

Лекція 9. Комбінаторні тотожності. Сполуки з повторенням

План

1. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів
2. Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями
3. Принцип включень та виключень

1. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів

Теорема. Кількість усіх підмножин n -елементної множини дорівнює 2^n .

Наслідок. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n, \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

Двочлен $(a + b)$ називається **біномом**. З шкільного курсу математики відомо, що

$$(a + b)^0 = 1,$$

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2,$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3,$$

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4.$$

Аналізуючи ці формули, легко помітити, що коефіцієнти у правих частинах дорівнюють числам із відповідних рядків трикутника Паскаля. Цей збіг не випадковий.

Теорема. При довільному натуральному n має місце формула

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n,$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Можна показати, що коефіцієнт $(k + 1)$ -го члена розкладу Бінома дорівнює добутку коефіцієнта k -го члена на показник степеня a в цьому члені, поділеному на k . Коефіцієнти C_n^k називаються **біноміальними коефіцієнтами**.

Основні властивості формули бінома Ньютона

1. Розклад n -го степеня бінома містить $n + 1$ членів.

2. Показники степеня при a спадають від n до 0 ; показники степеня при b зростають від 0 до n . Сума показників степенів при a і b у кожному члені розкладу дорівнює n .

3. Біноміальні коефіцієнти розкладу є числа, які стоять у n -му рядку трикутника Паскаля. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців, рівні між собою.

4. Якщо показник степеня бінома – парне число, то біноміальний коефіцієнт середнього члена є найбільшим; якщо ж показник степеня бінома – непарне число, то біноміальні коефіцієнти двох середніх членів рівні між собою і є найбільшими.

5. $(k + 1)$ -й член розкладу T_{k+1} визначається формулою

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

6. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, які розміщені на парних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів членів розкладу, які розміщені на непарних місцях, тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

У формулу бінома Ньютона $(x + a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} a^k$ підставимо значення $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} a^k, \text{ або } (x + a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!l!} x^l a^k, \quad (*)$$

де підсумування поширюється на всі можливі системи цілих невід'ємних значень k, l , які задовольняють умову $k + l = n$.

Узагальненням формули (*) є формула піднесення до n -го степеня суми $x_1 + x_2 + \dots + x_m$.

Теорема (поліноміальна)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m},$$

де підсумування поширюється на всі можливі системи цілих невід'ємних значень, які задовольняють умову $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$.

Означення. Коефіцієнти $\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}$, з якими члени $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$

входять до розкладу $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ називаються

2. Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями

Нехай дано множину M яка містить n різних елементів будь-якої природи, k – довільне натуральне число.

Означення. Розміщенням із повтореннями з n елементів по k називається будь-який впорядкований набір виду (a_1, a_2, \dots, a_k) , де $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$.

Кількість розміщень із повтореннями з n елементів по k позначається \overline{A}_n^k .

На відміну від розміщень без повторень, у цьому випадку може бути $k \geq n$.

Розміщення з повтореннями з n елементів по k називають також **упорядкованими k -вибірками з поверненням з n -елементної множини.**

Ця назва пояснюється тим, що розміщення з повтореннями можна дістати так: вибрати довільний елемент $a_1 \in M$, записати його на першому місці і повернути до множини M ; знову вибрати довільний елемент $a_2 \in M$ (може трапитись, що $a_1 = a_2$), записати його на другому місці і знов повернути до M і т. д. Повторивши цю операцію k раз ми дістанемо k -вибірку з множини M .

Теорема. Для довільних натуральних n, k має місце формула

$$\overline{A}_n^k = n^k. \quad (1)$$

З n різних елементів можна утворити $n!$ перестановок. Але якщо серед даних n предметів є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставлянням однакових елементів, нічим не відрізняються, тому їх кількість менша за $n!$.

Означення. Перестановкою з повтореннями з n елементів називається будь-яке впорядкування n -елементної множини, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів n -елементної множини M є n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ..., n_k елементів k -го типу ($n_1 + n_2 + \dots +$

$n_k = n$), то кількість усіх перестановок такої множини позначається $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Теорема. Для перестановок з повтореннями має місце формула

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (2)$$

Формула (2) допускає також інше комбінаторне тлумачення: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ – це кількість способів, якими можна здійснити розбиття n -елементної множини M на k множин без спільних елементів.

Означення. Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається будь-який k -елементний набір виду $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, де кожен з елементів a_1, a_2, \dots, a_k належить до одного з n типів.

Позначається \overline{C}_n^k .

Теорема. При довільних натуральних n і k має місце формула

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (3)$$

3. Принцип включень та виключень

Нехай A і B дві скінченні множини. Кількість їх елементів позначається $N(A)$ і $N(B)$. Тоді $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Якщо $A \cap B = \emptyset$, тобто A і B не мають спільних елементів, то

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

За допомогою методу математичної індукції формулу можна узагальнити на випадок n множин. Для довільних скінченних множин A_1, A_2, \dots, A_n має місце формула

$$\begin{aligned} N\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n N(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Цю формулу називають **формулою включень і виключень**.