ЗМІСТ

ВСТУП

На персональному комп'ютері сьогодні можна вирішувати задачі науково-технічних розрахунків не використовуючи кодування якою б не було алгоритмічною мовою (Бейсик, Паскаль, СИ). Використання інтегрованих програмних систем автоматизації математичних розрахунків (Eureka, MatLab, Maple, Mathematica, MathCAD й ін.) дозволяє вирішувати поставлені задачі вхідною мовою, що максимально наближена до природної математичної мови.

В даній методичній роботі розглянута одна із самих популярних систем MathCAD, що розроблена фірмою MathSoft (США).

В MathCAD опис рішення математичних задач дається за допомогою звичних математичних формул і знаків. Такий же вигляд мають і результати обчислень. Так, що система MathCAD цілком виправдує абревіатуру CAD (Computer Aided Disign), що говорить про приналежності до складних і розвинутих систем автоматизованого проектування - САПР. MathCAD свого роду САПР у математиці.

До задач, розв'язуваних у системі MathCAD, можна віднести:

- підготовку науково-технічних документів, що містять текст, і формули, записані у звичній для фахівців формі;
- обчислення результатів математичних операцій, у яких беруть участь числові константи, змінні й розмірні фізичні величини;
- операції з векторами й матрицями;
- рішення рівнянь і систем рівнянь (нерівностей);
- статистичні розрахунки й аналіз даних;
- побудова двовимірних і тривимірних графіків;
- тотожні перетворення (у тому числі спрощення), аналітичне рішення рівнянь і систем;
- диференціювання й інтегрування, аналітичне й чисельне;
- рішення диференціальних рівнянь;
- проведення серій розрахунків з різними значеннями початкових умов й інших параметрів.

Технологія роботи в системі MATHCAD проста й зручна в роботі.

В методичній роботі розглянуто первісне знайомство із системою, технологію роботи, а також приклади виконання лабораторних робіт, передбачені робочою програмою.

ЗНАЙОМСТВО ІЗ СИСТЕМОЮ MATHCAD

Користувальницький інтерфейс системи створений так, що користувач, що має елементарні навички роботи з Windows-додатками, може відразу почати працювати з MathCAD.

Під інтерфейсом розуміється не тільки легке керування системою, як із клавішного пульта, так і за допомогою миші, але й просто набір необхідних символів, формул, текстових коментарів з наступним запуском документів (Worksheets) у реальному часі.

Запустивши систему MathCAD з Windows, ви побачите на екрані діалогове вікно, спочатку порожнє (Рис. 1).

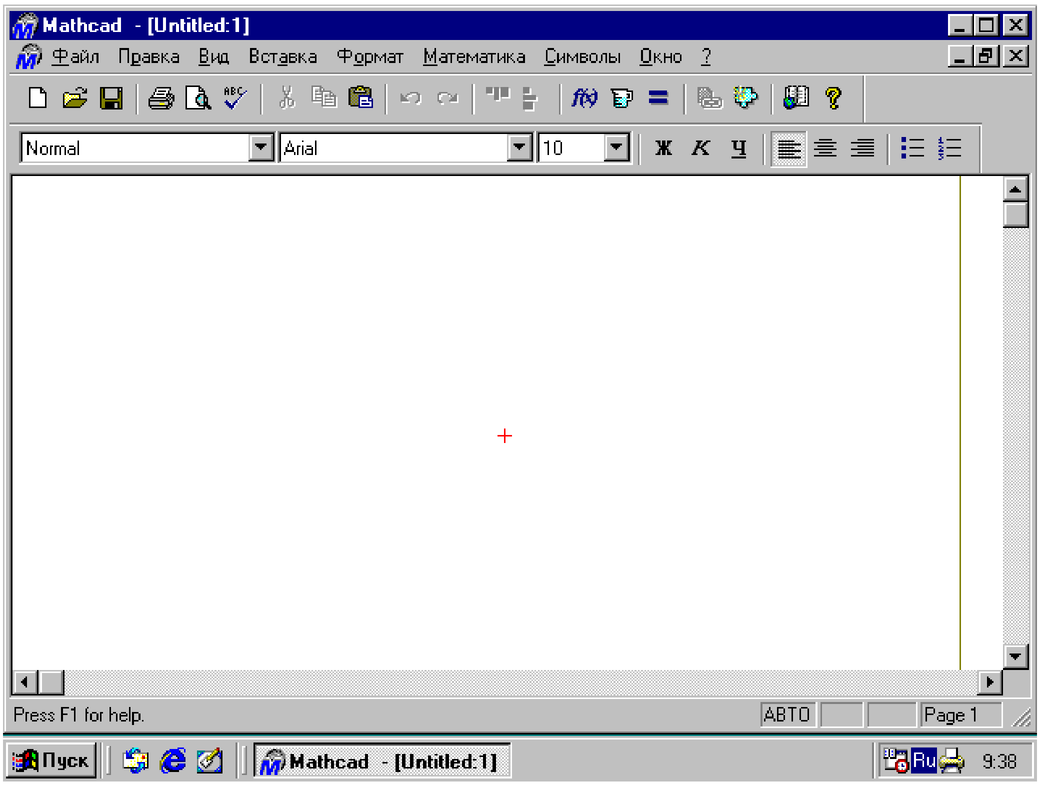


Рис. 1

Над ним видний рядок з основними елементами інтерфейсу. Опції головного меню, що втримуються в цьому рядку, легко вивчить самостійно; деякі з них дуже схожі на стандартні опції, прийняті в текстових редакторах Windows.

Робота з документами MathCAD не вимагають обов'язкового використання можливостей головного меню, тому що основні з них дублюються кнопками швидкого керування, які розташовані в зручні переміщувані за допомогою миші складальних панелях - палітрах. Складальні панелі з'являються у вікні редагування документів при активізації кнопок - піктограм. Вони служать для висновку заготівель - шаблонів математичних знаків (цифр, знаків арифметичних операцій, матриць, знаків інтеграла, похідних, бокових вівтарів й ін.). Покажчик миші підводимо до “Вид” у головному меню, клацаємо лівою кнопкою миші; покажчик підводимо до “Панелі інструментів” і клацаємо лівою кнопкою миші; Випадає наступне меню. Покажчик миші підводимо до “Математика” і клацаємо лівою кнопкою миші. Випадають складальні панелі. (Рис. 2)

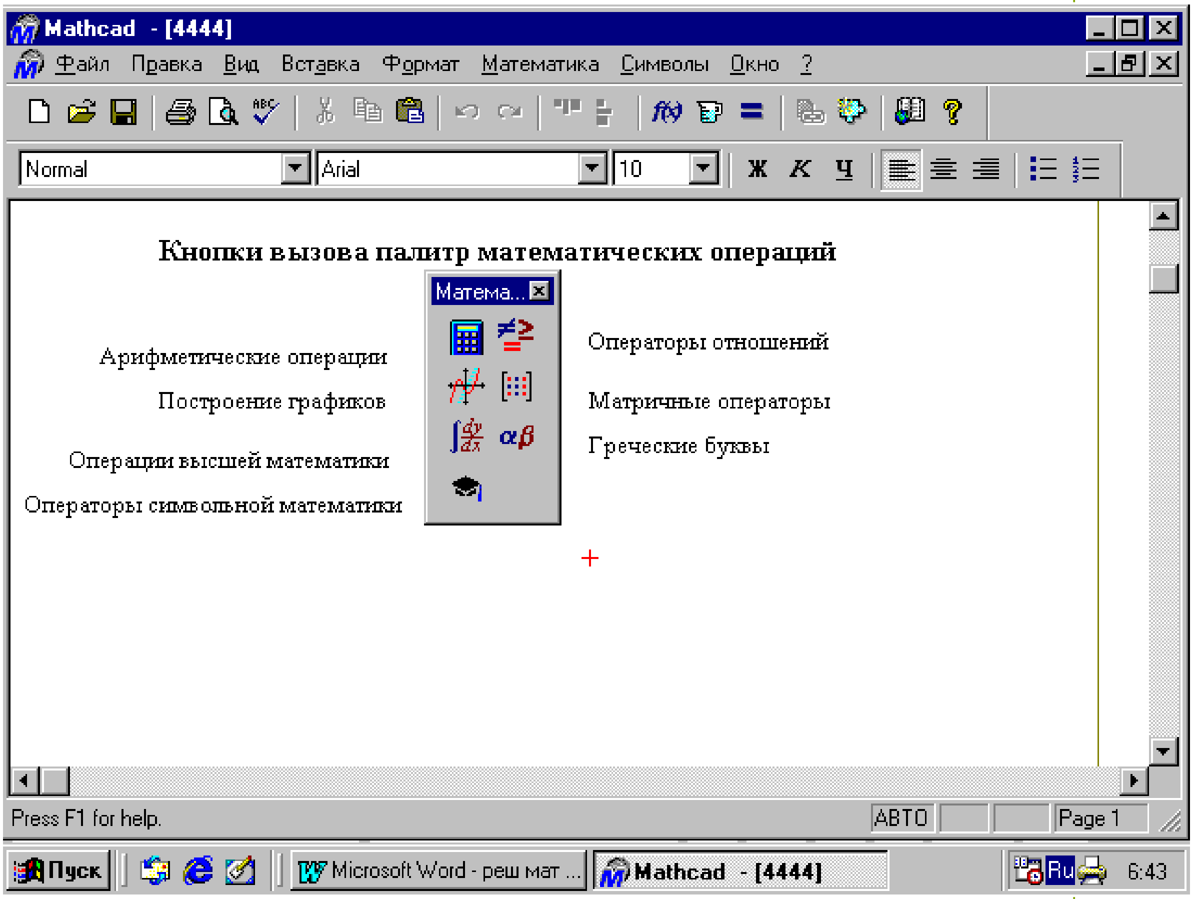


Рис. 2

ОБЧИСЛЕННЯ Й ОПЕРАЦІЇ В MATHCAD

Приведемо приклади рішення деяких типових математичних задач.

