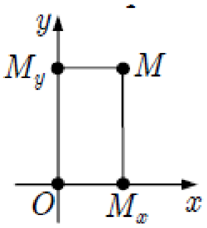
Метод координат

Основними об’єктами вивчення в геометрії є ***точка***, ***пряма*** і ***площина*** – це неозначувані поняття геометрії.

Метод координат – спосіб опису геометричних об’єктів за допомогою чисел. Вводиться поняття системи координат, в якій кожній точці ставиться у відповідність одне число, якщо точка на прямій, два числа, якщо точка на площині, та три числа, якщо у просторі. Така відповідність є єдиною, тобто точка однозначно задається своїми координатами.

Розглянемо пряму, на якій задано початок, напрям і масштаб – таким чином означається одновимірна система координат. Положення точки в ній задається одним числом – координатою.

Якщо розглянути дві взаємно перпендикулярні числові осі зі спільним початком, то вони задають ДПСК на площині. Положення точки в ній задається двома числами – прямокутними координатами точки.



Розглянемо найважливіші поняття і формули.

Відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ обчислюється за формулою:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Аналогічно вводять ДПСК у просторі – положення точки в ній задається трьома координатами (x,y,z) - ***абсцисою***, ***ординатою***, ***аплікатою***, а відстань знаходять за формулою $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Поділ відрізка у заданому відношенні:

Кажуть , що точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ, якщо $\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$.

Якщо відомі координати кінців відрізка, то координати точки M знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ \ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо M — середина відрізка, то $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$; $z = \frac{z_1+z_2}{2}$.

Корисний наслідок: Координати точки перетину медіан трикутника з вершинами в токах $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$: $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Приклади.

Приклад 1. У прямокутній системі координат у просторі знайти відстань від точки $A(6;8;0)$ до осі Oz.

Оскільки точка має третю координату рівну нулю, то вона лежить на площині xOy. Відстань від точки до осі Oz буде дорівнювати відстані від до початку координат. $d = \sqrt{6^2+8^2} = 10$.

Якби апліката не була рівна нулю, то можна було б спочатку спроектувати точку на xOy, а потім мислити аналогічно.

Приклад 2. Знайти довжину медіани трикутника ABC, проведеної з вершини C: $A(1;3)$, $B(3;5)$, $C(-1;-3)$

Медіана – це відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою, що є серединою протилежної сторони. Знайдемо середину відрізка AB — точку M за формулами $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

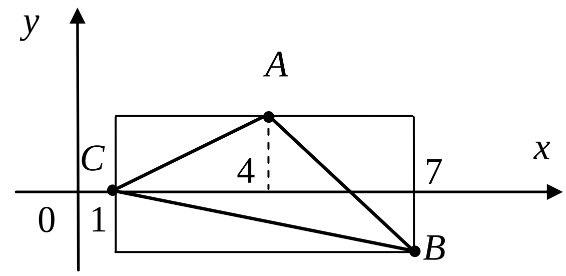
$x_M = \dfrac{1+3}{2} = 2$; $y_M = \dfrac{3+5}{2} = 4$.

Довжину знаходимо за формулою відстані між двома точками.

$|CM| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

Приклад 3. Знайти площу трикутника з вершинами у точках $A(4;2)$, $B(7;-2)$, $C(1;0)$.

Побудуємо прямокутник, сторони якого паралельні координатним осям і проходять через вершини.



Знайдемо площу трикутника як різницю площі прямокутника і трьох прямокутних трикутників. Довжини їх сторін легко знайти, оскільки сторони прямокутника паралельні координатним осям.

