Системи рівнянь

Системою рівнянь називають набір двох і більше рівнянь, заданих функціями багатьох змінних, які повинні задовольнятися одночасно. Систему рівнянь позначають фігурною дужкою. Будемо розглядати системи рівнянь з двома змінними. Системи рівнянь називають залежно від функцій, що входять до них, наприклад – система лінійних рівнянь, раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних. Також розглядають змішані системи – системи, у яких присутні різні типи функцій.

Розв'язок системи двох рівнянь – це пара чисел, що при підстановці перетворює кожне з рівнянь на тотожність.

Найчастіше системи розв'язують методом вилучення однієї змінної в одному з рівнянь і підстановкою в інше, методом заміни змінної та зведенням системи до простішого вигляду.

Розглянемо детальніше лінійні системи і деякі типи раціональних.

Лінійна система з двома невідомими має вигляд: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$. У ній присутні тільки перші степені невідомих, множення невідомих на число і додавання невідомих – лінійні дії.

Залежно від співвідношення коефіцієнтів системи, вона може мати розв'язки або ні.

Скористаємося для наочності геометричним трактуванням системи. Кожне рівняння системи задає деякий геометричний образ – набір точок, що задовольняють рівняння. Розв'язки системи – точки перетину геометричних образів різних рівнянь. У випадку лінійної системи – геометричними образами є прямі, оскільки кожне з рівнянь лінійної системи є рівнянням прямої на площині. Дві прямі на площині можуть перетинатися, можуть бути паралельними, а можуть співпадати, тому лінійна система при певних наборах чисел $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ може мати або єдиний розв'язок, або жодного, або безліч.

Система має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (одна спільна точка прямих).

Система не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (жодної спільної точки).

Система має безліч розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (усі точки спільні – розв'язок – будь-яка точка прямої).

Приклад. Знайти усі значення параметра a, при яких система має єдиний розв'язок: $\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 4 \\ ay - 2x = 4 \end{cases}$.

Записуємо нерівність $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ для нашої системи: $\frac{2}{-2} \neq \frac{2(a-1)}{a}$.

$-a \neq 2a - 2 \Rightarrow a \neq \frac{2}{3}$.

Отже, при $a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ система має єдиний розв'язок.

Симетричні системи

Симетричні системи – це системи, в яких кожне рівняння є симетричним, тобто таким, яке не змінює свого вигляду при заміні x на y і навпаки.

Наприклад: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 4 \\ xy = -1 \end{cases}$.

Для розв'язання використовують стандартну заміну: $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$.

Усі симетричні многочлени можна виразити через $x + y$ та xy.

Наприклад:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

$x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = u\left((x + y)^2 - 3xy\right) = u\left(u^2 - 3v\right)$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 4 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2 - 3v\right) = 4 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2 + 3\right) = 4 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 3u - 4 = 0 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - 1)\left(u^2 + u + 4\right) = 0 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x(1 - x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x - x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Очевидно, що якщо пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком симетричної системи, то й пара $(y_0; x_0)$ також розв'язок .

Однорідні системи

Однорідні системи містять в лівих частинах рівнянь однорідні многочлени, тобто многочлени вигляду $ax^2 + bxy + cy^2$.

Приклад: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3xy = 3 \\ 3x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$.

Віднімемо від другого рівняння перше, щоб отримати в правій частині нуль. Якби числа у правій частині були різними, то потрібно було б помножити рівняння на такі числа, щоб праві частини стали рівними: $2x^2+2y^2-4xy=0$.

$x^2+y^2-2xy=0$ – таке рівняння дозволяє виразити одну змінну через іншу, поділивши на квадрат однієї з них. У простішому випадку ліва частина є повним квадратом.

$x^2+y^2-2xy=0 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Rightarrow y=x$ – зв'язок між змінними.

Підставляємо в будь-яке з рівнянь початкової системи і отримуємо: $3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Отже, отримуємо відповідь: $(-1;-1)$, $(1;1)$.

Нерівності

Усі нерівності слід сприймати як нерівності між двома числами. Розв’язати нерівність – означає знайти всі значення змінної, при кожному з яких нерівність перетворюється на правильну числову. Розглянемо, наприклад, нерівність $\frac{x}{x-1}\geq 0$ – вона є нестрогою раціональною нерівністю, оскільки містить знак більше або рівне. Число 2 є розв’язком цієї нерівності, оскільки при підстановці утворюється правильна числова нерівність $2\geq 0$. Щоб знайти усі розв’язки, ліву частину нерівності будемо сприймати як частку від ділення двох чисел. Частка набуває невід’ємних значень, якщо чисельник і знаменник мають однаковий знак (знаменник не дорівнює 0).

$$\frac{x}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 0 \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x\leq 0 \end{array}\right.$$ Отже, $x\in(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$

Розглянемо спочатку раціональні нерівності – нерівності, що містять тільки раціональні функції, тобто многочлени у вигляді суми, добутку або частки.