Примітка. Рішення завершуємо щигликом лівої кнопки миші, попередньо ведучи покажчик миші за межі виділеної області набору приклада.

Приклад 1. Спростити вираження: $\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$.

Рішення. У вікні редагування (далі на екрані) набираємо вихідне вираження

Покажчик миші підводимо до опції “Символи” у головному меню й клацаємо лівою кнопкою миші один раз (далі входимо в “Символи”). У меню, що випав, покажчик миші підводимо до опції “Спростити” й активізуємо (щигликом лівою кнопкою миші) зазначену опцію. На екрані відображається наше вираження, але вже у виділеному виді. Повторюємо наші дії: входимо в “Символи” (підводимо покажчик миші й клацаємо лівою кнопкою миші) і активізуємо “Спростити”. На екрані з'являється відповідь : $\frac{1}{2}$ a - $\frac{1}{2}$ b.

Приклад 2. Обчислити: $10x^2 - 5y^2$, при x=1,5 й y=-1,6.

Рішення. На екрані набираємо; із клавіатури набираємо знак =, комп'ютер сам поставить знак :=.

x: =1.5   y: =-1.6

$10.\ x^2 - 5\cdot y^2 =$

поруч зі знаком рівності читаємо відповідь : 9.7.

Приклад 3. Перетворіть у багаточлен: $(a + 2\cdot b)\cdot(a - 2\cdot b)\cdot(a^2 + 4\cdot b^2)$.

Рішення. На екрані набираємо вихідне вираження

$(a + 2\cdot b)\cdot(a - 2\cdot b)\cdot(a^2 + 4\cdot b^2)$

Входимо в меню “Символи”, активізуємо “Розширити”. На екрані читаємо відповідь:

$a^4 - 16\cdot b^4$.

Приклад 4. Розкладете на множники: $4z^4 - 25k^2$.

Рішення. На екрані набираємо

$4.\ z^4 - 25\cdot k^2$

Входимо в меню “Символи”, активізуємо “Фактор”. На екрані читаємо відповідь:

$-(5.\ k - 2\cdot z^2)\cdot(5.\ k^2 + 2\cdot z^2)$.

Приклад 5. Розкладете на множники: $12x^3 - 3x^2y - 18xy^2$.

Рішення. На екрані набираємо $12\cdot x^3 - 3\cdot x^2\cdot y - 18\cdot x\cdot y^2$.

Входимо в меню “Символи”, активізуємо “Фактор”. На екрані читаємо відповідь:

$3.\ (4.\ x^2 - x\cdot y - 6\cdot y^2)$.

Приклад 6. Скоротите дріб: $\frac{x^2 - 2\cdot m\cdot x + 3\cdot x - 6\cdot m}{x^2 + 2\cdot m\cdot x + 3\cdot x + 6\cdot m}$.

Рішення. На екрані набираємо вихідне вираження.

Входимо в меню “Символи”, активізуємо “Спростити”. На екрані читаємо відповідь: $\frac{(x - 2\cdot m)}{(x + 2\cdot m)}$.

Приклад 7. Обчислите: $\frac{36^{-1/2}}{271/3 - 81^{1/4.5}}$.

Рішення. На екрані набираємо шуканий приклад. Ставимо знак рівності й читаємо відповідь: -0. 014.

Приклад 8. Вирішите рівняння: $2\cdot(5.\ x - 1)^2 + 35\cdot x - 11 = 0$.

Рішення. Аналітичне рішення. Набираємо ключове слово **given** (дане).

Уводимо рівняння $2\cdot(5.\ x - 1)^2 + 35\cdot x - 11 = 0$. Тут при уведенні знака =, ми вводимо знак - логічне дорівнює з палітри, а не із клавіатури.

Набираємо **find(x)→**, поруч читаємо рішення:

$- \frac{3}{5} \quad \frac{3}{10}$

Приклад 9. Вирішите рівняння: $y^3 + 6 \cdot y^2 – 16 \cdot y = 0$.

Рішення. Чисельний пошук корінь рівняння.

Для пошуку корінь шуканої змінної, треба привласнити початкове значення, а потім за допомогою виклику функції **root(f(x),x)** знаходимо корінь.

Набираємо на екрані

y:=1

root($y^3 + 6 \cdot y^2 – 16 \cdot y$, y)=

читаємо відповідь: -8.

Якщо як початкове значення візьмемо y:=-2, то одержимо відповідь: 0.

Приклад 10. Вирішите систему рівнянь:

$x^2 + y +8 = x \cdot y$

$y – 2 \cdot x = 0.$

Рішення. Набираємо ключове слово **Given** і систему рівнянь

$x^2 + y +8 = x \cdot y$

$y – 2 \cdot x = 0.$

Між лівими й правими частинами рівнянь ставимо знак логічне дорівнює = .Набираємо виклик функції **Find(x,y)→**, читаємо на екрані відповідь:

$$\begin{matrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{matrix}$$

Приклад 11. а) Вирішите нерівність: $5 \cdot x - 3 =< 4$.

Рішення. На екрані набираємо нерівність і входимо в палітру “Символічні оператори”, активізуємо “**solve”**, набираємо x

5. x - 3 =< 4 solve, x (

на екрані читаємо відповідь: x=< 7/5.

б) Вирішите нерівність: $2 \cdot a^2 – 5 < 15$.

На екрані набираємо нерівність і входимо в палітру “Символічні оператори”, активізуємо “**solve”**, набираємо a

2. $a^2 – 5 < 15$ solve, a →

на екрані читаємо відповідь:($-\sqrt{\ }$ 10<a) . (a<$\sqrt{\ }$ 10).

Приклад 12. Обчислите: $\cos 34^0 \cdot \cos 56^0 – \sin 34^0 \cdot \sin 124^0$.

Рішення. Набираємо на екрані

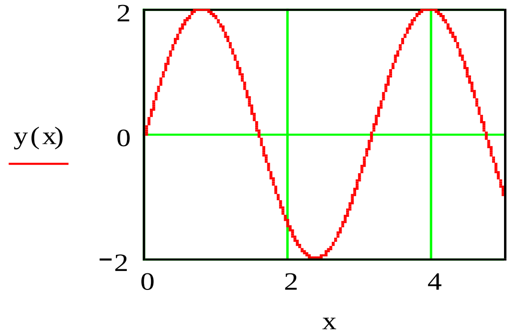
cos (34 · deg) · cos (56 · deg) – sin (34 · deg) · sin (124 · deg)=

і читаємо відповідь: 0.

Примітка. Набираємо **deg**, якщо кут заданий у градусах; **rad –** у радіанах.

Приклад 13. Побудувати графік функції $y=2 \cdot \sin 2 \cdot x$.

Рішення. Набираємо на екрані y(x):=2 · sin (2· x). Відводимо покажчик миші від виділеної частини й клацаємо лівою кнопкою мишки. Покажчик миші підводимо до “Побудова графіків” і входимо, активізуємо “Декартов графік”. З'являється шаблон для побудови графіка. На ній виділені влучні. Покажчик миші підводимо до нижньої мітки, активізуємо. Набираємо x. З'являються по горизонталі ще дві мітки, де ми повинні вказати інтервали побудови графіка. Покажчик миші підводимо до лівої мітки, клацаючи лівою кнопкою миші активізуємо й уводимо ліву границю **0**. Покажчик миші підводимо до правої границі, активізуємо й уводимо **5**. Ведемо покажчик миші до мітки осі **Y**, активізуємо його й уводимо **y(x)**. З'являються мітки нижньої й верхньої границь осі **Y**. У нижньої набираємо **–2**, у верхньої **2**. Відводимо покажчик миші від шаблона для графіків, клацаємо лівою кнопкою миші. З'являється шуканий графік. Для форматування графіка потрібно двічі клацнути в області графіка. У меню, що випав, можна управляти відображенням ліній, масштабом й ін



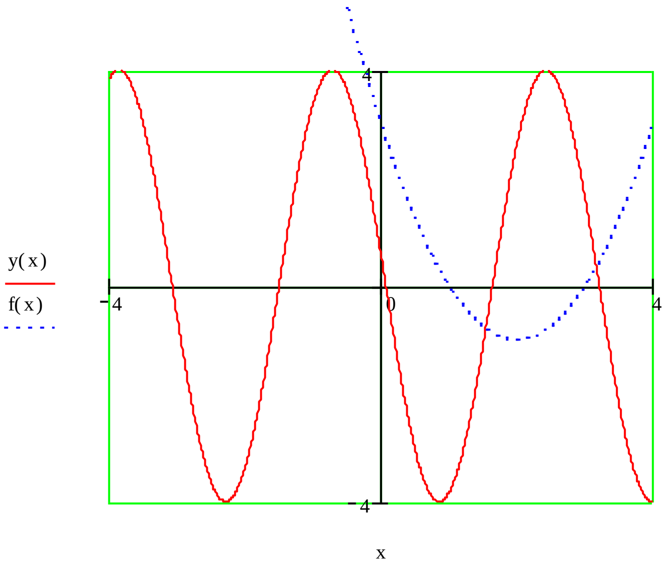
Приклад 14. Побудувати графіки функцій:

$$y(x)=4\sin(2\ x+3) \text{ і } f(x)=x^2-4x+3.$$

Рішення. Рішення аналогічно попередньому прикладу. У шаблоні для побудови графіків імена функцій набираємо через кому. Обмежень для значень аргументів і функцій не ставимо. Далі клацаємо мишею поза полем графіків.

$$y(x) := 4\cdot\sin(2\cdot x+3)$$

$$f(x) := x^2 - 4\cdot x + 3$$



Приклад 15. Побудувати графік функцій $z=\sin(x^2+y^2)$ для x від –2 до 2 й y від –2 до 2. Фрагмент виконання завдання наведений нижче.

