Стереометрія вивчає властивості тіл і фігур у просторі.

Наведемо основні аксіоми і теореми курсу стереометрії.

Аксіоми

1. Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину (*аксіома площини*).

2. Якщо дві точки належать одній площині, то й пряма, що їх сполучає, належить цій площині.

3. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають спільну пряму — лінію перетину цих площин.

Основні теореми

Теорема 1. Через пряму та точку, що не лежить на ній, можна провести площину й до того ж лише одну.

Теорема 2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину й до того ж лише одну.

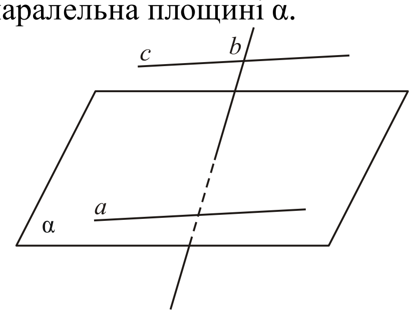
Мимобіжними називаються прямі, що не лежать в одній площині.

Теорема 3. Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й інша пряма перетинає площину.

Теорема 4. Через дві паралельні прямі можна провести площину й до того ж лише одну.

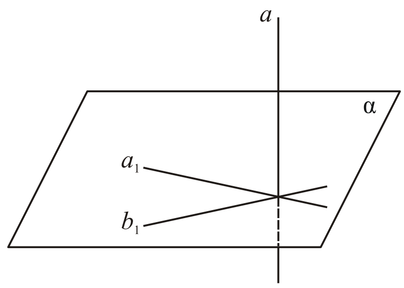
Ознаки

Ознака паралельності прямої та площини. Якщо пряма паралельна деякій прямій a, що лежить у площині α, то вона паралельна площині α.



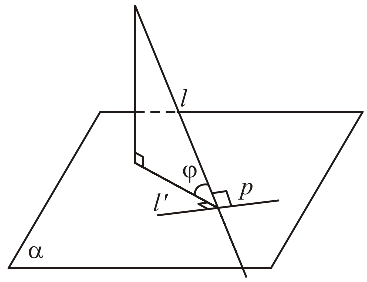
Пряма a називається ***перпендикулярною до площини*** α, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що належить площині α.

Ознака перпендикулярності прямої та площини. Пряма a перпендикулярна до площини α, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і лежать у площині a.



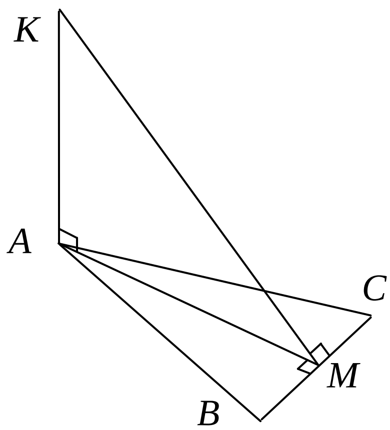
Двогранним кутом називається частина простору, обмежена двома півплощинами, що мають спільну межу, яка називається *ребром* двогранного кута. Якщо пряма a_1, що лежить у площині α, перпендикулярна до ребра a і пряма b_1, що лежить у площині β, перпендикулярна до ребру a, то кут між прямими a_1 і b_1 називається ***лінійним кутом двогранного кута***.

Теорема **(про три перпендикуляри).** Якщо похила l перпендикулярна до деякої прямої p площини α, то її проекція також перпендикулярна до прямої p .



Розглянемо приклади.

Приклад 1. У трикутнику ABC $AB = AC = 17$ см, $BC = 16$ см. З вершини кута A трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр AK. Обчисліть (у см) довжину AK, якщо відстань від точки K до прямої BC дорівнює 25 см.



Нехай M — основа перпендикуляра, проведеного до BC. За теоремою про три перпендикуляри, $AM \perp BC$.

Оскільки трикутник $\triangle KAM$ — прямокутний (KA за умовою перпендикулярний до площини трикутника), то потрібно знайти катет AM.

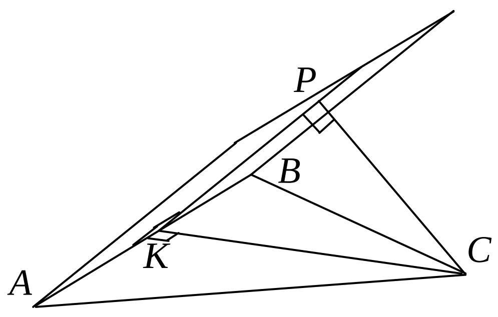
Оскільки трикутник $\triangle ABC$ - рівнобедрений, то AM — бісектриса та медіана. $BM = MC = 8$ см.

З $\triangle BMA$: $AM = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ см.