Найраціональнішим способом розв’язання раціональних нерівностей є метод інтервалів.

Опишемо основні кроки методу інтервалів.

Крок 1. Перенести всі доданки в ліву частину нерівності (в правій частині утворити 0).

Крок 2. Розкласти на множники з урахуванням кратності ліву частину нерівності (звести до спільного знаменника, якщо потрібно)

Крок 3. Нанести на числову вісь усі нулі чисельника і знаменника лівої частини нерівності. Ці числа розділили вісь на інтервали.

Крок 4. Визначити знак лівої частини в крайньому правому інтервалі, підставивши число з цього інтервалу (що не є кінцем інтервалу). Визначити знаки на усіх інтервалах за наступним принципом – при русі справа наліво знак міняється при переході через корені непарної кратності та не змінюється при переході через корені парної.

Крок 5. Записати відповідь. Якщо нерівність має вигляд «$>$», то її задовольняють числа з інтервалів, що мають знак «+», якщо «$<$», то знак «–». У випадку нестрогих нерівностей ($\leq$, $\geq$) до відповіді долучають усі нулі чисельника, що не є нулями знаменника.

Приклад 1.

Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності: $\frac{x-8}{x^2-5x+4}>\frac{2}{x+1}$.

Переносимо всі доданки з лівої частини в праву: $\dfrac{x-8}{x^2-5x+4}-\dfrac{2}{x+1}>0$.

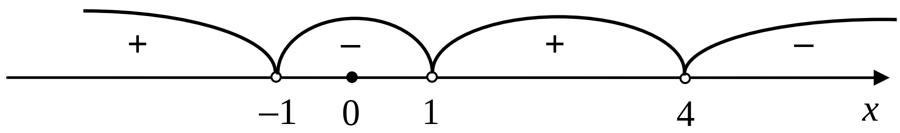
Зводимо до спільного знаменника ліву частину нерівності:

$$\frac{(x-8)(x+1)-2\left(x^2-5x+4\right)}{(x-1)(x-4)(x+1)}>0;\ \ \frac{x^2-7x-8-2x^2+10x-8}{(x-1)(x-4)(x+1)}>0;$$

$\dfrac{-x^2+3x-16}{(x-1)(x-4)(x+1)}>0$ – квадратний тричлен у чисельнику на множники не розкладається, оскільки його дискримінант від'ємний. Чисельник набуває тільки від'ємних значень і на нерівність не впливає. Якщо в нерівності вдається дізнатися про якийсь множник, що він не змінює знаку, то замість нього можна записати 1 або -1 залежно від того, яких значень він набуває.

Виписуємо нулі знаменника (нулів чисельника немає).

$x=1,\ \ x=-1,\ \ x=4$ і наносимо їх на числову вісь:



Знаходимо знак лівої частини в правому інтервалі, підставивши $x=5$ - знак «–».

Оскільки всі корені знаменника – кратності 1, то знак чергується.

Нерівність має вигляд «>», тому відповіддю будуть інтервали, що мають знак «+»: $x\in(-\infty;-1)\cup(1;4)$. Найменший цілий додатний розв'язок – 2.

Відповідь: 2.

Метод інтервалів можна застосовувати не лише для раціональних функцій, він застосовується для усіх типів функцій, для яких можна виконати розклад на множники (з урахуванням ОДЗ).

Наведемо приклади задач, в яких присутні функції різних типів.

Приклад.

$$\frac{|x-1|}{x^3-x^2+x-1}\le 0.$$

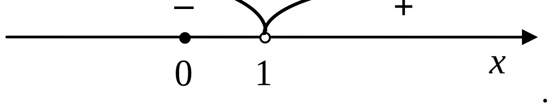
Одразу звертаю увагу, що чисельник набуває лише невід'ємних значень.

Розкладаємо знаменник на множники групуванням:

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+x-1=(x-1)\left(x^2+1\right).$$

Нерівність має вигляд: $\dfrac{|x-1|}{(x-1)\left(x^2+1\right)}\le 0$. Множник $\left(x^2+1\right)$ набуває тільки додатних значень, тому на нерівність не впливає, її можна переписати у вигляді: $\dfrac{|x-1|}{(x-1)}\le 0$.

Нуль чисельника і знаменника співпадають (отже, число $x=1$ не буде входити у розв'язок). Маємо лише 2 інтервали:



.

Записуємо відповідь: $x \in (-\infty;1)$.

Приклад.

Знайти кількість цілих розв'язків нерівності: $\dfrac{2x^2+x-6}{\sqrt{2+x-x^2}}<0$.

