

537/0751  
к. 95  
І.М.Кучерук, І.Т.Горбачук, П.П.Луцик

# ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

У трьох томах

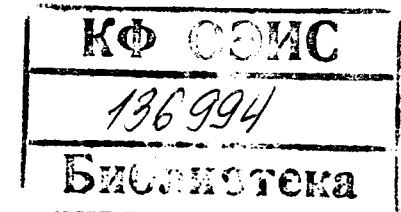
**2**  
ТОМ

**Електрика  
і магнетизм**

За редакцією  
проф. І.М.Кучерука

*Допущено Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих технічних і педагогічних  
навчальних закладів*

Київ  
"ТЕХНІКА"  
2001



ББК 22.3я73  
К95  
УДК 537+538(075.8)

Гриф надано  
Міністерством освіти і науки України,  
лист № 14/18.2-286 від 20.03.2001 р.

Рецензенти: Д. М. Фреїк, д-р хім. наук, проф.; І. П. Гаркуша, канд. фіз.-мат. наук, проф.

У посібнику головну увагу приділено розкриттю фізичного змісту і сучасному розумінню основних законів, принципів і понять електричних та магнітних явищ, поясненню їх єдності та відносності проявів. Самі закони формулюються у вигляді кількісних співвідношень між величинами, встановленими дослідно. Достатню увагу приділено вивченню електричних і магнітних властивостей речовини та технічному використанню електромагнетизму.

К 1604050000 - 005 Без оголош.  
202 - 2001

ISBN 966-575-196-4  
ISBN 966-575-183-2

© Кучерук І. М., Горбачук І. Т.,  
Лушник П. П., 2001

## Вступ

**Предмет та методи дослідження електрики і магнетизму.** Науково-технічний прогрес XIX—XX ст. нерозривно пов'язаний із вченням про електрику і магнетизм. Зміна віку пари віком електрики означає, що людина в основному пізнала природу електромагнетизму і в багатьох випадках навчилася управляти електромагнітними силами.

У наш час відомо, що речовина складається з молекул і атомів, а атоми, у свою чергу, побудовані з елементарних частинок, у тому числі таких, які мають електричний заряд: порівняно важких позитивно заряджених частинок — протонів, що входять до складу ядер, і легких негативно заряджених частинок — електронів. Заряд електрона є найменшою частинкою електрики в природі, а заряд ядер завжди кратний зарядові електрона з протилежним знаком. Заряджені частинки в атомах та молекулах перебувають у безперервному русі і взаємодіють між собою крізь електромагнітне поле. Електромагнітна взаємодія притаманна довільним зарядам або зарядженим тілам. Наявністю, рухом і взаємодією електричних зарядів зумовлені найпоширеніші у нашому повсякденному оточенні *електромагнітні явища*, які і є предметом вивчення розділу фізики «Електрика і магнетизм». Основним завданням цього розділу фізики є розкриття природи і властивостей електромагнітного поля, характеру взаємодії його з речовиною, вивчення електричних і магнітних властивостей самої речовини, теоретичне обґрунтування можливостей практичного застосування електромагнітних явищ.

Сучасна фізика встановила існування чотирьох видів фундаментальних взаємодій: сильної, електромагнітної, слабкої і гравітаційної. *Сильна взаємодія* короткодійна і проявляється між частинками (адронами) лише в ядерних масштабах ( $10^{-15}$  м); *слабка* — ще більш короткодійна (близько  $2 \cdot 10^{-18}$  м) і проявляється між елементарними частинками, відіграючи важливу роль при їх взаємних перетвореннях; *гравітаційна взаємодія* далекодійна, притаманна всім просторово-часовим рівням існування матерії, але стає істотною для астрономічних об'єктів великої маси. *Електромагнітна ж взаємодія* внаслідок того, що вона на багато порядків інтенсивніша від гравітаційної і слабкої та є далекодійною, на противагу сильній взаємодії, зустрічається найчастіше і багата проявами в мега-, макро- і мікросвіті. Електромагнітною є взаємодія між ядрами та електронами в атомах,

міжатомна взаємодія в молекулах (хімічний зв'язок), міжмолекулярна взаємодія (утворення конденсованої речовини). До електромагнітної природи зводяться сили пружності, тертя, поверхневого натягу тощо; ними визначаються хімічні та агрегатні перетворення, різноманітні електричні, магнітні та оптичні явища. Електромагнітні явища відіграють істотну роль у космосі: магнітні поля планет призводять до виникнення радіаційних шарів; випромінення електромагнітної енергії Сонцем і зірками впливає на земні процеси. Закони електромагнетизму лежать в основі будови і дії різноманітних радіотехнічних, електротехнічних та багатьох інших приладів і пристроїв, без яких неможливо уявити сучасне життя.

Різноманітність і багатство проявів електромагнітних явищ потребують їхнього пояснення на основі певних узагальнюючих теоретичних уявлень, які є важливим інструментом пізнання законів природи. Теоретичний аналіз електричних і магнітних явищ проводять на основі двох методів (або підходів), що доповнюють один одного: макроскопічного (або феноменологічного) і мікроскопічного (або структурного). Прикладом таких підходів до об'єктів дослідження можуть бути термодинаміка і молекулярно-кінетична теорія. Об'єктом дослідження в обох випадках є довільна макроскопічна система, однак перша теорія не враховує мікроструктури речовини і заряду, а друга, навпаки, виводить макроскопічні властивості з мікроструктурних уявлень.

Макроскопічний метод лежить в основі *класичної теорії електромагнітного поля* (класичної електродинаміки), основоположником якої був видатний англійський фізик-теоретик Дж. Максвелл (1831—1879). Важливим у ній є те, що не враховується атомно-молекулярна структура речовини, яка заповнює простір, де є поле. Найявністю речовини теорія Максвелла враховує введенням ряду констант, які характеризують усереднені електричні чи магнітні властивості середовища: діелектричну і магнітну проникності, питому електропровідність, показник заломлення тощо. При цьому в більшості випадків допускається, що середовище є однорідним (в усіх точках властивості є однаковими) та ізотропним (властивості не залежать від напрямку в просторі). Якщо ці умови не виконуються, то враховують залежність зазначених параметрів від координат і часу, а в окремих випадках і від зовнішніх умов: напруженості поля, температури тощо.

У теорії Максвелла не враховується також атомістична (дискретна) структура заряду. З погляду макроскопічної теорії без істотних похибок можна не зважати на дискретність заряду на тілах і користуватися уявленнями про рівномірний і неперервний їх розподіл. У більшості випадків такі уявлення зумовлюють теоретичні висновки, які задовільно узгоджуються з дослідними результатами.

Теорія електромагнітного поля Максвелла, побудована на вищезгаданих уявленнях, встановлює систему фундаментальних рівнянь, які є узагальненням експериментальних результатів досліджень електричних і магнітних явищ та розвитком ідеї Фарадея про взаємодію електрично заряджених тіл крізь електромагнітне поле. Рівняння Максвелла пов'язують силові характеристики (напруженість електричного поля  $\vec{E}$  і магнітну індукцію  $\vec{B}$ ) електромагнітного поля з розподілом у просторі електричних зарядів і струмів. Ці рівняння дають можливість визначати зазначені характеристики поля в кожній точці простору в будь-який момент часу, якщо відомі джерела поля як функції координат і часу.

Незважаючи на успіхи в з'ясуванні багатьох електричних і магнітних явищ, теорія Максвелла виявилась неспроможною пояснити ряд явищ, в яких істотну роль відіграють дискретність речовини й атомістична природа заряду (випромінювання і поглинання світла, фотоэффект, дисперсія світла, властивості металів, стабільність атомів тощо).

Врахування внутрішньої будови речовини й атомістичної структури електрики сприяло створенню *класичної електронної теорії* (класичної мікроскопічної електродинаміки), засновником якої був нідерландський фізик Х. Лоренц (1853—1928). Електронна теорія, або теорія Лоренца, ґрунтується на структурному підході, при якому макроскопічні електромагнітні закономірності набувають модельного обґрунтування, виходячи з аналізу атомно-молекулярних взаємодій крізь мікроскопічні електромагнітні поля.

У теорії Лоренца речовина розглядається як сукупність електричних зарядів (електронів і атомних ядер), які розміщені і рухаються у вакуумі. Врахування взаємодії між цими зарядами та впливу на них зовнішніх електромагнітних полів дає можливість пояснити електричні й магнітні властивості речовин. Поле в довільній точці речовини ця теорія розглядає як суперпозицію зовнішнього (макроскопічного) і внутрішнього (мікроскопічного, створеного рухомими у вакуумі зарядами, що входять до складу атомів речовини) полів. Теорія Лоренца є чисто класичною теорією, оскільки вона базується на твердженні, що на всіх просторово-часових рівнях проявляються однакові закономірності, тобто в макро- і мікросвіті існують лише кількісні, а не якісні відмінності. На цій основі стверджувалось, що рівняння макроскопічної електродинаміки Максвелла справджуються і для мікроявищ (наприклад, у середині атомів). З погляду квантової теорії це не зовсім правильно, але успіхи електронної теорії Лоренца є настільки великими, що вона й на сьогодні не втратила свого значення.

В основі теорії Лоренца лежить система фундаментальних рівнянь, які визначають мікроскопічні електромагнітні поля, створені

окремими зарядженими частинками. Ці рівняння одержали узагальненням теорії Максвелла і введенням мікроскопічних параметрів полів.

Перехід від мікроскопічних параметрів полів до макроскопічних здійснюється за допомогою усереднення. У своїй теорії Х. Лоренц запропонував простий і досить точний спосіб усереднення мікроскопічних значень фізичних величин і одержання відповідних макроскопічних параметрів. Він увів поняття фізично нескінченно малих об'ємів, поверхонь, відрізків та фізично нескінченно малого часу. Під фізично нескінченно малим об'ємом розуміють такий, який має бути, з одного боку, достатньо великим порівняно з мікроскопічними неоднорідностями речовини, зумовленими його атомно-молекулярною структурою, а з іншого — значно меншим від макроскопічних неоднорідностей (тріщин, домішок, наявних поверхневих плівок, різнорідних фаз тощо). Згідно з теорією Лоренца під макроскопічною величиною розуміють усереднену за фізично нескінченно малим об'ємом (поверхнею або відрізком) відповідну мікроскопічну фізичну величину. Якщо мікроскопічна фізична величина змінна в часі, то для одержання відповідної макроскопічної величини проводять усереднення за фізично нескінченно малим часом, який має бути значно більшим від характерного часу мікроскопічних процесів (наприклад, часу обертання електрона навколо ядра) і значно меншим від макроскопічних часових масштабів (наприклад, періоду електромагнітної радіохвилі). Усередненням рівнянь Лоренца для мікроскопічних полів можна одержати рівняння Максвелла для макроскопічних полів. Електронна теорія Лоренца мала велике значення у поясненні на основі модельних уявлень природи багатьох електромагнітних явищ та у розкритті фізичної суті й обчисленні матеріальних констант теорії Максвелла.

Рівняння Максвелла для вакууму і класична електронна теорія перестають бути застосовними в малих просторово-часових масштабах, коли стають істотними квантові ефекти, тобто коли енергія окремих квантів електромагнітного поля — фотонів — є досить великою (висока частота) і в процесах бере участь порівняно мала кількість їх. У цьому разі застосовують закони *квантової електродинаміки*.

Крім вищезгаданих теорій електромагнітних явищ, на початку ХХ ст. виділилась в окрему галузь знань *електродинаміка рухомих середовищ* — вчення про електричні і магнітні явища та поширення електромагнітних (у тому числі й оптичних) хвиль у рухомих середовищах. Теоретичною основою вивчення цих явищ є спеціальна теорія відносності Ейнштейна, основи якої було закладено в 1905 р.

Теорія електромагнітних явищ Максвелла — Лоренца мала велике значення для утвердження наукового світогляду і формування сучасної фізичної картини світу. Теорія Максвелла виявила нову форму існування матерії у вигляді електромагнітного поля. Електромагнітна

взаємодія і електромагнітне поле входять у сучасну картину світу як важливі складові частини.

Незважаючи на те, що речовина й електромагнітне поле є різними формами матерії, їхні властивості в багатьох відношеннях подібні. Речовина складається з окремих частинок (електронів, протонів, нейтронів тощо). Електромагнітне поле, яке поширюється, можна також розглядати як потік дискретних частинок — фотонів, що мають енергію, імпульс, масу (маса спокою фотонів дорівнює нулеві). Крім того, такі властивості електромагнітних хвиль, як інтерференція та дифракція притаманні також і частинкам (дифракція електронів, протонів, нейтронів). У цьому суть прояву корпускулярно-хвильового дуалізму.

Курс фізики в технічних вищих закладах освіти передбачає вивчення електричних і магнітних явищ, виходячи в основному з макроскопічних уявлень, хоча окремі явища розглядаються на основі електронної теорії (наприклад, природа електричного струму в різних середовищах). Метод викладення матеріалу в підручнику, переважно індуктивний, передбачає описання найважливіших експериментальних законів електромагнетизму, їх теоретичне, математичне узагальнення і представлення у вигляді рівнянь Максвелла. Положення квантової електродинаміки використовуються для пояснення електропровідності металів та напівпровідників, а питання електродинаміки рухомих середовищ практично не розглядаються, оскільки вони виходять за межі програми цього курсу.

**Короткий історичний огляд вчення про електрику і магнетизм.** Найпростіші електричні й магнітні явища та їх застосування були відомі ще людям стародавніх часів. Більше ніж три тисячі років тому китайцям був відомий магнітний компас. Давньогрецький філософ Фалес Мілетський (бл. 625—547 до н. е.) за 600 років до нашої ери описав здатність янтарю, потертого об шерсть, притягувати легкі матеріали. Наприкінці XVI ст. англійський лікар і природодослідник У. Гільберт (1544—1603) описав понад 20 речовин, які мають аналогічні властивості. У 1600 р. в книзі «Магнетизм» він узагальнив усі відомості, які були на той час з питань електрики і магнетизму. Вперше У. Гільберт увів термін «електрика» (від гр. *electron* — смола, янтар), а властивість натертих тіл притягувати інші тіла було названо електризацією.

У XVII — на початку XVIII ст. проводились численні досліди з наелектризованими тілами. Німецький дослідник О. Геріке (1602—1686) у 1670 р. побудував першу електростатичну машину, яка являла собою кулю із сірки, насаджену на металеву вісь. Тривале торкання долонями до кулі під час її обертання спричиняло електризацію кулі. За допомогою такої машини вперше дослідним шляхом здобули електричну іскру. В 1729 р. англійський вчений С. Грей (1670—1736)

встановив, що всі речовини можна поділити на провідники і непровідники електрики. Він також довів, що тіла можна електризувати не тільки дотиком, а й наведенням. У 1734 р. французький фізик Ш. Ф. Дюфе (1698—1739) припустив існування електрики двох родів і показав, що однойменно заряджені тіла відштовхуються, а різнойменно заряджені — притягуються. Він також сконструював прилад (прототип сучасного електроскопа) для виявлення і порівняльного вимірювання електризації тіл.

Значний вплив на розвиток експериментальних досліджень електричних явищ мало винайдення у 1745—1746 рр. голландським дослідником з м. Лейдена П. Мушенбруком (1692—1761) лейденської банки — найпростішого конденсатора, за допомогою якого можна було накопичувати електрику.

У 1745 р. російський фізик Г. Ріхман (1711—1753) побудував прилад для кількісних вимірювань електрики — електрометр. У 1748—1751 рр. він відкрив явище електростатичної індукції.

Великий внесок у розвиток вчення про електрику зробив відомий американський політичний діяч, вчений і філософ Б. Франклін (1706—1790). Він, зокрема, встановив, що під час електризації тертям одночасно виникають два види електрики в однакових кількостях (одне тіло електризується позитивно, друге — негативно); висловив перші уявлення про природу електрики, вважаючи, що кожне тіло насичене невидимою і невагомою субстанцією, яку назвали монополярним електричним флюїдом (при нестачі цього флюїду тіло електризується негативно, а в разі надлишку — позитивно); виконав серію дослідів з доведення електричної природи блискавки та подав ідею про створення блискавковідводу. З часів Б. Франкліна умовились називати електрику, яка виникає на скляній паличці при натиранні її шовком, позитивною, а на ебонітовій при натиранні її хутром — негативною. Цікаво, що на могильному камені Б. Франкліна вибито епітафію: «Він вкрав блискавку з небес».

Російський вчений М. В. Ломоносов (1711—1765) разом із Г. Ріхманом, вивчаючи атмосферну електрику, в 1752—1753 рр. довели, що блискавка має електричну природу. Вони застосували вчення про електрику на практиці, запропонували захист висотних споруд за допомогою блискавковідводів.

У праці «Відомості з теорії електрики і магнетизму» (1759 р.) російський вчений Ф. Епінус (1724—1802), на відміну від У. Гільберта, розглядає не відмінності, а подібність між електричними і магнітними явищами.

У 1759 р. англійський природодослідник Р. Сіммер висловив думку про те, що всі тіла у звичайних умовах мають два види електрики в однакових кількостях. На основі цієї гіпотези Ф. Епінус пояснив явище електростатичної індукції.

Наприкінці XVIII — на початку XIX ст. на зміну сукупностям окремих розрізнених, часто суперечливих фактів і гіпотез приходять кількісні дослідження і встановлені закономірності, а також нові методи добування та дослідження електричних зарядів і струмів. Це насамперед встановлений у 1772 р. англійським фізиком Г. Кавендішем (1731—1810) і в 1785 р. французьким фізиком Ш. Кулоном (1736—1806) за допомогою крутильних ваг закон взаємодії нерухомих точкових зарядів та магнітів. Цей закон (закон Кулона) вперше дав можливість розробити метод кількісного визначення електричних зарядів на основі вимірювання їх взаємодії.

Відкриття італійськими вченими Л. Гальвані (1737—1798) і А. Вольтою (1745—1827) в період з 1789 по 1792 рр. контактних електричних явищ дало можливість створити перші гальванічні джерела струму (так званий вольтів стовп, 1800 р.), за допомогою яких стало можливим добувати і підтримувати електричний струм протягом довгого часу. В 1802 р. російський вчений В. В. Петров (1761—1834) за допомогою гальванічних елементів великої потужності відкрив електричну дугу і вказав на можливість її застосування. У 1808 р. англійський вчений Г. Деві (1778—1829) вперше здійснив електроліз водних розчинів лугів і одержав невідомі раніше метали — натрій і калій. Він також встановив залежність електропровідності провідників від їх розмірів та температури.

Важливим етапом у розвитку знань про електрику є відкриття взаємозв'язку між електричними і магнітними явищами, передбаченого Ф. Епінусом. У 1820 р. датський фізик Х. Ерстед (1777—1851) зробив фундаментальне відкриття, виявивши дію електричного струму на магнітну стрілку. У тому самому році французький фізик А. Ампер (1775—1836) встановив закон взаємодії електричних струмів (закон Ампера). Він також показав, що властивості постійних магнітів (феромагнітних матеріалів) можуть бути пояснені, якщо припустити наявність у них мікроскопічних (молекулярних) струмів. У праці «Теорія електродинамічних явищ, доведена з досліду» (1826 р.) А. Ампер писав: «... я торкнувся деяких деталей відносно своїх поглядів на магніти, згідно з якими вони зобов'язані своїми властивостями тільки електричним струмам, що розміщені у площинах перпендикулярно до їх осі. Я торкнувся також деяких деталей відносно подібних струмів, припущених мною в земній кулі. Таким чином, всі магнітні явища я звів до чисто електричних дій». Отже, згідно з теорією Ампера всі магнітні явища зводяться до дії електричних струмів, а магнітних зарядів у природі не існує.

У 1820 р. французькі вчені Ж. Біо (1774—1862) і Ф. Савар (1791—1841) провели експериментальні дослідження магнітної дії електричних струмів, які були узагальнені П. Лапласом (1749—1827) і сформульовані у вигляді закону (закон Біо—Савара—Лапласа).

Цей закон давав можливість проводити розрахунки характеристик магнітних полів струмів.

У 1826 р. німецький фізик Г. Ом (1787—1854) дослідно встановив кількісну залежність між силою електричного струму в провідниках і напругою (закон Ома), а в 1827 р. обґрунтував цей закон теоретично. У 1830 р. німецький вчений К. Гаусс (1777—1855) сформулював основну теорему електростатики (теорема Гаусса), яка пов'язує потік напруженості електростатичного поля крізь довільну замкнену поверхню з числовим значенням заряду, який міститься всередині цієї поверхні.

У 30—40-х роках ХІХ ст. в розвиток електрики великий внесок зробив англійський фізик М. Фарадей (1791—1867) — засновник узагальненого вчення про електромагнітні явища, в рамках якого всі електричні і магнітні явища розглядаються з єдиного погляду. У 1831 р. він відкрив явище електромагнітної індукції, яке полягало у виникненні електрорушійної сили в довільному провіднику, вміщеному в змінне магнітне поле. Це явище у 1832 р. спостерігав також американський фізик Дж. Генрі (1797—1878). Явище електромагнітної індукції стало основою швидкого розвитку електротехніки, що, у свою чергу, стимулювало розвиток теоретичних досліджень. Пізніше, намагаючись встановити зв'язок електричних і магнітних явищ з оптичними, М. Фарадей відкрив у 1837 р. поляризацію діелектриків, а в 1845 р. — явища пара- і діамagnetизму та обертання площини поляризації світла в магнітному полі.

Пояснюючи взаємодію електричних зарядів і струмів виникненням навколо них електричних і магнітних полів, М. Фарадей розглядав ці поля як реальні фізичні об'єкти. Він був прихильником теорії близькодії (передача взаємодії між зарядами і струмами здійснюється через особливий матеріальний агент — поле — від точки до точки зі скінченною швидкістю) на противагу існуючій на той час концепції далекодії (передача взаємодії здійснюється між зарядами і струмами миттєво, без будь-якого носія). При цьому М. Фарадей ввів поняття силових ліній як механічних натягів у гіпотетичному середовищі — ефірі.

