

Числові послідовності

Числова послідовність – це послідовність дійсних чисел, тобто відображення, яке кожному натуральному числу n (тобто номеру члена послідовності) ставить у відповідність дійсне число.

Детально розглянемо два види числових послідовностей, які називають арифметичною і геометричною прогресією.

Арифметична прогресія – це послідовність дійсних чисел вигляду: $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \dots$. Тобто кожне наступне число утворюється з попереднього додаванням одного і того ж числа (фіксованого числа). Число a_1 – перший член прогресії, d – різниця прогресії.

Найважливіші формули для арифметичної прогресії:

Формула загального члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формули суми перших n членів прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Визначальна властивість арифметичної прогресії: $a_k = \frac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}$ – будь-який член арифметичної прогресії (крім першого, звичайно) є середнім арифметичним рівновіддалених від нього членів.

Геометрична прогресія – це послідовність дійсних чисел вигляду: $b_1, b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2, \dots$. Тобто, кожне наступне число утворюється з попереднього множенням на одне і те ж число. Число b_1 – перший член прогресії, q – знаменник геометричної прогресії.

Найважливіші формули для геометричної прогресії:

Формула загального члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суми перших n членів прогресії: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Визначальна властивість геометричної прогресії: $b_k^2 = b_{k-m} \cdot b_{k+m}$ або $b_k = \sqrt{b_{k-m} \cdot b_{k+m}}$ – будь-який член геометричної прогресії є середнім геометричним рівновіддалених від нього членів прогресії.

Розглядають також так звані нескінченно спадні геометричні прогресії – прогресії, у яких

$|q| < 1$ і кількість членів якої нескінченна. Для неї $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Приклади на арифметичну прогресію.

1) В арифметичній прогресії $a_1 = 17, d = -2$. Знайти a_4 .

Підставляємо у формулу загального члена: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$$a_4 = 17 + (4-1) \cdot (-2) = 17 - 6 = 11$$

2) Знайти суму семи перших членів прогресії, якщо $a_1 = 9, a_7 = 15$.

Застосовуємо формулу суми перших n членів прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_7 = \frac{9+15}{2} \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84.$$

3) В арифметичній прогресії знайти $a_2 + a_9$, якщо $a_5 + a_6 = 18$.
Скористаємося формулою загально члена арифметичної прогресії.

$$a_5 = a_2 + 3d, \text{ тому } a_2 = a_5 - 3d.$$

$$a_9 = a_6 + 3d, \text{ тому } a_2 + a_9 = a_5 - 3d + a_6 + 3d = a_5 + a_6 = 18.$$

Приклади на геометричну прогресію.

1) Знайти знаменник геометричної прогресії, якщо $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$.

Скористаємося формулою загального члена прогресії: $b_8 = b_1 \cdot q^7 \Rightarrow q^7 = \frac{b_8}{b_1}$;

$$q^7 = \frac{64}{\frac{1}{2}} \Rightarrow q^7 = 128 \Rightarrow q = \sqrt[7]{128} = 2.$$

2) Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії: 10; 1; 0,1;.....

$$b_1 = 10; q = \frac{1}{10}.$$

$$S = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}.$$

3) Записати звичайним дробом десятковий дріб: $0,(24)$

Нескінченний періодичний дріб можна записати так:

$0,(24) = 0,242424\dots = 0,24 + 0,0024 + 0,000024 + \dots$ - сума нескінченно спадної геометричної прогресії.

$$b_1 = 0,24; q = 0,01.$$

$$0,(24) = \frac{0,24}{1 - 0,01} = \frac{0,24}{0,99} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}.$$

Основні елементарні функції

Функцією називають таку залежність між змінними x із множини D та y із множини E , при якій кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y . Позначають $y = f(x)$.

Змінну x називають незалежною змінною або аргументом, а змінну y - залежною змінною або значенням функції, а найчастіше – функцією.

Множину D усіх значень незалежної змінної називають областю визначення, а множину E , утворену значеннями функції – областю значень. Ці множини часто позначають $D(f)$ і $E(f)$.

Графіком функції називають фігуру, утворену всіма точками координатної площини, абсиси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Визначити за рисунком чи є геометричний образ графіком функції можна, перевіривши чи всім значенням змінної відповідає одне значення функції.

Приклад. Чи є графіком функції фігура, зображена на (рис. 1—4)?