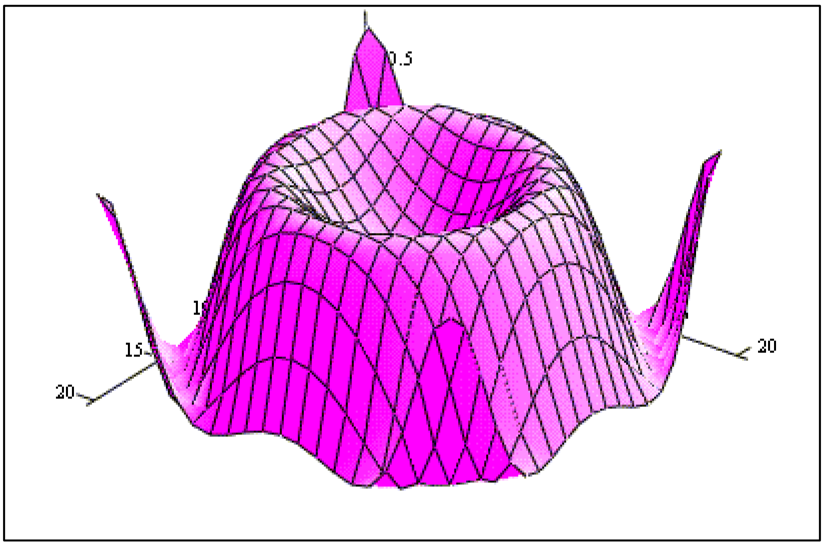
$$z(x, y) := \sin\left(x^2 + y^2\right)$$

$$n := 20 \qquad i := 0..\, n \qquad j := 0..\, n$$

$$a := -2 \qquad b := 2 \qquad x_0 := a \qquad x_i := x_0 + \frac{i\cdot(b-a)}{n}$$

$$c := -2 \qquad d := 2 \qquad y_0 := c \qquad y_j := y_0 + j\cdot\frac{(d-c)}{n}$$

$$Z_{i,j} := z\left(x_i, y_j\right)$$



Z

Приклад 16. Обчислите межу багаточлена: $2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 3$.
Рішення. З палітри "Вищої математики", активізуємо lim, заповнюємо виведений шаблон; завішаємо набір знаком (палітри "Оператори відносин". На екрані читаємо відповідь: 7.

Приклад 17. Обчислите похідну: $\cos x + x\cdot \sin x$.
Рішення. З палітри "Вищої математики", активізуємо $\frac{d}{dx}$, заповнюємо виведений шаблон; завішаємо набір знаком → палітри "Оператори відносин". На екрані читаємо відповідь: $x\cdot \cos(x)$.

Приклад 18. Обчислите невизначений інтеграл: $\int (x^2 + \cos x)dx$.

Рішення. З палітри "Вищої математики", активізуємо $\int$ заповнюємо виведений шаблон; завішаємо набір знаком → палітри "Оператори відносин". На екрані читаємо відповідь: $\frac{1}{3} x^3 + \sin(x.)$

Приклад 19. Обчислите певний інтеграл: $\int_0^1 \sqrt{(x^2 + 1)}\, dx$.

Рішення З палітри "Вищої математики", активізуємо $\int_a^b$,заповнюємо виведений шаблон; завішаємо набір знаком → палітри "Оператори відносин". На екрані читаємо відповідь: $\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ З ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

де $f(x)$ визначена й безперервна на деякому кінцевому або нескінченному інтервалі $a < x < b$.

Усяке значення x^*, що обертає функцію $f(x)$ в нуль, $f(x^*) \equiv 0$, називається коренем рівняння (1.1), а спосіб знаходження цього значення x^* і є рішення рівняння (1.1).

Знайти корінь рівняння виду (1.1) точно вдається лише в рідких випадках. Крім того, часте рівняння містить коефіцієнти, відомі лише приблизно й отже, сама задача про точне визначення корінь рівняння губить зміст. Розроблено методи чисельного рішення рівнянь виду (1.1), що дозволяють відшукати наближені значення корінь цього рівняння.

При цьому доводиться вирішувати дві задачі:

1) відділення корінь, тобто відшукання досить малих областей, у кожній з яких укладений тільки один корінь рівняння;

2) обчислення корінь із заданою точністю.

Скористаємося відомим результатом математичного аналізу: якщо безперервна функція приймає на кінцях деякого інтервалу значення різних знаків, то інтервал містить принаймні один корінь рівняння.

Для виділення областей, що містять один корінь, можна використати, наприклад, графічний способом, або рухаючись уздовж області визначення з деяким кроком, перевіряти на кінцях інтервалів умова зміни знака функції.

Для рішення другої задачі існують численні методи, з яких розглянемо чотири: методи ітерацій, метод половинного ділення, метод хорд, метод дотичних.

Завдання 1

Зробити відділення корінь: графічно й по програмі (точність $\varepsilon = 10^{-1}$). Індивідуальні завдання наведені в таблиці 1.

Завдання 2

1. Провести уточнення корінь методом половинного ділення.

Як початкове наближення виберемо $c = (a+b)/2$, потім досліджуємо функцію на кінцях відрізків $[a,c]$ й $[c,b]$. Вибирається той відрізок, у якого значення функції на кінцях має протилежні знаки. Процес триває доти, поки не виконається умова $|b-a| < \varepsilon$. Точність ε прийняти рівної 10^{-3}.

2. Зробити уточнення корінь методом простої ітерації.

Нехай коріння відділені й $[a,b]$ містить єдиний корінь. Рівняння (1.1) приведемо до ітераційного виду:

$$x = \varphi(x) \tag{1.2}$$

де функція $\varphi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ й для кожного $x \in [a,b]$ $|\varphi'(x)| < 1$. Функцію $\varphi(x)$ можна підібрати у вигляді

$$\varphi(x) = x + kf(x), \tag{1.3}$$

де k перебуває з умови $|\varphi'(k,x)| = |1 + kf'(x)| < 1$, для $\forall x \in [a,b]$.

Остання умова гарантує збіжність ітераційної послідовності $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n \cdots$ до кореня ζ. Умовою закінчення рахунку будемо вважати виконання нерівності

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon(1-q)}{q}; \; q = max|\varphi'(x)| \tag{1.4}$$

3. Зробити уточнення корінь методом хорд або дотичних (Х, К у таблиці 1) із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розрахункова формула для методу хорд:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{(f(x_n) - f(x_0))},$$

для методу дотичних:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

Значення x_0 для методу хорд і початкова точка для методу дотичних вибирається з умови виконання нерівності $f(x_0) f''(x_0) > 0$.

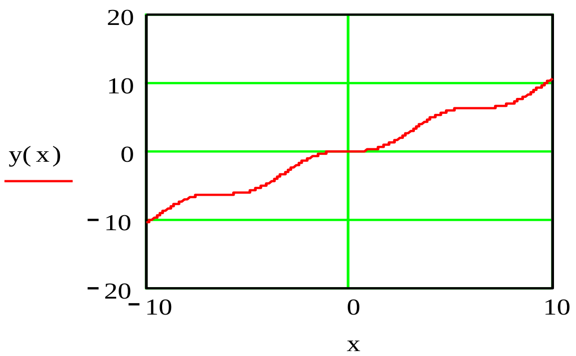
У результаті обчислень по цих формулах може бути отримана послідовність наближених значень кореня $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n \cdots$. Процес обчислень закінчується при виконанні умови $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-5}$). У кожному випадку вивести на печатку кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

ЗРАЗКОВИЙ ВАРІАНТ ВИКОНАННЯ РОБОТИ НА MATHCAD

***1. Визначення, побудова таблиць значень і графіків функцій і відділення корінь рівняння* y=x-sinx-0,25.**

Відокремлюємо корінь графічно.

$$y(x) := x - \sin(x) - 0.25$$



Обчислюємо значення аргументу й функції.

$i := 0..10$ $\qquad x_i := -5 + i$ $\qquad F_i := y(x_i)$

x =

	0
0	-5
1	-4
2	-3
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4
10	5

F =

	0
0	-6.209
1	-5.007
2	-3.109
3	-1.341
4	-0.409
5	-0.25
6	-0.091
7	0.841
8	2.609
9	4.507
10	5.709

Набираємо i, x_i F_i. Нижче, x= і поруч клацаємо мишею, набираємо F= ,також поруч клацаємо мишею.