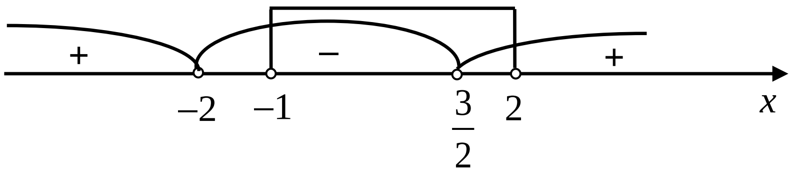
Проаналізуємо умову – в знаменнику присутній корінь парного степеня, який набуває тільки невід'ємних значень, тому вимагаємо виконання умови $2+x-x^2 \ge 0$ за властивістю кореня, а також $\sqrt{2+x-x^2} \ne 0$, оскільки вираз у знаменнику, тому $2+x-x^2>0$. Область, де виконується ця нерівність є областю визначення нерівності.

$2+x-x^2>0 \Rightarrow (1+x)(2-x)>0 \;\Rightarrow x\in(-1;2)$.

Розкладаємо на множники чисельник: $2x^2+x-6=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+2)$.

Наносимо на числову вісь числа $x=\dfrac{3}{2}$ та $x=-2$.

Якщо у нерівності присутнє обмеження, зумовлене областю визначення функцій, що входять в цю нерівність, то це зображають відповідним чином на осі – заштриховують або будують прямокутники (часто – напівнескінченні).



При записі відповіді враховуємо лише ту частину інтервалу, яка перетинається з відповідним прямокутником, що задає ОДЗ. У нашому прикладі беремо ту частину інтервалу $x\in\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)$, що лежить всередині інтервалу $x\in(-1;2)$, тобто $x\in\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Відповідь: кількість цілих розв'язків – 2.

При розв'язанні **показникових, логарифмічних і тригонометричних нерівностей** користуються властивостями функцій, а саме – монотонністю і періодом (для тригонометричних).

Розглянемо показникові та логарифмічні функції. Якщо основа показникового виразу a^x або основа логарифма $\log_a x$ більша одиниці ($a>1, a\ne 1$), то така функція монотонно зростає (якщо $x_1<x_2$, то $a^{x_1}<a^{x_2}$ і $\log_a x_1<\log_a x_2$) на всій області визначення, тому в нерівностях вигляду $a^{f(x)}\le a^{g(x)}$, $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}$, $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ можна перейти до нерівностей між показниками степенів, а в логарифмічних нерівностях $\log_a f(x)<\log_a g(x)$, $\log_a f(x)\le\log_a g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)$ – до нерівностей між підлогарифмічними виразами з обмеженнями, які диктуються ОДЗ (вирази під знаком логарифма завжди строго більші нуля).

Якщо ж основа менша одиниці ($0 < a < 1$), то в показникових і логарифмічних нерівностях міняють знак на протилежний!

Приклад.

$2^{x+1} < 1$.

Перетворимо праву частину до вигляду степеня з основою 2: $2^{x+1} < 2^0$. Основа більша одиниці, тому знак нерівності зберігається: $x+1<0 \Rightarrow x<-1$, тобто $x \in (-\infty;-1)$.

Приклад.

$\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} 4$

Основа менша одиниці, тому змінюємо знак нерівності на протилежний, а також записуємо область визначення : $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 0 \end{cases}$. Відповідь: $x \in (0;4]$.

Приклад.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$. Перетворюємо основу правої частини до вигляду основи лівої: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$. Основа менша одиниці, тому $x^2+x>6 \Rightarrow x^2+x-6>0 \Rightarrow$ $(x-2)(x+3)>0$ $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$.

Приклад.

$\log_5^2 x + 3\log_{\frac{1}{5}} x - 4 \leq 0$.

Перетворюємо ліву частину до логарифмів з однаковою основою: $\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 \leq 0$

Заміна: $\log_5 x = t$.

$t^2-3t-4 \leq 0 \Rightarrow (t+1)(t-4) \leq 0 \Rightarrow t \in [-1;4]$.

Повернувшись до змінної «x», зручно записати подвійну нерівність: $-1 \leq \log_5 x \leq 4 \Rightarrow$

$-\log_5 5 \leq \log_5 x \leq 4 \cdot \log_5 5$, $\log_5 \frac{1}{5} \leq \log_5 x \leq \log_5 625$, $\frac{1}{5} \leq x \leq 625$.

Зауважимо, що умова $x>0$ виконується автоматично, тому отримана нерівність вже є відповіддю: $x \in \left[\frac{1}{5};625\right]$.

Приклад.

$\log_{2x-6}\left(x^2-9\right) < 0$

Оскільки в основі логарифма присутня змінна, то слід розглянути два випадки – коли основа більша і коли менша одиниці. Запишемо спочатку ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-9>0 \\ 2x-6>0 \\ 2x-6\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3)>0 \\ x>3 \\ x\neq \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty) \\ x>3 \\ x\neq \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x\in\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$$

Випадок 1. Основа менша одиниці, тобто $0<2x-6<1 \Rightarrow x\in\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Нерівність перепишемо у вигляді нерівності з однаковими основами: $\log_{2x-6}\left(x^2-9\right)<\log_{2x-6}1$.