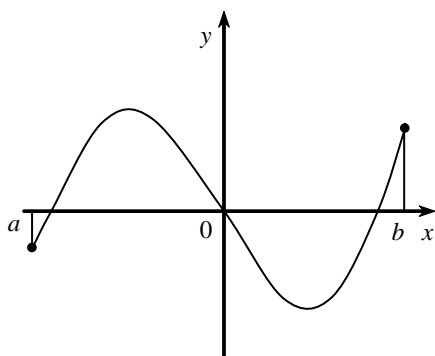


Рис. 1

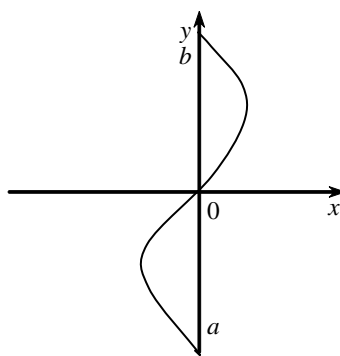


Рис. 1

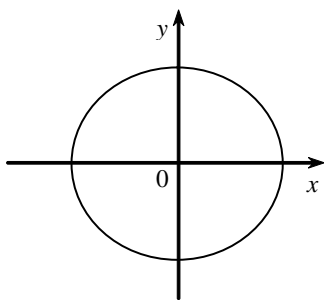


Рис. 3

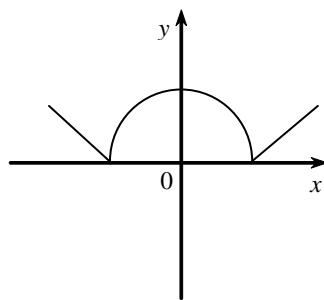


Рис. 4

На рис 1, 4 – так, на рис 2, 3 – ні.

Основними елементарними функціями називають: степеневу функцію, показникову, логарифмічну, тригонометричні, обернені тригонометричні функції.

Дію однієї функції на іншу називають **складеною функцією** або суперпозицією функцій. Суперпозицію основних елементарних функцій називають **елементарною** функцією.

Функцію називають **алгебраїчною**, якщо її зв'язок з аргументом може бути виражений співвідношенням: $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ - многочлен.

Розглянемо основні характеристики функцій і їх зв'язок з графіками функцій.

Парність.

Функцію називають **парною**, якщо для неї виконується: $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, тобто кожній точці на графіку є «пара» – симетрична їй точка (крім точок на осі, які симетричні самі собі). Приклади парних

функцій: $y = x^2$, $y = x^4$ (і будь який інший парний степінь), $y = \cos x$, а також всі можливі їх поєднання.

Функцію називають **непарною**, якщо для неї виконується $f(-x) = -f(x)$. Кожній точці на графіку непарної функції є симетрична точка відносно початку координат.

Приклади непарних функцій: $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.

Якщо функція є ні парною, ні непарною, то її називають функцією **загального вигляду** або індиферентною.

Період.

Функцію називають **періодичною**, якщо для неї існує таке число T , що $f(x+T) = f(x)$.

Очевидно, що якщо значення функції повторюються через кожні T величин по осі абсцис, то вони і повторюються і через $2T$, $3T$, ... і т.д. Найменше значення $T > 0$, при якому виконується рівність T , називають **найменшим додатним періодом** функції або **основним періодом**.

Обмеженість.

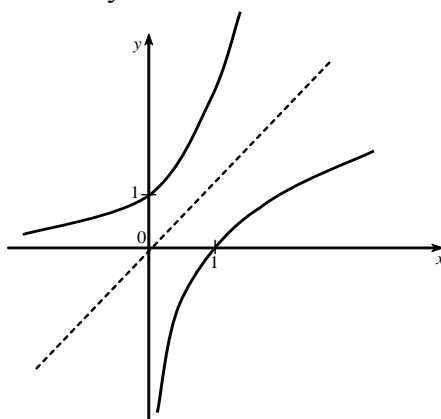
Функцію називають обмеженою, якщо існує таке число m (або M), що або $m \leq f(x)$ (обмежена знизу) або $f(x) \leq M$ (обмежена зверху) або $m \leq f(x) \leq M$ (обмежена).

Монотонність.

Функцію називають **монотонно зростаючою**, якщо при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ і **монотонно спадною**, якщо $f(x_1) > f(x_2)$.

Обернена функція

Нехай задана функція $y = f(x)$, тобто нехай кожному значенню змінної x з області визначення відповідає певне значення змінної y . Якщо вважати залежну змінну y за аргумент, а незалежну змінну за функцію, то отримана функція $x = \varphi(y)$ називається **оберненою функцією** відносно функції $y = f(x)$. Функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ виражають одну й ту ж залежність між величинами x та y . Графіками цих функцій є одна й та ж крива. Якщо обернену функцію (x) позначити літерою y , а її аргумент (y) позначити літерою x , то отримаємо $y = \varphi(x)$. При такому перепозначенні область визначення прямої функції $y = f(x)$ є областю значень оберненої до неї функції $y = \varphi(x)$ і навпаки. Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно бісектриси першого і третього координатного кутів.



Щоб знайти в явному вигляді функцію, обернену до заданої, достатньо поміняти місцями літери, що позначають функцію і аргумент і розв'язати отримане рівняння відносно літери, що задає функцію.

Приклад. Відомо, що $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$. Знайдіть обернену функцію $f^{-1}(x)$ (позначення

$f^{-1}(x)$ не означає степінь)

Розглянемо функцію як рівняння відносно змінної $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$. Виконаємо дії, необхідні

для вилучення змінної x .

$$y^3 = \frac{x-2}{x+1},$$

$$y^3(x+1) = x-2;$$

$$y^3x + y^3 = x-2$$

$$y^3x - x = -2 - y^3$$

$$(y^3 - 1)x = -2 - y^3$$

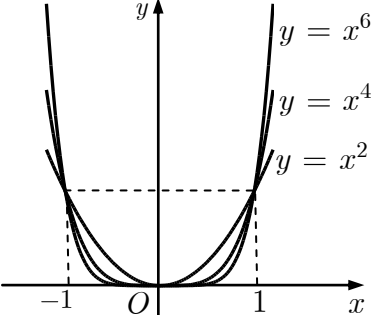
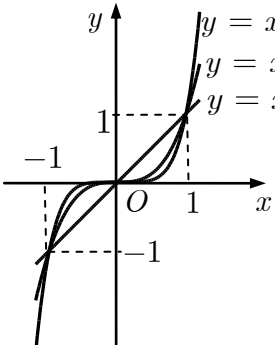
$$x = \frac{-2 - y^3}{y^3 - 1}$$

