(x)}+c=0$ після заміни $\frac{f(x)}{g(x)}=t$ набуває вигляду $at^2+bt+c=0$.

Приклад.

$$\left(x^2+x+4\right)^2+3x\left(x^2+x+4\right)+2x^2=0.$$

Переконавшись, що $x=0$ не є коренем (підстановкою), ділимо на x^2.

$$\frac{\left(x^2+x+4\right)^2}{x^2}+3\frac{x\left(x^2+x+4\right)}{x^2}+2\frac{x^2}{x^2}=0;$$

$$\left(\frac{x^2+x+4}{x}\right)^2+3\frac{x^2+x+4}{x}+2=0.$$

Зміна: $\frac{x^2+x+4}{x}=t$.

$$t^2+3t+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2+x+4}{x}=-1 \\ \frac{x^2+x+4}{x}=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+4=-x \\ x^2+x+4=-2x \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+4=0 \\ x^2+3x+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \varnothing.$$

Рівняння, які містять знак модуля

При розв'язанні рівнянь, які містять знак модуля або рівнянь, що зводяться до таких, слід користуватися означенням модуля – розкрити його різними способами і розглянути усі можливі варіанти.

$$|x| = \left[\begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array}\right.$$

Також корисно використовувати наступну рівність: $|x| = a$ $(a > 0)$, тоді $\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$.

Приклад: $|x+1| = 3$.

$x+1=3$ або $x+1=-3$, звідки $x=2$ або $x=-4$.

Аналогічно можна знайти розв'язок рівняння, що містить вкладені модулі, наприклад,

$||x-2|-6| = 7$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2|-6=7 \\ |x-2|-6=-7 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} |x-2|=13 \\ |x-2|=-1 \end{array}\right..$$

Друге рівняння не має розв'язків.

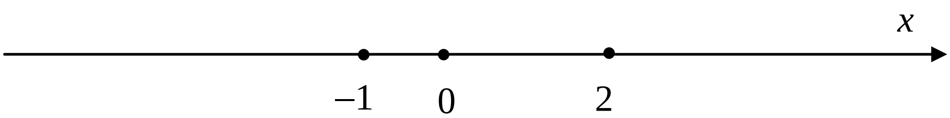
Перше має наслідки: $|x-2|=13$ $\left[\begin{array}{l} x-2=13 \\ x-2=-13 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=15 \\ x=-11 \end{array}\right.$.

Якщо рівняння містить суму або різницю різних модулів, то застосовують метод інтервалів. Продемонструємо його на прикладі:

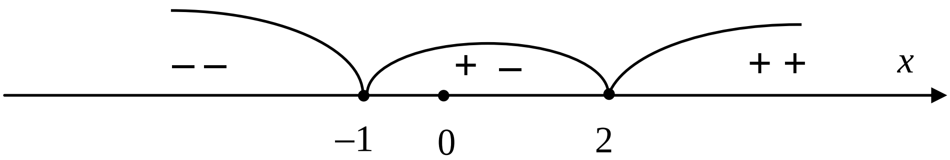
$|x+1|+|x-2|=5$.

Крок 1. Прирівнюємо вирази під знаком модуля до нуля – отримуємо числа $x=-1$ і $x=2$.

Крок 2. Наносимо ці числа на числову вісь.



Крок 3. Визначаємо знак виразів під знаком модуля на кожному з інтервалів, на які розбивають числову вісь нанесені числа (підстановкою довільного числа з інтервалу, наприклад, при підстановці $x=5$, отримуємо два знаки +).



Крок 4.

На кожному з інтервалів розкриваємо модулі зі знаками, знайденими на кроці 3.

1) $x \in (-\infty; -1]$, рівняння набуває вигляду:

$-(x+1)-(x-2)=5$

$-x-1-x+2=5$

$-2x=4$ $x=-2$ - належить інтервалу, тому є розв'язком.

2) $x\in(-1;2]$: рівняння набуває вигляду:

$+(x+1)-(x-2)=5$

$x+1-x+2=5$ тоді отримуємо $3=5$, що невірно, тому в другому інтервалі розв'язків немає

3) $x\in(2;+\infty)$, рівняння набуває вигляду:

$x+1+x-2=5,\ 2x=6,\ x=3$ - належить третьому інтервалу.