Знак нерівності змінюємо на протилежний і потенціюємо:

$$x^2-9>1 \Rightarrow x^2-10>0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)>0 \Rightarrow$$

$$x\in\left(-\infty;-\sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10};+\infty\right).$$

Знаходимо перетин з інтервалом $x\in\left(3;\frac{7}{2}\right)$ – отримуємо частину розв'язку нерівності, що відповідає першому випадку: $x\in\left(\sqrt{10};\frac{7}{2}\right)$.

Випадок 2. Основа більша одиниці: $x\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

$\log_{2x-6}\left(x^2-9\right)<\log_{2x-6}1$ потенціюємо і знак залишаємо без змін.

$$x^2-9<1 \Rightarrow x^2-10<0 \Rightarrow x\in\left(-\sqrt{10};\sqrt{10}\right).$$

Оскільки $\sqrt{10}<\frac{7}{2}$, то при $x\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$ нерівність розв'язків не має, тобто $x\in\varnothing$.

Остаточна відповідь: $x\in\left(\sqrt{10};\frac{7}{2}\right)$.

Розглянемо кілька прикладів нерівностей змішаного типу – таких, що містять різні типи функцій.

Приклад.

$$\frac{25^x-3\cdot 5^x-10}{x^2+5x-6}\le 0.$$

Знаходимо нулі чисельника та знаменника й розкладаємо їх на множники.

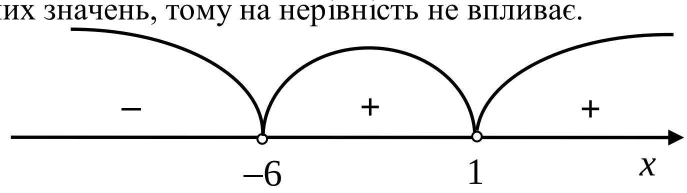
Для розкладу чисельника розв'язуємо показникове рівняння: $25^x-3\cdot 5^x-10=0$.

Заміна: $5^x=t$. $t^2-3\cdot t-10=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=5 \end{array}\right.$. Корінь $t=-2$ – сторонній, оскільки $5^x>0$. $5^x=5 \Rightarrow x=1$.

$25^x - 3\cdot 5^x - 10 = \left(5^x + 2\right)\left(5^x - 5\right)$.

$x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$.

Зверніть увагу, що корінь $x = 1$ є спільним для чисельника і знаменника, тому при переході через точку знак лівої частини нерівності не змінюється. Вираз $\left(5^x + 2\right)$ набуває тільки додатних значень, тому на нерівність не впливає.



Записуємо відповідь: $x \in (-\infty; -6)$.

Приклад.

$\sqrt{4x^2 + 7x - 2}\cdot \log_3(5-x) \le 0$.

Запишемо спочатку ОДЗ, оскільки в нерівності присутній корінь парного степеня та логарифм:

$$\begin{cases} 4x^2 + 7x - 2 \ge 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(x - \dfrac{1}{4}\right)(x+2) \ge 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup \left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right) \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\dfrac{1}{4}; 5\right)$.

Корінь квадратний набуває тільки невід'ємних значень, тому нерівність може виконуватись при $\log_3(5-x) \le 0$.

$\log_3(5-x) \le \log_3 1$; $5 - x \le 1 \Rightarrow x \ge 4$.

Знаходимо перетин з ОДЗ отриманого розв'язку: $x \in \{-2\} \cup \left\{\dfrac{1}{4}\right\} \cup [4; 5)$.

Тригонометричні нерівності.

При розв'язанні тригонометричних нерівностей важливу роль відіграє періодичність тригонометричних функцій. Спочатку розв'язок знаходять на проміжку, довжина якого дорівнює періоду, а тоді продовжують. При цьому зручно користуватися графіком відповідної функції.

Як і у випадку з тригонометричними рівняннями, існують формули для усіх найпростіших тригонометричних нерівностей.

$\sin x \ge a$,

якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$,

якщо $-1 \le a \le 1$, то $\arcsin a + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in Z$,

якщо $a > 1$, то нерівність не має розв'язків.

$\sin x \le a$,

якщо $a < -1$, то нерівність не має розв'язків,

якщо $-1 \le a \le 1$, то $\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le 2\pi + \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in Z$, якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

$\cos x \geq a$,
якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$,
якщо $-1 \leq a \leq 1$, $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$,
якщо $a > 1$, то нерівність не має розв'язків.

$\cos x \leq a$,
якщо $a < -1$, то нерівність не має розв'язків ,
якщо $-1 \leq a \leq 1$, $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$,
якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

$tgx \geq a, \ \ a \in R$,

$$arctga + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in Z .$$

$tgx \leq a, \ \ a \in R$,

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctga + \pi n, \ \ n \in Z .$$

$ctgx \geq a, \ \ a \in R$,
$\pi n < x \leq arcctga + \pi n, \ \ n \in Z$.

$ctgx \leq a, \ \ a \in R$,
$arcctga + \pi n \leq x < \pi + \pi n, \ \ n \in Z$.