Видатний російський фізик Е. Х. Ленц (1804—1865) у 1833 р. розвинув закон електромагнітної індукції, сформулювавши правило, яке увійшло в науку під назвою правила Ленца. Це правило встановлює зв'язок між характером зміни магнітного потоку, що пронизує площу довільного замкненого контуру, з напрямом індукційного струму в ньому. Він також сформулював закон оборотності електричних машин, відкрив «реакцію якоря». У 1842—1843 рр. Е. Х. Ленц, незалежно від аналогічних робіт англійського фізика Дж. Джоуля (1818—1889), провів дослідження теплової дії струму.

Ідеї Фарадея не зразу набули визнання. Теоретичне обґрунтування явища електромагнітної індукції вперше в 1845 р. здійснив німець-

кий фізик Ф. Нейман (1798—1895), який ввів поняття само- і взаємодукції струмів. У 1853 р. англійський фізик У. Томсон лорд Кельвін (1824—1907) розробив теорію електричних коливань у коливальному контурі, який складався з конденсатора і котушки індуктивності.

Дальшого розвитку і підтвердження ідеї Фарадея набули в працях Дж. Максвелла, який протягом 1861—1873 рр. узагальнив усі відомі на той час знання про електричні та магнітні явища і виклав їх у вигляді завершеної теоретичної системи, яка одержала назву класичної електродинаміки (або теорії Максвелла). Цю теорію було викладено в 1873 р. у фундаментальній праці «Трактат з електрики і магнетизму». Грунтуючись на вже відомих емпіричних законах електричних і магнітних явищ разом з введеною гіпотезою про створення магнітного поля змінним електричним полем, Дж. Максвелл ввів систему фундаментальних рівнянь, які описують практично всі макроскопічні (без урахування дискретної структури заряду і речовини) електромагнітні явища. Теорія Максвелла була найвизначнішим досягненням фізики ХІХ ст.

З рівнянь Максвелла випливало існування електромагнітних хвиль, тобто існування електромагнітного поля незалежно від його джерел. Швидкість поширення електромагнітних хвиль виявилась такою, що дорівнює швидкості світла. Отже, було зроблено важливий узагальнюючий висновок про єдину природу оптичних і електромагнітних явищ.

Дослідами німецького фізика Генріха Герца (1857—1894), який вперше в 1887 р. одержав електромагнітні хвилі і провів їх дослідження, теорія Максвелла набула остаточного підтвердження. Досліди Герца поклали початок розвитку нової галузі науки і техніки — радіотехніки, величезний внесок у розвиток якої зробив російський винахідник О. С. Попов (1859—1906). 7 травня 1895 р. він демонстрував свій радіоприймач, а в 1896 р. здійснив передачу першої безпроводної радіограми «Генріх Герц».

З рівнянь Максвелла випливало також, що електромагнітні хвилі переносять енергію і мають чинити тиск. Ці висновки знайшли теоретичне підтвердження у працях російського вченого М. О. Умова (1846—1915) та в унікальних дослідах російського фізика П. М. Лебедева (1866—1912). У 1881 р. англійський фізик Дж. Дж. Томсон (1856—1940) висловив гіпотезу і довів існування маси електромагнітного поля. Отже, теоретично та експериментально було доведено наявність всіх матеріальних атрибутів електромагнітного поля: маси, імпульсу та енергії.

Теорія Максвелла є феноменологічною теорією, вона узагальнює дослідні дані, але не розкриває зв'язку електромагнітних явищ з внутрішньою будовою речовини.

Кінець XIX — початок XX ст. знаменується новим станом розвитку вчення про електричні та магнітні явища. Дослідження електричного струму в газах зумовило відкриття Дж. Дж. Томсоном електрона і дискретності електричних зарядів. У 1897 р. він виміряв питомий заряд електрона, а в 1899 р. визначив абсолютне значення заряду електрона. Пряме експериментальне вимірювання елементарного заряду електрона виконав американський фізик Р. Міллікен (1868—1953) у 1909 р. Відкриття Дж. Дж. Томсона разом із молекулярно-кінетичною теорією речовини стали основою створення на початку XX ст. Х. Лоренцом електронної теорії будови речовини. У цій теорії речовина розглядається як сукупність електрично заряджених частинок, рух яких підпорядкований законам класичної механіки.

Вивчення електромагнітних явищ у рухомих середовищах зумовило створення німецьким і американським фізиком-теоретиком А. Ейнштейном (1879—1955) спеціальної теорії відносності. Ця теорія повністю довела нерозривну єдність електричних і магнітних явищ, їх єдину природу і матеріальну сутність. Разом з тим стало ясно, що на достатньо малих просторово-часових відстанях істотними стають квантові властивості електромагнітного поля, яких не враховує класична електродинаміка.

У другій чверті XX ст. було закладено основи квантової електродинаміки. З відкриттям нових електромагнітних явищ і створенням релятивістської та квантової електродинаміки було встановлено межі застосовності класичної електродинаміки. Разом з тим роль класичної електродинаміки Максвелла — Лоренца як фундаменту більшості розділів електротехніки, радіотехніки, електроніки (крім квантової) та оптики не зменшилась. За рівняннями Максвелла розв'язуються численні задачі теоретичного і прикладного характеру.

Дослідження, проведені в XX ст., дали багато нових відомостей про електромагнітні явища та можливості використання їх. Сюди слід віднести: досягнення в теорії і практиці використання феромагнітних і напівпровідникових матеріалів, піро-, сегнето- і п'єзоелектриків, металів і рідких розчинів електролітів; методи добування і практику транспортування електричної енергії на великі відстані; радіо- і телефонний зв'язок, радіолокацію, телебачення; електронно-обчислювальні машини і комп'ютерну техніку; розроблення теорії і виготовлення квантових генераторів; передавання електромагнітних сигналів по каналах зв'язку; теорію надпровідності і виготовлення високотемпературних надпровідних матеріалів тощо.

Значний внесок у розвиток нових сучасних галузей вчення про електромагнітні явища та їх використання зробили фізики Росії А. Ф. Йоффе (1880—1960), Л. Д. Ландау (1908—1968), І. Є. Тамм (1895—1971), І. М. Ліфшиць (1915—1985), М. С. Акулов (1900—1976), Я. І. Френкель (1884—1952) та інші, а також фізики-теоретики і практики

України І. П. Пулюй (1845—1918), М. М. Боголюбов (1909—1992), Й. Й. Косоногов (1866—1922), М. М. Шіллер (1848—1910), П. О. Зілов (1850—1921), О. П. Грузинцев (1851—1919), Ф. Н. Шведов (1840—1905), П. П. Копняєв (1867—1932), В. Є. Лошкарьов (1913—1974), В. М. Хрушов (1882—1941), С. О. Лебедєв (1902—1974), А. Д. Нестеренко (1899—1975), І. М. Чиженко (н. 1916 р.), Г. І. Денисенко (н. 1919 р.), С. І. Пекар (1917—1985), В. Г. Бар'яхтар (н. 1930 р.), В. М. Глушков (1923—1982), Б. Є. Патон (н. 1918 р.) та інші.

Найважливішою умовою успішного розвитку економіки і забезпечення сучасного технічного рівня виробництва є енергетика, і насамперед електроенергетика. Основою електроенергетики в Україні є теплові електростанції і теплоелектроцентралі. На них виробляється понад 50 % всієї електроенергії України. Вагомий внесок в єдину енергетичну систему країни роблять гідроелектростанції Дніпровського каскаду та атомні електростанції. Атомні електростанції в критичні періоди можуть давати більше ніж 40 % електроенергії. Розробляються і вже впроваджуються методи добування електричної енергії шляхом прямого перетворення променевої енергії Сонця, використання геотермальних джерел, енергії припливів і відпливів, енергії вітру. Надзвичайно розгалуженими в Україні є лінії електропередач — грандіозні споруди підвищувальних та знижувальних підстанцій із сіткою високовольтних ліній.

Вчення про електромагнетизм умовно можна поділити на такі три напрями: основні поняття і закономірності електромагнетизму; електричні та магнітні властивості речовини; технічне і практичне застосування електромагнітних явищ.

## Розділ 1. Електростатика

### § 1.1. Електричний заряд

Дослідно встановлено існування в природі електромагнітної взаємодії. Ця взаємодія виникає між розміщеними на відстані один від одного рухомими або нерухомими електрично зарядженими тілами чи частинками. Електричний заряд на тілах створюється, наприклад, під час електризації їх тертям. Навколо електрично заряджених тіл виникає електромагнітне поле, через яке і здійснюється силова взаємодія.

Поняття електричного заряду можна ввести, якщо скористатися вимірюванням сил, що діють на дві точкові електрично заряджені частинки, по чергово вміщені в одну й ту саму довільно обрану точку заданого силового електромагнітного поля. Якщо, наприклад, на першу нерухому наелектризовану частинку, вміщену в певну точку  $M$  поля, діє сила  $F_1$ , а на другу наелектризовану частинку, внесenu в ту саму точку  $M$ , діє сила  $F_2$ , то, як показує дослід, відношення цих сил зовсім не залежить ні від характеристик силового поля, ні від вибору точки  $M$ , а повністю визначається властивостями самих наелектризованих частинок. Тоді

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2}, \quad (1.1)$$

де  $q_1$  і  $q_2$  — електричні заряди відповідно першої і другої частинок. В електростатиці саме так встановлюється загальний метод вимірювання відношення зарядів. Якщо один із зарядів відношення (1.1) прийняти таким, що дорівнює одиниці, то так буде встановлено метод визначення не тільки відношення, а й числового значення заряду.

Розділ фізики, в якому вивчають властивості й взаємодію нерухомих електричних зарядів (електростатичну взаємодію) та властивості їхніх електричних полів, називають *електростатикою*. Оскільки рух або спокій зарядів є відносними і визначаються станом інерціальної системи відліку, то ті самі заряди в одних системах відліку, відносно яких вони нерухомі, проявляють електростатичну взаємодію, а в інших, відносно яких заряди рухаються, — електромагнітну взаємодію. Отже, електростатична взаємодія зарядів є окремим випадком більш загальної електромагнітної взаємодії.

Взаємодія нерухомих зарядів відбувається через електростатичне поле, яке невіддільно зв'язане із зарядами. Оскільки поле зарядів локалізоване в просторі навколо них і в кожній точці простору характеризується рядом фізичних величин, то електростатичним часто називають

вають таке поле, характеристики якого в кожній точці не змінюються з часом, тобто є функціями лише координат.

*Електричний заряд* є внутрішньою характеристикою деяких елементарних матеріальних частинок, яка проявляється в їхній взаємодії на відстані або під час дії на них зовнішніх електромагнітних полів. Отже, електричний заряд являє собою як джерело, так і об'єкт дії електромагнітного поля.

У механіці ми вже ознайомилися з однією з фундаментальних взаємодій — гравітаційною взаємодією, джерелом і мірою якої є гравітаційна маса. Аналогічно джерелом і мірою електромагнітної взаємодії є електричний заряд. Між джерелами електромагнітної і гравітаційної взаємодій немає повної аналогії. Гравітаційні заряди (маси) мають один знак, між ними існують лише сили взаємного притягання і, отже, з ростом мас взаємодіючих тіл ці сили завжди збільшуються. Щодо властивостей електричного заряду, то експериментально встановлено, що всі існуючі в природі заряди можна поділити на два види, причому заряди одного виду між собою відштовхуються, притягуючи заряди протилежного виду. Їх умовно поділяють на позитивні і негативні. Нагадаємо, що *позитивними* вважаються ті заряди, які виникають на скляній паличці у разі натирання її шовком, а *негативними* — заряди, які виникають на ебонітовій (або янтарній) паличці у разі натирання її хутром. Той заряд, який прийнято вважати позитивним, з таким самим успіхом можна було б прийняти як негативний і навпаки. Головна ж суть полягає в існуванні двох видів зарядів. Причина існування такої універсальної властивості елементарних частинок невідома. Вважають, що це протилежні прояви однієї якості, так само, як «праве» і «ліве»; або як два напрями часу є протилежними проявами фундаментальних властивостей симетрії. Як зазначалося, однойменно заряджені тіла (частинки) відштовхуються, а різнойменно заряджені — притягуються. Отже, між електричними зарядами існують сили взаємного притягання і взаємного відштовхування. Тому накопичення зарядів на тілах не завжди супроводжується зростанням сили взаємодії між ними. Навпаки, в природі найчастіше спостерігається взаємна компенсація позитивних і негативних зарядів на макроскопічних тілах, внаслідок чого тіла стають електрично нейтральними і не проявляють електромагнітної взаємодії. Наш Всесвіт — добре зрівноважена система позитивних і негативних зарядів, що й не дивно, оскільки однойменні заряди відштовхуються і така система не могла б бути стійкою.

Наявність на тілах макроскопічних електричних зарядів зумовлена існуванням у природі мікроскопічних носіїв зарядів. Під *мікроскопічними носіями заряду* розуміють заряджені елементарні частинки та іони. Тепер відомо близько чотирьохсот елементарних частинок (частина з них має електричний заряд) і багато різних іонів. Як відомо,



речовина складається з атомів, а атоми — з позитивно заряджених ядер та електронів, які обертаються навколо ядер. До складу ядер входять елементарні позитивно заряджені частинки — протони і нейтральні — нейтрони. Більшість відомих заряджених елементарних частинок нестабільні. Вони розпадаються на інші частинки і, отже, мають певний скінченний час життя, який становить здебільшого незначні частки секунди. Стабільними в межах точності сучасних вимірювань є електрон (час життя  $\tau > 5 \cdot 10^{21}$  років), протон ( $\tau > 10^{32}$  років), нейтрино та їхні античастинки. Нейтрони в складі ядер мають необмежений час життя, а у вільному стані, поза ядрами, середній час життя їх триває близько 17 хв. Протягом цього часу нейтрон розпадається на протон, електрон і антинейтрино.

Якщо нейтральний атом хімічного елемента втрачає один або кілька електронів зовнішньої валентної електронної оболонки, то він перетворюється в позитивно заряджений іон (позитивний заряд ядра не компенсується негативним зарядом електронів електронної оболонки). І навпаки, якщо атом набуває надлишкових електронів, то він стає негативно зарядженим іоном (нескомпенсованим виявляється негативний заряд атома).

Втратою або приєднанням електронів атомами пояснюється, наприклад, електризація тіл тертям. Справді, при щільному контакті двох тіл їхні атоми в місцях дотиків наближаються настільки, що, взаємодіючи між собою, можуть захоплювати або віддавати частину електронів зовнішньої валентної оболонки. Тіла, атоми яких при контакті набули зайвих електронів, електризуються негативно, а тіла, атоми яких втратили електрони, електризуються позитивно. Внаслідок дотику двох тіл вони набувають однакових за абсолютним значенням і протилежних за знаком зарядів. Отже, під час електризації тіл тертям заряди не створюються і не зникають, а лише перерозподіляються між контактуючими тілами так, що їхній сумарний заряд не змінюється. Зазначимо, що електризація дотиком різнорідних макроскопічних тіл відбувається завжди незалежно від того, чи є тіла діелектриками або провідниками. Однак в експериментах електризація тертям спостерігається лише для діелектричних речовин. Це зумовлено тим, що в процесі розділення двох контактуючих провідних тіл заряди (електрони), вільно переміщуючись у провідниках, встигають повністю нейтралізувати накопичений різнойменний заряд під час дотику. У діелектриках, навпаки, створені під час дотику в окремих точках заряди при розділенні стичних тіл не компенсуються через те, що діелектрики не мають провідності.

Однією з універсальних властивостей електричного заряду є його квантування. Думку про те, що електричний заряд є дискретним, вперше висловив Б. Франклін у 1749 р. У листі секретареві Лондонського королівського товариства він писав, що електрична субстанція скла-

дається з надзвичайно маленьких частинок, оскільки вона здатна проникати у звичайну матерію, навіть у найщільніші метали, з великою легкістю і свободою.

Перші обгрунтовані припущення про те, що електрика не є неперервною «рідиною», а складається з особливих частинок, було зроблено на основі праць М. Фарадея з дослідження явища електролізу. Виявилось, що при однаковій силі струму в електролітах на електродах виділяється різна кількість речовини залежно від природи сполук хімічних елементів, розчинених у воді. При виділенні одного моля одновалентної речовини крізь електроліт проходить 96 500 Кл електрики, двовалентної — електричний заряд у два рази більший,  $n$ -валентної — у  $n$  разів більший. Ці дослідження наводили на думку, що багатовалентні іони мають заряд у ціле число разів більший від заряду одновалентного іона. Знаючи, що для виділення на електродах моля одновалентної речовини крізь електроліт проходить  $6,02 \cdot 10^{23}$  іонів (число Авогадро), які переносять заряд 96 500 Кл, легко обчислити заряд одновалентного іона ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл). Цю найменшу порцію електрики, яку часто називають *елементарним зарядом* або атомом електрики, ірландський фізик Г. Стоней (1826—1911) у 1891 р. назвав *електроном*.

З усієї різноманітності елементарних частинок електрон займає особливе місце. Практично всі фізичні процеси, які відбуваються в тілах на атомарному рівні, проходять з його участю. Тому не випадково, що першою зарядженою елементарною частинкою, відкритою експериментально, був електрон. З відкриттям електрона починається вік атомної фізики. Стало можливим пояснити періодичну систему елементів Д. І. Менделєєва, природу хімічного зв'язку у твердих тілах, структуру атомів і молекул, природу хімічних реакцій, механізм взаємодії електромагнітних хвиль з речовиною та ін. З'явилися прилади і пристрої, в яких використано унікальні властивості електронів: електронно-обчислювальні машини, електронні мікроскопи, лазери, теле- і радіоприлади, електронні прискорювачі тощо.

З-поміж багатьох дослідників Дж. Дж. Томсон та його учні провели найбільш точні експериментальні дослідження, які довели існування електрона. Питомий заряд електрона  $e/m$  (відношення заряду частинки до її маси), котрий вперше в 1897 р. визначив Дж. Дж. Томсон у досліді з катодними променями (див. § 8.7), дорівнює  $1,7588 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Пряме експериментальне вимірювання елементарного заряду виконав у 1908—1916 рр. американський фізик Р. Міллікен.

Аналогічні досліди були повторені в ряді країн світу. В Росії, зокрема, в 1912 р. подібні досліди провів А. Ф. Йоффе.

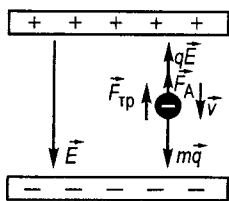


Рис. 1.1

Схему досліду Міллікена зображено на рис. 1.1. У простір між горизонтально розміщеними обкладками конденсатора вприскували масло. Краплини масла, проходячи крізь канал пульверизатора, внаслідок тертя електризувались. Якщо на обкладках конденсатора напруженості електричного поля не було, то краплини масла рівномірно і повільно падали. Сила тяжіння  $m\vec{g}$  зрівноважувалась силою в'язкого тертя повітря

$\vec{F}_{\text{тр}} = a\vec{v}$  і силою Архімеда  $\vec{F}_A$ . Густина масла  $\rho_m$  і повітря  $\rho_n$  відомі, а радіус краплини  $r$  вимірювали за допомогою мікроскопа. Швидкість краплини  $\vec{v}$  розраховували за вимірними окулярною шкалою мікроскопа довжиною шляху і секундоміром часу падіння. З рівності

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m g = a v + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_n g$$

визначали коефіцієнт опору повітря  $a$ .

При накладанні напруженості електричного поля  $\vec{E}$  рух краплини або прискорювався, або сповільнювався залежно від напрямку  $\vec{E}$  і знака заряду краплини. Підбирались такі значення і напрям  $\vec{E}$ , щоб краплина масла рівномірно піднімалася зі швидкістю  $\vec{v}'$ . Тоді з рівності

$$qE + F_A = mg + av'$$

визначали заряд краплини  $q$ .

Під час опромінення простору між пластинами конденсатора рентгенівським випромінюванням повітря іонізувалося, краплини масла змінювали свій заряд і стрибком змінювалась їхня швидкість. Зрівноважуючи електричним полем діючі сили, щоб кожного разу краплина рухалася вгору рівномірно, визначали різницю швидкостей її руху і обчислювали нове значення заряду  $q'$ . Зміна заряду  $\Delta q = q' - q$ . Провівши велику кількість вимірювань зарядів, Р. Міллікен встановив, що  $\Delta q$  завжди є цілим кратним тієї самої величини  $|e|$ , тобто  $\Delta q = n|e|$ , де  $n = \pm 1; \pm 2; \dots$ . Отже, дослідно було доведено існування елементарного заряду  $|e|$  і вперше визначено його числове значення. За сучасними даними  $|e| = 1,602\,189\,2(46) \cdot 10^{-19}$  Кл. Знаючи відношення  $e/m$ , розраховують масу спокою електрона  $m = 9,109\,534(47) \cdot 10^{-31}$  кг. Таким чином, досліди з визначення елементарного заряду стали неzapеречним доведенням атомізму електрики.

Усі заряди, які існують в природі у вільному стані, складаються з окремих дискретних зарядів, однакових за абсолютним значенням і таких, що дорівнюють зарядові електрона. Цю універсальну властивість називають *законом квантування електричного заряду*. Відповідно до цього закону заряд довільної незамкненої системи може

змінюватись лише на ціле число, кратне зарядові електрона. Електрон є матеріальним носієм найменшої маси і найменшого електричного заряду в природі. Сучасна теорія електромагнітного поля не може пояснити природи квантування електричного заряду, і цей експериментальний факт приймається як постулат. Електричний заряд електрона умовились вважати негативним відповідно до угоди вважати негативним заряд наелектризованого янтарю. Щодо розміру електрона, то, з одного боку, приймають, що електрон є точковою частинкою, тобто стверджують, що увесь електричний заряд електрона зосереджений в точці, а з іншого боку, умовно вводять так званий *класичний радіус електрона*

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м,}$$

де  $\epsilon_0$  — електрична стала СІ;  $m_0$  — маса спокою електрона;  $c$  — швидкість світла у вакуумі. Причину протиріччя не вдається повністю усунути через відсутність більш досконалої моделі електрона. Частково ці протиріччя розкриваються квантовою фізикою. З'ясувалось, що електрон, як і будь-яка інша мікрочастинка, крім корпускулярних, має також хвильові властивості.