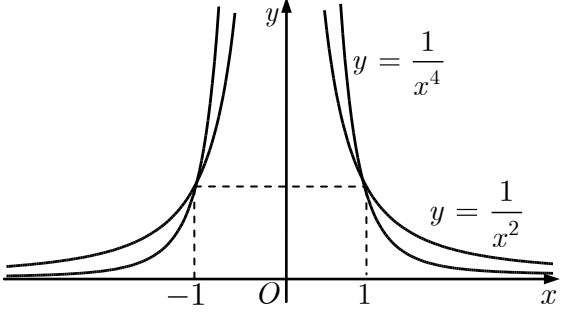
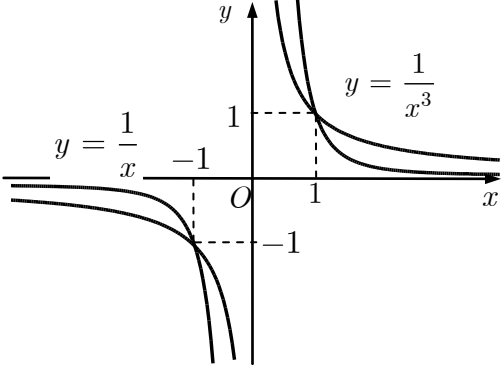
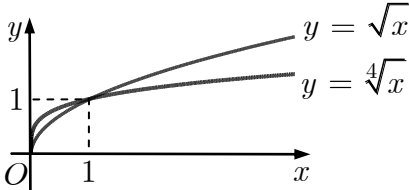
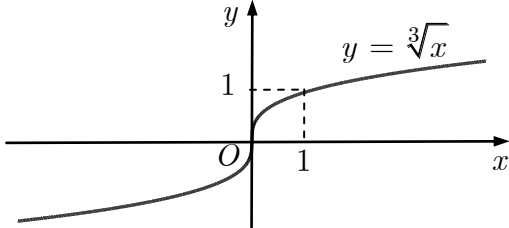
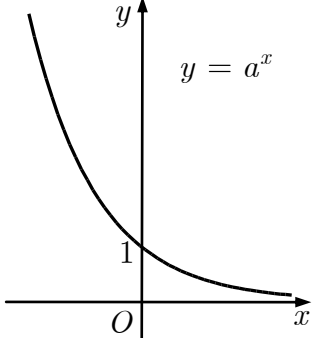
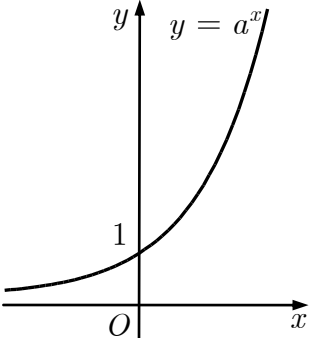
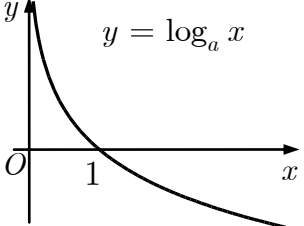
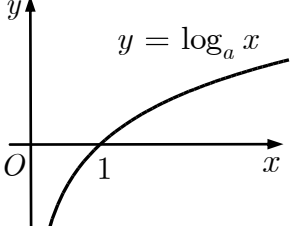
Міняємо змінну x на y (і навпаки): $y = \frac{-2 - x^3}{x^3 - 1}$ або $y = \frac{2 + x^3}{1 - x^3}$.

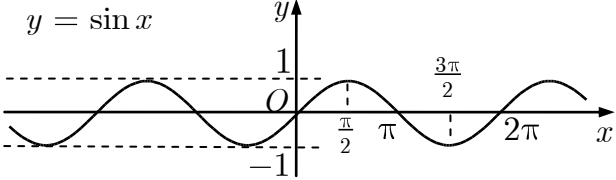
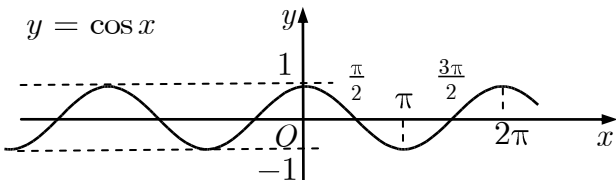
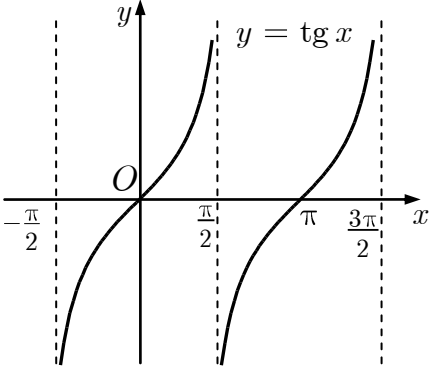
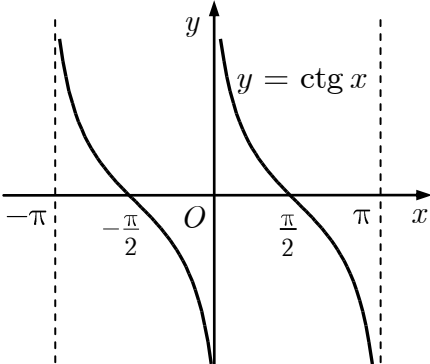
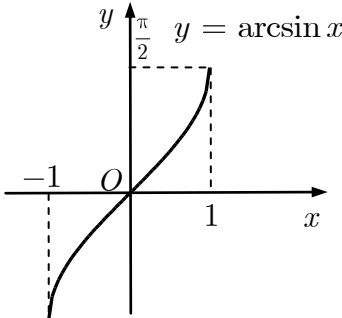
Отже, обернена функція: $f^{-1}(x) = \frac{2 + x^3}{1 - x^3}$.

