РОЗДІЛ 4. КОМБІНАТОРИКА

Лекція 8.

План

1. Предмет комбінаторики. Правило суми та добутку

2. Розміщення, перестановки та комбінації без повторень

1. Предмет комбінаторики. Правило суми та добутку

Комбінаторика – це галузь математики, яка вивчає скінченні множини.

У комбінаториці розглядають два основних правила: правило суми і правило добутку.

Правило добутку

Якщо об'єкт A можна вибрати $n-$ способами і при кожному з цих виборів об'єкт B можна вибрати $m-$ способами, то пару (A, B) можна вибрати $n \cdot m-$ способами.

Дане правило добутку можна узагальнити на декілька множин.

Правило суми

Якщо об'єкт A можна вибрати $n-$ способами, об'єкт B можна вибрати $m-$ способами, причому ніякий вибір A не співпадає з жодним вибором B, то один з об'єктів A або B можна вибрати $n+m-$ способами.

Приклад 1. У групі 21 студент. Скількома способами можна вибрати в цій групі трьох студентів для проходження виробничої практики на трьох підприємствах?

Розв'язання. Для першого підприємства можна вибрати будь-кого із студентів, тобто таких можливостей 21, для другого підприємства таких можливостей вже 20 і для третього – 19. Отже, всього можливостей для вибору групи з трьох студентів $21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$.

Приклад 2. Нехай є чотири пункти A, B, C, D. З пункту A в пункт B веде n доріг, з B в $C - m$ доріг, з A в $D - k$ доріг, з D в $C - l$ доріг. Пункти B і D між собою безпосередньо не сполучені. Скількома способами можна попасти з пункту A в пункт C?

Розв'язання. Згідно правила добутку з A в C через пункт B веде $n \cdot m$ доріг, а через пункт D веде $k \cdot l$ доріг. Загальна кількість доріг за правилом суми $n \cdot m + k \cdot l$.

2. Розміщення, перестановки та комбінації без повторень

Нехай множина M містить n різних предметів $a, b, c, \dots, l$ будь-якої природи. Упорядкуємо цю множину, занумерувавши її елементи. Перший елемент позначимо символом a_1, другий $a_2, \dots, n$-й – a_n. Матимемо скінченну послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n$, яку називають перестановкою з n елементів.

Означення. **Перестановкою** з n елементів називається будь-яке розміщення даних n елементів у деякому певному порядку.

З даних n елементів можна утворити кілька різних перестановок.

Приклад 3. Маємо два елементи a, b. Можливі дві перестановки: $\{a, b\}, \{b, a\}$. Маємо три елементи a, b, c. Можливі шість перестановок: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$.

Кількість усіх можливих перестановок з n елементів позначають символом P_n ($P -$ перша буква французького слова *permutation* – перестановка).

Теорема. Кількість P_n усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від 1 до n включно, тобто

$$P_n = n! \qquad (1)$$

(Доведення теореми проводиться методом математичної індукції).

Означення. **Розміщенням** із n елементів по k $(k \le n)$ називається будь-яка впорядкована k-елементна підмножина даної множини.

Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k ($A -$ перша буква французького слова *arrangement* – розміщення).

Два розміщення вважаються різними не лише тоді, коли вони відрізняються деякими елементами, а й тоді, коли вони складені з однакових елементів і відрізняються їх порядком.

Теорема. Для довільних натуральних n і k $(k \le n)$ має місце формула

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1). \qquad (2)$$

Ураховуючи позначення $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$, формулу (2) можна записати

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Означення. **Комбінацією** із n елементів по k $(k \leq n)$ називається будь-яка k-елементна підмножина даної множини.

Кількість усіх можливих комбінацій із n елементів по k позначається символом C_n^k ($C -$ перша буква французького слова *combination* – сполучення).

Комбінації, на відміну від розміщень, – невпорядковані підмножини заданої множини.

Теорема. Для довільних натуральних n і k $(k \leq n)$ має місце формула

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (4)$$

Часто формулу (4) записують у іншій формі. Помножимо чисельник і знаменник формули (4) на $(n-k)!$. Дістанемо

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Отже,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (5)$$

Зауваження. При $n = k$ у знаменнику дістанемо вираз 0!. Вважають, що $0! = 1$.

Теорема. Для довільних натуральних n і k $(k \leq n)$ має місце **формула Лапласа**

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \qquad (6)$$

З формули (6) випливає простий спосіб обчислення чисел C_n^k, які називають **біноміальними коефіцієнтами**. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля.**

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..
\end{array}
$$

У цій таблиці кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n = 1$ при довільному n, то з формули Паскаля випливає, що n-й рядок цієї таблиці складений із чисел C_n^k $(k = \overline{0, n})$.

У французького математика Блеза Паскаля ця таблиця наведена в «Трактаті про арифметичний трикутник». Біноміальні коефіцієнти Блез Паскаль утворював за розробленим ним способом повної математичної індукції – у цьому полягало одне з найважливіших відкриттів Паскаля. Новим було й те, що біноміальні коефіцієнти виступали тут як числа комбінацій із n елементів по k.