$S_{пр} = 6 \cdot 4 = 24$

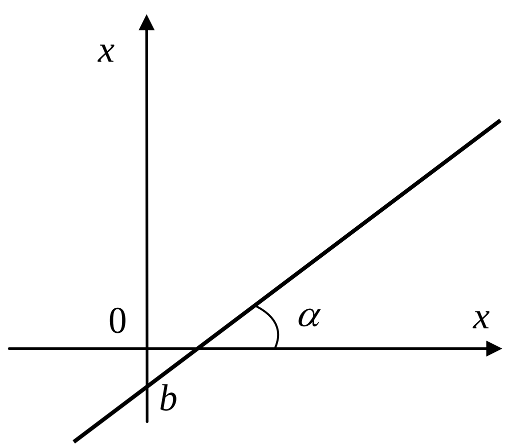
Площі трикутників позначимо S_1, S_2, S_3.

$S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$; $S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$; $S_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$.

$S_{\triangle ABC} = 24 - 3 - 6 - 6 = 9$ (кв.од.).

Пряма на площині

Для опису прямої на площині використовують **рівняння прямої**.



Розглянемо основні рівняння прямої на площині.

$y = kx + b$ — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Параметр k — кутовий коефіцієнт прямої – тангенс кута нахилу прямої до осі Ox; параметр b — ордината точки перетину з віссю Oy. Також досить зручно при розв’язанні задач, наприклад, коли потрібно записати рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт, користуватися іншою формою такого рівняння: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Таке рівняння вже використовувалося, коли будували рівняння дотичної.

$ax+by+c=0$ — загальне рівняння прямої на площині. Кожна пряма на площині може бути описана рівнянням першого степеня з двома змінними і навпаки – кожне рівняння такого вигляду задає єдину пряму на площині.

Якщо задані дві точки, то рівняння прямої, що проходить через них можна записати у вигляді: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, після чого його за властивостями пропорції перетворюють до зручнішого вигляду – загального чи з кутовим коефіцієнтом.

У багатьох задачах потрібно знайти відстань від точки до прямої, для цього користуються формулою: $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, де $(x_0;y_0)$ — координати точки, a,b,c — параметри загального рівняння прямої $ax+by+c=0$.

Формула для знаходження кута φ між прямими: $l_1:\ y=k_1x+b_1$, $l_2:\ y=k_2x+b_2$

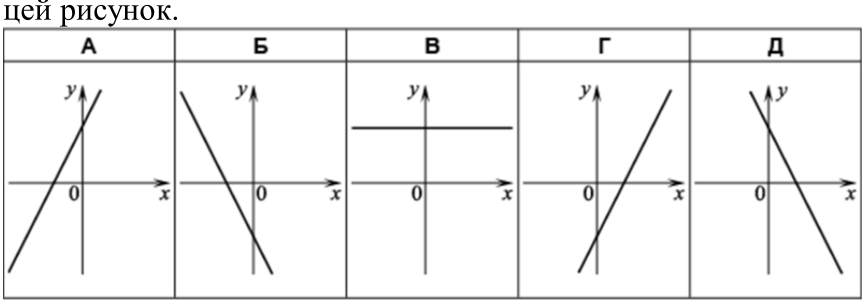
$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Таблиця взаємного розташування прямих, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом $l_1:\ y=k_1x+b_1$, $l_2:\ y=k_2x+b_2$ або загальними рівняннями $l_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$:

Вид розташування	Співвідношення між коефіцієнтами загальних рівнянь	Співвідношення між коефіцієнтами рівнянь з кутовим коефіцієнтом
l_1 і l_2 перетинаються в одній точці	$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	$k_1\neq k_2$
$l_1 \parallel l_2$ (але не співпадають)	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	$k_1=k_2,\ b_1\neq b_2$
$l_1\equiv l_2$ (співпадають)	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	$k_1=k_2,\ b_1=b_2$
$l_1\perp l_2$ (перпендикулярні)	$a_1a_2+b_1b_2=0$	$k_1k_2=-1$

Рівняння кола з центром у точці $(x_0;y_0)$ та радіусом R має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Приклад 1. На одному з рисунків зображено ескіз графіка прямої $y=-2x-2$. Вказати цей рисунок.