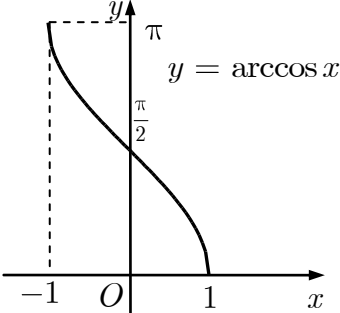
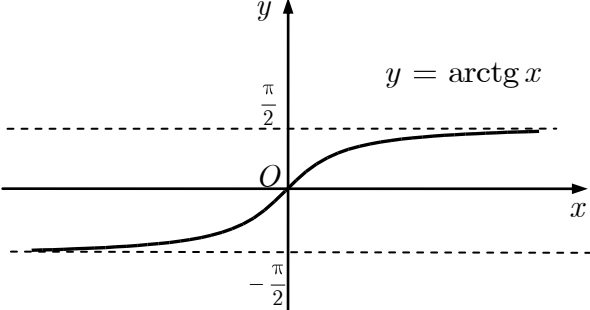
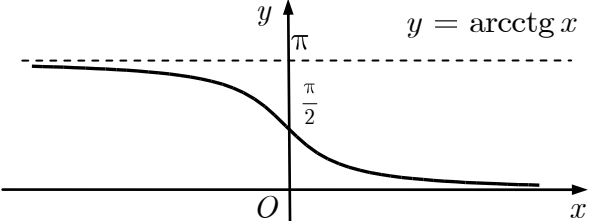
Зауважую, позначення $f^{-1}(x)$ означає обернену функцію, а не степінь.

Розглянемо **основні елементарні функції та їх графіки:**

<p>Степенева функція $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0; +\infty)$. Функція парна. Графіком є парабола порядку $2n$.</p>	
<p>Степенева функція $y = x^{2n-1}$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; зростає на \mathbb{R}. Графік — парабола порядку $2n - 1$ (для $n = 1$ графіком є пряма).</p>	

<p>Степенева функція $y = \frac{1}{x^{2n}}$.</p> <p>$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0; +\infty)$.</p> <p>Функція парна.</p> <p>Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.</p>		
<p>Степенева функція $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$.</p> <p>$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.</p> <p>Функція непарна; спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.</p> <p>Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.</p>		
<p>Степенева функція $y = \sqrt[2n]{x}$.</p> <p>$D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$.</p> <p>Функція зростає на $[0; +\infty)$.</p>		
<p>Степенева функція $y = \sqrt[2n-1]{x}$.</p> <p>$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$.</p> <p>Функція непарна; зростає на \mathbb{R}.</p>		
<p>Показникова функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.</p> <p>$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (0; +\infty)$.</p> <p>Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$</p> <p>Горизонтальна асимптота $y = 0$.</p>	$0 < a < 1$	$a > 1$
		
<p>Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.</p> <p>$D(f) = (0; +\infty)$, $E(f) = \mathbb{R}$.</p> <p>Функція $\begin{cases} \text{спадає на } D(f), & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } D(f), & a > 1. \end{cases}$</p> <p>Вертикальна асимптота $x = 0$.</p>	$0 < a < 1$	$a > 1$
		

<p>Функція $y = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Функція непарна; періодична з періодом $T = 2\pi$; обмежена: $\sin x \leq 1$. Графік — <i>синусоїда</i>.</p>	
<p>Функція $y = \cos x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Функція парна; періодична з періодом $T = 2\pi$; обмежена: $\cos x \leq 1$. Графік — <i>косинусоїда</i>.</p>	
<p>Функція $y = \operatorname{tg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; періодична з періодом $T = \pi$; зростає на $D(f)$. Графік — <i>тангенсоїда</i>. Вертикальні асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>	
<p>Функція $y = \operatorname{ctg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; періодична з періодом $T = \pi$; спадає на $D(f)$. Графік — <i>котангенсоїда</i>. Вертикальні асимптоти $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>	
<p>Функція $y = \arcsin x$. $D(f) = [-1;1], E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Функція непарна; зростає на $D(f)$.</p>	

<p>Функція $y = \arccos x$. $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = [0; \pi]$. Функція спадає на $D(f)$.</p>	
<p>Функція $y = \operatorname{arctg} x$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$. Функція непарна; зростає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y = \pm \frac{\pi}{2}$.</p>	
<p>Функція $y = \operatorname{arcctg} x$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = 0; \pi$. Функція спадає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y = 0$, $y = \pi$.</p>	

Елементарні перетворення графіків функцій

Розглянемо методи побудови графіків елементарних функцій, основані на перетворенні графіків основних елементарних функцій.