2. Рішення з використанням операторів given, find.

Given

$$x - \sin(x) - 0.25 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow 1.1712296525016659939$$

3. Символьне рішення.

$$x - \sin(x) - 0.25 \text{ solve}, x \rightarrow 1.1712296525016659939$$

4. Ліворуч рішення методом ітерацій, посередині методом дотичних, праворуч методом хорд.

$i := 0..10$ $\quad$ $i := 0..10$ $\quad$ $i := 0..10$

$x_0 := 1$ $\quad$ $x_0 := 1$ $\quad$ $x_0 := 1$

$$x_{i+1} := \sin(x_i) + 0.25 \qquad x_{i+1} := x_i - \frac{\left[x_i - (\sin(x_i) + 0.25)\right]}{1 + \cos(x_i)} \qquad x_{i+1} := \frac{\left[x_0 \cdot (x_i - \sin(x_i) - 0.25) - x_i \cdot (x_0 - \sin(x_0) - 0.25)\right]}{(x_i - \sin(x_i) - 0.25) - (x_0 - \sin(x_0) - 0.25)}$$

x =

	0
0	1
1	1.091471
2	1.137306
3	1.157505
4	1.165804
5	1.169105
6	1.170401
7	1.170907
8	1.171104
9	1.171181
10	1.171211
11	1.171222

x =

	0
0	1
1	1.059385
2	1.101462
3	1.129285
4	1.146676
5	1.157108
6	1.163197
7	1.16669
8	1.168674
9	1.169794
10	1.170424
11	1.170778

x =

	0
0	1
1	0
2	1.576998
3	1.126117
4	1.177917
5	1.170273
6	1.171367
7	1.17121
8	1.171232
9	1.171229
10	1.17123
11	1.17123

Таблиця 1

N	Метод	Рівняння
1	К	$x + x\ln(x+0.5) - 0.5 = 0$
2	К	$x2^x - 1 = 0$
3	Х	$x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$
4	К	$x^3 + 12x - 2 = 0$
5	Х	$5x - 8\ln(x) - 8 = 0$
6	К	$x^4 + 0.5x^3 - 4x^2 - 3x - 0.5 = 0$
7	Х	$x - \sin(x) - 0.25 = 0$
8	К	$x^3 - 6x^2 + 20 = 0$
9	Х	$5x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$
10	К	$0.1x^2 - x\ln(x) = 0$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Етапи рішення рівняння з однієї невідомої.

2. Способи відділення корінь.

3. Яким образом графічне відділення корінь уточнюється за допомогою обчислень?

4. Дати словесний опис алгоритму методу половинного ділення.

5. Необхідні умови збіжності методу половинного ділення.

6. Умова закінчення рахунку методу простої ітерації. Погрішність методу.

7. Словесний опис алгоритму методу хорд. Графічне подання методу. Обчислення погрішності.

8. Словесний опис алгоритму методу дотичних (Ньютона). Графічне подання методу. Умова вибору початкової крапки.

РІШЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Методи рішення систем лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

(2.1)

або у векторному виді

$$Ax = b \qquad (2.2)$$

можна розділити на дві основні групи: прямі методи й ітераційні. Прямі методи дають точне рішення за кінцеве число операцій; до них ставляться, наприклад, методи Крамера й Гаусса. Ітераційні методи дають рішення системи рівнянь як межа послідовних наближень. Для ітераційних методів необхідне виконання умов збіжності й додаткових перетворень системи в еквівалентну їй.

Завдання 1

1. Вирішити систему лінійних рівнянь методом Гаусса. Завдання наведені в таблиці 2.

Коментар. Контроль виконуваних обчислень є важливим елементом рішення будь-якої обчислювальної задачі. Для контролю прямого ходу користуються контрольними сумами, які являють собою суми коефіцієнтів при невідомих і вільного члена для кожного рівняння заданої системи.

Для контролю обчислень в основній частині схеми єдиного ділення (стовпці коефіцієнтів при невідомих і вільних членів) над контрольними сумами виконують ті ж дії, що й над іншими елементами того ж рядка. При відсутності обчислювальних помилок контрольна сума для кожного рядка в межах впливах погрішностей округлення і їхніх нагромаджень повинна збігатися з рядковою сумою - другим стовпцем контролю. Рядкові суми являють собою суми всіх елементів з основної частини цього рядка.

Завдання 2

Вирішити систему (2.1) методом простої ітерації. Передбачається надалі, що матриця *A* квадратна й невырожденная.

Попередньо приведемо систему (2.2) до ітераційного виду:

$$x = Cx + f \tag{2.3}$$

Для довільного початкового вектора x_0 ітераційний процес

$$x^{n+1} = Cx^n + f$$

сходиться, якщо виконано одне з умов [2]

$$\text{а) } \sum_{j=1}^{n} \left| c_{i,j} \right| = \alpha < 1, \qquad 1 \le i \le n, \tag{2.4}$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^{n} \left| c_{i,j} \right| = \alpha < 1, \qquad 1 \le j \le n, \tag{2.5}$$

$$\text{в) } \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} = \alpha < 1. \tag{2.6}$$

Процес обчислень закінчуємо при виконанні умови

$$\rho_i(x^{k-1}, x^k) \le \varepsilon(1-\alpha)/\alpha \tag{2.7}$$

де ρ_i (*i=1,2,3*)– одна з метрик, обумовлена лівою частиною (2.4)-(2.6), по якій була встановлена збіжність, ε – задана точність ($\varepsilon = 10^{-4}$).

Завдання 3

Вирішити систему (2.1) методом Зейделя.

Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тим, що знайшовши якесь значення для компонента, ми на наступному кроці використаємо його для відшукання наступного компонента. Обчислення ведуться по формулі

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{2.8}$$

Кожне з умов (2.4)-(2.6) є достатнім для збіжності ітераційного процесу по методу Зейделя. Практично ж зручніше наступне перетворення системи (2.2). Домножая обидві частини (2.2) на A^T, одержимо еквівалентну їй систему

$$CX = d\ ,$$

де $C = A^T A$ й $d = A^T b$. Далі, поділивши кожне рівняння на c_{ii}, приведемо систему до виду (2.8). Подібне перетворення також гарантує збіжність ітераційного процесу.

ЗРАЗКОВИЙ ВАРІАНТ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Приклад. Вирішите систему рівнянь

$$X_1+2X_2+3X_3=7,$$
$$X_1-3X_2+2X_3=5,$$
$$X_1+X_2+X_3=3.$$

1. Символьне рішення систем рівнянь

Фрагмент робочого документа з відповідними обчисленнями наведений нижче. Тут **=** - логічна рівність.

Given

$$x1 + 2 \cdot x2 + 3 \cdot x3 = 7$$

$$x1 - 3 \cdot x2 + 2 \cdot x3 = 5$$

$$x1 + x2 + x3 = 3$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь як матричне рівняння Ax=b

Порядок виконання завдання.

1. Установите режим автоматичних обчислень.
2. Уведіть матрицю системи й матриця-стовпець правих частин.
3. Обчислите рішення системи по формулі $x=A^{-1}b$.
4. Перевірте правильність рішення множенням матриці системи на вектор-стовпець рішення.
5. Знайдіть рішення системи за допомогою функції lsolve і зрівняєте результати.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вирішимо систему за допомогою функції ***lsolve*** і зрівняємо результат з рішенням $x=A^{-1}b$.

$$x := \text{lsolve}(A, b) \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Рішення лінійної системи методом Гаусса

Коментарі. Функція ***augment(A,b)*** формує розширену матрицю системи додаванням до матриці системи праворуч стовпця правих частин. Функція ***rref*** приводить розширену матрицю системи до східчастого виду, виконуючи прямій і зворотний ходи гауссова виключення. Останній стовпець містить рішення системи.

$$\text{rref}(\text{augment}(A, b)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Рішення системи методом Крамера

Порядок виконання роботи.

1. Обчислюємо D визначник матриці A.
2. Задамо матрицю DX1, заміною першого стовпця матриці A, матрицею b. Обчислюємо визначник матриці DX1.
3. Задамо матрицю DX2, заміною другого стовпця матриці A, матрицею b. Обчислюємо визначник матриці DX2.

4. Задамо матрицю DX3, заміною третього стовпця матриці А, матрицею b. Обчислюємо визначник матриці DX3.
5. Визначаємо рішення системи лінійних рівнянь x_1, x_2, x_3.

$D := |A| \qquad D = 9$

$DX1 := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad DX1 := |DX1|$

$DX1 = 9$

$DX2 := \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad DX2 := |DX2| \qquad DX2 = 0$

$DX3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad DX3 := |DX3| \qquad DX3 = 18$

$x1 := \dfrac{DX1}{D} \quad x1 = 1 \qquad x2 := \dfrac{DX2}{D} \quad x2 = 0 \qquad x3 := \dfrac{DX3}{D} \quad x3 = 2$

5.Рішення системи лінійних алгебраїчних рівняння методом простих ітерацій

Порядок виконання завдання

1. Уведіть матриці C й d.
2. Перетворіть вихідну систему Cx=d до виду x=b+Ax.
3. Визначите нульове наближення рішення.
4. Задайте кількість ітерацій.
5. Обчислите послідовні наближення.