Остаточна відповідь: $x\in\{-2;3\}$.

Ірраціональні рівняння

Ірраціональним рівнянням називають алгебраїчне рівняння, хоча б одна частина якого ірраціональна відносно невідомої, тобто містить знак кореня (будь-якого степеня).

Основний спосіб розв'язання таких рівнянь – піднесення до відповідного степеня (щоб позбутися кореня). При розв'язанні ірраціональних рівнянь, що містять корені парних степенів обов'язково потрібно враховувати, що вираз під коренем повинен бути невід'ємним.

Приклад 1. $\sqrt{x-1}=4$.

Підносимо ліву і праву частину до квадрата, враховуючи, що $x-1\ge 0$.

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}\right)^2=4^2\\ x-1\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=16\\ x\ge 1\end{cases}\quad x=17.$$

Оскільки корінь парного степеня набуває тільки додатних значень, то це часто додає обмеження не тільки на підкореневі вирази, а й на праву частину рівняння.

Приклад 2. $\sqrt{x+5}=7-x$.

Ліва частина рівняння набуває додатних значень, тому й права повинна набувати додатних:

$$\sqrt{x+5}=7-x\Leftrightarrow\begin{cases}x+5=(7-x)^2\\ 7-x\ge 0\\ x+5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5=x^2-14x+49\\ x\le 7\\ x\ge -5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-15x+44=0\\ x\le 7\\ x\ge -5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=11\end{array}\right.\\ x\le 7\\ x\ge -5\end{cases}$$

. Корінь $x=11$ – сторонній, оскільки права частина початкового рівняння при $x=11$– від'ємна.

Відповідь: $x=4$.

Приклад 3 . $\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}=6$.

Знайдемо область визначення рівняння.

$\begin{cases} x-5\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x\le 2 \end{cases}$. Оскільки область визначення – порожня множина, то рівняння не має розв'язків.

Приклад 4. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=7$.

Звертаю увагу, що вирази під знаком кореня є повними квадратами, тому рівняння набуває вигляду:

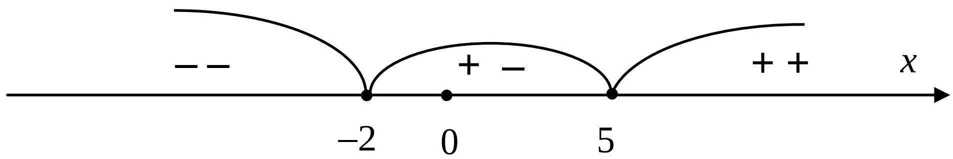
$\sqrt{\left(x+2\right)^2}+\sqrt{\left(x-5\right)^2}=7$;

$\left|x+2\right|+\left|x-5\right|=7$.

Для розв'язання застосовуємо метод інтервалів.

Прирівнюємо вирази під знаком модуля до нуля: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$; $x-5=0 \Rightarrow x=5$.

Наносимо числа -2 і 5 на числову вісь і отримуємо три інтервали.



1) $x\in\left(-\infty;-2\right]$, після розкриття модулів з відповідними знаками отримуємо рівняння:

$-\left(x+2\right)-\left(x-5\right)=7$;

$-x-2-x+5=7$;

$-2x=4 \Rightarrow x=-2$.

2) $x\in\left(-2;5\right]$, отримуємо рівняння: $x+2-x+5=7 \Rightarrow 7=7$ – тотожна рівність, тому всі числа з інтервалу є розв'язками рівняння.

3) $x\in\left(5;+\infty\right)$, рівняння набуває вигляду: $x+2+x-5=7$, $2x=10 \Rightarrow x=5$.

Остаточна відповідь – розв'язком є відрізок $x\in\left[-2;5\right]$, тобто будь-яке число з відрізка є розв'язком. Візьмемо, наприклад, $x=0$ і підставимо до рівняння:

$\left|0+2\right|+\left|0-5\right|=7$ – рівність правильна, тому 0 задовольняє рівняння.

Приклад 5. $x-\sqrt[3]{x^2-x-1}=1$.