Крім заряду та маси, до індивідуальних характеристик електрона належать момент імпульсу (спін) та власний (спіновий) магнітний момент. Спін розглядають як внутрішню властивість частинки. Фізичний зміст спіну не може бути повністю розкритий в рамках класичної теорії електрики і магнетизму.

Теорію електрона не можна вважати закінченою, оскільки їй властиві внутрішні протиріччя (наприклад, точкова заряджена частинка повинна мати нескінченну енергію, а отже, й інертну масу, що суперечить експериментам).

Стабільним носієм позитивного елементарного електричного заряду є *протон*. За сучасними експериментальними даними позитивний заряд протона за абсолютним значенням дорівнює негативному елементарному зарядові електрона з відносною точністю  $10^{-21}$ . На відміну від електрона протон не є точковою зарядженою частинкою. Експериментально методом опромінення протонів потоком швидких електронів (подібно до дослідів Резерфорда з дослідження структури атома) добре вивчено розподіл електричного заряду всередині протона. За сучасними уявленнями протон складається з двох точкових кварків із зарядом  $+\frac{2|e|}{3}$  і одного — із зарядом  $-\frac{|e|}{3}$ . Кварки перебувають у безперервному русі, і їхнє місцезнаходження від центра протона визначається сферою радіусом близько  $10^{-15}$  м. У вільному стані кварків не виявлено. На основі цього зроблено висновок, що

дробових зарядів у вільному стані не існує. Це не означає, що дробових зарядів (кварків) не існує у зв'язаному стані всередині елементарних частинок. Однак прямого експериментального доказу наявності кварків всередині протонів (або інших елементарних частинок) немає.

Однією з важливих властивостей елементарного заряду є незалежність його числового значення від стану інерціальних систем відліку, в яких воно визначається. Іншими словами, елементарний заряд є *інваріантною* (від лат. *invariantis* — незмінний) *величиною*. Інваріантність заряду доведена експериментально перевіркою нейтральності пучка атомів в електростатичних полях. По відхиленню судять про нейтральність атомів і, отже, про рівність зарядів електронів і протонів в атомах. Маса електрона в 1840 разів менша від маси протона, тому швидкість протонів в атомах набагато менша від швидкостей електронів. Якби заряд частинок в атомі залежав від швидкостей їхнього руху, то нейтральність атомів мала б порушуватись. Наприклад, електрони в атомах гелію рухаються приблизно у два рази швидше, ніж у молекулі водню, а нейтральність атомів гелію і молекул водню доведена з великою точністю. Звідси зробили висновок, що числове значення заряду не залежить від швидкості його руху аж до значень  $v = 0,02 c$  ( $v$  — швидкість електронів в атомах гелію). Інваріантність заряду перевірена в наш час для швидкостей 0,5  $c$ . Тому вважають, що при будь-яких швидкостях інваріантність заряду — експериментально доведений факт.

Крім інваріантності заряду, основоположним у теорії електрики і магнетизму є *закон збереження заряду*. Тут треба виділяти дві групи фактів. Перша група полягає в тому, що в природі матеріальними носіями електричного заряду з нескінченним часом життя є електрони і протони. Значення їх заряду є інваріантом. Звідси випливає, що заряди електронів і протонів існують без змін стільки часу, скільки існують самі електрони і протони. Тому закон збереження заряду в цьому випадку є наслідком незнищенності носіїв заряду як фізичних об'єктів та інваріантності їхнього заряду в будь-яких процесах чи явищах. Друга група фактів полягає в тому, що є багато нестабільних елементарних заряджених частинок, які народжуються і зникають у процесах взаємоперетворень. Спостереження й експериментальні дослідження свідчать, що в усіх процесах взаємоперетворень сумарний заряд замкненої системи до взаємоперетворень дорівнює сумарному заряду після взаємоперетворень. Під *замкненою системою* розуміють систему, в яку із оточуючого середовища крізь її межі не проникають електрично заряджені частинки. *Повний електричний заряд замкненої системи є величиною постійною і дорівнює алгебричній сумі її позитивних та негативних зарядів:*

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i = \text{const.} \quad (1.2)$$

Електричний заряд зберігається при всіх процесах і рухах носіїв зарядів. Закон збереження заряду вказує на те, що позитивні й негативні заряди в природі можуть народжуватись лише парами. Ці пари народжуються при взаємодії частинок великих енергій, яка перевищує масу спокою народжуваної пари. Як приклад можна навести явище народження електрон-позитронних пар із  $\gamma$ -квантів і їх анігіляції.

Заряд — це одна із фундаментальних властивостей матерії і він не існує сам по собі, незалежно від носіїв заряду, тобто від матерії, або поза простором і часом.

Елементарний заряд малий, тому в більшості макроскопічних електричних явищ бере участь величезна кількість елементарних зарядів і їх дискретна структура не проявляється. Наприклад, при силі струму 1 А крізь поперечний переріз провідника проходить приблизно  $6 \cdot 10^{18}$  елементарних зарядів за секунду. В таких випадках вважають, що електричний заряд розподілений у провіднику неперервно і дискретною структурою заряду нехтують. Це стосується практично всіх процесів, які вивчає макроскопічна теорія електрики і магнетизму. Тому в цій теорії вводять поняття об'ємної, поверхневої і лінійної густини неперервно розподілених зарядів. *Об'ємну густину заряду* в даній точці простору визначають як границю відношення заряду  $\Delta q$ , який міститься в об'ємі  $\Delta V$ , що оточує точку, до цього об'єму:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (1.3)$$

Аналогічно вводять поняття *поверхневої густини заряду*

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (1.4)$$

і *лінійної густини*

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1.5)$$

При цьому  $\rho$ ,  $\sigma$  і  $\tau$  вважають неперервними функціями координат. Зазначимо, що  $\Delta V$ ,  $\Delta S$ ,  $\Delta l$  є малими, проте містять у собі велику кількість елементарних зарядів.

## § 1.2. Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона

Перші експериментальні дослідження сили взаємодії між двома нерухомими точковими зарядами виконали, як уже зазначалося,

незалежно один від одного Г. Кавендіш у 1772 р., результати досліджень якого були опубліковані лише в 1879 р., і Ш. Кулон у 1785 р.

Взаємодію заряджених тіл Ш. Кулон вивчав за допомогою сконструйованих ним крутильних ваг (рис. 1.2). Основною частиною приладу є пружна металева нитка  $H$ , що з'єднана одним кінцем з поворотною головкою  $K$ , по шкалі якої можна визначити кут закручування нитки. До другого кінця прикріплено легке, виготовлене з ізоляційного матеріалу, коромисло. На кінцях коромисла закріплені металева заряджена кулька  $a$  і противага  $b$ . Скляний циліндр  $\Pi$  захищає чутливу частину приладу від потоків повітря. Всередину приладу

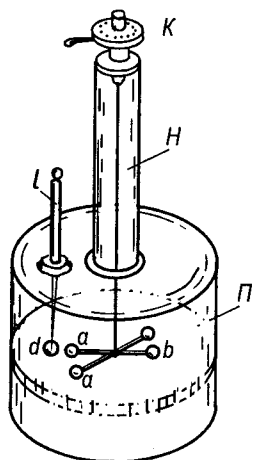


Рис. 1.2

крізь отвір на ізоляторі  $l$  вносили кульку  $d$  і визначали силу взаємодії залежно від відстані між кульками  $a$  і  $d$  та значення їхнього заряду.

Закон взаємодії нерухомих точкових зарядів у вакуумі називається законом Кулона. Він формулюється так: *сила взаємодії  $F$  двох нерухомих точкових зарядів у вакуумі прямо пропорційна добутковій кількості електричних зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , обернено пропорційна квадратній відстані  $r$  між ними і напрямлена вздовж прямої, яка сполучає ці заряди, тобто*

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.6)$$

де  $k$  — коефіцієнт пропорційності. Сили взаємодії однойменних зарядів є силами відштовхування, а різнойменних — силами притягання. Сили відштовхування вважають додатними, сили притягання — від'ємними. Позитивний заряд при обчисленнях виражають числом додатним, негативний — від'ємним. Кількість електрики для спрощення часто називають просто зарядом.

Залежність сили взаємодії від квадрата відстані між точковими зарядами встановлювалась експериментально на основі відомого з механіки співвідношення між кутом закручування металевої нитки і моментом сили при деформації кручення. Твердження ж про те, що сила взаємодії між двома точковими зарядами прямо пропорційна значенню кожного заряду, приймається здебільшого як само собою зрозуміле. Дослідне обґрунтування цього твердження є складним, оскільки саме значення заряду визначалось із закону Кулона. Щоб обійти цю трудність, вважають, що при дотиканні зарядженої провідної кульки з такою самою за розмірами незарядженою кулькою заряди розподіляються між ними порівну. Якщо виконати експеримент з нерухомою зарядженою кулькою, яка відштовхує вільно підвішену кульку

з деяким фіксованим зарядом, а потім фіксований заряд зменшити вдвоє і повторити експеримент, то сили відштовхування будуть перебувати у відношенні 2:1.

Щоб користуватись рівністю (1.6), треба встановити одиницю нової фізичної величини — заряду. Це можна зробити двома способами: обрати наперед довільно розмірність та значення коефіцієнта  $k$ , тоді одиниця заряду визначатиметься однозначно з формули (1.6); або ж, навпаки, встановити наперед одиницю заряду, тоді з цієї ж формули однозначно визначатиметься коефіцієнт  $k$ . Відповідно до двох вищезазначених способів будують дві системи одиниць: СГСЕ і СІ. У системі СГСЕ в рівності (1.6) приймають  $k = 1$  і вважають його безрозмірним. Тоді на основі (1.6) встановлюють так звану абсолютну одиницю заряду. В системі СГСЕ за абсолютну одиницю заряду прийнято точковий заряд, який діє на такий самий за значенням заряд, розміщений на відстані 1 см, із силою в 1 дин, тобто  $q = \sqrt{Fr^2}$ ;

$[q] = \sqrt{1 \text{ дин} \cdot 1 \text{ см}^2} = 1 \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1} = 1 \text{ абс. од. заряду}$ . Ця одиниця заряду є малою і незручною для користування. Тому на практиці користуються одиницею заряду в  $3 \cdot 10^9$  разів більшою; її називають кулоном (Кл);  $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ абс. од. заряду (од. СГСЕ)}$ .

У СІ однією з основних одиниць фізичних величин є одиниця сили струму — ампер. Одиниця заряду в цій системі похідна і встановлена на основі рівності  $q = It$  ( $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ ). Отже, у рівності (1.6) одиниці всіх фізичних величин в СІ вже цілком визначені (сила — в ньютонках, відстань — у метрах, заряд — у кулонах). При цьому коефіцієнт  $k$  має певне числове значення і певну розмірність. Щоб визначити розмірність і числове значення  $k$ , розглянемо силу взаємодії у вакуумі двох точкових зарядів, кожний по 1 абс. од., розміщених на відстані 1 см один від одного, і виразимо всі величини в СІ:  $r = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ ;  $F = 1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$ ;  $q_1 = q_2 = 1 \text{ абс. од.} = \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ Кл}$ . Підставляючи ці

значення в рівність (1.6), одержуємо

$$k = \frac{Fr^2}{q_1 q_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Основні рівняння і формули електрики та магнетизму набувають простішого вигляду, якщо закон Кулона записати у раціоналізованій формі. Це дає змогу уникнути коефіцієнта  $4\pi$  у формулах, які найчастіше використовуються на практиці, тобто прийняти  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . З рів-

ності  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$  визначаємо  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ .

З урахуванням виразу для коефіцієнта  $k$  закон Кулона для вакууму в СІ записують так:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.7)$$

Значимо, що закон Кулона визначає взаємодію точкових зарядів, тобто таких наелектризованих тіл, розміри яких є значно меншими порівняно з відстанню між ними. Звідси випливає, що наелектризовані тіла, при вивченні їх взаємодії за законом Кулона, можуть мати порівняно великі геометричні розміри, аби тільки відстань між зарядами була значно більшою від розмірів наелектризованих тіл.

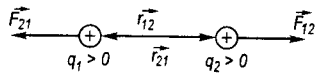


Рис. 1.3

Закон Кулона можна подати у векторній формі (рис. 1.3). Нехай  $\vec{F}_{12}$  — сила, з якою заряд  $q_1$  діє на заряд  $q_2$ , а  $\vec{F}_{21}$  — сила, з якою заряд  $q_2$  діє на заряд  $q_1$ . Тоді

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (1.8)$$

де  $\vec{r}_{12}$  — радіус-вектор, напрямлений від точкового заряду  $q_1$  до заряду  $q_2$ . Аналогічно

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}, \quad (1.9)$$

де  $\vec{r}_{21}$  — радіус-вектор, напрямлений від точкового заряду  $q_2$  до заряду  $q_1$ . Оскільки  $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ , то  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Формули (1.8) і (1.9) слушні для взаємодії як позитивних, так і негативних точкових зарядів. Відповідно до цих рівнянь сили електростатичної взаємодії є центральними, вони залежать лише від відстані між зарядами і напрямлені вздовж прямої, яка сполучає ці заряди. За фізичним змістом формули (1.8) і (1.9) є різними. Вони описують сили, які діють на перший і другий заряди в точках їх перебування, тобто визначають сили в різних просторових точках. Однак природа цих сил і механізми виникнення їх є однаковими.

Чи зміниться кулонівська сила, наприклад  $\vec{F}_{12}$ , якщо поблизу двох взаємодіючих точкових зарядів розмістити ще один точковий заряд? У розумінні сили як такої, що діє в напрямі лінії, яка сполучає точкові заряди, вона змінить своє значення за наявності третього заряду. І навіть не буде виконуватись принцип рівності дії і протидії. Суть полягає в тому, що силу, яка діє на заряд, можна виміряти, але не можна розрізнити вклади від окремих зарядів. Результуючі сили

змінять також і напрями, вони не будуть напрямлені по лінії, що сполучає їх.

Сформулюємо завдання інакше. Чи дорівнює вимірювана сила, що діє на кожний із трьох точкових зарядів, сумі сил з боку двох інших зарядів, якщо ці сили розраховувати за законом Кулона? Відповідь на це запитання можна одержати з експерименту, і вона є однозначною: вимірювана сила завжди дорівнює векторній сумі розрахованих за законом Кулона сил з боку двох інших зарядів. Звідси можна зробити такі висновки: сила взаємодії двох точкових зарядів не залежить від наявності інших зарядів; сила, що діє на даний точковий заряд з боку двох інших точкових зарядів, дорівнює векторній сумі сил, що діють на нього з боку двох інших зарядів. Це твердження називають *принципом суперпозиції*, згідно з яким результуючий ефект складного процесу дій є сумою ефектів, які зумовлюються кожною дією окремо за умови, що кожна з дій взаємно не впливає одна на одну. Або інакше: *суперпозиція* — це здатність фізичних полів до накладання, при якому векторні характеристики їх додаються геометрично, а після розходження їх ці поля існують незалежно одне від одного.

Якщо електростатичне поле створюється системою фіксованих у просторі точкових зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то результуюча сила  $\vec{F}$ , що діє на деякий пробний заряд  $q_0$ , розміщений в електричному полі цих зарядів, дорівнює векторній сумі сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , які діють на заряд  $q_0$  з боку полів зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_n$ :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i0}^3} \vec{r}_{i0}, \quad (1.10)$$

де  $\vec{r}_{i0}$  — радіус-вектор, проведений від заряду  $q_i$  до заряду  $q_0$ . Спосіб додавання сил для випадку  $n = 2$  показано на рис. 1.4.

Щоб визначити сили взаємодії між зарядженими тілами тоді, коли їх не можна вважати точковими, треба подумки поділити ці тіла на елементи, які можна вважати точковими зарядами. Сила взаємодії між зарядженими тілами буде вважатись векторною сумою сил, прикладених до всіх зарядів другого тіла з боку кожного точкового заряду першого тіла. Зауважимо, що взаємодія заряджених тіл в однакових умовах залежатиме від того, чи тіла є провідниками, чи діелектриками.

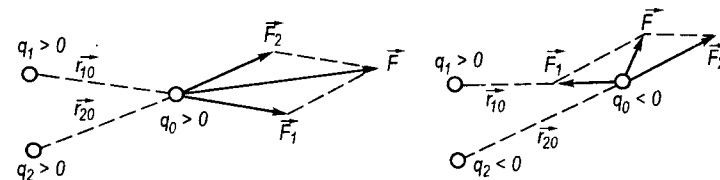


Рис. 1.4

Важливим є питання про межі застосування закону Кулона. На основі методів Кулона і Кавендіша справедливість закону Кулона перевірено з великою точністю для відстаней від кількох міліметрів до десятків сантиметрів. Для географічних і космічних відстаней перевірка закону Кулона ґрунтується на непрямих методах. За допомогою супутників у просторі біля Землі вдалося перевірити закон Кулона з дуже великою точністю до відстаней  $10^7$  м. Про виконання його і на більших відстанях немає сумніву, однак прямих експериментальних перевірок не проводилось. Для малих відстаней закон Кулона перевіряється за взаємодією елементарних частинок. Досліди Резерфорда переконали у слушності закону Кулона до ядерних масштабів близько  $10^{-15}$  м. З дослідів з пружного розсіяння електронів великих енергій випливає, що закон Кулона справджується до відстаней  $10^{-17}$  м.

### § 1.3. Вплив середовища на взаємодію зарядів. Діелектрична проникність

Сила взаємодії електричних зарядів зменшується, якщо їх розмістити не у вакуумі, а в непровідному середовищі. Вплив середовища на взаємодію зарядів пов'язаний з його поляризацією. Явище *поляризації* полягає в тому, що під дією електричного поля зарядів, розміщених у діелектричному середовищі, відбувається зміщення заряджених частинок атомів і молекул (електронів та ядер). Цим частково нейтралізується заряд самих внесених у середовище зарядів і, як наслідок, зменшується сила їх взаємодії. Різні середовища поляризуються неоднаково, тому і вплив їх на взаємодію зарядів є різним. Кількісно вплив середовища на взаємодію зарядів можна оцінити, якщо порівняти сили їх взаємодії у вакуумі  $\vec{F}_0$  і в середовищі  $\vec{F}$ . Відношення цих сил називають *діелектричною проникністю середовища*  $\epsilon$ , яка вказує у скільки разів сила взаємодії точкових електричних зарядів у вакуумі більша, ніж сила їх взаємодії у середовищі:

$$\vec{F}_0 / F = \epsilon.$$

Діелектрична проникність є величиною безрозмірною. Сила  $\vec{F}$  взаємодії двох зарядів у будь-якому непровідному середовищі в  $\epsilon$  разів менша від сили їх взаємодії у вакуумі, тобто

$$\vec{F} = \vec{F}_0 / \epsilon.$$

Тоді закон Кулона для сили взаємодії двох точкових зарядів у середовищі запишеться так:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \vec{r}.$$

### § 1.4. Електричне поле

Простір навколо електрично заряджених частинок і тіл характеризується певними фізичними властивостями. Наприклад, на довільну заряджену частинку, внесenu в цей простір, діє кулонівська сила, значення якої може змінюватись при переході від точки до точки.

У механіці при вивченні гравітаційної взаємодії тіл зазначалося, що взаємодія між тілами передається через поле тяжіння. Аналогічно у процесі вивчення взаємодії електричних зарядів виникали питання: як передається дія від одного заряду до іншого; чи відбуваються які-небудь зміни в навколишньому просторі за наявності тільки одного заряду? Для з'ясування цих питань розвивалися дві різні за своїм змістом концепції: далеко- і близькодії. Згідно з першою концепцією вважалося, що дія від одного заряду до іншого передається миттєво без участі будь-якого матеріального носія цієї взаємодії і що за наявності тільки одного заряду ніяких змін у навколишньому просторі не відбувається. Згідно з концепцією близькодії взаємодія між нерухомими зарядами передається через електричне поле, яке оточує ці заряди, із скінченною швидкістю від одних точок поля до інших. Концепція далекодії не відповідала дійсності і була відкинута після відкриття та дослідження електромагнітного поля. Отже, за сучасними поглядами матеріальним носієм взаємодії нерухомих зарядів є електричне поле.

*Електричне поле* — це матеріальна складова електромагнітного поля, яке діє на заряд, зумовлене зарядами або змінним у часі магнітним полем. Основною ознакою наявності електричного поля є те, що на будь-який заряд, внесений у це поле, діє сила. При вивченні магнітної взаємодії струмів або постійних магнітів аналогічно прийдемо до поняття магнітного поля. Також буде показано, що електричне і магнітне поля є окремими проявами електромагнітного поля, яке характеризується енергією, масою, імпульсом, тобто всіма атрибутами матерії. Отже, електромагнітне поле є матеріальним, існує в просторі і часі, і через нього здійснюється електромагнітна взаємодія. Поле реальне так само, як і речовина, і є одним із видів матерії.

Розкриття властивостей фізичних полів — одне з найважливіших завдань фізики. Ми поки що розглядатимемо стаціонарні електричні поля, тобто такі, що не змінюються з часом і створюються нерухомими електричними зарядами або постійними струмами. Такі поля, як зазначалося, називають електростатичними. При вивченні електростатичних полів обидві концепції дають однакові результати. Проте вивчення явищ, пов'язаних з рухом електричних зарядів, виявило непридатність концепції далекодії.