$ORIGIN := 1$

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{bmatrix} \qquad d := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$i := 1..3 \qquad j := 1..3$

$$b_i := \frac{d_i}{C_{i,i}} \qquad A_{i,j} := \frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}} \qquad A_{i,i} := 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^{\langle 1 \rangle} := b \qquad k := 2..10 \qquad x^{\langle k \rangle} := b + A \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$$

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1.92	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907
2	3	3.19	3.188	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189
3	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

$$X := x^{\langle 10 \rangle} \qquad X = \begin{bmatrix} 1.907 \\ 3.189 \\ 4.917 \end{bmatrix}$$

6.Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя

Порядок виконання завдання

1. Уведіть матриці C и d.
2. Перетворіть систему Cx=d до виду x=b+A1 x+A2 x.
3. Визначите нульове наближення рішення.
4. Задайте кількість ітерацій.
5. Обчислите послідовні наближення.

$ORIGIN := 1$

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{bmatrix} \qquad d := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$i := 1..3 \qquad b_i := \frac{d_i}{C_{i,i}} \qquad i := 2..3 \qquad j := 1..2$$

$$A1_{i,j} := \frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}} \qquad A2_{j,i} := \frac{-C_{j,i}}{C_{j,j}}$$

$$A1_{i,i} := 0 \quad A1_{j,i} := 0 \quad A2_{i,i} := 0 \quad A2_{i,j} := 0 \quad A := A1 + A2$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & 0 & 0 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^{\langle 1 \rangle} := b \qquad y^{\langle 1 \rangle} := b \qquad k := 2..10$$

$$x^{\langle k \rangle} := b + A2 \cdot x^{\langle k-1 \rangle} \qquad x^{\langle k \rangle} := x^{\langle k \rangle} + A1 \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$$

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1.92	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905
2	3	3.19	3.192	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193
3	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

Таблиця 2

№ вар.	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	b_{1i}
1	0.35 0.12 - 0.13	0.12 0.71 0.15	- 0.13 0.15 0.63	0.10 0.26 0.38
2	0.71 0.10 - 0.10	0.10 0.34 0.64	0.12 - 0.04 0.56	0.29 0.32 - 0.10
3	0.34 - 0.04 0.06	- 0.04 0.44 0.56	0.10 - 0.12 0.39	0.33 - 0.05 0.28
4	0.10 - 0.04	- 0.04 0.34	- 0.63 0.05	- 0.15 0.31

	- 0.43	0.05	0.13	0.37
5	0.63 0.05 0.15	0.05 0.34 0.10	0.15 0.10 0.71	0.34 0.32 0.42
6	1.20 - 0.50 - 0.30	- 0.20 1.70 0.10	0.30 - 1.60 - 1.50	- 0.60 0.30 0.40
7	0.30 - 0.10 - 1.50	1.20 - 0.20 - 0.30	- 0.20 1.60 0.10	- 0.60 0.30 0.70
8	0.20 0.58 0.05	0.44 - 0.29 0.34	0.91 0.05 0.10	0.74 0.02 0.32
9	6.36 7.42 1.77	1.75 19.03 0.42	1.0 1.75 6.36	41.70 49.49 27.67
10	3.11 - 1.65 0.60	- 1.66 3.15 0.78	- 0.60 - 0.78 - 2.97	- 0.92 2.57 1.65

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. До якого типу - прям або ітераційному - ставиться метод Гаусса?
2. У чому полягає прямій і зворотний хід у схемі єдиного ділення?
3. Як організується, контроль над обчисленнями в прямому й зворотному ході?
4. Як будується ітераційна послідовність для знаходження рішення системи лінійних рівнянь?
5. Як формулюються достатні умови збіжності ітераційного процесу?
6. Як ці умови пов'язані з вибором метрики простору?
7. У чому відмінність ітераційного процесу методу Зейделя від аналогічного процесу методу простої ітерації?

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

Нехай функція $f(x)$ задана таблично, або обчислення її вимагає громіздких викладень. Замінимо приблизно функцію $f(x)$ на яку-небудь функцію $F(x)$, так, щоб відхилення $f(x)$ від $F(x)$ було в заданій області в деякому змісті мінімальним. Подібна заміна називається апроксимацією функції $f(x)$, а функція $F(x)$ – апроксимуючої (приближающей) функцією.

Класичний підхід до рішення задачі побудови функції, що наближає, ґрунтується на вимогу строгого збігу $f(x)$ значень $F(x)$ й у x_i крапках $i = 0, 1, 2, ...n)$ (, тобто

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1, ..., F(x_n) = y_n. \qquad (3.1)$$

У цьому випадку знаходження наближеної функції називають інтерполяцією (або інтерполяцією), крапки $x_0, x_1, \cdots x_n$ – вузлами інтерполяції.

Часта інтерполяція ведеться для функцій, заданих таблицями з рівновіддаленими значеннями аргументу x. У цьому випадку крок таблиці $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, ...)$ є величиною постійної. Для таких таблиць побудова інтерполяційних формул (як, втім, і обчислення по цих формулах) помітно спрощується.

Завдання 1

По заданій таблиці значень функції скласти формулу інтерполяційного багаточлена Лагранжа (3.2) і побудувати графік $L_2(x)$. Вихідні дані беруться з таблиці 3.1.

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \qquad (3.2)$$

Таблица 3.1.

№	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
1	2	3	5	4	1	7
2	4	2	3	5	2	8
3	0	2	3	-1	-4	2
4	7	9	13	2	-2	3
5	-3	-1	3	7	-1	4
6	1	2	4	-3	-7	2
7	-2	-1	2	4	9	1
8	2	4	5	9	-3	6
9	-4	-2	0	2	8	5
10	-1	1.5	3	4	-7	1
11	2	4	7	-1	-6	3
12	-9	-7	-4	3	-3	4
13	0	1	4	7	-1	8
14	8	5	0	9	2	4
15	-7	-5	-4	4	-4	5

Завдання 2

Обчислити одне значення заданої функції для проміжного значення аргументу (a) за допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа (3.3) і оцінити погрішність інтерполяції. Для виконання завдання вихідні дані беруться з таблиці 3.2, 3.3 або 3.4.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (3.3)$$

Для погрішності $R_n(x)$ виконується нерівність

$$|R_n(x)|\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\prod_{n+1}(x)|, \qquad x\in[x_o,x_n] \qquad (3.4)$$

де $M_{n+1}=\max|f^{(n+1)}(x)|$.

Таблиця 3.2

№ варіанта	Значення a	№ таблиці
1	-2	3.3
2	3.77	3.4
3	0.55	3.3
4	4.83	3.4
5	3.5	3.3
6	5.1	3.4
7	1.75	3.3
8	4.2	3.4
9	-1.55	3.3
10	6.76	3.4

Таблиця 3.3

x	-3.2	-0.8	0.4	2.8	4.0	6.4	7.6
$f(x)=2.1\sin(0.37x)$	-1.94	-0.61	0.31	1.81	2.09	1.47	0.68

Таблиця 3.4

x	1.3	2.1	3.7	4.5	6.1	7.7	8.5
$f(x)=\lg(x)/x+x^2$	1. 777	4. 563	13.84	20.39	37.34	59.41	72.4

Таблиця 3.5

x	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x)=\cos(x)$	0. 995	0. 988	0. 980	0. 969	0. 955	0. 939	0. 921

Таблиця 3.6

x	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$f(x)=\sin(x)$	0. 605	0. 644	0. 681	0.71	0.75	0. 783	0. 813

Завдання 3.

Ущільнити частина таблиці заданої на відрізку $[a,b]$ функції, використовуючи інтерполяційний багаточлен Ньютона (3.5) і оцінити погрішність інтерполяції D (формула (3.6)). Таблицю 3.7 кінцевих разностей прорахувати вручну на відрізку $[a,b]$ із кроком h. Для виконання завдання вихідні дані беруться з таблиць 3.8, 3.5 й 3.6.

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0, \qquad (3.5)$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

$$D \approx \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f'''(\xi), \qquad (3.6)$$

де ξ – деяка внутрішня крапка найменшого проміжку, що містить всі вузли $x_i (i = \overline{0,n})$ й x.

Формула (3.5) називається першою інтерполяційною формулою Ньютона. Якщо обчислює значение, що, змінної ближче до кінця відрізка $[a;b]$, то застосовують другу формулу Ньютона – інтерполяція назад (формула (3.6)).

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} \qquad (3.6)$$

де $t = \dfrac{x - x_n}{h}$ й $D = \dfrac{t(t+1)(t+2)}{3!} f'''(\xi)$.