Маємо рівняння з кутовим коефіцієнтом, тому $k=-2$, $b=-2$. Оскільки точка перетину з віссю ординат має координату -2, то відкидаємо всі варіанти відповіді, крім Б і Г. Від'ємний кутовий коефіцієнт має пряма на рисунку Б. Отже, відповідь – Б.

Приклад 2. Знайти кут, під яким перетинаються прямі: $7x-y-5=0$; $x-3y+5=0$.

Прямі задані загальними рівняннями. Знайдемо їх кутові коефіцієнти. Для цього перетворимо їх рівняння:

$$7x-y-5=0 \Rightarrow y=7x-5;\ k_1=7.$$

$$x-3y+5=0 \Rightarrow 3y=x+5 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3};\ k_2=\frac{1}{3}.$$

Застосовуємо формулу: $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$. $tg\varphi=\left|\frac{\frac{1}{3}-7}{1+7\cdot\frac{1}{3}}\right|=\left|\frac{\frac{-20}{3}}{\frac{10}{3}}\right|=2$.

Знаходимо кут: $\varphi=arctg2$.

Приклад 3. Точка $M(1;3)$ належить колу з центром в точці $O(1;-2)$. Знайти радіус цього кола і записати рівняння.

Знайдемо радіус кола як відстань від центра кола до будь-якої точки кола (до M).

$$R=\sqrt{(1-1)^2+(-2-3)^2}=5.$$

Записуємо рівняння: .$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$(x-1)^2+(y-(-2))^2=5^2$ або $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через центри двох кіл: $x^2+y^2-4x+2y=0$ і $x^2+y^2-10x-6y=2$.

Для того, щоб знайти центри кіл, виділимо повні квадрати в рівняннях:

$$x^2+y^2-4x+2y=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5$ - центр $O_1(2;-1)$.

$$x^2+y^2-10x-6y=2 \Leftrightarrow x^2-10x+25-25+y^2-6y+9-9=2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-5)^2-25+(y-3)^2-9=2 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=36$ — центр $O_2(5;3)$.

Знаходимо рівняння прямої як рівняння, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$O_1O_2:\ \frac{x-2}{5-2}=\frac{y-(-1)}{3-(-1)} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4} \Leftrightarrow 4(x-2)=3(y+1) \Leftrightarrow$$

$$4x-3y-11=0.$$

Вектори

Вектором називають напрямлений відрізок. Його основні характеристики – це напрям і довжина або модуль. Вектори позначають малими латинськими літерами зі стрілочкою зверху $\vec{a}$ або двома великими літерами, якщо задано початок і кінець вектора $\overrightarrow{AB}$.

Якщо початок і кінець вектора співпадає, то такий вектор називають нуль-вектором або нульовим вектором і позначають $\vec{0}$, його довжина дорівнює 0. Вважають, що нульовий вектор паралельний і перпендикулярний будь-якому іншому вектору.

У геометрії розглядають так звані вільні вектори, тобто вектори, початок яких не закріплений і може бути вибраний в довільній точці простору.

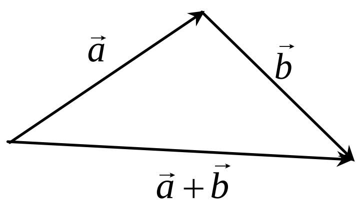
Два вектори можуть утворювати деякий кут, для знаходження якого їх початки мають співпадати для зручності. Частинним випадком є розташування двох векторів на паралельних прямих або на одній прямій – такі вектори називають **колінеарними** (або просто паралельними). Колінеарні вектори бувають співнапрямлені та протилежно напрямлені.

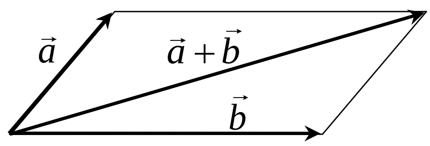
Дії над векторами

1) **Порівняння векторів**. Два вектори називають рівними, якщо вони співнапрямлені та мають однакову довжину.