Рівняння містить корінь непарного степеня (і не містить інших функцій, що мають обмеження, наприклад, вирази у знаменнику), тому область визначення знаходити не потрібно.

Перетворюємо рівняння до вигляду: $\sqrt[3]{x^2-x-1}=x-1$.

Підносимо до кубу ліву і праву частину, щоб позбутися кубічного кореня.

$\left(\sqrt[3]{x^2-x-1}\right)^3=\left(x-1\right)^3 \Rightarrow x^2-x-1=x^3-3x^2+3x-1$.

Після спрощення отримуємо рівняння: $x^3-4x^2+4x=0$. Виносимо за дужки x $x\left(x^2-4x+4\right)=0$ і помічаємо, що вираз в дужках є повним квадратом, тому $x\left(x-2\right)^2=0$. Отримуємо два корені: $x=0$ і $x=2$. Корінь $x=2$ називають коренем кратності 2.

Показникові рівняння

Показниковим називають рівняння, що містить змінну в показнику степеня. Наприклад, $2^x = 3;\ \ 4^x + 2^x - 6 = 0;\ \ 3^x + 5^x = 2$ є показниковими рівняннями.

Розглянемо основні типи задач, які потрібно навчитися розв'язувати, та методи їх розв'язання.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = b$, де $(a > 0, b > 0, a \neq 1)$ розв'язується логарифмуванням лівої та правої частини за основою a. Тобто застосовується дія до лівої і правої частини, що є оберненою до тієї, що присутня в умові.

Приклад. $5^x = 9$.

Логарифмуємо ліву і праву частини за основою 5: $\log_5 5^x = \log_5 9$. За властивістю логарифма, $x = \log_5 9$.

Рівняння з однаковими основами у лівій і правій частині: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, розв'язується логарифмуванням лівої та правої частин за основою a, тобто порівнянням показників степеня. Часто трапляються рівняння, які можна звести до рівнянь з однаковою основою перетворенням показникових виразів.

Приклад 1.

$4^{x^2-9} = 1.$

Перетворимо праву частину рівняння в степінь з основою 4: $4^{x^2-9} = 4^0$, тоді прирівнюємо показники: $x^2 - 9 = 0$, звідки отримуємо $x \in \{-3; 3\}$.

Приклад 2 .

$3^x \cdot 4^x = \left(12^{x+1}\right)^x.$

Перетворимо вираз до однієї основи. Ліва частина: $3^x \cdot 4^x = 12^x;$ права частина: $\left(12^{x+1}\right)^x = 12^{x^2+x}$. Рівняння набуде вигляду: $12^x = 12^{x^2+x}$, тобто $x^2 + x = x$, $x = 0$.

Приклад 3 . Рівняння, що після перетворень зводиться до потрібного типу:

$5 \cdot 2^x - 25 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x$

Групуємо вирази з однаковими основами: $5 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x + 25 \cdot 3^x$,

спрощуємо вирази $8 \cdot 2^x = 27 \cdot 3^x$, $\frac{8}{27} = \frac{3^x}{2^x}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$, $x = -3$.

Рівняння, що зводяться до алгебраїчних заміною змінної.

Приклад 1.

$3^x - 3^{2-x} + 8 = 0;$

$3^x - 3^2 \cdot 3^{-x} + 8 = 0;$

$3^x - 9 \cdot 3^{-x} + 8 = 0.$

Робимо заміну: $3^x = t$. Зауважимо, $t > 0$ за властивістю показникової функції.

Рівняння перетвориться на раціональне: $t - 9 \cdot \frac{1}{t} + 8 = 0$.

$\frac{t^2+8t-9}{t}=0$, $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-9 \end{array}\right.$. $t=-9$ – сторонній корінь, оскільки $t>0$.

Корінь $t=1$ дає відповідь $3^x=1$, $3^x=3^0$, $x=0$.

Приклад 2.

$5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$.

Робимо заміну: $5^x=t>0$, отримуємо квадратне рівняння: $t^2-6\cdot t+5=0$, розв'язавши яке, отримуємо: $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$, звідки $\left[\begin{array}{l} 5^x=1 \\ 5^x=5 \end{array}\right.$, тобто $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Приклад 3.