Таблиця 3.7

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
$x_2 = x_1 + h$	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
$x_3 = x_2 + h$	y_3			

Таблиця 3.8

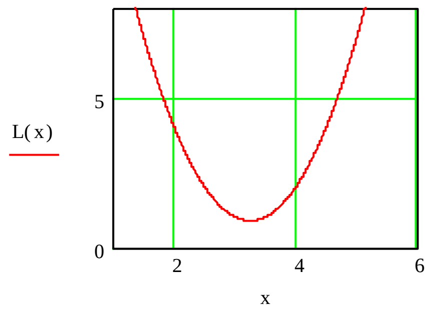
№	a	b	h_0	h	№ таблиці
1	0.65	0.80	0.05	0.01	3.6
2	0.25	0.40	0.05	0. 025	3.5
3	0.75	0.90	0.05	0.01	3.6
4	0.70	0.85	0.05	0. 025	3.6
5	0.80	0.95	0.05	0. 025	3.6

6	0.1	0.25	0.05	0. 025	3.5
7	0.15	0.3	0.05	0. 025	3.5
8	0.7	0.85	0.05	0. 025	3.6
9	0.2	0.35	0.05	0.01	3.5
10	0.80	0.95	0.05	0.01	3.6

ЗРАЗКОВИЙ ФРАГМЕНТ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

$x0 := 2 \quad x1 := 3 \quad x2 := 5 \quad y0 := 4 \quad y1 := 1 \quad y2 := 7$

$$L(x) := \left[\frac{y0\cdot(x-x1)\cdot((x-x2))}{(x0-x1)\cdot(x0-x2)} + \frac{y1\cdot(x-x0)\cdot((x-x2))}{(x1-x0)\cdot(x1-x2)} + \frac{y2\cdot(x-x0)\cdot((x-x1))}{(x2-x0)\cdot(x2-x1)}\right]$$



$x0 := 2 \quad x1 := 3 \quad x2 := 5 \quad y0 := 4 \quad y1 := 1 \quad y2 := 7$

$$L(x) := \left[\frac{4\cdot(x-3)\cdot((x-5))}{(2-3)\cdot(2-5)} + \frac{1\cdot(x-2)\cdot((x-5))}{(3-2)\cdot(3-5)} + \frac{7\cdot(x-2)\cdot((x-3))}{(5-2)\cdot(5-3)}\right]$$

$2\cdot x^2 - 13\cdot x + 22$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. У чому особливість наближення таблично заданої функції методом інтерполяції?
2. Як обґрунтовується існування й одиничність інтерполяційного багаточлена?
3. Як зв'язаний ступінь інтерполяційного багаточлена з кількістю вузлів інтерполяції?
4. Як будуються інтерполяційні багаточлени Лагранжа й Ньютона?
5. У чому особливості цих двох способів інтерполяції?

6. Як виробляється оцінка погрішності методу інтерполяції багаточленом Лагранжа?

7. Як використається метод інтерполяції для уточнення таблиць функцій?

8. У чому відмінність між першими й другий інтерполяційними формулами Ньютона?

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Формули, використовувані для наближеного обчислення однократних інтегралів, називають квадратурними формулами. Простий прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що подынтегральная функція $f(x)$ заміняється на відрізку $[a,b]$ інтерполяційним багаточленом, наприклад, багаточленом Лагранжа $L_n(x)$; для інтеграла маємо наближена рівність (4.1). Передбачається, що відрізок $[a,b]$ розбитий на n частин крапками (вузлами) x_i, наявність яких мається на увазі при побудові багаточлена $L_n(x)$. Для рівновіддалених вузлів $x_i = x_0 + ih,\ h = \dfrac{b-a}{n},\ x_0 = a,\ x_n = b.$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)\ dx \qquad (4.1)$$

При певних допущеннях одержуємо формулу трапецій

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right), \qquad (4.2)$$

де y_i – значення функції у вузлах інтерполяції.

Маємо наступну оцінку погрішності методу інтегрування по формулі трапецій (4.2):

$$|R_n| \le M\,\frac{|b-a|\cdot h^2}{12},\ \text{де}\ M = \max\left|f^{(2)}(x)\right|,\ x \in [a,b]. \qquad (4.3)$$

У багатьох випадках більше точної виявляється формула Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \ldots + 2y_{2m-1}\right). \qquad (4.4)$$

Для формули Симпсона маємо наступну оцінку погрішності:

$$|R_n| \le M\,\frac{|b-a|\cdot h^4}{180},\ \text{де}\ M = \max\left|f^{(4)}(x)\right|,\ x \in [a,b].$$

Завдання 1

Скласти програму обчислення інтеграла від заданої функції на відрізку $[a,b]$ по формулі трапецій із кроком $h = 0.1$ и $h = 0.05$. Зрівняти результати. Оцінити точність по формулі (4.3). Зрівняти результати. Вихідні дані для виконання завдання беруться з таблиці 4.

Завдання 2

Скласти програму обчислення інтеграла від заданої функції на відрізку $[a,b]$ по формулі Симпсона методом повторного рахунку з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Вихідні дані для виконання завдання беруться з таблиці 4.

ЗРАЗКОВИЙ ФРАГМЕНТ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Обчислити інтеграл від заданої функції на відрізку [a,b] по формулі трапецій і прямим способом.

$$a := 0 \qquad b := 1 \qquad n := 10 \qquad h := \frac{(b-a)}{n}$$

$$i := 0..\,10 \qquad x_0 := a \qquad x_i := x_0 + i \cdot h$$

$$y := 0.37 \cdot e^{\sin(x)}$$

$$s := h \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right)$$

$$s = 0.604$$

$$\int_0^1 0.37\, e^{\sin(x)}\, dx = 0.604$$

Таблиця 4

N	Функція	a	b
1	$0.37e^{\sin x}$	0	1
2	$0.5x + x\ln x$	1	2
3	$(x+1.9)\sin(x/3)$	1	2
4	$\frac{1}{x}\ln(x+2)$	2	3

5	$\dfrac{3\cos x}{2x+1.7}$	0	1
6	$(2x+0.6)\cos(x/2)$	1	2
7	$2.6x^2 \ln x$	1.2	2.2
8	$(x^2+1)\sin(x-0.5)$	1	2
9	$x^2\cos(x/4)$	2	3
10	$\dfrac{\sin(0.2x-3)}{x^2+1}$	3	4

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які переваги формули парабол у порівнянні з формулою трапецій і наслідком чого є ці переваги?
2. Чи вірні формули (4.2), (4.4) для нерівновіддалених вузлів?
3. У яких випадках наближені формули трапецій і парабол виявляються точними?
4. Як впливає на точність чисельного інтегрування величина кроку?
5. Яким способом можна прогнозувати зразкову величину кроку для досягнення заданої точності інтегрування?
6. Чи можна домогтися необмеженого зменшення погрішності інтегрування шляхом послідовного зменшення кроку?

ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай дане диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x,y). \tag{5.1}$$

Потрібно знайти на відрізку $[a,b]$ рішення $y(x)$, що задовольняє початковій умові

$$y(a) = y_0 \tag{5.2}$$

Будемо припускати, що умови теореми існування й одиничності виконані. Для рішення використаємо метод Эйлера (метод першого порядку точності, розрахункові формули (5.3)) і метод Рунге-Кутта (метод четвертого порядку точності, розрахункові формули (5.4)) із кроком *h* й *2h*. Відзначимо, що результати можуть сильно відрізнятися, через те, що метод Эйлера, маючи тільки перший порядок точності, використається, як правило, для оцінних розрахунків. Орієнтовну оцінку погрішності методу Рунге-Кутта ε обчислити по формулі (5.5) [2].

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \text{ де } h \text{ – крок розбивки.} \tag{5.3}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \text{ де} \tag{5.4}$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i),\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

$$\varepsilon = \frac{|y_{2h} - y_h|}{15} \tag{5.5}$$

Завдання 1

Написати програму рішення диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ методом Эйлера на відрізку $[a,b]$ із кроком h й *2h* і початковою умовою $y(a) = y_0$. Вихідні дані для виконання завдання беруться з таблиці 5. Зрівняти результати.

Завдання 2

Написати програму рішення диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ методом Рунге-Кутта на відрізку $[a,b]$ із кроком h й *2h* і початковою умовою $y(a) = y_0$. Оцінити погрішність по формулі (5.5). Вихідні дані для виконання завдання беруться з таблиці 5.

ЗРАЗКОВИЙ ФРАГМЕНТ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Вирішити диференціальне рівняння y'=f(x,y) методом Эйлера на відрізку [a,b] із кроком h с початковою умовою y(a)=y_0, f(x,y)=(3x-y)/(x^2+y), a=2, b=3, h=0.1, y_0=1.

$a := 2 \qquad b := 3 \qquad x_0 := a$

$i := 0..10 \qquad h := 0.1 \qquad x_{i+1} := x_0 + i \cdot h \qquad y_0 := 1$

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot \frac{3 \cdot x_i - y_i}{\left(x_i\right)^2 + y_i}$$

x =

	0
0	2
1	2
2	2.1
3	2.2
4	2.3
5	2.4
6	2.5
7	2.6
8	2.7
9	2.8
10	2.9
11	3

y =

	0
0	1
1	1.1
2	1.196
3	1.287
4	1.374
5	1.457
6	1.536
7	1.613
8	1.687
9	1.758
10	1.827
11	1.895

2. Вирішити диференціальне рівняння y'=f(x,y) методом Рунге-Кутта на відрізку [a,b] із кроком h с початковою умовою $y(a)=y_0$.