2) **Множення вектора на число**. $\alpha\vec{a}$ – це вектор, колінеарний з початковим, який має довжину $|\alpha||\vec{a}|$, а напрям залежить від знаку множника. При $\alpha = -1$ вектор називають протилежним.

3) **Додавання векторів**. Сума векторів – це вектор, початок якого співпадає з початком першого вектора, а кінець – з кінцем другого, за умови, що кінець першого співпадає з початком другого. Такий спосіб додавання векторів називають правилом трикутника. Застосовують також і правило паралелограма.





Якщо відомі координати початку і кінця вектора, то зручно працювати з координатами вектора, які знаходять за формулою: $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Якщо перенести початок вектора на початок координат, то його координати співпадуть з координатами кінця. Рівні вектори мають рівні координати. Колінеарні вектори мають пропорційні координати.

4) **Скалярний добуток векторів**. Скалярним добутком векторів називають число (скаляр), який позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і дорівнює: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, де α - кут між цими векторами.

Властивості та застосування скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Ця властивість дає спосіб обчислення довжини вектора як корінь зі скалярного добутку вектора самого на себе: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

2. Знаходження кута між векторами: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

3. Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

4. Скалярний добуток в координатній формі.

Нехай $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ — вектори задані координатами, тоді

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$ (у випадку плоских векторів – без третьої координати)

Приклади.

Приклад 1. Знайти $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(3;-1;3)$, $\vec{b}(-2;1;1)$.
$\vec{c} = 3\cdot(3;-1;3) + (-2;1;1) = (9;-3;9) + (-2;1;1) = (7;-2;10)$.

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$. $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 4$, $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 60^\circ$ (кут між векторами).

Застосовуємо формулу: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 4\cdot\cos 60^\circ = 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Приклад 3. При якому значенні x вектори колінеарні: $\vec{a}(-4;8)$, $\vec{b}(x;-12)$?
Вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні:

$$\frac{-4}{x} = \frac{8}{-12} \Rightarrow x = 6.$$

Приклад 4. При якому значенні y вектори $\vec{a}(3;y)$, $\vec{b}(-5;10)$ вектори перпендикулярні?
Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток рівний 0.
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-5) + y\cdot 10 = -15 + 10y$. $-15 + 10y = 0 \Rightarrow y = 1{,}5$.

Приклад 5. Обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$, якщо $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ і $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 5$.

Знайдемо скалярний добуток вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ самого на себе:
$\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = 0$ (оскільки $\vec{0}\cdot\vec{0} = 0$).

Розкриваємо дужки: $\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} + 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}\right) = 0$ або

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}\right) = 0$, звідки

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2\right) = -\frac{1}{2}\left(1^2 + 3^2 + 5^2\right) = -\frac{35}{2}.$$

Планіметрія

Планіметрія — розділ геометрії, в якому вивчаються властивості ліній і фігур на площині.
Основні розділи планіметрії, які будемо розглядати – трикутники, чотирикутники, коло.

Трикутник

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох відрізків, що попарно сполучають три точки, які не лежать на одній прямій.

Трикутник має три вершини, три внутрішніх кути та три сторони.

Залежно від співвідношення кутів або сторін окремо розглядають деякі види трикутників: **рівносторонні** (правильні) — всі сторони і кути яких рівні; **прямокутні** - трикутники, дві сторони яких взаємно перпендикулярні (утворюють кут 90°) (дві взаємно перпендикулярні сторони прямокутного трикутника називаються катетами, а третя сторона — гіпотенузою); **рівнобедрені** – мають дві однакові сторони (і однакові прилеглі до них кути). Також розрізняють різносторонні, гострокутні, тупокутні трикутники.
Трикутники з рівними кутами називають **подібними.**

Ознаки подібності трикутників.

Перша ознака. Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то трикутники подібні.

Друга ознака. Якщо дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні двом сторонам іншого трикутника, а кути між цими сторонами рівні, то трикутники подібні.