Приклад.

$$\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Нерівність є найпростішою, тому підставимо в формулу:

$$\pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq 2\pi + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z .$$

Оскільки $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n \in Z$;

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{7\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n \in Z .$$

Ділимо на 2 кожну частину подвійної нерівності: $\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + \pi n, \ \ n \in Z$.

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n\right], \ \ n \in Z$.

Приклад. Знайти найменший додатний розв'язок нерівності.

$tg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$. Підставляємо в формулу:

$$arctg0+\pi n\leq 3x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z;$$

$arctg0=0$, тому $\pi n\leq 3x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Перетворюємо нерівність: $\frac{\pi}{4}+\pi n\leq 3x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi n$;

$\frac{\pi}{4}+\pi n\leq 3x<\frac{3\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}\leq x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

$x\in\left[\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z$. При підстановці $n=-1$: $x\in\left[\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$,

$x\in\left[-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{12}\right)$. При підстановці $n=0$: $x\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right)$.

Найменший додатний розв'язок – $x=\frac{\pi}{12}$.

Приклад.

$2\cos^2 x-\cos x-1\geq 0$.

ОДЗ: $x\in R$.

Заміна: $\cos x=t$. Отримуємо квадратичну нерівність: $2t^2-t-1\geq 0$

$$2(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)\geq 0\ \Rightarrow\ t\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty).$$

Оскільки $-1\leq\cos x\leq 1$, то $\cos x\leq -\frac{1}{2}$ і $\cos x=1$;

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n\leq x\leq 2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3};$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq 2\pi-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z;$$

$\cos x=1\ \Rightarrow\ x=2\pi n$.

Отже, $x\in\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\{2\pi n\},\ \ n\in Z$.

Для глибшого розуміння матеріалу слід не просто завчити методи розв'язання рівнянь, нерівностей, інших задач, а навчитися аналізувати умову задачі, враховувати можливість зміни умови задачі або відмінність постановки задачі від стандартної. Один із найкращих способів розширити сприйняття математичної задачі – це мислення і уявлення «функціями».

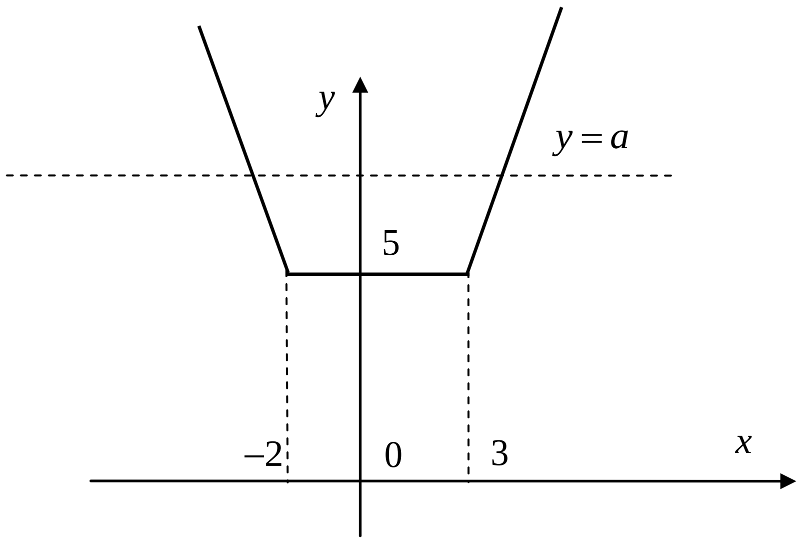
Графічне розв’язання рівнянь – це знаходження абсцис точок перетину графіків двох функцій.
Нерівність – це нерівність між двома числами, між ординатами двох точок з однією абсцисою, що лежать на графіках двох функцій. Розв'язок нерівності – це проміжок (значення абсциси), на якому графік однієї функції лежить вище (чи нижче) іншої.
При розв’язанні багатьох задач корисно навчитися будувати нерівності – оцінювати вирази, що містять змінну, тобто знаходити межі, в яких змінюється вираз, залежно від змінної. У таких задачах вирішальну роль відіграють властивості функцій – монотонність, обмеженість, симетрії графіка (парність, непарність).

Приклад. Розв’язати рівняння. $3^x + 5^x = 2$.
У рівняннях, що містять різні (особливо різні типи функцій) функції, іноді вдається підібрати корінь. Якщо це вдалося, то треба перевірити чи він єдиний. Наприклад, при $x = 0$: $3^0 + 5^0 = 2$.

Рівняння містить показникові функції з різними основами. Функції $y = 3^x$ і $y = 5^x$ монотонно зростають на всій числовій осі, тому їх сума також монотонно зростає. Отже, деякого значення $y = 2$, сума може набути лише один раз, тобто корінь рівняння лише один.