До таких перетворень будемо відносити: паралельне перенесення, розтяг або стиск, дзеркальні відображення, а також відображення за допомогою модуля.

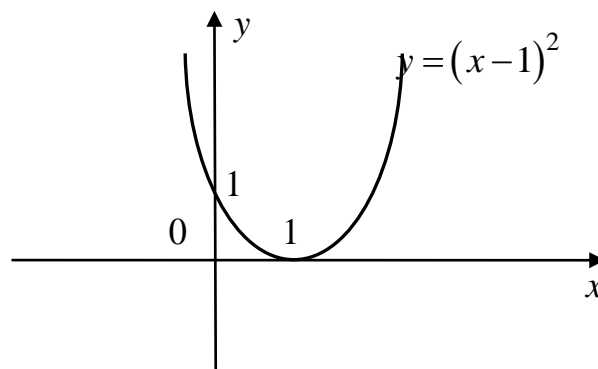
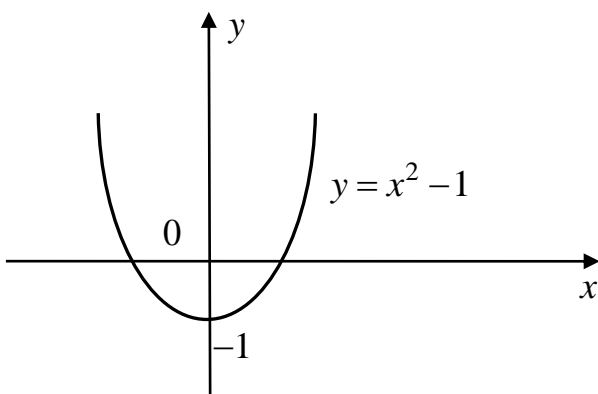
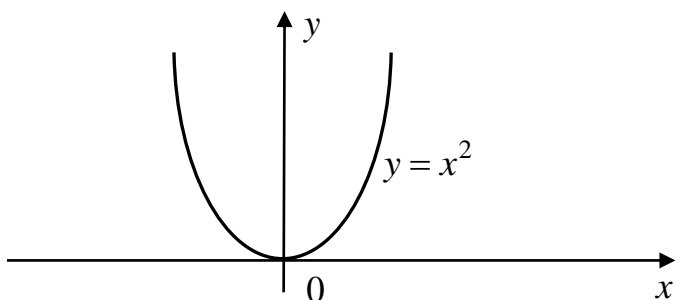
Нехай функція $y = f(x)$ - одна з основних елементарних функцій.

Впізнаємо дію **паралельного перенесення** за виглядом запису функції: $y = f(x \pm a)$

або $y = f(x) \pm a$ (a - деяка константа).

Зручно запам'ятовувати спосіб виконання паралельного перенесення за виглядом: якщо число додається до змінної x ($y = f(x \pm a)$), то перенесення графіка відбудеться вздовж осі Ox , якщо ж до усієї функції ($y = f(x) \pm a$), то вздовж Oy . Причому, вздовж Ox перенесення відбувається в напрямі, що протилежний знаку константи, а вздовж осі Oy - збігається зі знаком.

Приклад. Побудувати графіки: $y = x^2 - 1$; $y = (x - 1)^2$



Розтяг або стиск можна визначити, якщо у записі функції є дія множення змінної або функції на число: $y = f(a \cdot x)$, $y = a \cdot f(x)$.

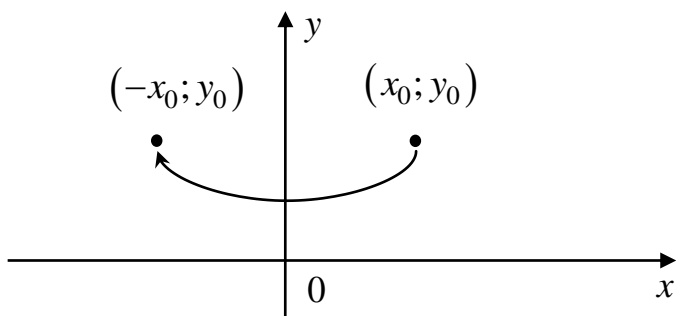
Спосіб застосування збігається з паралельним перенесенням – якщо множник стосується змінної x , то розтяг або стиск відбувається вздовж осі Ox , а якщо усієї функції – то Oy .

Якщо число a таке, що $|a| < 1$, то графік $y = f(a \cdot x)$ можна отримати з графіка $y = f(x)$ розтягом вздовж осі Ox , а якщо $|a| > 1$, то стиском, тобто, як і у випадку паралельного перенесення, – спосіб дії вздовж осі Ox протилежний запису. Аналогічно, графік $y = a \cdot f(x)$ можна отримати з графіка $y = f(x)$ розтягом, якщо $|a| > 1$ і стиском, якщо $|a| < 1$.