Третя ознака. Якщо три сторони одного трикутника відповідно пропорційні трьом сторонам іншого трикутника, то трикутники подібні.

Для прямокутних трикутників ознака подібності спрощується – якщо два прямокутних трикутники мають однаковий гострий кут, то вони подібні.

Розглянемо основні характеристики трикутників.

Периметром Р трикутника називається сума довжин сторін цього трикутника.

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться цією точкою у відношенні 2:1, почавши від вершини.
Медіана ділить трикутник на дві частини, рівні за площею.

Висотою трикутника називається відрізок перпендикуляра, опущеного з вершини трикутника на протилежну сторону чи на її продовження (якщо трикутник тупокутний).

Бісектрисою кута називається пряма, що поділяє кут на два рівних кути. **Бісектрисою трикутник**а називається відрізок бісектриси кута трикутника, розміщений усередині трикутника. Бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін. Кожна точка бісектриси кута має наступну властивість: відстані від неї до сторін кута рівні, тобто вона рівновіддалена від сторін кута.

У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи є бісектрисою і висотою.

Середня лінія трикутника – відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника. Середня лінія паралельна третій стороні та має довжину, рівну половині довжини цієї сторони.

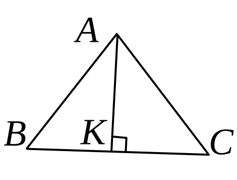
Розглядають **описане** навколо трикутника і **вписане** в трикутник коло. Описане коло проходить через усі вершини трикутника, його центр лежить на перетині серединних перпендикулярів сторін трикутника. Вписане коло дотикається до сторін трикутника, його центр лежить на перетині бісектрис.

У прямокутному трикутнику, медіана проведена до гіпотенузи, є радіусом описаного кола.

Основні формули і теореми

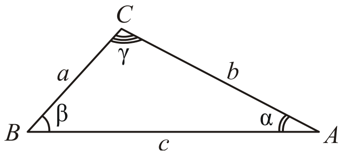
Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°.

Приклад 1. У трикутнику ABC висота AK утворює кут 35° з стороною AC. Обчисліть величину кута ACB.



За умовою, $\angle CAK = 35^\circ$, тоді, оскільки трикутник $\triangle AKC$ — прямокутний, то $\angle ACK = \angle ACB = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Нагадаємо **загальноприйняті позначення**: a,b,c — довжини сторін трикутника, α,β,γ — протилежні їм кути, S — площа трикутника, P — периметр, p — півпериметр, h_a — висота трикутника, проведена до сторони a, l_a — бісектриса трикутника (кута, що лежить проти сторони a, тобто кута α), m_a — медіана трикутника, проведена до сторони a, R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.



Основні формули.

Формули площі:

$S=\dfrac{1}{2}ah_a$;

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$;

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона.

$S=\dfrac{abc}{4R}$;

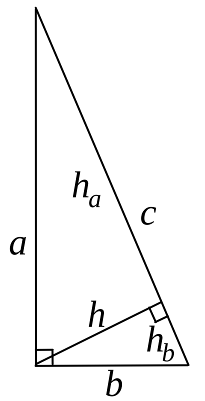
$S=pr$.

Правильний трикутник зі стороною a.

$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Центр описаного та вписаного кола співпадають.

Прямокутний трикутник з катетами a,b, гіпотенузою c.



Теорема Піфагора: $a^2+b^2=c^2$.

$S=\dfrac{1}{2}ab$ — площа прямокутного трикутника.