Таблиця 5

N	Функція	a	b	y_0	h
1	$\frac{3x-y}{x^2+y}$	2	3	1	0.1
2	$\frac{2x+y+4}{2y+x}$	3	4	1	0.1
3	$\frac{x^2-y}{2x+y+1}$	0	1	2	0.1
4	$\frac{x^2-y+2}{xy+3x}$	2	3	1	0.1
5	$\frac{3-x-y^2}{2-xy^2}$	1	2	1	0.1

6	$\dfrac{2-x-y^2x}{3x+y}$	0	1	1	0.1
7	$\dfrac{1+3xy}{5-x+y^2}$	0	1	2	0.1
8	$\dfrac{x^2y+2}{2x-y}$	0	1	1	0.1
9	$\dfrac{x^2+y+2}{2x-y}$	2	3	2	0.1
10	$\dfrac{xy+4}{2y-xy+1}$	0	1	3	0.1

$a := 2 \qquad b := 3 \qquad x_0 := a$

$i := 0..10 \qquad h := 0.1 \quad x_{i+1} := x_0 + i\cdot h \quad y_0 := 1$

$$f(x,y) := \frac{3\cdot x - y}{x^2 + y} \qquad y_{i+1} := y_i + h\cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_1 := h\cdot f(x_i, y_i) \qquad k_2 := h\cdot f\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right), y_i + \frac{k_1}{2}\right]$$

$$k_3 := h\cdot f\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right), y_i + \frac{k_2}{2}\right] \qquad k_4 := h\cdot f\left[\left(x_i + h\right), y_i + k_3\right]$$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4}{6}$$

x =

	0
0	2
1	2
2	2.1
3	2.2
4	2.3
5	2.4
6	2.5
7	2.6
8	2.7
9	2.8
10	2.9
11	3

y =

	0
0	1
1	1.066
2	1.132
3	1.199
4	1.265
5	1.331
6	1.397
7	1.463
8	1.529
9	1.596
10	1.662
11	1.728

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Перевірити для диференціального рівняння умови теореми існування й одиничності.
2. На які основні групи підрозділяються наближені методи рішення диференціальних рівнянь?
3. У якій формі можна одержати рішення диференціального рівняння по методу Эйлера?
4. Який геометричний зміст рішення диференціального рівняння методом Эйлера?
5. У якій формі можна одержати рішення диференціального рівняння по методу Рунге-Кутта?
6. Який спосіб оцінки точності використається при наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь методами Эйлера й Рунге-Кутта?
7. Як обчислити погрішність по заданій формулі, використовуючи метод подвійного перерахування?

СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ДОСВІДЧЕНИХ ДАНИХ

Нехай залежність між змінними x й y задана таблично (задані досвідчені дані). Потрібно знайти функцію в деякому змісті щонайкраще описує дані. Одним зі способів підбора такий (приближающей) функції є метод найменших квадратів. Метод полягає в тому, щоб сума квадратів відхилень значень шуканої функції $\bar{y}_i = \bar{y}(x_i)$ й заданої таблично y_i була найменшою:

$$S(c) = (y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \bar{y}_n)^2 \to \min \qquad (6.1)$$

де c – вектор параметрів шуканої функції.

Завдання 1

Побудувати методом найменших квадратів дві емпіричні формули: лінійну й квадратичну.

У випадку лінійної функції $y = ax + b$ задача зводиться знаходженню параметрів a і b із системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} M_{x^2}a + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + b = M_y \end{cases},$$

де $M_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\quad M_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\quad M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $M_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

а у випадку квадратичної залежності $y = ax^2 + bx + c$ до знаходження параметрів a, b і c із системи рівнянь:

$$\begin{cases} M_{x^4}a + M_{x^3}b + M_{x^2}c = M_{x^2y} \\ M_{x^3}a + M_{x^2}b + M_x c = M_{xy} \\ M_{x^2}a + M_x b + c = M_y \end{cases},$$

де $M_{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4$, $M_{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $M_{x^2y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$

Вибрати із двох функцій найбільш підходящу. Для цього скласти таблицю для підрахунку суми квадратів відхилень по формулі **(6.1)**. Вихідні дані взяти з таблиці 6.

Завдання 2

Скласти програму для знаходження функцій, що наближають, заданого типу з висновком значень їхніх параметрів і відповідних їм сум квадратів відхилень. Вибрати як приближающих функції наступні: $y = ax + b$, $y = ax^m$,

$y = ae^{mx}$. Провести лінеаризацію. Визначити для якого виду функції сума квадратів відхилень є найменшою.

Вихідні дані поміщені в таблиці 6.

Зразковий фрагмент виконання роботи

$i := 1..10$

$x_1 := 0.5$ $y_1 := 1.8$

$x_2 := 0.1$ $y_2 := 1.1$

$x_3 := 0.4$ $y_3 := 1.8$

$x_4 := 0.2$ $y_4 := 1.4$

$x_5 := 0.6$ $y_5 := 2.1$

$x_6 := 0.3$ $y_6 := 1.8$

$x_7 := 0.4$ $y_7 := 1.6$

$x_8 := 0.7$ $y_8 := 2.2$

$x_9 := 0.3$ $y_9 := 1.5$

$x_{10} := 0.8$ $y_{10} := 2.3$

$$mx2 := 1\frac{\left[\sum_{i=1}^{10}(x_i)^2\right]}{10} \quad mx := 1\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\right)}{10} \quad mxy := 1\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot y_i\right)}{10} \quad my := 1\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}y_i\right)}{10}$$

$mx2 = 0.229$ $mx = 0.43$ $mxy = 0.828$ $my = 1.76$

given

$mx2\cdot a + mx\cdot b = mxy$

$mx\cdot a + b = my$

$$\text{find}(a, b) \rightarrow \begin{bmatrix} 1.6145124716553287982 \\ 1.0657596371882086168 \end{bmatrix}$$

Таблиця 6

i / №		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	0.5	0.1	0.4	0.2	0.6	0.3	0.4	0.7	0.3	0.8
	y	1.8	1.1	1.8	1.4	2.1	1.8	1.6	2.2	1.5	2.3
2	x	1.7	1.5	3.7	1.1	6.2	0.3	6.5	3.6	3.8	5.9
	y	1.5	1.4	1.6	1.3	2.1	1.1	2.2	1.8	1.7	2.3
3	x	1.7	1.1	1.6	1.2	1.9	1.5	1.8	1.4	1.3	1.0
	y	6.7	5.6	6.7	6.1	7.4	6.9	7.9	5.9	5.6	5.3
4	x	1.3	1.2	1.5	1.4	1.9	1.1	2.0	1.6	1.7	1.8
	y	5.5	5.9	6.3	5.8	7.4	5.4	7.6	6.9	6.6	7.5
5	x	2.3	1.4	1.0	1.9	1.5	1.8	2.1	1.6	1.7	1.3
	y	5.3	3.9	2.9	5.0	4.0	4.9	5.1	4.5	4.1	3.7
6	x	1.8	2.6	2.3	1.3	2.0	2.1	1.1	1.9	1.6	1.5
	y	4.4	6.4	5.3	3.7	4.9	5.6	3.0	5.0	4.3	3.7
7	x	1.9	2.1	2.0	2.9	3.0	2.6	2.5	2.7	2.2	2.8
	y	6.6	7.6	6.7	9.2	9.4	7.8	8.4	8.0	7.9	8.7
8	x	2.0	1.4	1.0	1.7	1.3	1.6	1.9	1.5	1.2	2.1
	y	7.5	6.1	4.8	7.4	5.7	7.0	7.1	6.8	6.0	8.9
9	x	2.0	1.2	1.8	1.9	1.1	1.7	1.6	1.4	1.5	1.3
	y	7.5	5.9	7.0	8.0	5.0	7.4	6.4	6.6	6.3	5.7
10	x	1.9	1.1	1.4	2.3	1.7	2.1	1.6	1.5	1.0	1.2
	y	4.7	3.4	3.8	5.2	4.6	5.5	3.9	3.9	3.2	3.5

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. У чому суть наближення таблично заданої функції по методу найменших квадратів?
2. Чим відрізняється цей метод від методу інтерполяції?
3. Яким образом зводиться задача побудови функцій, що наближають, у вигляді різних елементарних функцій до випадку лінійної функції?

4. Чи може сума квадратів відхилень для яких-небудь функцій, що наближають, бути рівної нулю?

5. Які елементарні функції використаються як приближающих функції?

6. Як знайти параметри для лінійної й квадратичної залежності, використовуючи метод найменших квадратів?

ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Розглянемо змішану задачу для рівняння теплопровідності, а саме, знайти функцію $u(x,t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{7.1}$$

початковій умові

$$u(x,0)=f(x), \qquad x\in(0,s), \tag{7.2}$$

і крайовим умовам

$$u(0,t)=\varphi(t), \qquad u(l,t)=\psi(t), \quad t\in(0,T). \tag{7.3}$$

Задачу будемо вирішувати методом сіток (кінцевих разностей). В основі методу лежить ідея заміни похідних кінцево-різницевими відносинами. Обмежимося випадком двох незалежних змінних. Нехай у площині *xOy* є деяка область G із границею Γ (мал. 1).