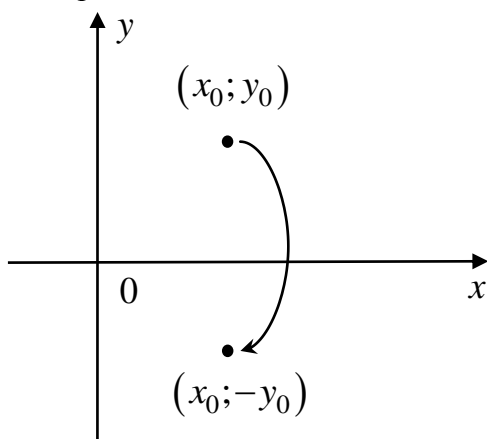
Дзеркальні відображення – це перетворення графіка функції, при якому всі точки відображаються симетрично відносно деякої осі або точки.

Розглянемо основні види дзеркальних відображень: $y = f(-x)$, $y = -f(x)$; $y = -f(-x)$.

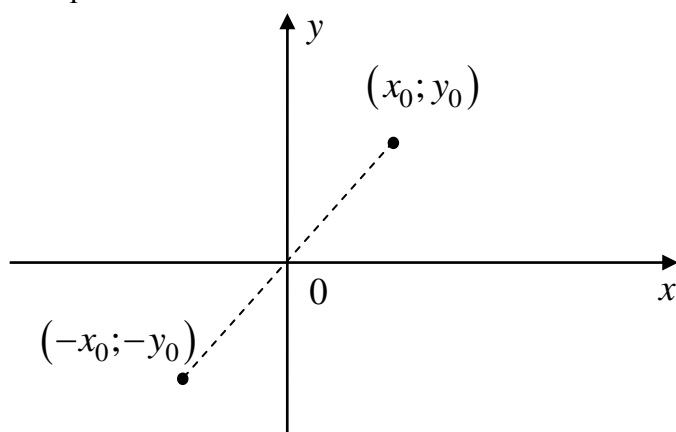
Спосіб запам'ятовування: $y = f(-x)$ - знак змінюється біля змінної x , тому у всіх точок на графіку функції знак абсцис міняється на протилежний, а ордината лишається без змін – це задає симетричне відображення кожної точки відносно осі Oy



$y = -f(x)$ - знак змінюється у всієї функції, тобто у всіх точок на графіку функції знак ординат міняється на протилежний, а абсциса лишається без змін – це задає симетричне відображення кожної точки відносно осі Ox :



$y = -f(-x)$ - знак змінюється у обох координат, тому відбувається симетричне відображення відносно обох осей або відносно початку координат.



Розглянемо побудову графіка функцій, що мають вигляд: $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$

$$y = |f(|x|)|.$$

Дія модуля на аргумент у функції вигляду $y = f(|x|)$ робить функцію парною ($y(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = y(x)$). Також слід звернути увагу, що аргумент при такому перетворенні стає невід'ємним. Ці два факти дають спосіб побудови графіка функції $y = f(|x|)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$ – відкинути частину графіка, що лежить у лівій півплощині (вона може існувати лише тоді, коли аргумент набуває від'ємних значень), а праву частину відобразити симетрично відносно осі Oy (щоб функція стала парною).

Дія модуля у функції вигляду $y = |f(x)|$ робить функцію додатно визначеною, тобто такою, яка не набуває від'ємних значень.

Побудова графіка: частину графіка функції $y = f(x)$, що лежить нижче осі Ox відобразити симетрично у верхню півплощину.

Для побудови графіка функції $y = |f(|x|)|$ потрібно виконати обидва згадані перетворення в довільному порядку.

При побудові графіка функції методом елементарних перетворень зручно складати план побудови, в якому кожен наступний пункт отримують з попереднього за допомогою одного елементарного перетворення графіка. Складати такий план правильно та раціонально – досить складна задача, яка потребує тренувань. Запропоную один із способів навчитися складати такий план.

Нехай задано деяку функцію, **наприклад**: $y = 2 + \frac{3}{x-1}$.

Потрібно у записі відкинути деякий доданок або множник таким чином, щоб графік початкової функції міг бути отриманий з нього за допомогою одного елементарного перетворення:

$y = 2 + \frac{3}{x-1}$ (може бути отриманий з графіка $y = \frac{3}{x-1}$) паралельним перенесенням на 2 одиниці вгору.

$y = \frac{3}{x-1}$ відкидаємо трійку (може бути отриманий з графіка функції $y = \frac{1}{x-1}$ за допомогою розтягу вздовж осі Oy).

$y = \frac{1}{x-1}$ відкидаємо -1 (може бути отриманий з графіка функції $y = \frac{1}{x}$ паралельним перенесенням на одну одиницю вправо).

$y = \frac{1}{x}$ є базовою функцією (обернена пропорційність або гіпербола), графік якої є відомим.

Після такого покрокового відкидання отримуємо план побудови графіка, записаний у зворотному порядку:

$$4) y = 2 + \frac{3}{x-1};$$

$$3) y = \frac{3}{x-1};$$

$$2) y = \frac{1}{x-1};$$

$$1) y = \frac{1}{x}.$$

Для зручності його можна пронумерувати знизу вгору або переписати в зворотному порядку. В дужках вказуємо дію, яка виконується на кожному кроці.

$$1) y = \frac{1}{x} \text{ (будуємо графік функції)}$$

$$2) y = \frac{1}{x-1} \text{ (виконуємо паралельне перенесення вправо на 1)}$$

$$3) y = \frac{3}{x-1} \text{ (виконуємо розтяг у три рази вздовж } Oy \text{)}$$

$$4) y = 2 + \frac{3}{x-1} \text{ (виконуємо паралельне перенесення на дві одиниці вгору)}$$

Зауваження. Кожне наступне перетворення виконується над графіком функції, отриманим на попередньому кроці!