### § 1.5. Напруженість електричного поля

Властивості електричного поля вивчають за допомогою пробного точкового позитивного заряду, значення якого має бути досить малим, щоб запобігти спотворенню початкового характеру поля. Наявність пробного заряду не повинна змінювати розподілу зарядів системи та істотно впливати на результати вимірювань. Як модель пробного заряду може бути, наприклад, легка заряджена бузинова кулька на шовковій нитці. Якщо пробний заряд поміщати в різні точки електричного поля зарядженої кулі, то переконаємось, що в цих точках на той самий пробний заряд діятиме неоднакова сила. Отже, поле в різних точках є неоднаковим. Для кількісного порівняння електричного поля в різних точках, створеного тим самим зарядом, вводять ряд фізичних величин. Однією з таких величин є *напруженість електричного поля*  $\vec{E}$  (якщо поле створено нерухомим зарядом і в кожній точці є незмінним у часі — *електростатичного*). Напруженість  $\vec{E}$  у даній точці електростатичного поля чисельно дорівнює силі, з якою поле діє на одиничний позитивний пробний заряд, розміщений у цю точку поля. Якщо на пробний заряд  $q_0$ , розміщений у певну точку поля, діє сила  $\vec{F}$ , то за означенням напруженість  $\vec{E}$  у даній точці поля

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0. \quad (1.11)$$

Напруженість — величина векторна і являє собою силову характеристику поля. Напрямок напруженості поля  $\vec{E}$  визначається напрямком руху пробного заряду (від позитивного заряду до негативного).

Виходячи із закону Кулона та формули (1.11), одержимо формулу напруженості поля точкового заряду на відстані  $\vec{r}$  у вакуумі:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (1.12)$$

де  $\vec{r}$  — радіус-вектор, проведений від заряду  $q$  в досліджувану точку з координатами  $x, y, z$ .

З формули (1.12) видно, що поле точкового заряду — центрально-симетричне. В СІ за формулою (1.11) напруженість електричного поля вимірюють у ньютонх на кулон (Н/Кл) або вольтх на метр (В/м). За одиницю напруженості електричного поля в СІ взято напруженість у такій точці поля, в якій на заряд в 1 Кл діє сила в 1 Н.

Напруженість електричного поля є величиною локальною: кожна точка простору навколо зарядженого тіла характеризується цілком конкретним значенням напруженості.

Взаємодію двох точкових електричних зарядів (див. рис. 1.3) можна розглядати як таку, що складається з двох етапів. Точковий заряд  $q_1$  створює в оточуючому його просторі електричне поле, напруженість якого на відстані  $\vec{r}_{12}$  у вакуумі

$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}.$$

На точковий заряд  $q_2$ , розміщений у точку поля з напруженістю  $\vec{E}_{12}$ , діє сила

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_{12}.$$

Аналогічні рівняння можна записати для  $\vec{E}_{21}$  та  $\vec{F}_{21}$ :

$$\vec{E}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}, \quad \vec{F}_{21} = q_1 \vec{E}_{21}.$$

При цьому в рівності  $\vec{F} = q\vec{E}$  всі параметри ( $\vec{F}$ ,  $q$  і  $\vec{E}$ ) стосуються однієї і тієї ж точки, тобто ця рівність є локальною.

Основним завданням електростатики є знаходження числового значення і напрямку вектора напруженості  $\vec{E}$  в кожній точці поля за заданим розподілом у просторі та значеннями зарядів. Якщо відомі напруженості електричних полів, створених окремо довільною системою точкових зарядів  $q_1, q_2, \dots$ , то виникає запитання, якою буде результуюча напруженість у довільно обраній точці поля. Дослідження показали, що напруженість результуючого поля системи точкових нерухомих зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожним із цих зарядів окремо, тобто

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n,$$

або

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.13)$$

де  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$  — напруженості полів, які створюються окремими зарядами в даній точці простору.

За формулою (1.12) для системи точкових зарядів можна записати

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i, \quad (1.14)$$

де  $\vec{r}_i$  — вектор, проведений від точки, в якій міститься заряд  $q_i$ , до точки спостереження, тобто до тієї точки, де визначають  $\vec{E}$ .

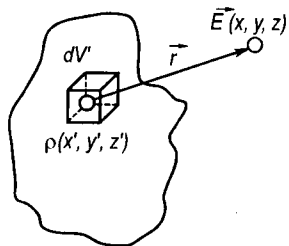


Рис. 1.5

Співвідношення (1.13) характеризує незалежність дії електростатичних полів при їх накладанні і є польовим формулюванням принципу суперпозиції: напруженість поля довільної системи точкових зарядів дорівнює сумі напруженостей полів кожного з точкових зарядів за відсутності всіх інших. Це формулювання є локальним, оскільки всі величини стосуються однієї точки простору. Принцип суперпозиції дає можливість обчислювати напруженість поля будь-якої системи

зарядів. Подумки поділяючи, наприклад, заряджене тіло скінченних розмірів на точкові заряди, за формулою (1.12) визначають складові напруженості в певній точці, створені окремими елементами зарядженого тіла, а потім за формулою (1.13) — результуючу напруженість.

Рівність (1.14) виражає напруженість поля в довільній точці простору навколо точкових зарядів, крім точок, де розміщені самі заряди. Поняття точкового заряду є ідеалізацією, оскільки реальні заряди завжди об'ємні або, в окремих випадках, наближено поверхневі чи лінійні. Тому важливо рівність (1.14) узагальнити на випадок довільно розподілених у просторі (чи на тілах) зарядів.

Для об'ємних зарядів на основі формули (1.3) елементарний заряд  $dq = \rho dV'$  створює напруженість  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV'}{r^3} \vec{r}$ . За принципом суперпозиції вектор результуючої напруженості

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV'}{r^3} \vec{r}. \quad (1.15)$$

Через декартові координати (рис. 1.5) напруженість електростатичного поля в точці  $(x, y, z)$  при неперервному об'ємному розподілі зарядів визначається за формулою

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')}{r^3} \vec{r} dx' dy' dz', \quad (1.16)$$

де  $\rho(x', y', z') dx' dy' dz'$  — заряд, що міститься в об'ємі  $dV' = dx' dy' dz'$ , розміщеному в точці  $x', y', z'$ ;  $\vec{r}$  — вектор, напрямлений від точки  $(x', y', z')$  до точки  $(x, y, z)$ ;  $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ .

Інтегрування в рівності (1.16) проводиться по всьому об'ємові, де є заряд. Компонента  $E_x$  вектора  $\vec{E}$  визначається формулою

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(x - x')\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}. \quad (1.17)$$

Аналогічні з (1.17) вирази записують для компонент  $E_y$  та  $E_z$ . Для поверхневих та лінійних зарядів відповідно

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS'}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right); \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\tau dl'}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \quad (1.18)$$

Напруженість електростатичного поля не змінюється з часом і є лише функцією координат. Якщо напруженість  $\vec{E}$  в усіх точках виділеного простору є однаковою за напрямом і абсолютним значенням, то таке поле називають *однорідним*. Якщо ж поле не однорідне, то його напруженість змінюється від точки до точки і є функцією координат  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ .

Рівності (1.15) — (1.18) застосовні для визначення напруженості  $\vec{E}$  в усіх точках простору, де є електричне поле, включаючи точки всередині заряджених тіл.

Електричне поле графічно зручно зображати за допомогою силових ліній напруженості. *Силова лінія* — це математична лінія, напрям дотичної до якої у кожній точці збігається з напрямом напруженості  $\vec{E}$  у цій точці. Силовими лініями приписують певний напрям, позначаючи його стрілкою. За додатний напрям силовій лінії умовилися вважати напрям вектора  $\vec{E}$ . Отже, силові лінії, наприклад позитивно зарядженого тіла, виходять із його поверхні і простягаються у нескінченність (рис. 1.6). У полі навколо негативно зарядженого тіла лінії беруть початок у нескінченності й закінчуються на поверхні зарядженого тіла (рис. 1.7). У загальному випадку силові лінії починаються на позитивно заряджених тілах і закінчуються на негативно заряджених (рис. 1.8). Щоб за допомогою ліній напруженості задавати графічно не тільки напрям, а і її значення, умовилися через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до ліній напруженості, проводити таку кількість ліній, яка чисельно дорівнює напруженості або пропорційна їй. Оскільки в кожній точці поля вектор напруженості має цілком певний напрям, то силові лінії не перетинаються. Силові лінії однорідного поля є паралельними між собою і мають однаковий напрям.

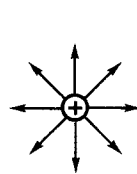


Рис. 1.6

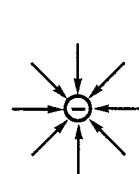


Рис. 1.7

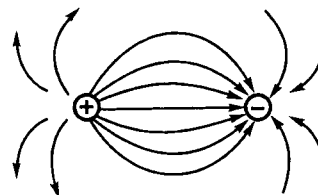


Рис. 1.8



### § 1.6. Електричний диполь

Однією із простих систем точкових зарядів є *електричний диполь* — сукупність двох однакових за абсолютним значенням і протилежних за знаком точкових зарядів  $+q$  і  $-q$ , розміщених на деякій відстані  $l$ . Величину  $l$  називають *плечем диполя*. Якщо відстань між зарядами не змінюється, то такий диполь називають *жорстким*. Якщо довжина плеча диполя  $l$  мала порівняно з відстанню  $r$  від диполя до точки спостереження, то такий диполь називають *точковим* (рис. 1.9). Прикладом точкових диполів є полярні молекули.

Основною характеристикою диполя є *електричний дипольний момент*  $\vec{p}$  — вектор, що чисельно дорівнює добуткові заряду на плече і напрямлений від негативного заряду до позитивного, тобто

$$\vec{p} = ql \vec{e} \quad (1.19)$$

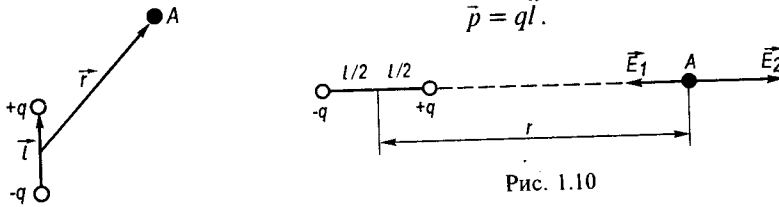


Рис. 1.9

Електричний дипольний момент вимірюють в кулон-метрах (Кл · м). Обчислимо напруженість електричного поля  $\vec{E}$  точкового диполя. Розглянемо такі випадки.

1. Точка спостереження  $A$  лежить на продовженні осі диполя (рис. 1.10).

За принципом суперпозиції результуюча напруженість  $\vec{E}$  в точці  $A$  дорівнюватиме векторній сумі напруженостей  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  полів, створених відповідно зарядами диполя  $+q$  і  $-q$ :  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ .

Напруженості полів  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  в точці  $A$  напрямлені протилежно вздовж однієї прямої. Тому векторну суму можна замінити алгебричною:  $E = E_2 - E_1$ .

Напруженості полів  $E_1$  і  $E_2$  у середовищі відповідно дорівнюють

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon(r+l/2)^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon(r-l/2)^2},$$

де  $r$  — відстань від центра диполя до точки  $A$ .

Результуюча напруженість

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left[ \frac{1}{(r-l/2)^2} - \frac{1}{(r+l/2)^2} \right], \quad \text{або} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{2rl}{(r^2 - l^2/4)^2},$$

Якщо  $r \gg l$ , то доданком  $l^2/4$  у знаменнику можна знехтувати. Тоді

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{\epsilon r^3},$$

або у векторній формі

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{\epsilon r^3}. \quad (1.20)$$

2. Точка спостереження  $A$  лежить на перпендикулярі, проведеному до середини плеча диполя (рис. 1.11).

За принципом суперпозиції в точці  $A$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , де  $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_1^2}$ ,  $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_2^2}$ . Оскільки  $r_1 = r_2$ ,

то  $E_1 = E_2$ . За теоремою косинусів  $E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha$ , або  $E^2 = 2E_1^2(1 - \cos \alpha)$ .

З рис. 1.11 видно, що трикутник векторів напруженостей подібний до трикутника відстаней. Тому  $l^2 = 2r_1^2(1 - \cos \alpha)$ . Відношення

$$\frac{E^2}{l^2} = \frac{E_1^2}{r_1^2}. \quad \text{Звідси} \quad E = \frac{l}{r_1} E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\epsilon r_1^3}.$$

Якщо  $l \ll r_1$ , то  $r_1 \approx r$ . Тоді у векторній формі

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{\epsilon r^3}. \quad (1.21)$$

Як видно з рис. 1.11, вектор  $\vec{E}$  є антипаралельним векторові  $\vec{p}$ . Тому в рівності (1.21) взято знак мінус.

3. Точка спостереження  $A$  займає довільне положення в просторі (рис. 1.12).

Із заряду  $+q$  опустимо перпендикуляр  $CD$  на лінію спостереження  $BA$ . Розмістимо уявно в точці  $D$  два точкових заряди  $+q$  і  $-q$ . Це не змінить поля в точці  $A$ , оскільки ці заряди взаємно компенсуються. Однак таку систему чотирьох зарядів уже можна розглядати як сукупність двох диполів із дипольними моментами  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}_2$ . Для диполів  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}_2$  напруженості полів у точці  $A$  визначаються відповідно формулами (1.20) і (1.21). Тоді

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\vec{p}_1 - \vec{p}_2)}{\epsilon r^3}.$$

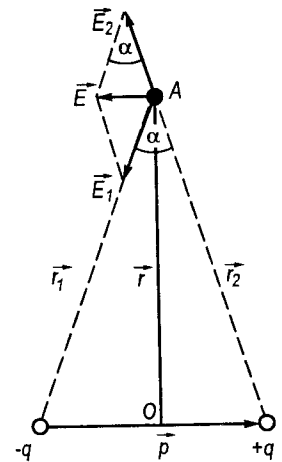


Рис. 1.11

Оскільки  $\vec{p}_1 + \vec{p} = \vec{p}$  (відповідно  $\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1$ ), то  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{p}_1 - \vec{p}}{\epsilon r^3}$ .

З урахуванням того, що  $p_1 = p \cos \alpha$  (у векторній формі  $p_1 = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r}$ ), одержимо

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{\epsilon r^5}. \quad (1.22)$$

Напруженість поля точкового диполя змінюється в усіх випадках обернено пропорційно третьому степеню відстані від диполя.

Розглянемо дію зовнішнього електричного поля на диполь (рис. 1.13). Якщо поле однорідне, то сили, що діють на негативний і позитивний заряди диполя, є однаковими за значенням і протилежними за напрямом, тобто утворюють пару сил. Їх рівнодійна дорівнює нулеві. Дія пари сил характеризується моментом пари

$$M = qEl \sin \alpha, \quad (1.23)$$

де  $\alpha$  — кут між вектором  $\vec{l}$  і напруженістю поля  $\vec{E}$ . Оскільки  $q\vec{l} = \vec{p}$ , то вираз (1.23) набирає вигляду

$$M = pE \sin \alpha, \quad (1.24)$$

або у векторній формі

$$\vec{M} = [\vec{p} \cdot \vec{E}]. \quad (1.25)$$

Отже, в однорідному електричному полі на диполь діє пара сил, яка намагається повернути диполь так, щоб кут між векторами  $\vec{p}$  і  $\vec{E}$  зменшився і диполь встановився в напрямі поля. Існують два положення рівноваги диполя: диполь паралельний електричному полю (стійка рівновага) і антипаралельний йому (нестійка рівновага).

Енергія диполя в однорідному електричному полі напруженістю  $\vec{E}$  дорівнює

$$W = -pE \cos \alpha.$$

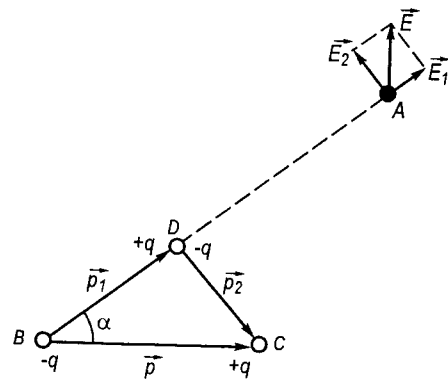


Рис. 1.12

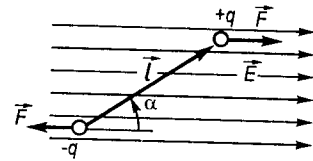


Рис. 1.13

Якщо поле неоднорідне, то сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  за значенням є різними і їхня рівнодійна не дорівнює нулеві. Знайдемо рівнодійну сил. Для спрощення вважатимемо, що диполь розміщений уздовж однієї із силових ліній (рис. 1.14). Тоді рівнодійна

$$F = F_1 - F_2 = qE - q(E - \frac{dE}{dx}l) = q\frac{dE}{dx}l. \quad (1.26)$$

Таким чином, у неоднорідному полі на диполь, крім моменту пари сил, діє ще сила в напрямі зростання напруженості поля, яка прагне втягнути диполь в область сильнішого поля. Наявністю цих сил пояснюється, наприклад, притягання до наелектризованих тіл дрібних предметів. Під дією електростатичного поля наелектризованого тіла на предметах виникають індуковані заряди, які наближено можна вважати диполями. Оскільки поле наелектризованого тіла неоднорідне, то дрібні предмети-диполі переміщуються в напрямі зростання напруженості поля, тобто притягаються до наелектризованого тіла.

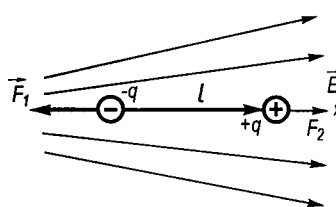


Рис. 1.14

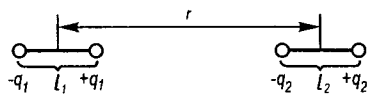


Рис. 1.15

**Приклад 1.1.** Знайти силу взаємодії двох точкових диполів, дипольні моменти яких напрямлені вздовж прямої, що сполучає їхні центри. Відстань між диполями дорівнює  $r$ .

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли диполі лежать на одній прямій і орієнтовані один відносно одного протилежними зарядами, тобто дипольні моменти паралельні (рис. 1.15). Тоді поле першого диполя діятиме на заряди  $-q_2$  і  $+q_2$  другого диполя відповідно з силами

$$F_1 = -\frac{2p_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon\left(r - \frac{l_2}{2}\right)^3} \text{ і } F_2 = \frac{2p_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon\left(r + \frac{l_2}{2}\right)^3}.$$

Оскільки сили  $F_1$  і  $F_2$  є антипаралельними, то їхня рівнодійна

$$F = -\frac{2p_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \left( \left(1 - \frac{l_2}{2r}\right)^{-3} - \left(1 + \frac{l_2}{2r}\right)^{-3} \right).$$

Враховуючи, що  $l_2/r \ll 1$ , і нехтуючи величинами вищих порядків малості, попередній вираз можна записати так:

$$F = -\frac{2p_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \left( 1 + \frac{3l_2}{2r} - 1 + \frac{3l_2}{2r} \right) = -\frac{6p_1q_2l_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^4} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{6p_1p_2}{r^4},$$

де  $p_2 = q_2l_2$ . Знак мінус вказує на те, що диполі притягаються. При антипаралельному розміщенні дипольних моментів значення сили буде таке саме, але додатне, тобто диполі будуть відштовхуватися.

### § 1.7. Теорема Гаусса для електростатичних полів та її застосування

На основі закону Кулона (1.6) і принципу суперпозиції полів (1.13) можна визначити напруженість практично будь-якої системи нерухомих зарядів. Однак такий спосіб розв'язання задач електростатики часто призводить до надто громіздких обчислень. Задача істотно спрощується, якщо скористатися деякими теоремами про загальні властивості електростатичного поля. Однією з таких теорем є теорема Гаусса. Ця теорема має принципове значення. Математичний запис основного закону електростатики формулою (1.6) відповідає теорії далекодії. Теорема Гаусса дає можливість звести основні рівняння електростатики до диференціальної форми й узгодити їх, таким чином, з теорією близькодії.

Теорема Гаусса пов'язує потік вектора напруженості електростатичного поля крізь довільну замкнену поверхню із зарядом, який охоплюється цією поверхнею. Введемо поняття потоку. Нехай дано однорідне поле напруженості  $\vec{E}$ . Розмістимо в цьому полі плоску поверхню  $\Delta S$ , нормаль до якої  $\vec{n}$  утворює кут  $\alpha$  з вектором  $\vec{E}$  (рис. 1.16). Величину

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S \cos \alpha = E_n \Delta S \quad (1.27)$$

називають *поток вектора  $\vec{E}$  крізь поверхню  $\Delta S$*  ( $E_n$  — проекція  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$ ). Потік може бути додатним або від'ємним залежно від знака проекції  $E_n$ , який визначається знаком  $\cos \alpha$ . Вибір додатного напрямку умовний (вважають додатною зовнішню нормаль до поверхні  $\Delta S$ ).

Якщо поле неоднорідне і поверхня не плоска, то уявно її розбивають на елементи  $dS$ , які можна наближено вважати плоскими, а поле в її межах — однорідним (див. рис. 1.16). Тоді елементарний потік вектора  $\vec{E}$

$$d\Phi_E = E_n dS,$$

а повний потік крізь поверхню  $S$

$$\Phi_E = \int_S E_n dS.$$

Для доведення теореми Гаусса обчислюють спочатку потік вектора напруженості електростатичного поля, створюваного точковим зарядом, крізь довільну замкнену поверхню. Нехай точковий заряд  $q$  розміщений у точці  $A$  (рис. 1.17, а), а елемент поверхні  $dS$  розміщується на відстані  $r$ . Тоді

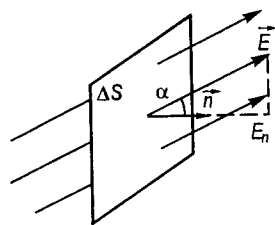


Рис. 1.16

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \alpha}{r^2}, \quad (1.28)$$

де  $dS \cos \alpha = dS_n$  — проекція  $dS$  на поверхню сфери радіуса  $r$ . Крім того,  $dS_n/r^2 = d\omega$  — тілесний кут, під яким з точки  $A$  видно елемент поверхні  $dS$ . Тоді формула (1.28) запишеться так:

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega. \quad (1.29)$$

Вважатимемо  $d\omega$  додатним, якщо кут  $\alpha$  між напрямками  $\vec{E}$  і  $\vec{n}$  гострий, і від'ємним, якщо кут  $\alpha$  тупий.

Обчислимо повний потік вектора  $\vec{E}$  крізь довільну замкнену поверхню. Розглянемо два випадки.