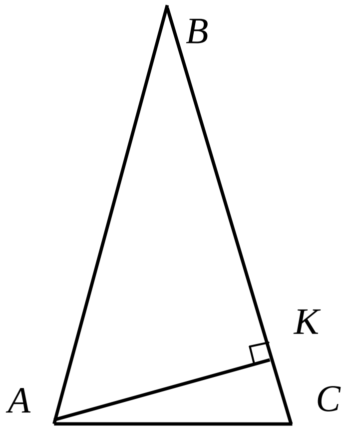
Нехай h_a,h_b — проекції катетів на гіпотенузу, h — висота, опущена на гіпотенузу. Справедливі **метричні співвідношення**: $\dfrac{h_a}{h}=\dfrac{h}{h_b}$ або $h^2=h_a\cdot h_b$.

$R=\dfrac{c}{2}$; $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.

Приклад 2. Обчисліть довжину кола, вписаного у трикутник зі сторонами 8 см, 15 см та 17 см.

Оскільки виконується рівність $17^2=8^2+15^2$, то трикутник є прямокутним, отже:
$r=\dfrac{8+15-17}{2}=3$. Довжина кола $C=2\pi r=6\pi$.

Приклад 3. Обчисліть довжину висоти AK трикутника ABC, якщо $AB=BC=9$ см, $AC=6$ см.



Трикутник рівнобедрений. Знайдемо висоту, проведену до бічної сторони, застосувавши формули площі.

$p=\dfrac{1}{2}(9+9+6)=12$. За формулою Герона:

$S=\sqrt{12\cdot(12-9)\cdot(12-9)\cdot(12-6)}=18\sqrt{2}$

$$18\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot AK,\ AK = 4\sqrt{2}.$$

Теорема косинусів. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Приклад 4. У трикутнику ABC відомо довжини сторін - $AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $BC = 7$ см. Визначте величину $\angle BAC$.

Записуємо теорему косинусів для сторони проти кута $\angle BAC$, тобто: $7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Отже, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ або 60°.

Теорема синусів. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Приклад 5. У трикутнику ABC сторона АВ дорівнює $12\sqrt{3}$ см, а кут C дорівнює 120°. Обчисліть радіус описаного кола.

Скористаємося теоремою синусів: $\frac{12\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$.

Чотирикутники

У планіметрії розглядають наступні основні чотирикутники: паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб, трапеція, довільний опуклий чотирикутник.

Загальні властивості чотирикутників.

Площа чотирикутника:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha,$$

де d_1 і d_2 — довжини діагоналей чотирикутника; α — кут між ними.

Для того, щоб у чотирикутник можна було вписати коло, необхідно і достатньо, щоб суми його протилежних сторін були рівні між собою.

Для того щоб навколо чотирикутника можна було описати коло, необхідно і достатньо, щоб суми його протилежних кутів були рівні між собою.

Нагадаємо основні властивості найпоширеніших чотирикутників.

Паралелограм – це чотирикутник, протилежні сторони якого паралельні та рівні. Діагоналі паралелограма в точці перетину діляться навпіл. Сума квадратів довжин усіх сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин діагоналей. $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$.

Площа паралелограма:

$S = ab\sin\gamma$, де γ — кут між суміжними сторонами *a* і *b*.

$S = a \cdot h_a$,

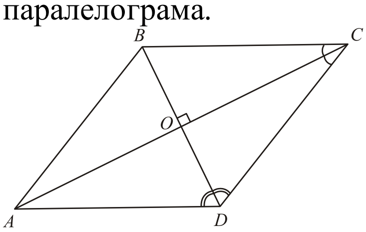
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi,\ \varphi$ — кут між діагоналями.

Прямокутник – це паралелограм, у якого сторони перпендикулярні. У прямокутника діагоналі рівні. $S = ab$.

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні. Діагоналі перпендикулярні. $S = a^2$. Діагональ квадрата $d = a\sqrt{2}$.

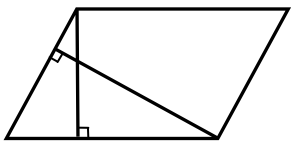
Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні та є бісектрисами кутів.

Площа ромба $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, також для ромба справедливі всі властивості та формули для паралелограма.



Приклад 1.