Приклад. Розв’язати рівняння: $\cos(\pi x + \pi) = x^2 + 2x + 2$
Коли у рівнянні присутні різні типи функцій у лівій і правій частині (тригонометрична і раціональна), то варто оцінити їх області значень.
У лівій частині рівняння – обмежена функція: $-1 \le \cos x \le 1$.
Права частина рівняння: $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$.
$(x+1)^2 \ge 0$, тому $(x+1)^2 + 1 \ge 1$.
Рівність може досягатися лише у випадку, коли обидві частини рівняння одночасно рівні одиниці. Права частина може бути рівною одиниці при $x = -1$ (і більше ні при яких значеннях), а ліва частина може бути рівною 1 в нескінченній кількості точок, оскільки функція періодична. Перевіримо підстановкою в ліву частину $x = -1$ чи будуть вони рівні 1 одночасно: $\cos(\pi(-1) + \pi) = \cos 0 = 1$. Отже, $x = -1$ – єдиний корінь.

Приклад. Скільки розв’язків має рівняння $|x+2| + |x-3| = a$ в залежності від значень параметра?
Розв’яжемо задачу графічно – побудуємо графік лівої і правої частини рівняння.
Права частина: $y = a$ – графіком є горизонтальні прямі.
Побудуємо графік лівої частини: $y = |x+2| + |x-3|$. Можна розкрити модулі на відповідних інтервалах, а можна звернути увагу на те, що змінна входить в першому степені, тому при розкритті модуля буде задавати пряму на кожному інтервалі. Пряму можна побудувати по двох точках. Виберемо по дві точки з кожного інтервалу, на які розділять числову вісь нулі виразів, що під знаком модуля (числа -2 і 3). Для спрощення будемо брати одну з них на межі інтервалу, тобто точки -2 і 3.
$y(-3) = |-3+2| + |-3-3| = 7$;
$y(-2) = |-2+2| + |-2-3| = 5$;
$y(3) = |3+2| + |3-3| = 5$;
$y(4) = |4+2| + |4-3| = 7$.



За кількістю точок перетину прямої (залежно від a) і ламаної записуємо відповідь.

$a \in (-\infty;5)$ – розв'язків немає;

$a = 5$ – розв'язків безліч, оскільки довільна точка відрізка ламаної при $x \in [-2;3]$ лежить на прямій $y = 5$;

при $a \in (5:+\infty)$ – два розв'язки.

Для того, щоб будувати нерівності, корисно знати деякі відомі нерівності, а також властивості основних функцій.

Приклад. Розв'язати рівняння: $\left|x^2 - 8x - 9\right| + \sqrt{\cos 2\pi x - 1} = 0$. Знайти суму розв'язків.

Оскільки ліва частина рівняння є сумою двох додатно визначених функцій, то рівність може досягатися тільки тоді, коли обидва доданки одночасно рівні нулю. Зручніше спочатку знайти корені неперіодичної функції.

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 9 \end{array}\right..$$

Підстановкою знайдених коренів перевіримо чи виконується рівність $\cos 2\pi x - 1 = 0$.

$x = -1$: $\cos(-2\pi) - 1 = \cos(2\pi) - 1 = 1 - 1 = 0$ – рівність виконується.

$x = 9$: $\cos(18\pi) - 1 = \cos(0) - 1 = 1 - 1 = 0$– рівність виконується.

Отже, $x \in \{-1;9\}$. Сума коренів: $-1 + 9 = 8$.

Наведемо основні нерівності, які є відомими та найчастіше допомагають побудувати обмеження для функцій, що містяться в лівій або правій частині рівнянь або нерівностей.

Нерівність Коші (між середнім арифметичним і середнім геометричним):

Для $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0$: $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Часто корисною є нерівність, що містить ***взаємно обернені вирази***.

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$, якщо $ab > 0$, та $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \leq -2$, якщо $ab < 0$.

Зокрема, $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, якщо $a > 0$ та $a + \dfrac{1}{a} \leq 2$, якщо $a < 0$.

Нерівності для тригонометричних функцій.

Розглянемо лінійну комбінацію синуса та косинуса з рівними аргументами: $a\sin x + b\cos x$ (a та b можуть мати довільний знак). Таке поєднання традиційно зустрічається в тригонометричних рівняннях вигляду: $a\sin x + b\cos x = c$, яке розв'язується методом «додаткового» або «штучного» кута.

Ділимо ліву і праву частину рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ такі, що їх модулі менші одиниці (знаменник більший чисельника) та їх сума квадратів рівна 1, тому існує такий кут φ, що $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, а $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Рівняння можна переписати у вигляді: $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ або $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Можна одразу записати умови існування розв'язку такого рівняння, а саме: $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$. А також ми отримали обмеження, які має вираз $a\sin x + b\cos x$.

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a\sin x + b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$$

$-1 \le \sin(x+\varphi) \le 1$, тому

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

Розглянемо **приклад**: знайти найбільше значення параметра a, при якому має розв'язки рівняння $\frac{1}{2}\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) = 3a - a^2 - 1$.