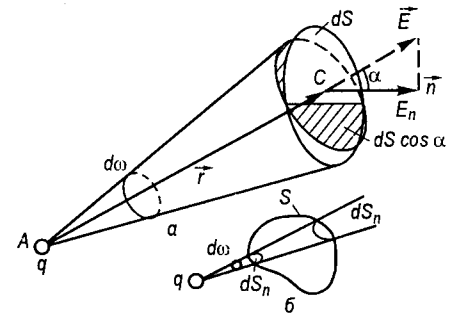


Рис. 1.17

1. Точковий заряд  $q$  міститься всередині замкненої поверхні  $S$  (див. рис. 1.17, а). Довільний конус з вершиною в точці розміщення заряду  $q$  і тілесним кутом  $d\omega$  виріже на заданій поверхні одну елементарну поверхню  $dS$  або непарну кількість їх. Незалежно від форми поверхні елементарний потік вектора  $\vec{E}$  визначатиметься лише потоком крізь елементарну поверхню  $dS$ , оскільки за наявності інших перерізів потоки крізь них будуть однаковими за значенням, протилежними за знаками і їхня сума дорівнюватиме нулеві. Отже, у цьому разі

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega,$$

а повний потік крізь довільну замкнену поверхню  $S$ , яка охоплює точковий заряд  $q$ ,

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.30)$$

оскільки  $\oint_S d\omega = 4\pi$  стерadianів — повний тілесний кут, під яким видно замкнену поверхню з довільної точки об'єму, обмеженого цією поверхнею.

Якщо поверхня  $S$  охоплює систему точкових зарядів, розміщених у вакуумі, то

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.31)$$

2. Точковий заряд  $q$  міститься зовні замкненої поверхні  $S$  (див. рис. 1.17, б). У цьому разі довільний конус з вершиною в місці розміщення точкового заряду  $q$  і тілесним кутом  $d\omega$  виріже завжди парну кількість елементарних поверхонь  $dS$  на замкненій поверхні  $S$ . Елементарні потоки  $d\Phi_E$  крізь кожен з цих поверхонь будуть однаковими за значенням, але протилежними за знаками. Тому їхній сумарний елементарний потік дорівнюватиме нулеві, а отже, і повний потік

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = 0. \quad (1.32)$$

Обидва випадки (заряди всередині замкненої поверхні і заряди поза поверхнею) описуються формулою (1.31), яка є математичним виразом теореми Гаусса для системи точкових зарядів: *потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі  $\Phi_E$  крізь довільну замкнену поверхню  $S$  зсередини назовні дорівнює алгебричній сумі тих точкових зарядів  $q_i$ , які охоплюються поверхнею  $S$ , поділений на електричну сталу  $\epsilon_0$ .*

У випадку об'ємних  $\rho$  і поверхневих  $\sigma$  неперервно розподілених зарядів формула (1.31) узагальнюється так:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \int_V \rho dV + \int_S \sigma dS \right). \quad (1.33)$$

Формула (1.33) включає в себе вирази (1.30) і (1.31).

Позитивному зарядові відповідає додатний потік напруженості, негативному — від'ємний. Отже, заряди є своєрідними джерелами і стоками потоку напруженості поля (позитивні заряди — джерелами, негативні — стоками поля).

Теорему Гаусса використовують часто для визначення повного заряду, зосередженого в певному об'ємі, обчислюючи потік вектора напруженості крізь замкнену поверхню, що охоплює заданий об'єм.

Зазначимо, що справедливність теореми Гаусса стосується випадку обернено пропорційної залежності напруженості електростатичного поля  $\vec{E}$  від квадрата відстані до точкового заряду (центральна симетрія електростатичного поля), що забезпечує слушність рівності  $dS_n/r^2 = d\omega$ . Такий характер залежності  $\vec{E}(r)$  визначається законом Кулона. Отже, фізичною основою теореми Гаусса є закон Кулона, або інакше кажучи, теорема Гаусса (1.33) є інтегральною формою запису закону Кулона.

Розглянемо кілька прикладів розрахунку напруженості електростатичного поля  $\vec{E}$  із застосуванням теореми Гаусса.

**Електричне поле рівномірно зарядженої нескінченної площини.** Площину можна вважати нескінченною, якщо відстанню від точки, в якій визначають напруженість електростатичного поля, до площини можна нехтувати порівняно з геометричними розмірами площини. Обчислимо напруженість електростатичного поля, створюваного

рівномірно зарядженою нескінченною площиною з поверхневою густиною заряду  $+\sigma$ , в будь-якій точці поза нею.

Нехай у точці  $A$  (рис. 1.18) напруженість поля  $\vec{E}$ . Внаслідок симетрії поля лінії напруженості напрямлені перпендикулярно до площини. Для обчислення  $\vec{E}$  із застосуванням теореми Гаусса в електричному полі завжди обирають замкнену поверхню так, щоб задача розв'язувалась найпростіше. На рис. 1.18 раціонально обрати замкнену поверхню у вигляді прямого циліндра, розміщеного симетрично відносно зарядженої площини, твірні якого перпендикулярні до неї. Обрана циліндрична поверхня охоплює заряд  $\sigma S$ , розміщений на поверхні  $S$ . Потік вектора  $\vec{E}$  крізь бічну поверхню циліндра дорівнює нулеві, оскільки лінії напруженості паралельні твірним і не перетинають бічної поверхні, а крізь основи циліндра —  $2ES$ . За теоремою Гаусса  $\Phi_E = q/\epsilon_0$ , тобто  $2ES = \sigma S/\epsilon_0$ . Звідси

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.34)$$

Незалежність  $\vec{E}$  від відстані до зарядженої площини свідчить про те, що поле нескінченної рівномірно зарядженої площини в усьому просторі поза нею є однорідним.

**Електричне поле між двома різнойменно зарядженими паралельними нескінченними площинами.** Вважатимемо, що поверхневі густини зарядів площин однакові, тобто  $\sigma_+ = \sigma_-$ . За принципом суперпозиції можна стверджувати, що в областях за межами площин поля немає (у кожній точці простору за межами площин напруженості  $\vec{E}$  від обох заряджених площин є однаковими за значенням і протилежними за знаками), а в області між площинами напрями  $\vec{E}$  від обох заряджених площин збігаються (рис. 1.19). Отже,

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.35)$$

Зазначимо, що між двома однойменно зарядженими з однаковою поверхневою густиною заряду паралельними площинами електричного поля немає:  $\vec{E} = 0$ .

**Електричне поле біля поверхні зарядженого провідника.** Всередині провідника електричного поля немає, тобто  $\vec{E} = 0$  (див. § 1.12). Виділимо на поверхні зарядженого провідника нескінченно малий елемент поверхні  $dS$  таких розмірів, у межах якого можна вважати поверхневу густину заряду  $\sigma$  постійною, а елемент  $dS$  — плоским. Оберемо замкнену поверхню у вигляді прямого циліндра, твірні якого перпендикулярні до елемента поверхні провідника (рис. 1.20). Силві лінії напруженості зарядженого провідника завжди перпендикулярні до його поверхні і напрямлені від поверхні у випадку позитивного заряду на провіднику. Вважатимемо, що  $dh \rightarrow 0$ . Потік вектора  $\vec{E}$  крізь поверхню обраного прямого циліндра зсередини назовні визначатиметься лише потоком крізь основу циліндра  $dS$ , яка розміщується над поверхнею провідника, тобто

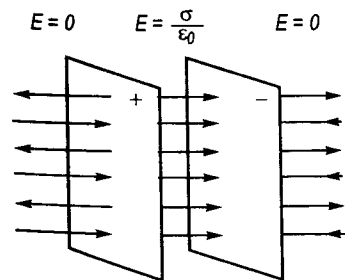


Рис. 1.19

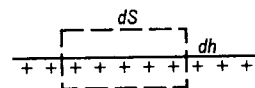


Рис. 1.20

$$EdS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.36)$$

**Електричне поле рівномірно зарядженої нескінченної циліндричної поверхні.** Нехай нескінченно довга циліндрична поверхня радіуса  $R$  являє собою провідник, рівномірно заряджений так, що на його бічній поверхні лінійна густина заряду  $\eta$ . Для визна-

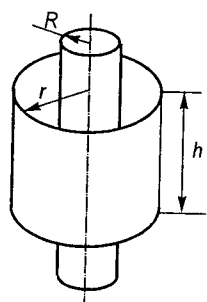


Рис. 1.21

чення напруженості поля  $\vec{E}$  за межами зарядженої циліндричної поверхні  $r > R$  оберемо допоміжну замкнену циліндричну поверхню, коаксіальну із заданою (рис. 1.21) заввишки  $h$  і радіуса  $r$  (радіус  $r$  циліндричної поверхні беруть таким, щоб допоміжна поверхня проходила крізь точку, в якій визначають  $\vec{E}$ ). Повний потік вектора  $\vec{E}$  крізь охоплюючу поверхню визначається його потоком крізь бічну поверхню, оскільки лінії напруженості перпендикулярні до поверхні зарядженого провідника, тобто

$$\Phi_E = E S_0 = E \cdot 2\pi r h.$$

За теоремою Гаусса  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\eta h}{\epsilon_0}$ . Тоді

$$E = \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.37)$$

Всередині зарядженої поверхні  $r < R$  поля немає, оскільки довільна допоміжна замкнена поверхня, проведена всередині зарядженої циліндричної поверхні радіуса  $r < R$ , не охоплює зарядів, а тому  $\vec{E} = 0$ .

Якщо мають на увазі не циліндричну поверхню, а суцільний непровідний циліндр радіуса  $R$  з об'ємною густиною заряду  $\rho$ , то напруженість електричного поля всередині зарядженого циліндра ( $r < R$ ) визначають прирівнюванням потоків, визначених за означенням  $\Phi_E = ES_0 = E \cdot 2\pi r h$  та за теоремою Гаусса  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0 \epsilon}$ . Тоді  $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0 \epsilon} r$ , де  $\epsilon$  — діелектрична проникність матеріалу циліндра. Аналогічно напруженість  $E$  за межами суцільного непровідного циліндра ( $r > R$ ) у випадку вакууму ( $\epsilon = 1$ )

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi R^2 h, \quad E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$

Отже, напруженість  $E$  змінюється обернено пропорційно відстані  $r$  до точки спостереження.

**Електричне поле рівномірно зарядженої кулі.** Рівномірно заряджена по поверхні або об'єму кулі радіуса  $R$  створює у зовнішньому просторі ( $r > R$ ) таке саме поле, як і поле точкового заряду, розміщеного в центрі кулі. Напруженість цього поля у вакуумі

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

У випадку об'ємного розподілу заряду з густиною  $\rho$  повний заряд кулі  $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ , а якщо заряд поверхневий (провідна куля), то  $q = 4\pi R^2 \sigma$ . Напруженість поля всередині кулі ( $r < R$ ) у випадку діелектричної кулі  $E = \rho r / (3\epsilon_0 \epsilon)$ , а у випадку провідної кулі  $E = 0$ .

## § 1.8. Теорема Гаусса в диференціальній формі

Величини, що входять у вираз теореми Гаусса, характеризують різні точки електричного поля. Так, якщо вектор  $\vec{E}$  характеризує точки деякої замкненої поверхні, то електричний заряд стосується точок об'єму, обмеженого цією поверхнею. Таку форму запису теореми називають *інтегральною*. Виведемо аналітичний вираз цієї теореми в диференціальній формі, тобто визначимо співвідношення між фізичними величинами, які характеризують ту саму точку поля. Для цього визначимо потік вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  крізь поверхню нескінченно малого прямокутного паралелепіпеда з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , який охоплює заряд, розподілений з об'ємною густиною  $\rho$  (рис. 1.22). Нехай у вершині  $A$  з координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  проекції вектора напруженості  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ . Потік крізь грань  $dydz$ , яка проходить крізь точку  $A$ , буде  $-E_x dydz$ . Знак мінус вказує на те, що напрям нормалі до цієї грані й додатний напрям  $E_x$  є протилежними. Потік крізь паралельну грань, яка зміщена вздовж осі  $Ox$  на  $dx$ ,

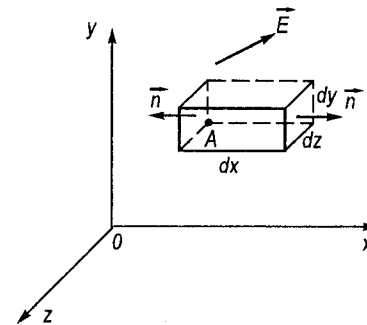


Рис. 1.22

$$\left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dydz.$$

Результуючий потік крізь зазначені паралельні грані

$$\Phi_{E_x} = \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dydz - E_x dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dydz.$$

Аналогічно визначимо потоки крізь дві інші пари паралельних граней:

$$\Phi_{E_y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dydz, \quad \Phi_{E_z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dydz.$$

Повний потік вектора  $\vec{E}$  крізь всю поверхню паралелепіпеда

$$\Phi_E = \Phi_{E_x} + \Phi_{E_y} + \Phi_{E_z} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dydz.$$

Заряд, який охоплюється паралелепіпедом із сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  при рівномірному його розподілі з об'ємною густиною  $\rho$ , дорівнює  $\rho dx dy dz$ . Тоді за теоремою Гаусса (1.31)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.38)$$

Співвідношення (1.38) виражає теорему Гаусса у диференціальній формі. Оскільки розміри паралелепіпеда  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  є нескінченно малими, то можна вважати, що значення вектора  $\vec{E}$  на поверхні цього паралелепіпеда і заряд, який охоплюється поверхнею, по суті стосуються тієї самої точки.

За теоремою Гаусса у вигляді (1.33) для об'ємних зарядів  $\rho$  з урахуванням того, що  $\Phi_E = \oint_S E_n dS$ , можна записати

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (1.39)$$

де  $S$  — довільна замкнена поверхня;  $V$  — обмежений нею об'єм.

У векторному аналізі доведено, що границя відношення потоку будь-якого вектора  $\vec{A}(x, y, z)$ , визначеного в усіх точках векторного поля, крізь замкнену поверхню  $S$  до об'єму  $V$ , обмеженого цією поверхнею, при  $V \rightarrow 0$  не залежить від форми  $S$ . Границю цього відношення називають *розходженням* або *дивергенцією* вектора  $\vec{A}$  в точці, в яку стягується об'єм  $V$ , і позначають символом  $\text{div } \vec{A}$ . За означенням

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A_n dS}{V}.$$

За формулою Остроградського—Гаусса  $\oint_S A_n dS = \int_V \text{div } \vec{A} dV$ . Для вектора  $\vec{E}$  запишемо

$$\oint_S E_n dS = \int_V \text{div } \vec{E} dV, \quad (1.40)$$

або з урахуванням рівності (1.39)

$$\int_V \text{div } \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.41)$$

Оскільки  $V$  — довільний об'єм, то з (1.41) випливає рівність

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.42)$$

Порівнюючи (1.42) і (1.38), запишемо

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.43)$$

Слушність рівності (1.42), так само, як і слушність теореми Гаусса, ґрунтується на законі Кулона. Рівність (1.42) є диференціальною формою запису закону Кулона. Теорема Гаусса є слушною і для точкових зарядів, які рухаються рівномірно і прямолінійно. Формула (1.42) дає можливість обчислювати дивергенцію в декартових координатах. Дивергенція фізично характеризує потужність джерел або стоків. З формули (1.42) видно, що силові лінії поля починаються на позитивних зарядах ( $\text{div } \vec{E} > 0$ ) і закінчуються на негативних ( $\text{div } \vec{E} < 0$ ). Отже, позитивні заряди є джерелами електричного поля, а негативні — стоками.

### § 1.9. Теорема Ірншоу

Теорема Ірншоу є однією з основних теорем електростатики. За цією теоремою *система нерухомих точкових зарядів, розміщених на скінченних відстанях один від одного, не може бути стійкою, якщо немає інших сил, крім сил кулонівської взаємодії*. Теорема сформульована англійським фізиком і математиком С. Ірншоу в ХІХ ст. і виходить з того, що потенціальна енергія статичної системи зарядів не може бути мінімальною, як того вимагає необхідна і достатня умова стійкої рівноваги довільної системи. Для системи нерухомих електричних зарядів головною умовою є рівність нулеві рівнодійної сил, що діють на кожний заряд з боку інших зарядів системи.

Теорема Ірншоу може бути доведена на основі теореми Гаусса. Нехай ми маємо стійку рівноважну систему точкових зарядів. Розглянемо довільний, наприклад позитивний, заряд із цієї системи, який перебуває в стані рівноваги в точці  $C$  (рис. 1.23). У разі зміщення заряду  $q$  з точки  $C$  в нескінченно близьку точку  $C'$  на заряд  $q$ , за умови збереження стійкої рівноваги, подіє сила, спрямована до точки  $C$ , яка намагатиметься повернути заряд знову у вихідну точку  $C$ . Це означає, що напруженість електричного поля  $\vec{E}$ , створеного всіма іншими зарядами системи, крім заряду  $q$ , напрямлена вздовж радіуса до точки  $C$  незалежно від напрямку зміщення  $CC'$ . Нехай довільна замкнена поверхня  $S$  охоплює заряд  $q$  і проходить крізь точку  $C$ . Прийнемо, що всі інші заряди системи розміщені поза поверхнею  $S$ . Потік напруженості  $\vec{E}$  цих зарядів крізь замкнену поверхню  $S$  буде відмінним від нуля, оскільки напруженість поля  $\vec{E}$  на поверхні  $S$  напрямлена до точки  $C$ . Од-

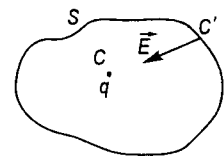


Рис. 1.23

нак це суперечить теоремі Гаусса, яка стверджує, що такий потік має дорівнювати нулеві, оскільки він створюється зарядами, розміщеними поза поверхнею  $S$ . Це протиріччя підтверджує справедливість теореми Ірншоу. Рівновага системи електричних зарядів може бути стійкою, якщо крім електричних сил діють ще які-небудь сторонні сили, які утримують заряди в стані рівноваги. Можливість рівноваги систем нерухомих електричних зарядів пов'язана з тим, що є заряди двох знаків, тобто є як сили взаємного відштовхування, так і сили притягання. Однак така рівновага зарядів не є стійкою.

Із теореми Ірншоу випливає, що атом, як система точкових зарядів, не може бути побудований із нерухомих зарядів, зв'язаних між собою лише електричними силами. Оскільки атоми хімічних елементів є стійкими системами, то електрони і атомні ядра, з яких вони складаються, мають перебувати в русі, тобто атоми є динамічними системами. Для пояснення стійкості атомних систем у класичній фізиці була запропонована планетарна модель атома.

### § 1.10. Робота сил електричного поля.

#### Потенціальний характер електростатичного поля

На заряд  $q_0$ , вміщений у довільну точку електростатичного поля з напруженістю  $\vec{E}$ , діє сила  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ . Якщо заряд  $q_0$  не закріплений, то сила  $\vec{F}$  примусить його переміщуватись і, отже, буде виконуватись робота. Визначимо роботу сил електростатичного поля точкового заряду  $q$  при переміщенні в ньому точкового заряду  $q_0$  з точки 1 в точку 2 (рис. 1.24). Робота  $dA$  на елементарному шляху  $dl$  дорівнює

$$dA = F dl \cos \alpha = q_0 E dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}, \quad (1.44)$$

де  $dr = dl \cos \alpha$ .

Повну роботу на шляху 1—2 визначимо інтегруванням виразу (1.44):

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.45)$$

Якщо заряди  $q$  і  $q_0$  мають однаковий знак, то робота електричних сил відштовхування  $A_{12} > 0$  при віддаленні зарядів один від одного і  $A_{12} < 0$  у разі їх зближення. Якщо заряди  $q$  і  $q_0$  мають протилежні знаки, то робота електричних сил притягання  $A_{12} > 0$  при зближенні зарядів і  $A_{12} < 0$  у разі їх відносного віддалення.

З формули (1.45) видно, що робота електростатичного поля не залежить від форми шляху переміщення заряду між точками 1—2, а ви-

значається лише розміщенням початкової 1 ( $r_1$ ) і кінцевої 2 ( $r_2$ ) точок. Силкові поля, які задовольняють таку умову, називають *потенціальними* або *консервативними*. Отже, електростатичне поле точкового заряду є полем потенціальним. Згідно з принципом суперпозиції електричних полів цей висновок можна поширити на випадок електричних полів будь-якої системи нерухомих зарядів (вільних, поляризаційних або індукованих у провідниках чи діелектриках).

З формули (1.45) також випливає, що при переміщенні точкового заряду в електростатичному полі по довільному замкненому контуру ( $r_1 = r_2$ ) робота дорівнює нулеві. Математично на основі рівності (1.44) цю умову записують так:

$$A = \oint_L q_0 E dl \cos \alpha = q_0 \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Оскільки  $q_0 \neq 0$ , то

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.46)$$

Довільне електростатичне поле, незалежно від того, створюється воно у вакуумі чи в речовині, є полем потенціальним. Лінійний інтеграл  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ , обчислений за довільним замкненим контуром  $L$ , називають *циркуляцією вектора  $\vec{E}$* . Рівняння (1.46) є одним із фундаментальних рівнянь електростатики, яке відображає той факт, що силові лінії електростатичного поля є незамкненими: вони починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або йдуть у нескінченність (для позитивних зарядів) чи з нескінченності (для негативних). При переміщенні пробного точкового заряду в такому полі по замкненому контуру на одних ділянках шляху робота буде додатною, на інших — від'ємною, а повна робота завжди дорівнює нулеві.

Рівняння (1.46) є інтегральною формою запису потенціальності електростатичного поля. Як уже зазначалося, узгодження законів електромагнітних полів з теорією близькодії аналогічне запису рівнянь цих законів у диференціальній формі. Щоб перейти до диференціального запису рівняння (1.46), введемо спочатку поняття *ротора вектора*.