$3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}=5\cdot 6^x$.

Звертаємо увагу, що рівняння містить різні основи. Перетворимо праву частину:

$3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}=5\cdot 2^x\cdot 3^x$.

Таке рівняння називають **однорідним**, воно зводиться до квадратного.

1) $3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0$. Ділимо ліву та праву частини на 3^{2x}.

$3\cdot\frac{2^{2x}}{3^{2x}}-5\cdot\frac{2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}+2\cdot\frac{3^{2x}}{3^{2x}}=0$, $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$, заміна $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t>0$.

$3\cdot t^2-5\cdot t+2=0$, звідки $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{2}{3} \end{array}\right.$. Зворотна заміна: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x=1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Логарифмічні рівняння

Логарифмічні рівняння містять невідому величину під знаком логарифма або в основі логарифма.

Приклади логарифмічних рівнянь:

$\log_3 x=4$; $\log_x 3+\log_3 x=4$; $\log_3\log_4 x=0$.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь:

- за означенням логарифма;
- основною логарифмічною тотожністю;
- потенціюванням;
- логарифмуванням;
- переходом до іншої основи;
- методом заміни змінної.

Особливу увагу при розв'язуванні логарифмічних рівнянь слід звернути на виконання обмежень, які накладає логарифм, тобто виконання відповідних нерівностей, або області визначення.

За означенням логарифма: $\log_3 x=2$.

$x=9$, оскільки $\log_3 9=\log_3 3^2=2$.

Розв'язування логарифмічних рівнянь методом **потенціювання** – це використання лівої та правої частини як показників степеня степенів з однаковою основою.
$f(x)=g(x) \Rightarrow a^{f(x)}=a^{g(x)}$. Після застосування основної логарифмічної тотожності залишиться рівність підлогарифмічних виразів.

Приклад 1.

$\log_2(x+1)=\log_2 5$.

Знаходимо обмеження, які накладає властивість логарифма, та виконуємо потенціювання.

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$.

$$\log_2(x+1)=\log_2 5 \Rightarrow \begin{cases} 2^{\log_2(x+1)}=2^{\log_2 5} \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=5 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x=4$$ – корінь, що задовольняє нерівність.

Приклад 2.

$\log_3 \dfrac{2}{x+3}=\log_3 \dfrac{x-3}{8}$.

Записуємо нерівності, що задають область визначення рівняння, та виконуємо потенціювання:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{8}>0 \\ \dfrac{2}{x+3}>0 \\ \dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x-3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>-3 \\ x^2-9=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-5 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Число $x=-5$ не задовольняє нерівності, тому рівняння має лише один корінь: $x=5$.

Перехід до іншої основи.

Приклад 3.

$\log_{\frac{1}{2}} x=\log_4 5$.

Логарифми мають різні основи – $\dfrac{1}{2}$ і 4, але їх можна перетворити до однієї основи, наприклад, до основи 2.

$\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{2^{-1}} x=-\log_2 x$;

$\log_4 5=\log_{2^2} 5=\dfrac{1}{2}\log_2 5=\log_2\sqrt{5}$

Рівняння набуває вигляду: $-\log_2 x=\log_2\sqrt{5} \Rightarrow \log_2 x=-\log_2\sqrt{5} \Rightarrow$

$\log_2 x=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Приклад 4.

$\log_5\left(x^2-5x+1\right)=\log_2 4$.

$\log_2 4 = 2$, перетворимо його до вигляду логарифма за основою 5: $2 = \log_5 25$.

$\log_5\left(x^2 - 5x + 1\right) = \log_5 25$.

Записуємо область визначення рівняння та потенціюємо:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 1 = 25 \\ x^2 - 5x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 24 = 0 \\ x^2 - 5x + 1 > 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо квадратне рівняння і отримуємо корені $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 8 \end{array}\right.$. Підстановкою перевіряємо виконання нерівності. Обидва корені задовольняють нерівність.

Відповідь: $x \in \{-3; 8\}$

Заміна змінної.

Розглянемо **приклад 5**. $\log_4^2 x - 2\log_4 x - 3 = 0$

Ліва частина є алгебраїчною відносно логарифма, тобто якщо замінити $\log_4 x = t$, то отримаємо раціональне (квадратне) рівняння.