Оцінимо ліву частину рівняння за допомогою отриманої нерівності:

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \le \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \le \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$-1 \le \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \le 1$$

Отже, права частина рівняння теж повинна лежати в межах від -1 до 1, щоб рівняння мало розв'язок. Знайдемо усі a, при яких це можливо: $-1 \le 3a - a^2 - 1 \le 1$.

Для того, щоб розв'язати подвійну нерівність, розв'яжемо кожну окремо, а потім знайдемо спільну частину розв'язку, тобто перетин інтервалів, що є розв'язками кожної з нерівностей.

$$3a-a^2-1\le 1 \Rightarrow a^2-3a+2\ge 0 \Rightarrow (a-1)(a-2)\ge 0 \Rightarrow a\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$$

$$-1\le 3a-a^2-1 \Rightarrow a^2-3a\le 0 \Rightarrow a(a-3)\le 0 \Rightarrow a\in[0;3].$$

Знайдемо спільну частину: $a\in[0;1]\cup[2;3]$.

Найбільше значення, що задовольняє умову задачі - $a=3$.

Приклад. Знайти найбільше значення функції $y=\dfrac{2}{3\cos x-7}$.

Побудуємо спочатку обмеження для знаменника, а тоді скористаємося властивістю: якщо $a<b$, то $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

Виконаємо побудову поступово:

$-1\le\cos x\le 1$

$-3\le 3\cos x\le 3$

$-3-7\le 3\cos x-7\le 3-7$ тобто $-10\le 3\cos x-7\le -4$

$\dfrac{1}{-10}\ge\dfrac{1}{3\cos x-7}\ge\dfrac{1}{-4}$ тобто $-0,25\le\dfrac{1}{3\cos x-7}\le -0,1$.

Найбільше значення: -0,2.

Приклад. Знайти значення параметра a, при якому корінь рівняння $\log_3(\cos 2\pi x)=\sqrt{17-a+x}$ належить проміжку $(6;8)$.

Знайдемо область значень лівої та правої частини, оскільки рівняння містить декілька різних типів функцій. Права частина рівняння – корінь квадратний – величина невід'ємна, тому й ліва частина повинна бути невід'ємною.

$-1\le\cos 2\pi x\le 1$. Оскільки аргумент логарифма повинен бути строго додатним, то $0<\cos 2\pi x\le 1$.

$-\infty<\log_3(\cos 2\pi x)\le 0$.

Отже, ліва частина рівняння не перевищує 0, а права – більша або рівна 0. Рівність можлива тільки у випадку, якщо обидві частини рівняння одночасно рівні 0.

У задачах з параметром радимо починати з тієї частини рівняння або того рівняння системи, що не містить параметра.

Отже, $\log_3(\cos 2\pi x)=0 \Leftrightarrow \cos 2\pi x=1$ – найпростіше тригонометричне рівняння - $2\pi x=2\pi n,\ n\in Z$.

$x=n,\ n\in Z$.

Оскільки корінь належить вказаному інтервалу, то $x=7$.

$\sqrt{17-a+x}=0$, тому $17-a+x=0$, звідки $a=24$.

Текстові задачі або задачі на складання рівнянь (або систем) можна умовно розділити на кілька основних типів –задачі на рух, на суміші, на спільну роботу, на відсотки.

Задачі на рух. Основна формула: $S = V \cdot t$, де S – пройдений шлях, V – швидкість, t – час. При складанні рівнянь зручно позначати змінною рівняння ту величину, яку потрібно знайти в задачі.

Слід враховувати такі прийняті домовленості: 1) якщо немає спеціальних зауважень, то рух вважають рівномірним; 2) швидкість – величина додатна; 3) будь-які зміни в русі вважаються миттєвими.

Приклад. З міст A і B, відстань між якими 310 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі зі сталими швидкостями 75 км/год. і 80 км/год. Знайти вираз для відстані S (у км) між ними в момент часу t год., якщо вони ще не зустрілися.

За час t перший автомобіль проїде $75t$ км, а другий $80t$ км. Отже, $S = 310 - 80t - 75t = 310 - 155t$.

Скориставшись отриманим виразом, можна легко знайти час, через який вони зустрінуться – в цей момент $S = 0$, тобто $310 - 155t = 0$, $t = 2$.

Приклад. Моторний човен, що має швидкість 20км/год. пройшов відстань між двома пунктами туди і назад за 6 год. 15 хв. Відстань між пунктами 60 км. Знайти швидкість течії річки.

Позначимо через x швидкість течії.

За течією човен рухається зі швидкістю $20 + x$, а проти течії – $20 - x$.

Час переведемо в години. 6 год. 15 хв. = $6+\frac{15}{60} = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$.