Нехай дано довільний вектор  $\vec{A}(x, y, z)$ . Оберемо деякий напрям, який характеризується одиничним вектором  $\vec{n}$ . У перпендикулярній

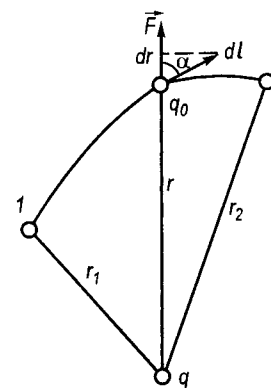


Рис. 1.24

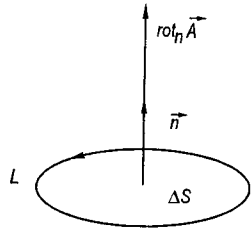


Рис. 1.25

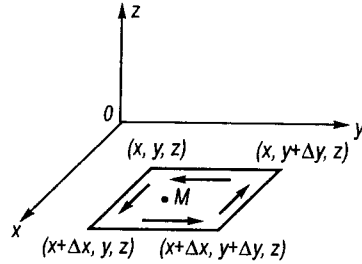


Рис. 1.26

до  $\vec{n}$  площині обмежимо площу  $\Delta S$  досить малим замкненим контуром  $L$  (рис. 1.25), на якому напрям додатного обходу контуру пов'язують з  $\vec{n}$  за правилом правого гвинта. Ротором [від лат. *rotare* — обертаю(сь)] називають вектор, проекція якого на напрям  $\vec{n}$  визначається формулою

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (1.47)$$

Ротор характеризує «завихрення» вектора. Для практичних обчислень ротора замість формули (1.47) зручніше користуватись проекціями ротора на координатні осі. Визначимо проекції  $\operatorname{rot} \vec{A}$  на осі прямокутної декартової системи координат. Напрямок вектора  $\vec{n}$  спрямуємо вздовж додатного напрямку осі  $Oz$ , а замість контуру  $L$  візьмемо прямокутник зі сторонами  $\Delta x$  і  $\Delta y$  (рис. 1.26). Напрямок додатного обходу показано на рисунку стрілками. У цьому разі циркуляція вектора  $\vec{A}$  відносно осі  $Oz$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{A} d\vec{l} = & \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x,y,z) dx + \int_{(x+\Delta x,y,z)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)} A_y(x+\Delta x,y,z) dy + \\ & + \int_{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)}^{(x,y+\Delta y,z)} A_x(x+\Delta x,y+\Delta y,z) dx + \int_{(x,y+\Delta y,z)}^{(x,y,z)} A_y(x,y,z) dy. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Межі інтегрування показано на рис. 1.26 при вершинах прямокутника.

Враховуючи, що  $\Delta x$  і  $\Delta y$  можуть бути як завгодно малими, можна записати, що

$$A_x(x, y + \Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \dots,$$

$$A_y(x + \Delta x, y, z) = A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \dots$$

Тоді сума інтегралів (1.48) запишеться так:

$$\begin{aligned} & \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x,y,z) dx + \int_{(x+\Delta x,y,z)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)} \left[ A_y(x,y,z) + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} \Delta x \right] dy - \\ & - \int_{(x,y+\Delta y,z)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)} \left[ A_x(x,y,z) + \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} \Delta y \right] dx - \int_{(x,y,z)}^{(x,y+\Delta y,z)} A_y(x,y,z) dy = \\ & = \left( \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Знаки мінус перед третім і четвертим інтегралами з'явилися внаслідок зміни напрямів інтегрування на обернені. Поділивши цей вираз на площу прямокутника  $\Delta x \Delta y$ , визначимо завихреність поля вектора  $\vec{A}$  в точці  $M$  навколо напрямку  $z$ , або інакше кажучи, проекцію вектора  $\operatorname{rot} \vec{A}$  на вісь  $Oz$ . На основі формули (1.47) можна записати

$$\operatorname{rot}_z \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Аналогічно визначаємо проекції ротора на інші осі координат:

$$\operatorname{rot}_x \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Через одиничні вектори осей координат  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  вектор  $\operatorname{rot} \vec{A}$  запишеться так:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.49)$$

Потік вектора  $\operatorname{rot} \vec{A}$  крізь довільну поверхню  $S$ , що спирається на контур  $L$ , на основі теореми Стокса запишеться так:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} dS = \oint_L \vec{A} d\vec{l}.$$

Для вектора  $\vec{E}$  з урахуванням формули (1.46)

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} dS = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.50)$$

Звідси випливає, що

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.51)$$



Рівність (1.51) є диференціальним записом умови потенціальності електростатичного поля, еквівалентним інтегральному запису (1.46), і разом з рівнянням  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  є другим основним рівнянням електростатики. На основі рівності (1.50) умову потенціальності електростатичного поля можна сформулювати ще так: *векторне поле напруженості  $\vec{E}$  називається потенціальним, якщо циркуляція вектора  $\vec{E}$  по довільному замкненому контуру дорівнює нулеві.*

Отже, замість закону Кулона і принципу суперпозиції полів в основу теорії електростатичного поля можна покласти диференціальні рівняння

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.52)$$

У місцях, де просторових зарядів немає,  $\rho = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  (відсутні джерела або стоки поля).

Рівняння (1.52) є окремим випадком загальної системи диференціальних рівнянь Максвелла для змінного електромагнітного поля. Ці рівняння узгоджені з ідеєю близькодії, з фактом існування навколо зарядів поля як виду матерії.

### § 1.11. Потенціал та різниця потенціалів. Рівняння Пуассона

Оскільки робота з переміщення заряду в електростатичному полі не залежить від форми шляху і визначається лише положенням крайніх точок (початкової та кінцевої), то кожній з цих точок, крім силової характеристики  $\vec{E}$ , можна приписати ще й енергетичну характеристику  $\phi$ , яку називають *потенціалом електростатичного поля*.

Нехай вміщений в електростатичне поле пробний заряд  $q_0$  переміщається під дією сил поля з точки 1 у точку 2. На основі закону збереження і перетворення енергії виконана при цьому робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії пробного заряду в заданому силовому полі:

$$A_{12} = -\int_1^2 dU = q_0 \int_1^2 E dl \cos \alpha. \quad (1.53)$$

Припустимо, що точка 2 нескінченно віддалена, тобто розміщена на такій відстані, де електростатичне силове поле практично відсутнє. Тоді одержимо

$$A_{1\infty} = U_1 - U_\infty = q_0 \int_1^\infty E dl \cos \alpha.$$

Взявши до уваги, що на нескінченності  $U_\infty = 0$ , можна записати

$$\frac{A_{1\infty}}{q_0} = \frac{U_1}{q_0} = \int_1^\infty E dl \cos \alpha.$$

Якщо збільшувати числове значення пробного заряду  $2q_0, 3q_0, \dots, nq_0$ , який переноситься з точки 1 у нескінченність, то відповідно збільшуватиметься в стільки ж разів робота  $2A_{1\infty}, 3A_{1\infty}, \dots, nA_{1\infty}$ , а відношення цієї роботи до значення пробного заряду  $A_{1\infty}/q_0$  залишається незмінним для заданої точки поля і може бути її енергетичною характеристикою.

Отже, розрахована на одиницю пробного заряду робота з переміщення його із заданої точки поля 1 у нескінченність не залежить ні від форми шляху, ні від пробного заряду, а залежить лише від характеристики самого електростатичного поля в цій точці. Цю роботу приймають як однозначну енергетичну характеристику електростатичного поля в заданій точці 1 і називають її потенціалом

$$\phi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_0} = \frac{U_1}{q_0} = \int_1^\infty E dl \cos \alpha. \quad (1.54)$$

Звідси, *потенціал електростатичного поля — це фізична величина, що чисельно дорівнює роботі, яку виконують сили електричного поля при переміщенні пробного одиничного заряду із заданої точки в нескінченність* (або в точку, для якої потенціал умовно можна вважати таким, що дорівнює нулеві). Або інакше кажучи, електростатичним потенціалом називають відношення потенціальної енергії взаємодії заряду з полем до значення цього заряду. У теоретичній фізиці за нульове значення  $\phi$  приймають потенціал нескінченно віддаленої точки простору:  $\phi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . На практиці нульовим потенціалом вважають потенціал Землі. З рівності  $\phi = A/q_0$  встановлюють одиницю потенціалу. В СІ  $[\phi] = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл} = 1 \text{ В}$ . Значення потенціалу в 1 В приписують такій точці поля, при переміщенні з якої заряду в 1 Кл на нескінченність виконується робота в 1 Дж. Потенціал — скалярна величина. Потенціали точок поля позитивного заряду вважають додатними, а негативного — від'ємними.

При розв'язуванні задач з електростатики використання потенціалу  $\phi$  має ряд переваг порівняно з напруженістю  $\vec{E}$ . Потенціал  $\phi$  задається одним числом, а напруженість  $\vec{E}$  — трьома ( $E_x, E_y, E_z$ ). Значення різниці потенціалів неважко визначити на досліді.

Потенціал електростатичного поля точкового заряду  $q$  в довільній точці цього поля на відстані  $r$  у вакуумі на основі рівності (1.54) з урахуванням формули (1.12) і того, що  $dl \cos \alpha = dr$  (див. рис. 1.24), може бути розрахований так:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (1.55)$$

де прийнято, що  $\varphi_\infty = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

З рівності (1.55) видно, що потенціал поля точкового заряду  $q$  однозначно визначається цим зарядом і є функцією відстані  $r$  розглядуваної точки від місця розміщення заряду.

За принципом суперпозиції потенціал поля системи точкових зарядів дорівнює алгебричній сумі потенціалів, створюваних у розглядуваній точці кожним із зарядів (з урахуванням їх знаків):

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}, \quad (1.56)$$

де  $r_i$  — відстань від точки із зарядом  $q_i$  до точки, в якій визначається потенціал.

При неперервному розподілі зарядів у скінченній області простору з об'ємною густиною  $\rho(x', y', z')$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad (1.57)$$

а для поверхневих зарядів з густиною  $\sigma(x', y', z')$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (1.58)$$

де  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ . У формулах (1.57) і (1.58) також вважають, що потенціал на нескінченності дорівнює нулеві.

Зазначимо, що поняття «нескінченності», де прийнято вважати  $\varphi = 0$ , фізично невизначене. Тому, визначаючи потенціал у довільній точці поля, завжди допускають неточність на значення потенціалу в точці, яку вважають розміщеною на нескінченності. Іншими словами, потенціал довільної точки поля визначають завжди з точністю до адитивної сталої. Тому поняття потенціалу в цьому розумінні дещо фізично невизначене. Більш строгим і однозначним є *різниця потенціалів* як фізична величина, що визначається роботою при переміщенні одиничного пробного заряду  $q_0$  між точками поля з потенціалами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}. \quad (1.59)$$

Інакше різницю потенціалів називають ще *напругою* і позначають  $U$ . Одиницею напруги, як і потенціалу, в СІ є вольт.

На основі формули (1.59) можна ввести електричну одиницю роботи (енергії) — електрон-вольт. *Електрон-вольт* — це енергія, якої

в електричному полі з різницею потенціалів в 1 В набуває частинка, заряд якої дорівнює зарядові електрона:  $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Кл} \cdot 1\text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Дж}$ .

З формули (1.55) видно, що точки поля, які розміщуються на однаковій відстані від точкового заряду  $q$ , мають однакові потенціали. Геометричне місце точок поля, потенціали яких є однаковими, називають *еквіпотенціальними поверхнями* або *поверхнями однакового потенціалу*. Як уже зазначалося, графічно електричне поле зображають за допомогою силових ліній напруженості. Для наочного зображення картини поля використовують також і еквіпотенціальні поверхні. Їх проводять у вигляді ліній так, щоб при переході від однієї еквіпотенціальної поверхні до сусідньої потенціал змінювався на те саме значення  $\Delta\varphi$ . Чим менше значення  $\Delta\varphi$ , тим детальніше буде зображена картина електростатичного поля.

Силові лінії напруженості завжди перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь внаслідок того, що при переміщенні заряду вздовж еквіпотенціальної поверхні робота дорівнює нулеві. Як видно з формули (1.44), такий результат буде тоді, коли  $\vec{E} \perp d\vec{l}$  (вектор  $d\vec{l}$  напрямлений по дотичній у кожній точці еквіпотенціальної поверхні). Поверхня зарядженого провідника є прикладом еквіпотенціальної поверхні.

Роботу проти сил електростатичного поля  $A_{12}$  з формули (1.59) під час переміщення заряду  $q_0$  із точки 1 в точку 2 можна визначити як різницю потенціалів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  поля в цих точках

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2).$$

У свою чергу, на основі формули (1.53)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.60)$$

Оскільки напруженість і потенціал є різними за фізичним змістом характеристиками тих самих точок електростатичного поля, то між ними має існувати взаємозв'язок. Встановимо його. Нехай точки 1 і 2 лежать на осі  $Ox$  на відстані  $dx$ . При перенесенні заряду  $q_0$  із точки 1 в точку 2 буде виконана робота  $dA = q_0 E_x dx$  (відстань  $dx$  беруть настільки малою, щоб у її межах можна було вважати  $E_x = \text{const}$ ).

Цю ж роботу можна виразити через різницю потенціалів точок 1 і 2, а саме:

$$dA = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = -q_0 d\varphi.$$

Порівнюючи праві частини останніх двох рівностей, одержимо  $E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$ . Аналогічно  $E_y = -\frac{d\varphi}{dy}$  і  $E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$ .

Вектор напруженості  $\vec{E}$  через його компоненти запишемо так:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right), \quad (1.61)$$

Вираз  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$  називають *градієнтом потенціалу* і позначають  $\text{grad } \varphi$ . Градієнт скалярної функції  $\varphi(x, y, z)$  є вектором, спрямованим у бік максимального збільшення функції  $\varphi(x, y, z)$ , а довжина вектора дорівнює похідній цієї функції за координатою, спрямованою за напрямом вектора. Отже,  $\text{grad } \varphi$  — вектор, напрямлений у бік максимального зростання потенціалу. Тоді

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.62)$$

Рівняння (1.62) встановлює зв'язок між  $\vec{E}$  і  $\varphi$ . Знак мінус вказує на те, що напрями векторів напруженості і градієнта потенціалу протилежні, тобто зі збільшенням віддалі потенціал зменшується. Для однорідного поля напруженість за абсолютним значенням визначається так:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d},$$

де  $d$  — відстань між точками з потенціалами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ . З останньої рівності видно, що напруженість в СІ вимірюють у вольтгах на метр (В/м).

Основну систему диференціальних рівнянь електростатичного поля  $\text{rot } \vec{E} = 0$  і  $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  можна подати у зручній для практичних обчислень формі, якщо скористатися рівністю  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . При цьому перше з цих рівнянь виконується тотожно

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0,$$

а друге набуває вигляду

$$\text{div grad } \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{або} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.63)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — диференціальний *оператор Лапласа*, або

*лапласіан*. Рівняння (1.63) називають *рівнянням Пуассона*. Воно встановлює зв'язок потенціалу  $\varphi$  в різних точках поля з розподілом зарядів  $\rho(x, y, z)$ . Інтегруванням (1.63) визначають  $\vec{E}$  і  $\varphi$ . У тій частині простору, де зарядів немає ( $\rho = 0$ ), рівняння Пуассона переходить у *рівняння Лапласа*

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (1.64)$$

Якщо відомим є потенціал  $\varphi(x, y, z)$ , то напруженість електричного поля  $\vec{E}$  визначають диференціюванням  $\varphi$  за координатами згідно з формулою (1.62). Задача з визначення  $\varphi$  за відомим  $\vec{E}$  зводиться до інтегрування виразу (1.60).

Знайдемо потенціал поля точкового диполя. У довільній точці простору  $A$  у вакуумі

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right), \quad (1.65)$$

де  $r_+$  і  $r_-$  — відстані точки спостереження  $A$  відповідно від позитивного  $+q$  і негативного  $-q$  зарядів диполя. Якщо відстань до точки спостереження  $A$  значно більша за плече диполя  $\vec{l}$ , то розміщення точкового диполя можна вважати таким, що збігається з точкою розміщення, наприклад, негативного заряду  $-q$ . Тоді відстань від диполя до точки спостереження  $r = r_-$ .

У формулі (1.65) вираз у дужках являє собою приріст скалярної функції  $1/r$  при зміщенні початку вектора  $\vec{r}$  на  $\vec{l}$  або кінця на  $-\vec{l}$ . Оскільки за прийнятою умовою  $l/r \ll 1$ , то

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = -\vec{l} \text{ grad } \left( \frac{1}{r} \right).$$

Тоді

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \text{ grad } \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}, \quad \text{або} \quad \varphi = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.66)$$

де  $\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ ;  $\alpha$  — кут між  $\vec{r}$  і  $\vec{p}$ . Потенціал поля диполя змінюється обернено пропорційно квадратові відстані від диполя до точки спостереження.

Обчислимо енергію точкового диполя в зовнішньому електростатичному полі. Енергія точкового заряду  $q$  в зовнішньому полі визначається роботою сил поля з переміщення заряду  $q$  з точки з потенціалом  $\varphi$  у нескінченність:  $U = A = q\varphi$ . Відповідно енергія точкового диполя

$$U = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-).$$

Нескінченно малу зміну потенціалів у точках розміщення позитивного і негативного зарядів точкового диполя можна записати так:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \vec{l} \text{ grad } \varphi.$$

Тоді

$$U = \bar{p} \operatorname{grad} \varphi = -\bar{p}\bar{E}, \text{ або } U = -pE \cos \alpha, \quad (1.67)$$

де  $\bar{E}$  — напруженість зовнішнього електричного поля в точці розміщення диполя.

На основі рівнянь (1.62) та (1.66) обчислюють напруженість  $\bar{E}$  поля точкового диполя

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p}\bar{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} \operatorname{grad}(\bar{p}\bar{r}) + (\bar{p}\bar{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \right).$$

При  $\bar{p} = \text{const}$   $\operatorname{grad}(\bar{p}\bar{r}) = \bar{p}$ , а  $\operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3\bar{r}}{r^5}$ . Підставляючи ці значення у формулу для  $\bar{E}$ , одержимо

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\bar{r}\bar{p})\bar{r} - r^2\bar{p}}{r^5},$$

що збігається з формулою (1.22).

Розглянемо кілька прикладів розрахунку потенціалу електричного поля.

**Потенціал поля рівномірно зарядженої нескінченної площини.** Припустимо, що площина заряджена позитивною електрикою. З довільної точки  $O$  зарядженої площини в напрямі силових ліній поля проведемо вісь  $Ox$ . У просторі поза площиною у вакуумі існує однорідне електростатичне поле з напруженістю  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Тоді за означенням різниця потенціалів між точкою на зарядженій площині  $x = 0$  і довільною точкою поза нею з координатою  $x$

$$\Delta\varphi = \int_0^x E dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x,$$

або

$$\varphi(0) - \varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x.$$

Звідси

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x,$$

де  $\sigma$  — поверхнева густина позитивних зарядів на площині.

Отже, потенціал нескінченної позитивно зарядженої площини зменшується за лінійним законом при віддаленні від неї з обох сторін по нормалі.

**Потенціал поля між двома різнойменно зарядженими паралельними нескінченними площинами.** Напруженість однорідного поля між різнойменно зарядженими площинами у вакуумі визначають за формулою (1.35). Початок координат (точку  $O$ ) візьмемо на позитивно зарядженій площині, а вісь  $Ox$  спрямуємо у напрямі силової лінії від позитивно зарядженої площини до негативно зарядженої. Тоді

$$\Delta\varphi = \varphi(0) - \varphi(x) = \int_0^x E dx,$$

або

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} x.$$

Отже, потенціал поля зменшується за лінійним законом у разі переміщення від позитивно зарядженої площини до негативно зарядженої.

**Потенціал поля сфери радіуса  $R$ , рівномірно зарядженої по поверхні.** Вважатимемо, що на поверхні сфери заряд  $q$  і його поверхнева густина  $\sigma$ . Тоді поза сферою ( $r > R$ ) у вакуумі на основі теореми Гаусса  $E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$  напруженість поля  $E_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Різниця потенціалів між точкою на поверхні сфери  $\varphi(R)$  і досліджуваною точкою  $\varphi(r)$

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \int_R^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

Враховавши, що  $\varphi(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ , маємо  $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ . Або, взявши до уваги, що  $q = \sigma \cdot 4\pi R^2$ , одержимо

$$\varphi(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}.$$

Всередині сфери ( $r < R$ ) напруженість поля  $E_i = 0$ . Тоді

$$\varphi(R) - \varphi(r) = 0 \text{ і } \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{const.}$$

**Потенціал поля кулі радіуса  $R$ , рівномірно зарядженої по об'єму з густиною  $\rho$ .** За межами кулі ( $r > R$ ) у вакуумі напруженість  $E_e$  і потенціал  $\varphi(r)$  такі самі, як і для зарядженої сфери:

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}.$$

Для точок всередині кулі ( $r < R$ )

$$E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{4\pi \rho r^3}{3\epsilon_0 \epsilon}, \text{ звідси } E_i = \frac{\rho r}{3\epsilon_0 \epsilon}.$$

Різниця потенціалів між точкою на поверхні кулі  $\varphi(R)$  і довільною точкою всередині кулі  $\varphi(r)$

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} \int_R^r r dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0 \epsilon} (r^2 - R^2).$$

Взявши до уваги, що  $\varphi(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 \epsilon}$ , одержимо

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0 \epsilon} (3R^2 - r^2),$$

де  $\epsilon$  — діелектрична проникність речовини кулі.

Потенціал поля нескінченно довгого циліндра радіуса  $R$ , рівномірно зарядженого по об'єму з густиною  $\rho$ . За теоремою Гаусса напруженість поля за межами зарядженого циліндра ( $r > R$ ) у вакуумі

$$E_e \cdot 2\pi r l = \frac{\pi \rho R^2 l}{\epsilon_0}, \text{ звідси } E_e = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$

Різниця потенціалів між точкою на поверхні циліндра  $\varphi(R)$  і довільною точкою поза ним  $\varphi(r)$

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}.$$

Звідси

$$\varphi(r) = \varphi(R) - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}.$$

Всередині циліндра ( $r < R$ ) напруженість поля

$$E_i \cdot 2\pi r l = \frac{\pi \rho r^2 l}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad E_i = \frac{\rho r}{2\epsilon_0 \epsilon}.$$

Різниця потенціалів між точкою на поверхні циліндра і довільною точкою всередині його

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_r^R r dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0 \epsilon} (r^2 - R^2).$$

Звідси

$$\varphi(r) = \varphi(R) + \frac{\rho}{4\epsilon_0 \epsilon} (R^2 - r^2).$$

В обох випадках при  $r = R$   $\varphi(r) = \varphi(R) = \text{const}$ , тобто є величиною сталою і такою, що дорівнює потенціалові поверхні провідника, значення якого неважко визначити експериментально.