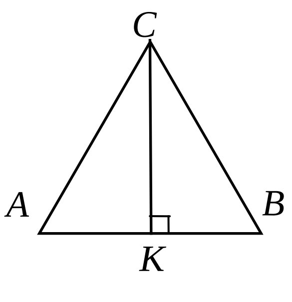
З $\triangle KAM$: $KA = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ см.

Приклад 2.

Через сторону AB правильного трикутника ABC з стороною 18 см проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 45°. Обчисліть відстань від точки C до цієї площини.



Нехай пряма KP лежить у проведеній площині, CK — висота трикутника $\triangle ABC$, P — основа перпендикуляра, опущеного на площину з точки C. Шукану довжину перпендикуляра знайдемо з прямокутного трикутника $\triangle CPK$, за умовою $\angle CKP = 45^\circ$, тому трикутник $\triangle CPK$ є рівнобедреним прямокутним трикутником. Знайдемо його гіпотенузу CK як висоту правильного трикутника $\triangle ABC$.



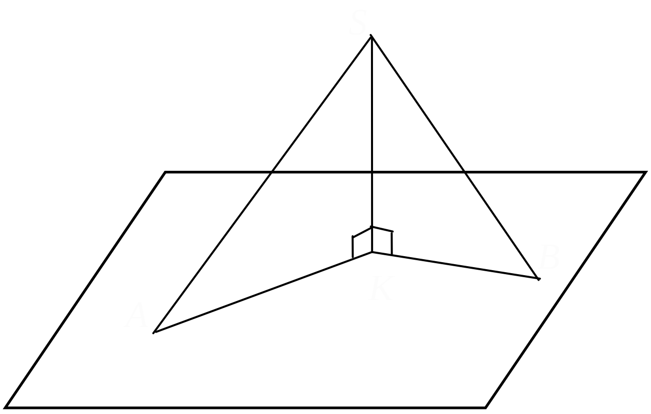
У багатьох стереометричних задачах зручно зробити один або декілька додаткових плоских малюнків.

$AC = 18$ см, $AK = 9$ см. З $\triangle AKC$ за теоремою Піфагора:

$$CK = \sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$CP = \frac{CK}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{6} \text{ см.}$$

Приклад 3.



З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 25 см та 29 см. Різниця проекцій цих похилих дорівнює 6 см. Обчисліть відстань від точки до площини.

Нехай $SA = 29$ см, $SB = 25$ см – похилі, проведені з точки S.

$AK - BK = 6$ см.

Позначимо через x см проекцію AK. Тоді $BK = x - 6$.

Розглянемо два прямокутних трикутники $\triangle AKS$ і $\triangle BKS$, вони мають спільний катет SK — шукана величина. Записуємо теорему Піфагора для кожного з цих трикутників.

$SK^2 = 29^2 - x^2$; $SK^2 = 25^2 - (x-6)^2$.

Складаємо рівняння: $29^2 - x^2 = 25^2 - (x-6)^2$.

$29^2 - 25^2 = x^2 - (x-6)^2$.

$29^2 - 25^2 = x^2 - (x-6)^2$.

$216 = 12x - 36 \Rightarrow x = 21$.

$SK^2 = 29^2 - 21^2 = 400$; $SK = 20$ см.

Багатогранники: призма, піраміда

Призма. Якщо у двох паралельних площинах α і β містяться рівні між собою багатокутники, відповідні сторони яких попарно паралельні, а відповідні вершини сполучено відрізками, то утворений у такий спосіб многогранник називається ***призмою.***

Прямою називається призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площини основи.

Правильною називається пряма призма, в основі якої лежить правильний многокутник.

Об'єм призми обчислюють за формулою: $V = S_{осн} \cdot H$.

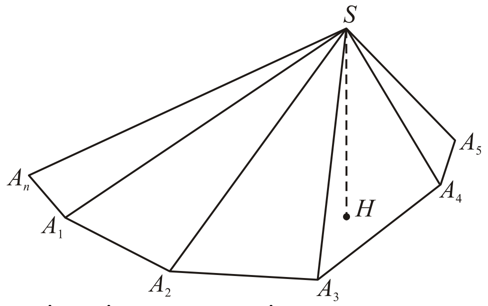
Площа бічної поверхні – площу усіх бічних граней: $S_б = P \cdot H$, де P — периметр основи.

Частинними випадками призми є ***прямокутний паралелепіпед*** — пряма призма, в основі якої лежить прямокутник, і ***куб*** — правильна призма, в основі якої лежить квадрат.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку довжин трьох ребер, що виходять з однієї вершини: $V = abc$.

Піраміда

Нехай на площині α лежить опуклий багатокутник, а точка *S* не належить площини α. Сполучивши точку *S* із вершинами многокутника, дістанемо багатогранник, що називається ***n-кутною пірамідою***. Багатокутник називається ***основою*** піраміди. *Висотою* піраміди називається відрізок перпендикуляра, опущеного з вершини *S* на площину основи.