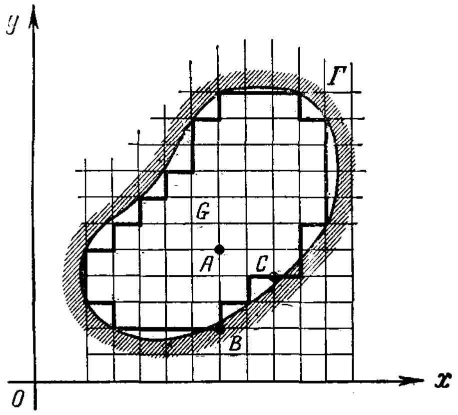


Рис 1

Побудуємо на площині два сімейства паралельних прямих:

$x=ih$, $t=kl$, *i=0,1,2,…, k=0,1,2,…*

Крапки перетинання цих прямих назвемо вузлами. Два вузли називаються сусідніми, якщо вони вилучені друг від друга в напрямку осі *Ox* або *Oy* на відстань, рівна кроку сітки h або l відповідно. Виділимо вузли, що належать області *G+Г*, а також деякі вузли, що не належать цієї області, але розташовані на відстані, меншій чим крок, від границі *Г*. Ті вузли, у яких всі чотири сусідніх вузли належать виділеній множині вузлів, називаються внутрішніми (вузол *A,* мал. 1). Оставшиеся з виділених вузлів називаються граничними (вузли *B, З*). Позначимо $x_i = ih, y_j = kl.$

Значення шуканої функції *ŭ=ŭ(x,y)* у вузлах сітки будемо позначати через $u_{i,k} = u(ih,kl).$ У кожному внутрішньому вузлі (ih,kl) замінимо частки похідні різницевими відносинами:

$$(\frac{du}{dx})_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}$$

$$(\frac{du}{dt})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}$$

У граничних крапках скористаємося формулами виду

$$(\frac{du}{dx})_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h}, \quad (\frac{du}{dt})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}.$$

Аналогічно заміняються частки похідні другого порядку

$$(\frac{d^2u}{dx^2})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2}$$

Зробимо перехід від рівняння виду $\frac{du}{dt} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$ до різницевого рівняння

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} - \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} = 0.$$

Після заміни $\sigma = \frac{l}{h^2}$ й перетворень одержуємо рівняння для обчислення внутрішніх вузлів

$$u_{i,k+1} = (1-2\sigma)u_{ik} + \sigma(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) \tag{7.4}$$

При $0 \le \sigma \le 1/2$ різницеве рівняння (7.4) стійко [7]. Найбільш простий вид рівняння має при $\sigma = 1/2.$ В цьому випадку рівняння (7.2) запишеться у вигляді

$$u_{ik+1} = \frac{u_{i-1k} + u_{i+1k}}{2} \tag{7.5}$$

Нехай $\bar{u}\,(x,t)$ – точне рішення задачі (7.1)-(7.3), $|\bar{u} - u|$ – відхилення точного значення від обчисленого по методу сіток. Тоді погрішність обчислень може бути обчислена по формулі

$$|\bar{u} - u| \le \frac{T}{3} m_1 h^2, \tag{7.6}$$

де $m_1 = \max\left\{ | f^{(4)}(x)|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)| \right\}$, де $0 \le t \le T, 0 \le x \le s.$

Завдання 1

Використовуючи метод сіток, знайти наближене рішення рівняння (7.1)-(7.3), що задовольняє умовам $u(x,0)=f(x)$, $u(x_0,t)=0$, $u(x_n,t)=0$, для $0\le t\le 0.03$, $x_0\le x\le x_n$ і *h=0.1, l=0.005.*

Рішення повинне бути оформлене у вигляді таблиці 7.1. Вихідні дані задані в таблиці 7.2. Оцінити погрішність обчислень по формулі (7.6).

Коментар. Значення u_{i0} знаходимо, підставляючи значення x_o в. $f(x)$ Наприклад, $f(x_0)=x_0\sin(2\pi x_0)$ при $x_0=0$ дорівнює 0. Значення u_{0k} й u_{5k} визначаються крайовими умовами (у нашому випадку нульові). Далі значення, наприклад, u_{11} знаходимо, використовуючи формулу (7.5), тобто $u_{11}=\dfrac{u_{00}+u_{20}}{2}$ й т.д.

Таблиця 7.1.

j	x / l	x_0	x_0+h	x_0+2h	x_0+3h	x_0+4h	x_n
0	0	u_{00}	u_{10}	u_{20}	u_{30}	u_{40}	u_{50}
1	0. 005	u_{01}	u_{11}	u_{21}	u_{31}	u_{41}	u_{51}
2	0. 010	u_{02}	u_{12}	u_{22}	u_{32}	u_{42}	u_{52}
3	0. 015	u_{03}	u_{13}	u_{23}	u_{33}	u_{43}	u_{53}
4	0. 020	u_{04}	u_{14}	u_{24}	u_{34}	u_{44}	u_{54}
5	0. 025	u_{05}	u_{15}	u_{25}	u_{35}	u_{45}	u_{55}
6	0.03	u_{06}	u_{16}	u_{26}	u_{36}	u_{46}	u_{56}

Таблиця 7.2

№ варіанта	x_0	x_n	$f(x)$
1	0.1	0.6	$(1.1x^2+1.1)\sin(2\pi(x-0.1))$
2	0	0.5	$x\sin(2\pi x)$
3	0.2	0.7	$(1.5x+1.1)\sin(2\pi(x-0.2))$
4	0	0.5	$(x^2+3)\sin(2\pi x)$
5	0.1	0.6	$(1.1x^2-1.3)\sin(2\pi(x-0.1))$
6	0.2	0.7	$(x^3+1)\sin(2\pi(x-0.2))$
7	0	0.5	$(1.5x^2+1)\sin(2\pi x)$
8	0.2	0.7	$(3x^2+2)\sin(2\pi(x-0.2))$

9	0	0.5	$(x^2 - 1.3)\sin(2\pi x)$
10	0.1	0.6	$(3x^2 - 1)\sin(2\pi(x - 0.1))$

Зразковий фрагмент виконання роботи

$f(x) := x\cdot\cos(2 + 3\cdot x) \qquad i := 0..5 \qquad j := 0..4$

$x_0 := 0.1 \qquad x_5 := 0.6$

$$x_i := x_0 + \frac{(x_0 + x_5)}{6}$$

$u_{i,0} := f(x_i) \qquad u_{0,j+1} := 0 \qquad u_{5,j+1} := 0$

$i := 1..4$

$$u_{i,1} := \frac{(u_{i-1,0} + u_{i+1,0})}{2} \qquad u_{i,2} := \frac{(u_{i-1,1} + u_{i+1,1})}{2}$$

$$u_{i,3} := \frac{(u_{i-1,2} + u_{i+1,2})}{2} \qquad u_{i,4} := \frac{(u_{i-1,3} + u_{i+1,3})}{2}$$

$$u_{i,5} := \frac{(u_{i-1,4} + u_{i+1,4})}{2}$$

$$u = \begin{bmatrix} -0.191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.352 & -0.271 & -0.176 & -0.156 & -0.132 & -0.1 \\ -0.352 & -0.352 & -0.311 & -0.264 & -0.2 & -0.176 \\ -0.352 & -0.352 & -0.352 & -0.244 & -0.22 & -0.161 \\ -0.352 & -0.352 & -0.176 & -0.176 & -0.122 & -0.11 \\ -0.352 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. У чому суть методу сіток?
2. Які крапки називаються вузлами?
3. Що таке крок сітки?
4. Які вузли називаються внутрішніми і які граничними?
5. Як перейти від диференціального рівняння до різницевого (на прикладі рівняння теплопровідності)?
6. Яке рівняння використається для обчислення поточного шару?
7. Як обчислити відхилення значень точного рішення від наближеного по методу сіток

ЛІТЕРАТУРА

1. Заварыкин В.М., Житомирський В.Г., Лапчик М.П. Чисельні методи. М.: Освіта. - 1991. - 175с.
2. Ракітін В.И., Первушин В.Е. Практичний посібник з методів обчислень. М.: Вища школа. - 1998. 384с.
3. Волков Е.А. Чисельні методи. М.: Наука. - 1987. - 248 с.
3. Турчак Л.И. Основи чисельних методів. М.: Наука. - 1987. - 318с.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Обчислювальна математика в прикладах і задачах. М.: Наука. - 1972. - 366с.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методи обчислень. Т.1. М.: Наука. - 1966. - 632с.
6. Хвальків Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Чисельні методи. М. - С.П.: Физматлит. - 2001. - 630с.
7. С. Ф. Аминова, Р. М. Асадуллин. Лабораторний практикум за курсом «Чисельні методи».- Уфа: Із БГПУ, 2003 -28с.
8. Р. Р. Сулейманов. Рішення математичних задач у системі MathCAD 8.1 // Учитель Башкортостану. 2002. № 2.
9. MATHCAD 6.0 PLUS/ Фінансові, інженерні й наукові розрахунки в середовищі Windows 95./ Пер. с англ. – М.: Видавничий будинок "Филинъ", 1996. – 712 с.
10. Плис А. И., Сливина Н. А. Mathcad: математичний практикум. – М.: Фінанси й Статистика. – 1999.
11. Окулярів В. Ф. Mathcad 8 Pro для студентів й інженерів. – М.: КомпьютерПресс, 1999.
12. Окулярів В. Ф.. MathCad 7 Pro для студентів й інженерів. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.
13. Дияконів В. П. Довідник по MathCAD PLUS 6.0 PRO. – М.: СК Пресс, 1997. – 336 с.