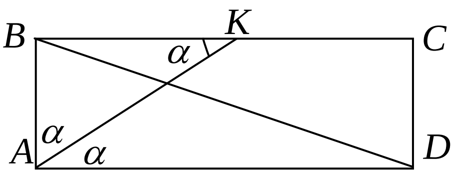
Висоти паралелограма дорівнюють 5 см та 8 см, а менша сторона дорівнює 15 см. Обчисліть більшу сторону паралелограма.



Скористаємося формулою для площі паралелограма $S=a\cdot h_a$ і запишемо її для обох висот і відповідних сторін (за умови, що більша висота проведена до меншої сторони): $15\cdot 8=a\cdot 5 \Rightarrow$ $a=24$ см.

Приклад 2.

У прямокутнику бісектриса ділить сторону на два рівних відрізки по 8 см. Обчисліть довжину діагоналі прямокутника.



Скористаємося властивістю внутрішніх різносторонніх кутів.

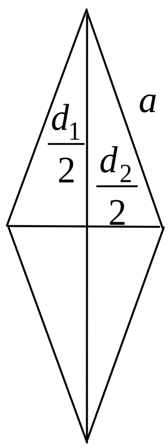
$\triangle ABK$ — рівнобедрений.

Отже, $AB=8$.

За теоремою Піфагора: $d=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$ см.

Приклад 3.

Різниця діагоналей ромба дорівнює 10 см, а його сторона – 25 см. Знайти площу ромба.



$S=\frac{1}{2}d_1d_2$. Тому окремо шукати довжини діагоналей непотрібно, потрібен їх добуток.

Нехай d_1 — більша діагональ, тоді $d_1-d_2=10$.

Оскільки ромб є паралелограмом, то його діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл. Розглянемо прямокутний трикутник, утворений половинами діагоналей і стороною. За теоремою Піфагора:

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=25^2$, звідки $d_1^2+d_2^2=4\cdot 25^2=2500$.

Різницю $d_1-d_2=10$ піднесемо до квадрата, щоб утворити суму квадратів, яку щойно знайшли і добуток, потрібний для площі.

$$(d_1-d_2)^2=10^2 \Rightarrow d_1^2+d_2^2-2d_1d_2=100 \Rightarrow 2d_1d_2=d_1^2+d_2^2-100 \Rightarrow$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2=\frac{d_1^2+d_2^2-100}{4}=\frac{2500-100}{4}=600 \text{ (кв. од.).}$$

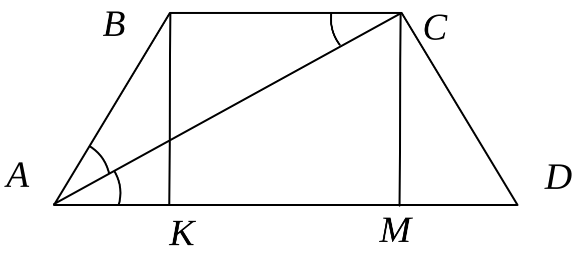
Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні (основи).

Площа трапеції:

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h,$$ де a і b — основи трапеції; h — її висота.

Приклад 1.

Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см та 26 см, а її діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчисліть площу трапеції.



$\angle DAC=\angle BCA$ як внутрішні різносторонні, тому трикутник $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

$AB=CD=10$ см

Проведемо висоти BK і CM.

$$AK=MD=\frac{26-10}{2}=8 \text{ см.}$$

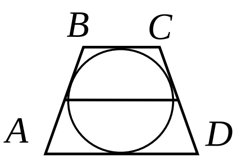
Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle AKB$, знайдемо у ньому BK — висоту трапеції.

$BK=\sqrt{10^2-8^2}=6$ см.

Знаходимо площу трапеції: $S=\frac{1}{2}\cdot(10+26)\cdot 6=108$ см^2

Приклад 2.

Навколо кола описана трапеція, середня лінія якої дорівнює 12 см. Обчисліть периметр трапеції.