$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right.$. Робимо зворотну заміну: $\left[\begin{array}{l} \log_4 x = -1 \\ \log_4 x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ x = 64 \end{array}\right.$

Логарифмування.

Сформулюємо ознаки, за якими приймаємо рішення виконати логарифмування лівої і правої частини: 1) логарифм присутній у показнику степеня; 2) застосувати основну логарифмічну тотожність неможливо.

Логарифмування дозволить позбутися логарифма у показнику степеня.

Зручніше логарифмувати за основою, яка вже присутня в рівнянні.

Приклад 6.

$x^{\log_2 x} = 64 \cdot x^5$.

Логарифмуємо ліву і праву частину за основою 2:

$\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2\left(64 \cdot x^5\right)$.

Застосовуємо властивості логарифма:

$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 64 + \log_2 x^5$.

Перетворюємо рівняння: $\log_2^2 x = 6 + 5\log_2 x$.

Робимо заміну: $\log_2 x = t$, отримуємо квадратне рівняння.

$t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 6 \end{array}\right.$. Повертаємося до початкової змінної: $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 6 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 64 \end{array}\right.$.

Тригонометричним називають рівняння, в якому невідома входить під знаком тригонометричної функції, або алгебраїчні відносно тригонометричних функцій .

Усі тригонометричні рівняння зводяться до найпростіших за допомогою тотожних тригонометричних перетворень, розкладу на множники, заміни змінної.

Найпростіші тригонометричні рівняння та їх розв'язки, а також надзвичайно важливі окремі випадки:

$$\sin x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Окремі випадки:

$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$

$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

$$\cos x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n.$$

Окремі випадки:

$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$

$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$

$\cos x = -1, \quad x = \pi(2n+1), \ n \in \mathbb{Z}.$

$$tgx = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x = arctga + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
$$ctgx = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x = arcctga + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 1.

$2\sin x = 1.$

Перетворюємо рівняння до вигляду найпростішого: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Застосовуємо формулу: $x = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.

$2\cos x = -\sqrt{3}$.

Перетворюємо до найпростішого: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

За формулою: $x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Для обчислення арккосинуса від'ємного числа скористаємося формулою: $arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Отже, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ – усі розв'язки рівняння.

Якщо підставити замість n довільне число, наприклад, 0, то отримаємо конкретні розв'язки. $x = \pm\frac{5\pi}{6}$

Таку дію виконують, коли в умові задачі просять знайти конкретні корені або корені, що належать вказаному проміжку, або виконати дії з коренями – знайти суму, різницю, найбільший, найменший корінь.

Приклад 3.

$\sin^2 x + 5\sin x - 6 = 0$.

Виконуємо заміну $\sin x = t$, отримуємо квадратне рівняння: $t^2 + 5t - 6 = 0$, яке має корені $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -6 \end{array}\right.$.

Рівняння $\sin x = -6$ не має розв'язків, оскільки $-1 \le \sin x \le 1$.

$\sin x = 1$ - окремий випадок найпростішого рівняння, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4.

$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Рівняння є однорідним. Такий тип рівнянь згадувався в темі квадратні рівняння.

Ділимо ліву і праву частину на $\cos^2 x\ \left(\cos^2 x \ne 0\right)$.

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\cdot\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 4\cdot\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$.

$tg^2 x + 3\cdot tgx - 4 = 0$.

Робимо заміну $tgx = t$ і зводимо рівняння до квадратного.

$t^2 + 3t - 4 = 0$. Його розв'язки $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = -4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = arctg1 + \pi n \\ x = arctg\left(-4\right) + \pi n \end{array}\right.,\ n \in \mathbb{Z}$

$arctg(-x) = -arctgx$, тому $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -arctg4 + \pi n \end{array}\right.,\ n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5.

$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 1$.

Скористаємося основною тригонометричною тотожністю: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Переносимо все в ліву частину і зводимо подібні доданки:

$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Отримане рівняння – однорідне, розглянуте в попередньому прикладі.

Отже, довільну константу можна перетворити на суму квадратів синуса і косинуса, множених на цю константу.