Перед тим, як записувати план побудови іноді доводиться виконати перетворення – виділити цілу частину, виділити повний квадрат, винести за дужки.

Приклад виділення цілої частини:

$$y = \frac{2x-5}{4x-3}. \text{ Для правильної побудови важливо визначити вигляд базової функції.}$$

Оскільки функція є раціональним дробом, який не скорочується, то після перетворень його можна звести до правильного дробу (ступінь многочлена чисельника менший степеня многочлена знаменника). Утворюємо в чисельнику вираз, рівний знаменнику,

$$\text{залучивши всі змінні: } y = \frac{2x-5}{4x-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (2x-5)}{4x-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x-3-7}{4x-3}$$

Ділимо почленно:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4x-3-7}{4x-3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4x-3}{4x-3} + \frac{-7}{4x-3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{7}{4x-3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4x-3}$$

$$\text{Винесемо за дужки у знаменнику 4: } y = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4 \left(x - \frac{3}{4} \right)} \text{ або } y = \frac{1}{2} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x - \frac{3}{4}}.$$

Приклад. Скласти план побудови графіка функції методом елементарних перетворень.

$$y = x^2 - 4 \cdot |x| + 5.$$

Скористаємося властивістю модуля: $x^2 = |x|^2$. Функцію можна переписати у вигляді:

$y = |x|^2 - 4 \cdot |x| + 5$, тобто вона є функцією вигляду $y = f(|x|)$ - усі змінні під знаком модуля. Отже, графік функції $y = |x|^2 - 4 \cdot |x| + 5$ можна отримати з графіка $y = x^2 - 4x + 5$.

Виділяємо повний квадрат:

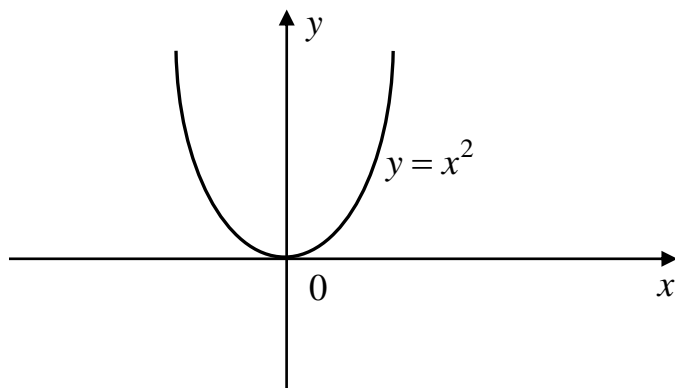
$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 5 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x-2)^2 + 1.$$

Графік функції $y = (x-2)^2 + 1$ можна отримати з графіка $y = (x-2)^2$ паралельним перенесенням на одну одиницю вгору.

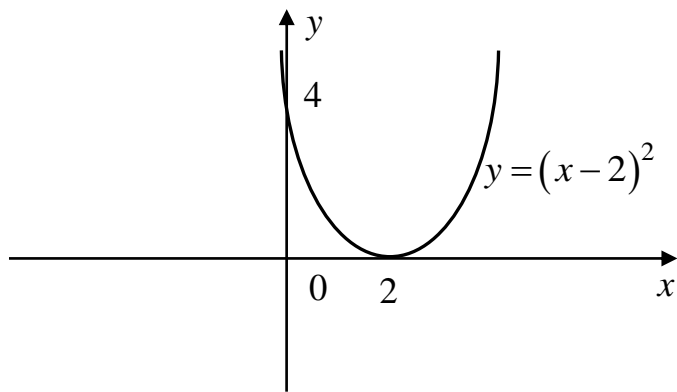
Графік функції $y = (x-2)^2$ можна отримати з графіка $y = x^2$ паралельним перенесенням на 2 одиниці вправо.

Отже, план побудови має вигляд.

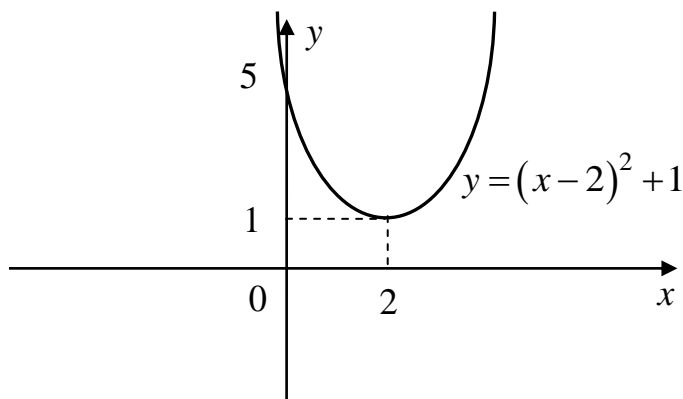
1) Побудувати графік базової функції $y = x^2$:



