Лекція 10. Рекурентні співвідношення

План

1. Метод рекурентних співвідношень. Розв'язки рекурентного співвідношення

2. Лінійні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами другого порядку

3. Розв'язування лінійних рекурентних співвідношень k-ого порядку

1. Метод рекурентних співвідношень. Розв'язки рекурентного співвідношення

Метод рекурентних співвідношень полягає в тому, що розв'язання комбінаторної задачі з n предметами виражається через розв'язання аналогічної задачі з меншим числом предметів за допомогою деякого співвідношення, яке називається **рекурентним.** Користуючись цим співвідношенням, шукану величину можна обчислити, виходячи з того, що для невеликої кількості предметів (одного, двох) розв'язок задачі легко знаходиться.

Проілюструємо метод рекурентних співвідношень на прикладі.

Приклад. У 1202 році італійський математик Фібоначчі серед багатьох задач запропонував таку:

Пара кроликів приносить один раз у місяць приплід із двох кроликів (самки й самця), причому новонароджені кролики через два місяці після народження вже дають приплід. Скільки кроликів з'явиться через рік, якщо на початку року була одна пара кроликів?

Розв'язання. З умови задачі випливає, що через один місяць будуть дві пари кроликів. Ще через місяць приплід дасть лише перша пара кроликів і отримаємо три пари. Ще через місяць приплід дасть перша пара кроликів, і пара кроликів, яка появилася два місяці тому. Всього буде п'ять пар кроликів.

Позначимо через $f(n)-$ кількість пар кроликів, яка є через n місяців з початку року. Через $(n+1)$ місяць будуть ці $f(n)$ пар кроликів і ще стільки новонароджених пар кроликів, скільки було в кінці місяця $n-1$, тобто ще $f(n-1)$ пар кроликів. Має місце рекурентне співвідношення

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1).$$

Так, як за умовою $f(0) = 1, f(1) = 2$, то $f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 8$ і т. д. Отримаємо, що $f(12) = 377$.

Відповідь: 377 пар.

Числа $f(n)$ називаються **числами Фібонначі.**

Означення. Рекурентне співвідношення називається порядку k, якщо воно дозволяє виразити $f(n+k)$ через $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$.

Приклад. $f(n+2) = 3f(n+1) - 7f(n) -$ рекурентне співвідношення 2-го порядку.

Якщо задано рекурентне співвідношення k-го порядку, то його задовольняє нескінченно велика кількість послідовностей, бо перші k елементів послідовності можна задати довільно (між ними немає ніяких співвідношень).

Проте, якщо перші k елементів задано, то всі інші визначаються цілком однозначно.

Користуючись рекурентним співвідношенням і початковими членами, можна один за одним виписувати члени послідовності. При цьому рано чи пізно ми отримаємо довільний її член. Проте потрібно буде виписати і всі попередні члени, адже не обчисливши їх, не можна обчислити і наступні члени.

У багатьох випадках потрібно дізнатися лише один певний член послідовності, а всі інші члени не потрібні. У цьому випадку зручніше мати явну форму для n-го члена послідовності.

Означення. Деяка послідовність називається **розв'язком рекурентного співвідношення,** якщо при підстановці цієї послідовності у співвідношення, співвідношення виконується.

Означення. **Загальним розв'язком рекурентного співвідношення** k-го порядку називається розв'язок який містить k довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_k$ і шляхом підбору цих сталих можна отримати будь-який розв'язок рекурентного співвідношення.

***Означення*.** **Розв’язати рекурентне співвідношення** означає знайти його загальний розв’язок.

2. Лінійні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами другого порядку

Загальних правил розв’язання рекурентних співвідношень не існує. Проте існує клас рекурентних співвідношень, який розв’язується єдиним методом. Це співвідношення виду

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \cdots + a_k f(n), \qquad (1)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_k -$ деякі числа. Такі співвідношення називаються **лінійними рекурентними співвідношеннями із сталими коефіцієнтами.**

***Означення*.** Рекурентне співвідношення k-го порядку називається **лінійним**, якщо кожен наступний член цього рекурентного співвідношення є лінійною комбінацією k попередніх членів.

Розглянемо, як розв’язуються такі співвідношення при $k = 2$, тобто співвідношення виду

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \qquad (2)$$

Розв’язування співвідношення (2) спирається на дві наступні теореми.

Теорема 1. Якщо $f_1(n)$ та $f_2(n)$ розв’язки рекурентного співвідношення (2), то при довільних числах A та B послідовність $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ також є розв’язком цього співвідношення.

