

РОЗДІЛ 1. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

Лекція 1. Висловлення та операції над ними

План

1. *Поняття висловлення*

2. *Логічні операції над висловленнями*

3. *Формули логіки висловлень*

1. *Поняття висловлення*

В природних умовах інформація передається за допомогою слів, об'єднаних у речення. Формальна логіка займається аналізом речень, звертаючи основну увагу на їх форму і відволікаючись від змісту. Розділ логіки, який вивчає висловлення та їхні властивості, називають пропозиційною логікою або **ЛОГІКОЮ ВИСЛОВЛЕНЬ**.

Означення. Під **висловленням** розуміють розповідне речення, яке виражає певну думку, про яку можна сказати *істинна* вона чи *хибна*.

Значення «істина» чи «хибність», яких набуває висловлення, називають його **значенням істинності**. Значення «істина» позначають $1, T, I$, а «хибність» – $0, F, X$.

Не є висловленнями: речення із суб'єктивною думкою; означення; речення, які можуть бути як істинними, так і хибними.

Приклад 1. Розглянемо речення:

- 1) Сніг зелений.
- 2) Київ – столиця України.
- 3) Якщо семестровий рейтинг студента з дисципліни «Дискретна математика» не менший за 60, то він отримає залік автоматом.
- 4) $x + 1 = 3$.
- 5) Котра година?
- 6) Читай уважно!

Три перші речення – висловлення, решта три – ні, бо четверте речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення

змінної x , п'яте та шосте речення – не розповідні. Перше висловлення є хибним, друге та третє – істинними.

Для позначення *змінних висловлень* використовують великі латинські літери.

Висловлення поділяються на *прості (елементарні)* та *складні*.

Означення. Атомами (елементарними висловленнями) називаються висловлення, які відповідають простим розповідним реченням, які не мають складових частин. Складні висловлення утворюють із простих висловлень за допомогою *логічних операцій (логічних зв'язків)*.

Перші два висловлення прикладу 1 є простими, третє – складне.

2. Логічні операції над висловленнями

Означення. **Заперечення** – логічна операція, яка висловленню A ставить у відповідність нове висловлення \bar{A} (чит. не A), яке істинне, коли A хибне і хибне, коли A істинне.

$P(A)$	$P(\bar{A})$
0	1
1	0

Означення. **Кон'юнкція (логічне множення)** – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \wedge B$ (чит. A і B), яке істинне тоді і тільки тоді, коли A і B одночасно істинні і хибне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Означення. **Диз'юнкція (логічна сума)** – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \vee B$ (чит. A

або B), яке хибне тоді і тільки тоді, коли A і B одночасно хибні і істинне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Означення. Імплікація – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \rightarrow B$ (чит. з A слідує B), яке хибне тоді і тільки тоді, коли A – істинне, а B – хибне і істинне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Означення. Еквіваленція – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \leftrightarrow B$ (чит. A еквівалентно B), яке істинне тоді і тільки тоді, коли A та B одночасно істинні або хибні і хибне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Формули логіки висловлень

Означення **формули** логіки висловлень:

- 1) кожний атом – це формула;

2) якщо φ та ω – формули, то

$(\bar{\varphi})$, $(\varphi \wedge \omega)$, $(\varphi \vee \omega)$, $(\varphi \rightarrow \omega)$, $(\varphi \leftrightarrow \omega)$ – формули;

3) формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань вказаних правил.

Для зменшення кількості дужок вважають, що логічні операції мають наступний пріоритет (від найвищого до найнижчого): заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.

Приклад 2. Записати формулу, яка відповідає висловленням.

1) «Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики або не повторить матеріал самостійно, то він погано напише модуль».

2) «Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару»

Розв'язок.

1) Виділимо елементарні висловлення, які входять до складу нашого першого складного висловлення:

A – «Іван пропустить лекцію з дискретної математики»,

B – «Іван повторить матеріал самостійно»,

C – «Іван напише модуль погано».

Тоді структуру складного висловлення описує формула

$$A \vee \bar{B} \rightarrow C.$$

2) Елементарні висловлення:

A – «Петро пізно ліг спати»;

B – «Петро проспав»;

C – «Петро встиг на автобус»;

D – «Петро спізнився на пару».

Тоді структуру другого складного висловлення описує формула

$$(A \rightarrow D) \rightarrow \bar{C} \wedge D.$$

Означення. Під формальною інтерпретацією формули логіки висловлень розуміють присвоєння змінним висловленням, з яких побудована формула, деяких значень істинності 0 або 1.

Приклад 3. Вказати значення формули $\varphi \equiv \overline{A \wedge B} \leftrightarrow \bar{C} \rightarrow B \vee A$ на інтерпретації (1,0,1).

Розв'язок.

$$\varphi(1,0,1) \equiv \overline{1 \wedge 0} \leftrightarrow \bar{1} \rightarrow 0 \vee 1 \equiv \overline{1 \wedge 1} \leftrightarrow 0 \rightarrow 1 \equiv \bar{1} \leftrightarrow 1 \equiv 0 \leftrightarrow 1 \equiv 0.$$

Означення. Таблиця, які містить значення формули логіки висловлень на всіх її інтерпретаціях змінних, називається **таблицею істинності формули**.

Приклад 4. Побудувати таблицю істинності формули

$$\varphi \equiv \overline{\bar{A} \vee B} \rightarrow (C \leftrightarrow B \wedge \bar{A}).$$

Розв'язок. Поставимо у відповідність кожній підформулі формули окремий стовпчик таблиці.

A	B	C	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$	$\overline{\bar{A} \vee B}$	$B \wedge \bar{A}$	$C \leftrightarrow B \wedge \bar{A}$	$\overline{\bar{A} \vee B} \rightarrow (C \leftrightarrow B \wedge \bar{A})$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

Означення. Формула логіки висловлень називається **загальнозначущою (тотожно істинною або тавтологією)**, якщо вона є істинною на всіх своїх інтерпретаціях.

Означення. Формула логіки висловлень називається **суперечливою (тотожно фальшивою)**, якщо вона є хибною на всіх своїх інтерпретаціях.

Означення. Формула логіки висловлень називається **виконуваною**, якщо вона є істинною принаймні на одній своїй інтерпретації.