Складаємо рівняння: $\frac{60}{20+x} + \frac{60}{20-x} = \frac{25}{4}$.

$$\frac{12}{20+x} + \frac{12}{20-x} = \frac{5}{4}$$

$$12\cdot\left(\frac{1}{20+x} + \frac{1}{20-x}\right) = \frac{5}{4};\ 12\cdot\frac{20-x+20+x}{20^2-x^2} = \frac{5}{4};\ 12\cdot\frac{40}{20^2-x^2} = \frac{5}{4};$$

$$12\cdot\frac{8}{20^2-x^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 400 - x^2 = 12\cdot 8\cdot 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ км/год.}$$

Задачі на спільну роботу.

У задачах на спільну роботу використовують наступні величини:

1) обсяг усієї роботи – A (найчастіше беруть за одиницю, крім випадків, коли йдеться про конкретний обсяг виконаної роботи);

2) час t, протягом якого виконується робота;

3) продуктивність праці $V = \frac{A}{t}$ (робота, що виконується за одиницю часу – аналог швидкості в задачах на рух)

Приклад. Двоє робітників виконують певне завдання разом за 8 годин. Перший, коли працює окремо, може виконати його на 12 годин швидше, ніж другий. За скільки годин може виконати завдання кожен з них окремо?

Позначимо роботу, яку повинні виконати робітники за 1. Нехай продуктивність праці першого з них – x, тоді час, за який він виконає роботу – $\frac{1}{x}$. Якщо позначити продуктивність праці другого робітника як y, то коли вони працюють разом, їх продуктивності праці додаються, тобто $\frac{1}{x+y}=8$.

За умовою, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=12$, оскільки другий роботу виконає на 12 годин пізніше.

Можна скласти систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{1}{x+y}=8 \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=12 \end{cases}$.

З першого рівняння вилучимо змінну y і підставимо в друге: $x+y=\frac{1}{8}$, $y=\frac{1}{8}-x$.

$$\frac{1}{\frac{1}{8}-x}-\frac{1}{x}=12 \Rightarrow \frac{8}{1-8x}-\frac{1}{x}=12 \Rightarrow 8x-(1-8x)=12x(1-8x) \Rightarrow$$

$96x^2+4x-1=0$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{12} \\ x=-\frac{1}{8} \end{array}\right.$; $x=-\frac{1}{8}$ – сторонній корінь.

Отже, $x=\frac{1}{12}$, тому перший робітник виконає завдання за 12 год, а другий на 12 год більше, тобто за 24 год.

Задачі на відсотки.

Число b рівне $x\%$ відсотків від a: $b=\frac{x\%}{100\%}\cdot a$.

Формула складних відсотків. $A_k=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^k$, де A_k – прибуток, отриманий за k років, A – початковий капітал, покладений під $p\%$ (вважається, що відсотки додаються до вкладу).

Приклад. Заробітну плату спочатку підвищила на 20%, а потім ще на 15%. На скільки відсотків зросла заробітна плата?

Нехай початкова заробітна плата рівна x. Після підвищення на 20% вона становить $x+0,2x=1,2x$.

Після підвищення ще на 15%: $1,2x+1,2x\cdot 0,15=1,38x$.

Порівняємо тепер із початковою зарплатою та виразимо у відсотках.

$\frac{1,38x-x}{x}\cdot 100\%=38\%$.

Приклад. Свіжі яблука містять 72% води, а сушені – 20%. Скільки сушених яблук вийде з 20 кг свіжих?

У задачах такого типу зручно знайти масу яблука, що взагалі не містить води, тобто 28% від загальної маси. $20\cdot 0,28=5,6$ кг. Це буде 80% частини сушених яблук, оскільки вони повинні містити ще 20% води.

Складаємо рівняння (x – маса сушених яблук): $\dfrac{x-5,6}{x}=0,2$, звідки $x=7$.

Приклад.
Вкладник відкрив депозит на 10000 грн в банку під 16% річних.
Яка сума буде на рахунку через 2 роки?

Застосовуємо формулу складних відсотків: $A_2=10000\cdot\left(1+\dfrac{16}{100}\right)^2=13456$.

Через скільки років сума подвоїться?

$20000=10000\cdot\left(1+\dfrac{16}{100}\right)^x \Rightarrow 2=1{,}16^x$. Розв'язуємо показникове рівняння і отримуємо, що сума подвоїться через 5 років (вважаємо, що відсотки нараховуються раз на рік).

Задачі на суміші.

При розв'язанні задач на суміші або сплави часто розглядають так звану масову частку або масову концентрацію – відношення маси однієї речовини до маси всієї суміші.

Приклад. Є шматок сплаву міді з оловом масою 24 кг, що містить 45% міді. Скільки чистого олова треба додати до цього сплаву, щоб отриманий новий сплав містив 40% міді?

Позначимо через x ту масу олова, яку потрібно додати. У шматку масою 24 кг є $24\cdot 0,45=10{,}8$ кг міді. Оскільки маса міді не зміниться після додавання олова, то $\dfrac{10{,}8}{24+x}=0,4$ – відношення маси міді до маси нового сплаву.

$\dfrac{10{,}8}{0,4}=24+x \Rightarrow 27=24+x \Rightarrow x=3$ кг.