Правильною називається піраміда, в основі якої лежить правильний багатокутник, а висота проходить через центр кола, описаного навколо основи.

Об'єм довільної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи, H — висота.

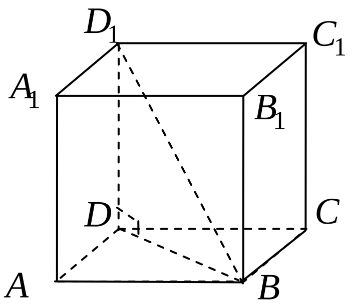
Сфера називається ***описаною*** навколо багатогранника, якщо вона проходить через усі його вершини. Сфера називається *вписаною* у многогранник, якщо вона дотикається до всіх його граней.

Теорема 1. Для того щоб навколо піраміди можна було описати сферу, необхідно та достатньо, щоб навколо багатокутника, що лежить в її основі, можна було описати коло.

Теорема 2. Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати сферу і в будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.



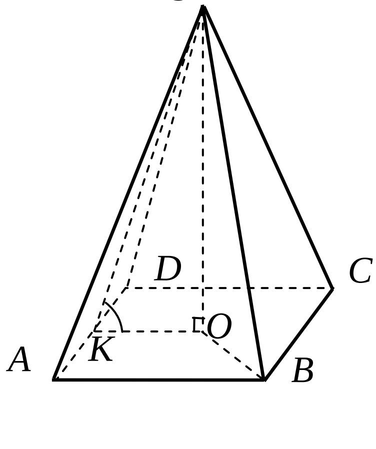
У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро – 6 см. Обчисліть довжину діагоналі призми.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна чотирикутна призма – прямокутний паралелепіпед, в основі якого квадрат. Знайдемо діагональ BD_1 із прямокутного трикутника $\triangle BDD_1$.

$BD = 8\sqrt{2}$ як діагональ квадрата.

$$BD_1 = \sqrt{6^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{41} \text{ см.}$$

Приклад 2.



У правильній чотирикутній піраміді довжина сторони основи дорівнює 8 см, а довжина бічного ребра – $4\sqrt{5}$ см. Знайдіть величину двогранного кута при ребрі основи піраміди.

Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, тобто $ABCD$ — квадрат. O — точка перетину діагоналей квадрата. $OK \perp AD$.

$OK = 4$ см.

Знайдемо висоту піраміди з $\triangle BOS$.

$OB = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ см – як половина діагоналі квадрата.

За теоремою Піфагора, $SO=\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=4\sqrt{3}$ см.

Знайдемо кут при ребрі (лінійний кут двогранного кута) з $\triangle KOS$.

$$\frac{SO}{OK}=tg\alpha\ ;\ tg\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3},\ \text{тоді}\ \alpha=60^\circ.$$

Приклад 3. У скільки разів збільшиться об’єм правильної трикутної призми, якщо кожну сторону її основ збільшити у 3 рази, а бічне ребро збільшити у два рази?

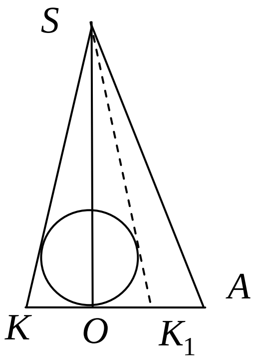
Формула для $V=S_{осн}H$, де $S_{осн}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площа правильного трикутника зі стороною a.

$$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H.$$

Якщо збільшити сторони основи у 3 рази, а бічне ребро, тобто висоту – у 2 рази, то отримаємо: $V_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2(2H)=18\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2H=18\cdot V$.

Отже, об’єм збільшиться у 18 разів.

Приклад 4. У правильну трикутну піраміду, висота якої дорівнює 36 см, вписано кулю радіуса 12 см. Знайдіть довжину (у см) сторони основи цієї піраміди.



Розглянемо переріз піраміди, що проходить через її ребро і центр кулі.

S — вершина піраміди, O — її проекція на основу – центр вписаного і описаного навколо основи кола. За умовою $SO=36$ см. K — основа апофеми, A — вершина піраміди.

Нехай x — сторона основи, тоді $KO=\dfrac{x\sqrt{3}}{6}$ см. Добудуємо SK_1 — дотичну до кола. Трикутник $\triangle SKK_1$ — рівнобедрений, а коло, що є перерізом вписаної кулі – вписане в цей трикутник.

З $\triangle KOS$: $SK=\sqrt{36^2+\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{36^2+\dfrac{x^2}{12}}$.