### § 1.12. Розподіл зарядів на поверхні провідника

До провідників належать речовини, які добре проводять електричний струм. Характерною особливістю провідників є наявність у них вільних носіїв зарядів: у металах — електронів, в електролітах — іонів. Якщо в провіднику створити електричне поле, то на кожний із носіїв заряду діє сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ , що зумовлює напрямлений рух їх, тобто виникнення електричного струму.

Зарядимо тіло і розглянемо розподіл електричних зарядів на твердих металевих провідниках. На основі теореми Гаусса можна показати, що всередині зарядженого однорідного провідника об'ємна густина заряду  $\rho$  дорівнює нулеві. Справді, у стані рівноваги з умови відсутності напрямленого руху вільних зарядів усередині зарядженого однорідного провідника можна зробити висновок про відсутність

там електричного поля ( $\vec{E} = 0$ ), а з рівності  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$  випливає також, що всередині провідника  $\rho = 0$ , тобто позитивні і негативні заряди взаємно компенсуються. З цього можна зробити висновок, що наданий провідникові надлишковий електричний заряд розміщується лише на його зовнішній поверхні. Товщина поверхневого шару, в якому зосереджені електричні заряди, є настільки малою, що його можна вважати геометричною поверхнею і характеризувати розподіл зарядів на провідниках поверхневою густиною  $\sigma$ . Як уже зазначалося, поверхня зарядженого провідника є екіпотенціальною, а силові лінії напруженості поля в кожній точці провідника напрямлені по нормалі до його поверхні.

Про відсутність електричного поля і об'ємних зарядів усередині однорідних провідників можна судити також із дослідів. Якщо всередині провідника зробити порожнину, то рівноважний розподіл зарядів на його поверхні не змінюється, а напруженість поля всередині порожнини і на її стінках дорівнюватиме нулеві. Досліди з вимірювання характеристик поля всередині зарядженої порожнистої провідної посудини вперше провів М. Фарадей за допомогою електроскопа. Ці вимірювання показали, що поля всередині порожнини немає. Отже, всередину замкненої провідної поверхні електростатичне поле не проникає і всередині однорідних провідників об'ємних зарядів немає. Цю особливість провідників використовують для електростатичного захисту чутливих приладів та пристроїв.

Крім того, М. Фарадей дослідно довів можливість повної передачі зарядів від одного провідного тіла до іншого. Для цього в одному з тіл роблять внутрішню порожнину і туди поміщають заряджене тіло. Від зарядженого тіла заряд повністю переходить до тіла з порожниною і розподіляється на його зовнішній поверхні. На внутрішніх поверхнях порожнини провідників  $\sigma = 0$ . Цей процес можна повторити багато разів і, таким чином, надати провідному тілу з порожниною теоретично будь-якого заряду. Практично значення заряду обмежується лише його стіканням у навколишній простір внаслідок іонізації повітря. Цей спосіб накопичення зарядів одного знака лежить в основі дії електростатичного генератора — пристрою, який призначений для одержання високої постійної напруги завдяки механічному переносу електричних зарядів.

Розрізняють електростатичні генератори з діелектричним транспортером зарядів і з провідним транспортером у вигляді металевих стрижнів або циліндрів, розділених ізоляторами. Діелектричні транспортери виготовляють або у вигляді циліндрів чи дисків (роторні), або у вигляді гнучкої стрічки (генератори Ван де Граафа).

У 1931 р. американський фізик Р. Ван де Грааф (1901—1967) виготовив електростатичний генератор (рис. 1.27). Він складався з висковольтного електрода  $I$  у вигляді пустотілої кулі діаметром кілька

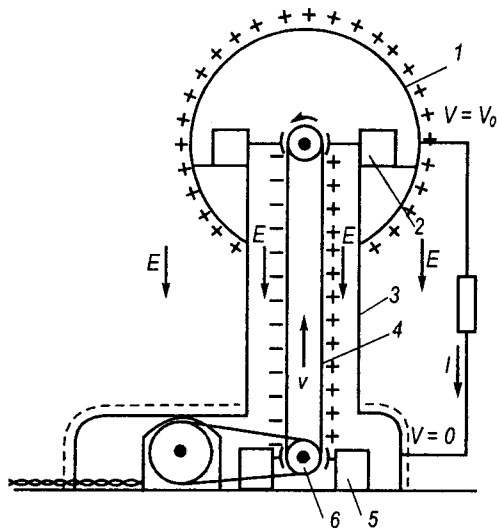


Рис. 1.27

метрів, який закріплювався на ізолювальних колонах 3, і діелектричної рухомої стрічки (транспортера) 4. Стрічка заряджається від щіток 5 і, рухаючись внаслідок обертання шківів 6, переносить заряд усередину порожньої кулі 1, де й передає його крізь щітку 2. З протилежного боку стрічки навпроти щіток 5 поміщають металеву заземлену пластинку для підсилення стікання зарядів із щіток 5 на стрічку 4.

Сила електричного струму, який переноситься транспортером, обчислюється за формулою

$$I = \sigma bv,$$

де  $\sigma$  — поверхнева густина зарядів;  $b$  — ширина транспортера;  $v$  — його швидкість. Якщо біля високовольтного електрода 1 на транспортер наносяться заряди протилежного знака, то сила струму  $I$  збільшується у два рази.

Перші зразки генераторів Ван де Граафа мали відкриту конструкцію і давали змогу одержувати потенціали до 1 МВ. За допомогою сучасних удосконалених генераторів одержують напругу до 20 МВ, а ККД електростатичних генераторів становить 15–20 %. Електростатичні генератори використовують у прискорювачах заряджених частинок і в слабкострумівій високовольтній техніці.

Поверхня зарядженого провідника при рівновазі є екіпотенціальною, однак поверхнева густина заряду залежить від кривизни поверхні. Досліди, наприклад із сіткою Кольбе, показують, що поверхнева густина заряду є більшою там, де більша кривизна поверхні. Доведемо це на прикладі двох заряджених куль радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , з'єднаних між собою тонким провідником. Після встановлення рівноваги заряди на кулях розподіляються так, що їхні потенціали будуть однаковими, тобто  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Оскільки  $\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$  і  $\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ ,

а  $q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1$  і  $q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2$ , то  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ . Отже, поверхнева густина

зарядів на кулях обернено пропорційна їхнім радіусам кривизни, тобто де кривизна поверхні зарядженого тіла є більшою, там і густина заряду більша. Оскільки біля поверхні зарядженого провідника  $E = \sigma/\epsilon_0$ , то в місцях з великою кривизною (вістря)  $\sigma$  і відповідно  $E$  набувають дуже великих значень. Це сприяє стіканню електричних зарядів із металевих вістер. Стікання зарядів з вістер використовують для побудови блискавководвідів. У високовольтних лініях електропередач стікання зарядів із загострених частин проводів призводить до значних втрат енергії.

### § 1.13. Провідники в електричному полі

У нейтральних провідниках завжди є однакова кількість позитивних і негативних зарядів. У провідниках першого роду (металах) наявні вільні електрони, які перебувають у безперервному хаотичному русі в межах провідника. При внесенні такого провідника в зовнішнє електричне поле (наприклад, однорідне з напруженістю  $\vec{E}$ ) на позитивні і негативні заряди діятиме сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ : позитивні заряди ця сила зміщуватиме в напрямі  $\vec{E}$ , а негативні — у протилежному напрямі. Оскільки позитивні заряди в металах — це іони, закріплені у вузлах кристалічної ґратки, то вони можуть переміщатись лише на мікроскопічні відстані. Вільні електрони, навпаки, переміщатимуться проти напрямку  $\vec{E}$  на макроскопічні відстані. Внаслідок цього в металі відбудеться перерозподіл електричних зарядів: ближня грань у напрямі поля зарядиться негативно, а дальня збідніє електронами і зарядиться позитивно. Явище перерозподілу електричних зарядів у провіднику під дією зовнішнього електричного поля і виникнення внаслідок цього електризації провідника називають *електростатичною індукцією* або *електризацією через вплив*. Індуковані на протилежних у напрямі поля гранях провідника різнойменні заряди створюють усередині нього внутрішнє електричне поле, вектор напруженості якого  $\vec{E}'$  напрямлений протилежно до напрямку вектора  $\vec{E}$  зовнішнього поля. Переміщення вільних електронів у металі під дією  $\vec{E}$  продовжуватиметься доти, доки не настане взаємна компенсація зовнішнього і наведеного полів, тобто стануть рівними за абсолютним значенням  $\vec{E}'$  і  $\vec{E}$ . Густина індукованих зарядів на поверхні провідника прямо пропорційно залежить від напруженості зовнішнього електричного поля.

Явище електростатичної індукції можна використати для того, щоб зарядити тіла зарядами протилежного знака. Для цього два провідних тіла  $A$  і  $B$  з'єднують між собою тонким провідником і систему розміщують уздовж зовнішнього електричного поля. На ближньому

в напрямі поля тілі виникає негативний заряд, на дальньому — позитивний. Якщо роз'єднати тіла, а потім зняти зовнішнє електричне поле, то дальнє тіло залишиться зарядженим позитивно (на ньому виявиться нестача електронів), а ближнє буде зарядженим негативно (надлишок електронів).

### § 1.14. Електрична ємність. Конденсатори

Як уже зазначалося, наданий провідникові електричний заряд розподіляється на його поверхні так, що поверхня провідника є еквіпотенціальною. Зміна заряду провідника призводить до відповідної зміни його потенціалу. Досліди показують, що різні за розмірами і формою відокремлені провідники, розміщені в однорідному нерухомому непровідному середовищі без дії зовнішніх електричних полів, при однаковому заряді набувають неоднакових потенціалів. Проте для кожного відокремленого провідника відношення заряду до потенціалу провідника є величиною сталою, тобто

$$C = q / \varphi. \quad (1.68)$$

Це відношення називають *електричною ємністю* або просто *ємністю провідника*. Зауважимо, що співвідношення (1.68) є правильним у разі відсутності стікання заряду з провідника в навколишнє середовище. За такої умови зміна заряду зумовлює відповідну зміну потенціалу, тобто

$$\Delta q = C \Delta \varphi. \quad (1.69)$$

З виразу (1.69) можна розкрити фізичний зміст електричної ємності: *електрична ємність провідника чисельно дорівнює зарядові, який потрібний для зміни потенціалу провідника на одиницю*. На основі формули (1.68) встановлюють одиницю електричної ємності:  $[C] = \text{Кл/В} = 1\text{Ф}$ . Електричну ємність у СІ вимірюють у фарадах (Ф). За одиницю електричної ємності в 1 Ф взято ємність такого відокремленого провідника, в якому зміна заряду в 1 Кл зумовлює зміну потенціалу на 1 В. Фарад є дуже великою одиницею. Таку ємність у вакуумі має відокремлена куля радіуса  $R = 9 \cdot 10^6$  км. Тому ємність провідників, як правило, виражають у часткових одиницях: 1 мікрофарад (мкФ) =  $10^{-6}$  Ф, 1 пікофарад (пФ) =  $10^{-12}$  Ф.

Для тіл сферичної форми  $\varphi = q / (4\pi\epsilon_0\epsilon R)$ . Тому електроємність відокремленого сферичного провідника  $C = q / \varphi = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$ , де  $R$  — радіус сфери (кулі). Звідси видно, що електрична ємність провідників залежить від їхніх розмірів та форми, а також від властивостей навколишнього середовища і, як встановлено, не залежить від агрегатного стану речовини, хімічної природи матеріалу, наявності порожнин тощо.

Електрична ємність відокремлених провідників залежить від наявності та взаємного розміщення оточуючих тіл, в яких завдяки індукції можуть наводитись заряди від даного зарядженого провідного тіла. Тому для практичного використання поширення набули системи з провідників, розміщених близько один від одного — конденсаторів. *Конденсатором* називають систему з двох металевих електродів, розміщених на близькій відстані один від одного і розділених шаром діелектрика. Електричне поле в конденсаторах повністю або майже повністю зосереджене в просторі між провідниками і, отже, зазнає незначних змін під дією зовнішніх полів. Тому електроємність конденсаторів практично не залежить від наявності оточуючих тіл (провідників). Різноманітні заряджені провідники конденсаторів називають *обкладками*.

Електроємність конденсаторів визначають за формулою

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (1.70)$$

де  $q$  — заряд однієї з обкладок конденсатора;  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  — різниця потенціалів (або напруга) між ними. Електричну ємність конденсатора вимірюють у тих самих одиницях, що і ємність відокремленого провідника. За природою речовини між обкладками конденсатора їх поділяють на повітряні, паперові, слюдяні, керамічні та електролітичні, а залежно від форми обкладок — на плоскі, сферичні, циліндричні тощо.

Якщо ємність довільного конденсатора, між обкладками якого вакуум  $C_0$ , то при заповненні простору між ними діелектричною речовиною його ємність збільшується і стає рівною  $C$ . Для кожного діелектрика відношення  $C/C_0 = \epsilon$  є величиною сталою, яку називають *діелектричною проникністю*.

**Приклад 1.2.** Встановити формули для розрахунку електричної ємності плоского, циліндричного і сферичного конденсаторів.

**Розв'язання.** а) Плоский конденсатор є системою з двох паралельних провідних пластин. Якщо площа кожної пластини  $S$ , а відстань між ними  $d$  значно менша від розмірів пластин, то можна нехтувати крайовими ефектами і поле між пластинами вважати однорідним. Тоді різниця потенціалів між пластинами у вакуумі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{q}{\epsilon_0 S} d.$$

На основі формули (1.70) одержимо

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (1)$$

б) Циліндричний конденсатор є системою з двох коаксіальних порожнистих провідних циліндрів з радіусами  $r_1$  і  $r_2$  (рис. 1.28). Якщо висота циліндрів значно перевищує їхні

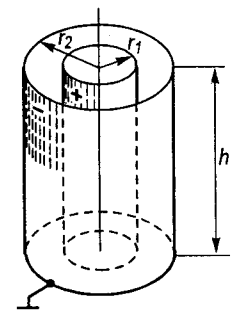


Рис. 1.28

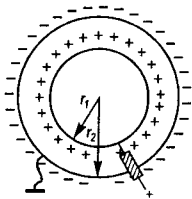


Рис. 1.29

радіуси ( $h \gg r_1$  і  $h \gg r_2$ ), то можна знехтувати крайовими ефектами і для визначення різниці потенціалів між циліндричними обкладками конденсатора скористатися формулою  $E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r}$ . Оскільки  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ , то звідси  $d\varphi = -\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$ . Інтегруючи цей вираз у межах від  $r_1$  до  $r_2$ , визначимо  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}$  ( $\eta$  — лінійна густина заряду).

На основі формули (1.70) одержимо

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln r_2/r_1} \quad (2)$$

Якщо зазор між обкладками конденсатора  $d$  порівняно з  $r_1$  малий, то  $\ln \frac{r_1 + d}{r_1}$  можна розкласти в ряд і обмежитись лише членами першого порядку малості:

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_1 + d}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{r_1}\right) \approx \frac{d}{r_1}$$

Тоді формула (2) набуває вигляду (1)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h r_1}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

тобто за таких умов циліндричний конденсатор можна наближено вважати плоским.

в) Сферичний конденсатор є системою з двох провідних концентричних сферичних обкладок (рис. 1.29), різниця потенціалів між якими за наявності заряду  $q$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Тоді

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (3)$$

Якщо між обкладками конденсаторів вміщено діелектрик з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , то формули для електричної ємності їх відповідно набувають вигляду:

$$\text{а) } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}; \quad \text{б) } C = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon h}{\ln(r_2/r_1)}; \quad \text{в) } C = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

З цих формул видно, що ємність конденсаторів визначається формою обкладок, їх геометричними розмірами та діелектричною проникністю діелектрика між обкладками.

**Приклад 1.3.** Визначити електроємність двопровідної лінії, яка являє собою два паралельних провідники з радіусами  $r$  і відстанню між їх осями  $d$  (рис. 1.30).

**Розв'язання.** Вважатимемо, що  $d \gg r$  і що інших провідників поблизу двопровідної лінії немає. Різниця потенціалів між поверхнями провідників  $d\varphi = -Edl$ . Напруженість поля в довільній точці на лінії, що з'єднує осі провідників і перпендикулярна до їх поверхні,

$$E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 l} + \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 (d-l)}$$

Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_r^{d-r} Edl = \int_r^{d-r} \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{dl}{l} + \int_r^{d-r} \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \frac{dl}{d-l} = \frac{\eta}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-r}{r}.$$

Електроємність двопровідної лінії завдовжки  $h$

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln((d-r)/r)} \approx \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln(d/r)} \quad (4)$$

Конденсатори, крім електричної ємності, характеризуються *робочою напругою*  $U_p$ . При напрузі, що перевищує  $U_p$ , може відбутися пробій конденсатора і він виходить із ладу.

Конденсатори широко використовуються в електро- і радіотехніці.

Для одержання потрібної ємності при відповідній напрузі часто виникає необхідність з'єднання конденсаторів між собою у батареї. З'єднання може бути паралельним, послідовним та змішаним.

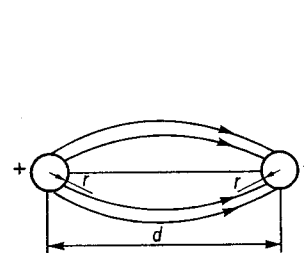


Рис. 1.30

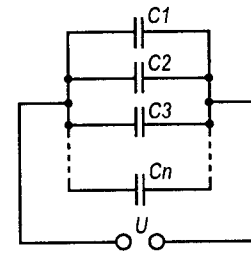


Рис. 1.31

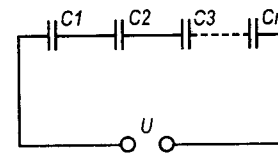


Рис. 1.32

При паралельному з'єднанні (рис. 1.31) напруга  $U$  на кожному з конденсаторів є однаковою. Тоді заряди на кожному з конденсаторів

$$q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U; \quad \dots; \quad q_n = C_n U.$$

Заряд батареї конденсаторів

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U.$$

Електрична ємність батареї

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (1.71)$$

Звідси видно, що результуюча електроємність батареї паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює сумі електроємностей окремих конденсаторів.

При послідовному з'єднанні (рис. 1.32) прикладена напруга

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Внаслідок явища електростатичної індукції заряди на всіх конденсаторах будуть однаковими. Отже,



$$U_1 = \frac{q}{C_1}; U_2 = \frac{q}{C_2}; \dots; U_n = \frac{q}{C_n}.$$

Тоді

$$U = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right).$$

Оскільки  $U = q/C$ , то

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (1.72)$$

З формули (1.72) видно, що при послідовному з'єднанні конденсаторів величина, обернена результуючій електроємності батареї конденсаторів, дорівнює сумі величин, обернених електроємностям окремих конденсаторів. Якщо в батарею з'єднують  $n$  конденсаторів з однакою електроємністю  $C_0$ , то при паралельному їх з'єднанні  $C = nC_0$ , а при послідовному  $C = C_0 / n$ . При послідовному з'єднанні конденсаторів результуюча електроємність батареї завжди менша від найменшої електроємності конденсатора, що входить до батареї.

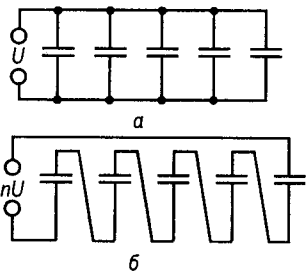


Рис. 1.33

Якщо  $n$  однакових конденсаторів з'єднати паралельно і зарядити до напруги  $U$ , а потім за допомогою спеціального перемикача ці конденсатори з'єднати послідовно, то на клеммах батареї матимемо напругу  $nU$  (рис. 1.33, а, б). Таким способом можна одержувати короткочасні імпульси високої напруги в кілька мільйонів вольтів.

### § 1.15. Діелектрики. Полярні і неполярні молекули. Вільні і зв'язані заряди

Завданням фізики діелектриків насамперед є встановлення закономірностей та створення теорії взаємодії електромагнітного поля і речовини, на основі якої можна не тільки пояснювати самі явища цієї взаємодії, а й прогнозувати властивості та поведінку діелектриків під час змін параметрів стану, а також розробляти різні матеріали з наперед заданими властивостями. Фізично ця задача зводиться до теоретичного і дослідного встановлення зв'язку між хімічним складом, агрегатним станом, структурою діелектриків та їхніми макроскопічними властивостями.

Термін «діелектрик» (від гр.  $\delta\iota\alpha$  — через, крізь і англ. electric — електричний) вперше ввів М. Фарадей у 1837 р. для характеристики речовин, в які проникає електричне (електромагнітне) поле. Частіше під діелектриками розуміють речовини, крізь які в ідеальному випадку не проходить, а практично погано проходить електричний струм. Це зумовлено внутрішньою будовою атомів і молекул діелектриків і, насамперед, відсутністю в них таких зарядів, які б могли під дією поля вільно переміщатися на макроскопічні відстані.

Діелектрики складаються з нейтральних атомів і молекул, позитивний заряд яких зосереджений у ядрах, а негативний — в електронних шарах. Ці заряди розміщені в різних точках простору і внаслідок безперервного руху їхне розміщення постійно змінюється. Діелектрики являють собою електрично нейтральні системи зарядів, коли сумарний позитивний і негативний заряди довільного об'єму діелектричної речовини однакові. Такими є діелектрики-гази (крім плазмового стану), діелектрики-рідини (крім електролітів і рідких металів) та деякі тверді речовини і матеріали, які не належать до напівпровідників або металів. Є тверді діелектрики, які складаються не з нейтральних атомів чи молекул, а із заряджених іонів протилежних знаків, рівноважно розміщених у вузлах кристалічної ґратки. Такі діелектрики можна уявити поділеними на велику кількість елементарних комірок, і розглядати ці комірки з мікроскопічної точки зору також як нейтральні системи.