Теорема 1. Якщо число r_1 є коренем квадратного рівняння $r^2 = a_1 r + a_2$, то послідовність $1, r_1, \dots, {r_1}^{n-1}, \dots,$ є розв’язком рекурентного співвідношення (2).

Зауваження. Якщо послідовність $f_1(n) = {r_1}^{n-1}$ є розв’язком співвідношення (2), то розв’язком цього співвідношення буде будь-яка послідовність виду $f(n) = {r_1}^{n+m}, n \in N$. Це випливає з теореми 1, якщо покласти $A = {r_1}^{m+1}, B = 0$.

З теорем 1 і 2 випливають правила розв’язування лінійних рекурентних співвідношень другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Випадок 1. (Корені характеристичного рівняння різні)

Теорема 3. Нехай дано рекурентне співвідношення другого порядку $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$.

Складемо квадратне рівняння $r^2 = a_1 r + a_2$ $(*)$. Це рівняння називається **характеристичним** для (2). Якщо рівняння $(*)$ має два різні корені $r_1 \neq r_2$, то загальний розв'язок цього співвідношення має вигляд

$$f(n) = C_1 \cdot {r_1}^{n-1} + C_2 \cdot {r_2}^{n-1}.$$

Випадок 2. (Корені характеристичного рівняння однакові)

Нехай обидва корені характеристичного рівняння $(*)$ співпадають $r_1 = r_2$. У цьому випадку вираз $C_1 \cdot {r_1}^{n-1} + C_2 \cdot {r_2}^{n-1} = C_1 \cdot {r_1}^{n-1} + C_2 \cdot {r_1}^{n-1} = (C_1 + C_2) \cdot {r_1}^{n-1} = C_3 \cdot {r_1}^{n-1}$ не є загальним розв'язком. Потрібно знайти який-небуть інший розв'язок, відмінний від $f_1(n) = {r_1}^{n-1}$. Виявляється, що таким розв'язком є $f_2(n) = n \cdot {r_1}^{n-1}$.

Теорема 4. Якщо характеристичне рівняння $(*)$ має два рівні корені $r_1 = r_2$, то загальний розв'язок цього співвідношення має вигляд

$$f(n) = C_1 \cdot {r_1}^{n-1} + nC_2 \cdot {r_1}^{n-1} = (C_1 + nC_2) \cdot {r_1}^{n-1}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рекурентних співвідношень.

а) $f(n+2) + 4f(n+1) + 4f(n) = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його.

$r^2 + 4r + 4 = 0$, $(r+2)^2 = 0, r_1 = r_2 = -2$. Отже, загальний розв'язок

$$f(n) = (C_1 + nC_2) \cdot (-2)^{n-1}.$$

а) $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0$. $r^2 - 5r + 6 = 0$, $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Отже, загальний розв'язок $f(n) = C_1 \cdot 2^{n-1} + C_2 \cdot 3^{n-1}$.

3. Розв'язування лінійних рекурентних співвідношень k-ого порядку

Нехай дано лінійне рекурентне співвідношення k-ого порядку (1)

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \cdots + a_k f(n).$$

Напишемо його характеристичне рівняння

$$r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \cdots + a_k. \tag{3}$$

Теорема 5. Якщо r_1 − корінь характеристичного рівняння (3), то функція $f(n) = C \cdot {r_1}^{n-1}$ буде розв'язком рекурентного співвідношення (1).

Теорема 6. Якщо r_1 − корінь кратності k характеристичного рівняння (3), то функції $f_1(n) = {r_1}^{n-1}, f_2(n) = n{r_1}^{n-1}, f_3(n) = n^2{r_1}^{n-1}, \dots , f_k(n) = n^{k-1}{r_1}^{n-1}$ та їх лінійна комбінація будуть розв'язками рекурентного співвідношення (1).

В загальному випадку має місце теорема.

Теорема 6 (про загальний розв'язок рівняння k-ого порядку)

Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення k-ого порядку має корінь r_1 − корінь кратності k_1, r_2 − кратності $k_2, \dots , r_p$ − кратності k_p $(k_1 + k_2 + \cdots + r_p = k)$, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд

$$f(n) = {r_1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k_1} C_{i1}n^{i-1} + {r_2}^{n-1}\sum_{i=1}^{k_2} C_{i2}n^{i-1} + \cdots + {r_p}^{n-1}\sum_{i=1}^{k_p} C_{ip}n^{i-1}.$$