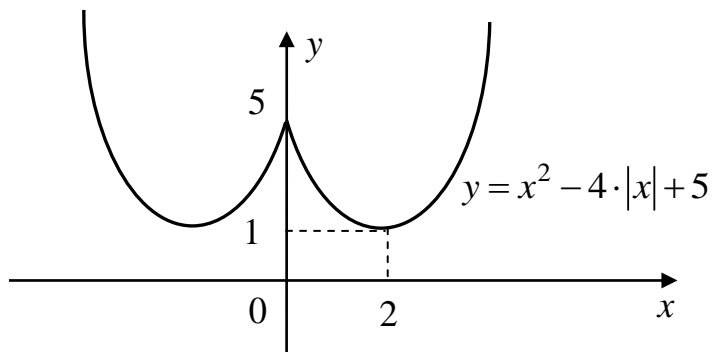
2) Паралельно перенести вправо на 2 одиниці - отримати графік $y = (x-2)^2$:



3) Паралельно перенести вгору на одну одиницю – отримати графік $y = (x - 2)^2 + 1$ (або $y = x^2 - 4x + 5$):

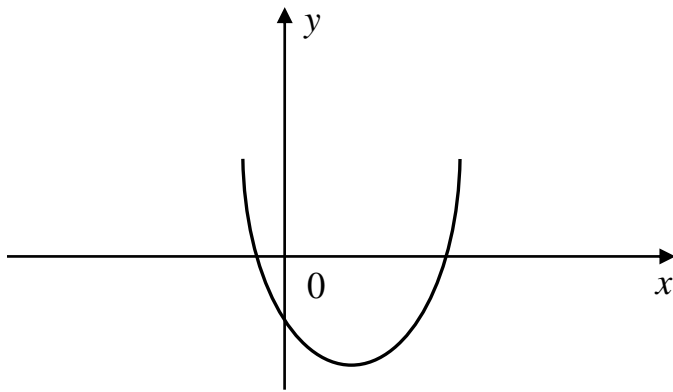


4) Відкинути частину графіка $y = x^2 - 4x + 5$, яка лежить у лівій півплощині та відобразити частину графіка, що лежить у правій півплощині в ліву – отримати графік $y = x^2 - 4 \cdot |x| + 5$:



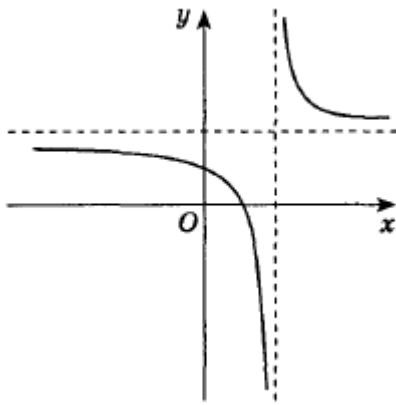
Розглянемо найпоширеніші задачі, пов'язані з побудовою графіків функцій та елементарними функціями.

Приклад 1. За поданим графіком визначити знаки коефіцієнтів квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$



Проаналізуємо розташування параболи. З рисунка видно, що вітки параболи напрямлені вгору, тому параметр $a > 0$. Також дуже часто важливу інформацію можна отримати, підставивши $x = 0$, тобто розглянути точку перетину графіка функції з віссю Oy . $y(0) = c$. З рисунка видно, що точка перетину з віссю Oy лежить нижче осі Ox , тому $c < 0$. Також за рисунком можна визначити положення вершини параболи відносно осі Oy (зліва чи справа). За формулою $x_g = -\frac{b}{2a}$, тому, знаючи, що $a > 0$ і вершина розташована справа, тобто $x_g > 0$, можна зробити висновок, що $b < 0$.

Приклад 2. Визначити знаки коефіцієнтів $y = \frac{x+a}{bx+c}$



Звернемо увагу на декілька фактів:

- 1) Точка перетину з віссю Oy (при $x = 0$) $y(0) = \frac{a}{c} > 0$.
- 2) Точка перетину з віссю Ox : дріб рівний нулю, коли його чисельник рівний нулю, тобто $x + a = 0$, тобто $x = -a$. З рисунка видно, що $-a > 0$, тому $a < 0$, тому, оскільки $\frac{a}{c} > 0$ можна зрозуміти, що $c < 0$.
- 3) Вертикальна асимптота графіка функції справа від осі Ox . Асимптота графіка раціональної можлива, якщо є ділення на нуль (точка, що не входить в ОДЗ), тобто коли $bx + c = 0$, звідки $x = -\frac{c}{b} > 0$. Отже, $b < 0$.

Часто в завданнях на встановлення відповідностей присутні задачі на визначення вигляду елементарного перетворення, що задане тим чи іншим виразом. При цьому сформульовані вони можуть бути по-різному, тому слід бути уважним. Часто звучать формулювання: від осі, до осі, вздовж осі; тут складно розрізнити паралельне перенесення і розтяг-стиск. Для того, щоб не допуститися помилок, раджу уявити собі точку на графіку

та уявити, як вона рухається при заданому перетворенні. При цьому досить просто уявити собі, паралельно якій координатній осі рухається ця точка і як змінюється її розташування відносно іншої осі – віддаляється чи наближається. Також при цьому варто враховувати властивості функцій.

Крім описаних перетворень графіків функцій, варто згадати деякі види перетворень, що часто фігурують в геометричних задачах, а саме – перетворення подібності, гомотетія, рух.