Скористаємося формулою: $S=pr$, де $r=12$ см.

$$S_{\triangle SKK_1}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{x\sqrt{3}}{6}\cdot 36=6\sqrt{3}x.$$

Півпериметр: $p=OK+SK=\dfrac{x\sqrt{3}}{6}+\sqrt{36^2+\dfrac{x^2}{12}}$.

Складаємо рівняння: $6\sqrt{3}x=\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{6}+\sqrt{36^2+\dfrac{x^2}{12}}\right)\cdot 12$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{x\sqrt{3}}{6}+\sqrt{36^2+\frac{x^2}{12}}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{36^2 + \frac{x^2}{12}}.$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 36^2 + \frac{x^2}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 36^2 + \frac{x^2}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 36^2 \Rightarrow x = 72 \text{ см.}$$

Тіла обертання

Тіло, утворене обертанням прямокутника навколо осі, що проходить через середини його протилежних сторін, називають циліндром.

Площа бічної поверхні кругового циліндра радіуса r дорівнює добутку довжини кола, що лежить у його основі, на висоту циліндра:

$$S = 2\pi rh.$$

Об’єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту циліндра:

$$V = \pi r^2 h.$$

Тіло, утворене обертанням рівнобедреного трикутника навколо висоти, проведеної до основи, називають конусом.

Площа бічної поверхні прямого кругового конуса дорівнює половині добутку довжини кола основи на твірну конуса:

$$S = \frac{1}{2}2\pi rl = \pi rl,$$

де r — радіус основи конуса; l — його твірна.

Об’єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Сферичною поверхнею, або ***сферою***, називається геометричне місце точок простору, віддалених на однакову відстань R від однієї точки, яку називають ***центром*** сфери. Тіло, обмежене сферичною поверхнею, називається ***кулею***. Сфера є поверхнею обертання. Вона утворюється при обертанні кола навколо будь-якого його діаметра. ***Великим колом*** називається лінія перетину кулі площиною, що містить центр кулі.

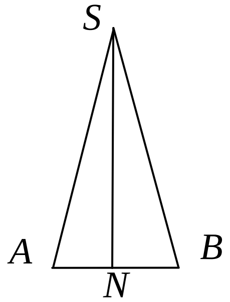
Площа поверхні кулі дорівнює почетвереній площі великого круга:

$$S = 4\pi R^2.$$

Об’єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Приклад 1.



Обчисліть площу бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює 16 см, а висота 30 см.

Записуємо формулу для знаходження бічної поверхні: $S_б = \pi rl$.

Розглянемо осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник.

$SN = 30$ см – висота конуса, $NB = 16$ см – радіус основи.

Знаходимо твірну з $\triangle SNB$: $SB = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34$ см.

$S_б = \pi \cdot 16 \cdot 34 = 544\pi$ см^2

Приклад 2. Обчисліть радіус кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, ребра якого дорівнюють 5 см, 13 см та 8 см.

Знайдемо діагональ паралелепіпеда – діаметр кулі:

$d = \sqrt{5^2 + 13^2 + 8^2} = \sqrt{258}$ см.

$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{258}}{2} = \sqrt{64,5}$ см.

Приклад 3. У правильну трикутну піраміду вписано конус. Обчисліть відношення об'єму піраміди до об'єму конуса.

Оскільки конус вписано в піраміду, то основа конуса вписана в основу піраміди (вписане коло).

Нехай a — сторона основи піраміди, h — її висота і висота конуса теж.

$V_{пір} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$; радіус онови конуса – радіус вписаного кола в правильний трикутник, тому $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$V_{кон} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{12} \cdot h.$$

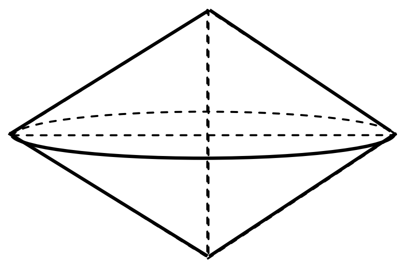
Знаходимо відношення: $\frac{V_{пір}}{V_{кон}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{12} \cdot h} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

Приклад 4.

При обертанні правильного трикутника навколо його сторони утворилось тіло, об'єм якого дорівнює 432π см^3. Обчисліть (у см) довжину сторони трикутника.

При обертанні трикутника утворюються два конуси зі спільною основою.

Висота конуса – половина сторони трикутника. Радіус основи – висота трикутника.



Нехай x — сторона основи трикутника, тоді його висота - $x\frac{\sqrt{3}}{2} = R$, $h = \frac{x}{2}$.

Знаходимо об'єм конусів:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{x}{2} = \pi \frac{x^3}{8}.$$

Оскільки таких конусів 2, то:

$432\pi = 2 \cdot \pi \frac{x^3}{8}$ $x = \sqrt[3]{432 \cdot 4} = 12$ см.