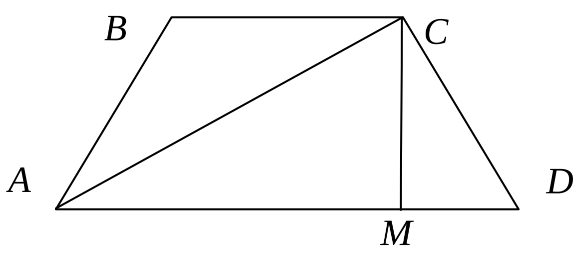


Оскільки в трапецію можна вписати коло, то суми протилежних сторін рівні, тобто сума основ рівна сумі бічних сторін.

Середня лінія рівна півсумі основ, тому сума основ – 24 см. Сума бічних сторін теж 24 см, тому периметр – 48 см.

Приклад 3.

У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 42 см та 18 см, а бічна сторона – 20 см. Обчисліть довжину діагоналі трапеції.



Знайдемо висоту трапеції.

$$MD=\frac{42-18}{2}=12 \text{ см.}$$

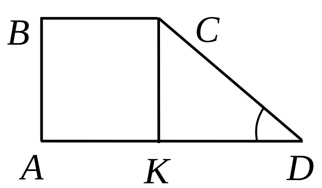
З $\triangle CMD$: $CM=\sqrt{20^2-12^2}=16$ см.

$AM=42-12=30$ см.

З $\triangle AMC$: $AC=\sqrt{30^2+16^2}=34$ см.

Приклад 4.

Обчисліть площу прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см та 16 см, а гострий кут дорівнює 30°.



Проведемо висоту CK. $KD=16-10=6$ см.

У прямокутному трикутнику $\triangle CKD$ запишемо співвідношення: $\frac{CK}{KD} = tg30^\circ$.

$CK = 6 \cdot tg30^\circ = 2\sqrt{3}$ см.

$S = \frac{1}{2} \cdot (10 + 16) \cdot 2\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$ см^2

Коло і круг

Колом називають множину точок площини, рівновіддалених від однієї точки, яку називають ***центром кола***.

Кругом називають множину точок площини, відстань яких від однієї точки — центра кола — не перевищує сталої величини, яку називають *радіусом* кола.

Площа круга: $S = \pi R^2$.

Довжина кола: $C = 2\pi R$

Дотичною називають пряму, що має з колом одну спільну точку. ***Січною*** називають пряму, що має дві спільні точки з колом

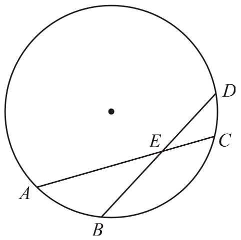
Дотична перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, що лежить поза колом, рівні між собою.

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, проходить через її середину, тобто якщо трикутник, вписаний в коло має однією зі сторін діаметр, то він прямокутний.

Якщо дві хорди перетинаються всередині кола, то добутки відрізків, на які кожна хорда розбивається точкою перетину, рівні між собою.

$AE \cdot EC = BE \cdot ED$.



Приклад 1. Обчисліть площу сектора радіуса $R = 6$ см, центральний кут якого дорівнює 40°.

Скористаємося формулою: $S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$, де α — центральний кут.

Отже, $S = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{40}{360} = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{40}{360} = 4\pi$ см^2

Приклад 2. У колі проведено дві хорди, які перетинаються. Перша хорда ділиться точкою перетину на відрізки 10 см та 60 см, а друга хорда ділиться точкою перетину у відношенні 2 : 3. Обчисліть довжину (у см) другої хорди.

Якщо дві хорди перетинаються всередині кола, то добутки відрізків, на які кожна хорда розбивається точкою перетину, рівні між собою.

Нехай друга хорда ділиться на відрізки $2x$ і $3x$. Отже, $2x \cdot 3x = 10 \cdot 60$, $x = 10$.

Знаходимо другу хорду: $2x + 3x = 50$ см.

Відповідь: 50 см