Зв'язаний стан зарядів, характерний для діелектриків, є наслідком хімічного зв'язку між іонами (іонний зв'язок), окремими атомами (ковалентний зв'язок) і молекулами (зв'язки, зумовлені силами Ван-дер-Ваальса). За хімічним зв'язком серед твердих діелектриків можна виділити іонні, ковалентні і молекулярні кристали, склоподібні та аморфні речовини, полімери тощо. Можлива також класифікація діелектриків за типом симетрії і за властивостями структурних одиниць, з яких діелектрик складається (наприклад, рис. 1.34: а — монопольні, б — дипольні, в — квадрупольні, г — октупольні та ін.). Така класифікація виявляється корисною при встановленні зв'язку макроскопічних властивостей діелектриків з їхньою мікроструктурою. Ні одній із класифікацій діелектриків не можна надати переваги, оскільки жодна не є універсальною і кожна вста-

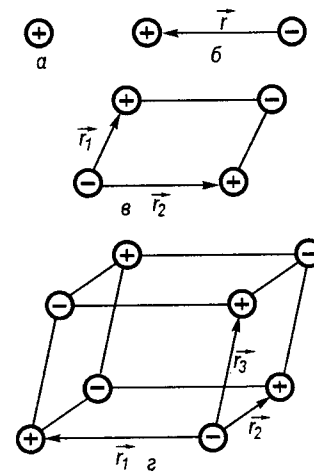


Рис. 1.34

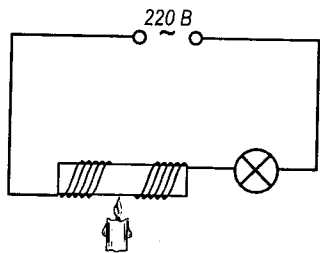


Рис. 1.35

електричному полі співмірне з розмірами самих цих мікрочастинок. Поняття про діелектричний стан речовини є фізично обґрунтованим ще й тому, що та сама речовина при різних термодинамічних параметрах стану може бути діелектриком, напівпровідником або й провідником. Ідеальний діелектрик може бути лише при абсолютному нулі температури. З підвищенням температури внаслідок порушення зв'язків між зарядженими частинками можуть з'явитись заряди, які зумовлюють більшу чи меншу провідність речовини. Наприклад, якщо увімкнути в електричну мережу лампочку розжарення і під'єднати послідовно з нею скляну трубку, то при кімнатній температурі лампочка не світить, тобто скло є діелектриком (рис. 1.35). При нагріванні скляної трубки лампочка починає світитись і з підвищенням температури скла все яскравіше. Отже, нагріте скло стає провідником електрики.

За характером просторового розміщення заряджених частинок у молекулах їх поділяють на полярні і неполярні. Якщо за відсутності зовнішнього електричного поля рухомі електрони в атомах зберігають у часі сферичну симетрію просторового розміщення відносно ядер, то в цілому атоми не мають дипольного моменту. Відповідно і молекули можуть мати таке розміщення позитивних і негативних зарядів, що їхні «центри ваги» збігаються і, отже, дипольний момент молекул дорівнює нулеві. Такі атоми і молекули називають *неполярними* (атоми інертних газів, двохатомні молекули  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ , багатоматомні  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $CCl_4$ , речовини у газоподібному і рідкому станах тощо).

Є діелектричні речовини, які складаються з атомів чи молекул, центри позитивних і негативних зарядів яких не збігаються, просторово зсунуті на деяку відстань. Отже, якщо зовнішнього електричного поля немає, то молекули цих речовин являють собою елементарні диполі, дипольний момент яких близько  $10^{-29} - 10^{-30}$  Кл·м. Такі атоми чи молекули називають *полярними*. Зауважимо, що внаслідок безперервного руху електричних зарядів кожного атома або молекули значення і просторова орієнтація їхніх дипольних моментів швидко змінюються в часі. Отже, кожний елементарний диполь є осцилю-

юється, виходячи зі зручності та умов вивчення об'єкта дослідження.

Під час вивчення електричних властивостей діелектриків треба говорити не про категорію речовин, які належать до класу діелектриків, а про діелектричний стан речовини, коли вона має діелектричні властивості, тобто такі, при яких відносно зміщення електричних зарядів мікрочастинок речовини в зовнішньому

ючою, постійно рухомою системою. До полярних належать молекули газів ( $CO$ ,  $SO_2$ ,  $N_2O$ ,  $H_2S$ ,  $NH_3$  та ін.), рідин ( $H_2O$ , кислоти, окремі спирти, нітробензол, ефіри тощо).

Зазначимо також, що зовсім неполярних молекул практично немає. Проте до полярних належать ті молекули, дипольні моменти в яких у тисячі разів більші, ніж у неполярних. Відповідно до молекулярного складу та структури діелектричні речовини також поділяють на *неполярні, полярні і спонтанно поляризовані*.

Вивчаючи електричні поля у діелектриках, розрізняють електричні заряди двох видів: вільні і зв'язані. *Вільними* називають заряди, які під впливом електричного поля можуть переміщатись на макроскопічній відстані (більші за розміри атомів чи молекул). Це насамперед електрони в металах, іони в рідинах і газах, заряди плазми. Вільними вважають також заряди, нанесені на поверхню діелектриків (наприклад, при електризації тертям), внаслідок чого втрачається їхня електронейтральність. *Зв'язаними* вважають заряди, які входять до складу нейтральних атомів чи молекул або розміщені у вузлах іонних кристалічних ґраток і під дією зовнішнього електричного поля можуть зміщатись лише на мікроскопічній відстані в межах своїх атомів чи елементарних ґраток, а по об'єму або по поверхні діелектриків вільно переміщатись не можуть. Зв'язані заряди створюють електричне поле так само, як і вільні заряди. Зв'язаний стан зарядів характерний переважно для діелектриків. Отже, електростатичне поле в діелектриках порівняно з вакуумом відрізняється тим, що в них, крім поля вільних зарядів, враховується також поле, створене зв'язаними зарядами, яких у вакуумі немає.

### § 1.16. Поляризація діелектриків

Основними фізичними властивостями, за якими об'єднують різноманітні за фазовим станом, фізико-хімічними властивостями і структурою речовини і відносять їх до діелектриків, є особлива поведінка цих речовин у зовнішньому електричному полі — *поляризація* і практично відсутня електропровідність. Поляризований у зовнішньому електричному полі діелектрик сам стає джерелом внутрішнього електричного поля і, отже, поле всередині діелектрика, яке реально діє на атоми або молекули, істотно відрізняється від зовнішнього. Таке поле називають *локальним*. Наближений розрахунок цього поля наведено в § 1.17 (приклад 1.5).

Теорія поляризації діелектриків розроблена в основному ще в XIX ст. Оскільки на той час ще не була відома атомна структура речовини, то відповідно теорія будувалася, виходячи з макроскопічних уявлень про речовину і поле. Досліди показують, що електромагнітне поле

поширюється в діелектриках подібно до поширення його у вакуумі. Це означає, що макроскопічно діелектрики проявляють себе як суцільні (не дискретні) й однорідні, незважаючи на їхню атомно-молекулярну структуру. Така поведінка зумовлена тим, що спостережувані експериментальні явища відбивають колективну реакцію великої кількості молекул на зовнішній вплив. Тому макроскопічно і властивості речовин зумовлюються сукупним впливом атомів і молекул, а не поведінкою окремих атомних систем. Разом з тим статистично властивості речовин визначаються властивостями і структурою окремих атомів і молекул. Це можна стверджувати на основі того, що атоми і молекули зберігають свою індивідуальність навіть в умовах сильних збурень. Стан і вихідна конфігурація атомних систем здебільшого відновлюються повністю після припинення зовнішньої дії. Зазначимо, що атомно-молекулярна структура діелектриків не впливає на поширення в них електромагнітних хвиль за умови  $\lambda \gg a$  ( $\lambda$  — довжина хвилі,  $a$  — міжатомна або міжмолекулярна віддаль у діелектрику). В електростатиці діелектриків саме ці умови виконуються.

Один із підходів до проблеми поляризації діелектриків ґрунтується на мікроскопічному, або атомно-молекулярному, уявленні про речовину. На основі цих поглядів діелектрик розглядається як сукупність позитивних і негативних зарядів (ядер, електронів, іонів), які зв'язані між собою консервативними силами. Характер цих сил визначається просторовою будовою структурних елементів діелектрика. Таке уявлення лежить в основі електронної теорії Лоренца.

У зовнішньому електричному чи електромагнітному полі на електричні заряди діелектрика діють сили, які зумовлюють зміщення позитивних і негативних зарядів у протилежних напрямках, тобто *поляризацію діелектрика*. Здатність атомів і молекул речовини поляризуватись є однією з фундаментальних властивостей матерії, яка проявляється при взаємодії електромагнітного поля і речовини.

Ще М. Фарадей за допомогою електроскопа і конденсатора показав, що якщо весь простір між пластинами плоского конденсатора заповнити однорідним діелектриком, то його електроємність збільшиться в  $\epsilon$  разів. При цьому величина  $\epsilon$  залежить лише від властивостей діелектрика і була названа М. Фарадеєм *діелектричною проникністю*. Для вакууму  $\epsilon = 1$ .

Розглянемо спочатку на макроскопічному рівні, які фізичні процеси відбуваються при внесенні діелектрика між пластини конденсатора. Нехай на обкладках плоского конденсатора є вільні заряди, поверхнева густина

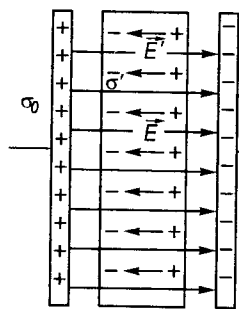


Рис. 1.36

яких  $\sigma_0$  (рис. 1.36). Якщо площа пластин конденсатора  $S$ , відстань між ними  $d$ , то його електроємність у вакуумі (див. прикл. 1.2)

$$C_0 = \epsilon_0 S/d. \quad (1.73)$$

За означенням  $C_0 = q/U = \sigma_0 S/U$ , де  $U$  — різниця потенціалів між обкладками конденсатора. Оскільки для однорідного поля  $U = E_0 d$ , то

$$C_0 = \frac{\sigma_0 S}{E_0 d}. \quad (1.74)$$

Зрівнявши праві частини рівностей (1.73) і (1.74), одержимо відому вже формулу (1.35)

$$E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0.$$

Як зазначалося, при внесенні між обкладки конденсатора однорідного діелектрика його електроємність збільшується в  $\epsilon$  разів, тобто

$$C = \epsilon_0 \epsilon S/d. \quad (1.75)$$

Оскільки при цьому вільний заряд на пластинах не змінюється, то збільшення  $C$ , очевидно, пов'язане із зменшенням  $U = Ed$ :

$$C = \frac{\sigma_0 S}{Ed}. \quad (1.76)$$

З рівнянь (1.75) і (1.76) одержуємо

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (1.77)$$

або

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Отже, при внесенні в простір між обкладками конденсатора суцільного однорідного діелектрика його електроємність зростає в  $\epsilon$  разів, що зумовлено зменшенням у стільки ж разів напруженості електричного поля в діелектрику.

З'ясуємо, яка фізична причина зменшення  $\vec{E}$ . Напруженість електричного поля повністю визначається значеннями і розподілом електричних зарядів. Вільний заряд  $\sigma_0$  на пластинах конденсатора залишається незмінним (зовнішнє джерело напруги відключено). Отже, зменшення напруженості електричного поля всередині діелектрика можна пояснити виникненням на його гранях зв'язаних зарядів, протилежних щодо зарядів обкладок конденсатора знаків (див. рис. 1.36) з поверхневою густиною  $\sigma'$ . Ці заряди називають *поляриза-*

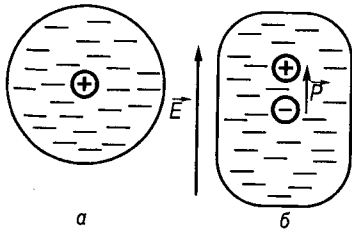


Рис. 1.37

ційними. Вони створюють своє поле напруженістю  $\vec{E}'$ , напрямлене протилежно до поля вільних зарядів  $\vec{E}_0$ . Поверхневу густину поляризаційних зарядів  $\sigma'$  можна визначити так. Припустимо, що заряди на гранях діелектрика залишились, а сам діелектрик вийнято. Тоді напруженість поля зарядів  $\sigma'$

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}.$$

Оскільки  $\vec{E}_0$  і  $\vec{E}'$  напрямлені протилежно, то результуюча напруженість визначається різницею  $E = E_0 - E'$ , або

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (1.78)$$

Крім того,  $E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon}$ . Зрівнявши праві частини цих рівнянь, одержимо

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma_0, \quad (1.79)$$

де  $\sigma'$  — поверхнева густина зв'язаних зарядів на гранях діелектрика.

Величина  $\sigma'$  може бути характерним параметром поляризації діелектриків в електричному полі. Однак через те, що не існує експериментальних способів безпосереднього визначення  $\sigma'$ , а також з історичних причин основним фізичним параметром, яким характеризують ступінь поляризації діелектриків, взято *вектор поляризації*. Введення вектора поляризації ґрунтувалось на модельних уявленнях про механізм поляризації діелектриків. Їстотною була ідея про те, що в діелектриках збуджується велика кількість елементарних диполів. Спочатку не зовсім було ясно, чому збуджуються ці диполі. Щоб проілюструвати можливий механізм виникнення диполів, ми розглядатимемо атом як систему позитивних зарядів (ядро), оточених негативними зарядами (електронами) (рис. 1.37, а). У зовнішньому електричному полі ядро зміщується у напрямку поля, а електрони — в протилежному. Орбіти, або густини ймовірності локалізації електронів (за квантовою механікою), дещо спотворюються, центр ваги негативних зарядів зміститься і вже не збігатиметься з позитивним зарядом ядра. Така нейтральна в цілому конфігурація зарядів у першому наближенні являтиме собою елементарний диполь (рис. 1.37, б).

Якщо напруженість поля  $\vec{E}$  є не дуже великою, то індукований дипольний момент можна вважати пропорційним  $\vec{E}$ .

Якщо зміщення центрів ваги позитивних і негативних зарядів  $l$ , а їхні значення  $+q$  і  $-q$ , то їхній дипольний момент

$$\vec{p} = ql.$$

Приймемо, що в одиниці об'єму діелектрика є  $n_0$  атомів. Сумарний дипольний момент одиниці об'єму поляризованого діелектрика називають *вектором поляризації* і позначають  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = n_0 q \vec{l} = n_0 \vec{p}. \quad (1.80)$$

Визначають вектор  $\vec{P}$  так:  $\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{V}$ , де  $V$  — об'єм поляризованого діелектрика. Ця формула застосовна і до іонного кристалічного діелектрика, де під  $\vec{p}_i$  розуміють дипольні моменти окремих елементарних ґраток кристала. Напрямок вектора поляризації  $\vec{P}$  збігається з напрямком окремих диполів. Узагалі значення  $\vec{P}$  може змінюватись у діелектрику від точки до точки, але на основі дослідів приймається, що в кожній точці для ізотропного діелектрика вектор  $\vec{P}$  пропорційний напруженості зовнішнього електричного поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.81)$$

де  $\kappa$  — стала, яку називають *діелектричною сприйнятливістю діелектрика*.

В ізотропних діелектриках напрям вектора поляризації  $\vec{P}$  збігається з напрямом вектора  $\vec{E}$ , тобто вони колінеарні. Це макроскопічний параметр, який характеризує здатність структурних одиниць діелектриків до поляризації, тобто до зміщення зарядів, наприклад в атомах чи молекулах.

Якщо густина позитивних і негативних зарядів, зміщених один відносно одного, є однаковою, то це зміщення не обумовлює виникнення об'ємних зарядів всередині діелектрика. І навпаки, якщо значення  $\vec{P}$  в різних областях діелектрика буде різним, то це призведе до того, що в деяку область потрапить більший заряд даного знака, ніж з нього вийде, тобто виникатимуть об'ємні заряди. Якщо  $\vec{P}$  є сталим, то у випадку плоского конденсатора (див. рис. 1.36) на лівій поверхні діелектрика електрони змістяться до краю на певну відстань  $l$ , а на правій вони відійдуть від краю на ту саму відстань  $l$  і там залишаться оголеними позитивні заряди. Виникає, таким чином, поверхневий

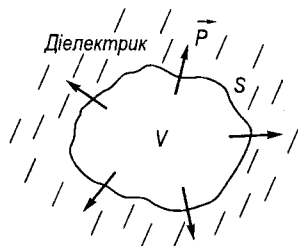


Рис. 1.38

заряд з густиною  $\sigma'$  протилежних знаків на протилежних гранях. Поверхневу густину цього заряду підраховуємо так.

Припустимо, що в одиниці об'єму є  $n_0$  атомів, а заряд ядра  $q$ . Якщо зміщення  $l$  електронів перпендикулярне до граней діелектрика, то результуючий заряд на кожній грані площею  $S$  виявиться таким, що дорівнює  $n_0qlS$ , а їхня поверхнева густина

$$\sigma' = n_0ql. \quad (1.82)$$

Порівнюючи формули (1.82) та (1.80), можна записати, що  $\sigma' = P_n$ , де  $P_n$  — нормальна складова вектора поляризації (проекція  $\vec{P}$  на нормаль до поверхні діелектрика).

Скориставшись формулою (1.78), можна обчислити  $\vec{E}$  всередині діелектрика. Справді,  $E = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 - P_n}{\epsilon_0}$ , але  $P_n = \kappa\epsilon_0 E$ . Звідси

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \kappa}. \quad (1.83)$$

Співмножник  $\frac{1}{1 + \kappa}$  показує, у скільки разів зменшується поле в діелектрику внаслідок його поляризації порівняно з вакуумом. Порівнюючи формули (1.83) та (1.77), одержуємо

$$\epsilon = 1 + \kappa. \quad (1.84)$$

Ця формула встановлює зв'язок між основними макроскопічними параметрами  $\epsilon$  і  $\kappa$ , які характеризують вплив діелектриків на напруженість поля в них.

Експериментально визначивши  $\epsilon$ , наприклад, як відношення електроємності конденсатора, заповненого діелектричною речовиною  $C$ , до електроємності його у вакуумі (реально в повітрі)  $C_0$ , тобто  $\epsilon = C/C_0$ , можна розрахувати  $\kappa$ , а отже, за формулою (1.81) визначити вектор поляризації  $\vec{P}$ .

Розглянемо випадок, коли поляризація діелектрика не скрізь однакова (неоднорідна поляризація). Виділимо всередині такого діелектрика об'єм  $V$ , обмежений поверхнею  $S$  (рис. 1.38). У зовнішньому полі внаслідок поляризації з об'єму  $V$  може вийти більший, наприклад негативний заряд, ніж у нього увійти. Отже, в об'ємі  $V$  виявиться надлишковий (нескомпенсований) позитивний заряд  $q'$ . Його значення можна розрахувати через об'ємну густину поляризаційних зарядів  $\rho_{\text{пол}}$  (або інакше, зв'язаних зарядів). Для елементарного об'єму  $dV$

$$dq' = \rho_{\text{пол}} dV, \quad q' = \int_V \rho_{\text{пол}} dV. \quad (1.85)$$

Крім того, крізь одиницю поверхні вийде заряд  $\sigma' = P_n$ , а крізь всю поверхню  $S$  — відповідно

$$q = \int_S P_n dS. \quad (1.86)$$

Знаки зарядів, які виходять з об'єму і які там залишаються, протилежні. Отже, можна записати, що

$$\int_V \rho_{\text{пол}} dV = - \int_S P_n dS. \quad (1.87)$$

Застосувавши до правої частини рівності (1.87) математичну теорему Гаусса, одержимо

$$\int_S P_n dS = \int_V \text{div} \vec{P} dV. \quad (1.88)$$

Тоді

$$\int_V \rho_{\text{пол}} dV = - \int_V \text{div} \vec{P} dV. \quad (1.89)$$

Оскільки об'єм інтегрування є довільним, то від рівності інтегралів можна перейти до рівності підінтегральних виразів

$$\rho_{\text{пол}} = - \text{div} \vec{P}. \quad (1.90)$$

Отже, якщо поляризація діелектрика є неоднорідною, то з'являються стоки або витoki вектора поляризації, потужність яких визначається об'ємною густиною поляризаційних зарядів. Рівняння (1.90) виражає той факт, що розподіл зв'язаних зарядів у будь-якій області визначається лише поляризацією. Зауважимо, що  $\rho_{\text{пол}}$  — це заряди, які створюють поле так само, як і вільні заряди. Тому це поле треба брати до уваги при розрахунках.

Ще раз зауважимо, що для рівномірно поляризованого діелектрика  $\vec{P} = \text{const}$  і тоді  $\rho_{\text{пол}} = 0$ . Ніде не може відбутися накопичення зарядів одного знака. На межі поляризованого діелектрика з вакуумом або з металом виникають поляризаційні заряди  $\sigma' = \pm P_n$  (оскільки у вакуумі і в металі  $\vec{P} = 0$ ).

Запишемо основні рівняння електростатики для діелектриків. Узагальнений закон Кулона  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  для діелектриків запишеться

так:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} \quad (1.91)$$

Підставивши  $\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \vec{P}$  у формулу (1.91), одержимо

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho - \operatorname{div} \vec{P}}{\varepsilon_0}, \text{ або } \operatorname{div} \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Оскільки  $\varepsilon_0 = \text{const}$ , то  $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$ . Для спрощення запису цього рівняння для довільних діелектриків ввели позначення

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.92)$$

Тоді

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.93)$$

де  $\vec{D}$  називають *вектором електричного зміщення* або *індукцією електричного поля*. Рівність (1.93) є математичним записом теореми Гаусса в диференціальній формі для електричного поля в діелектриках. З формули (1.93) видно, що вектор  $\vec{D}$  в діелектриках обумовлюється значенням і розподілом вільних зарядів  $\rho$ , тоді як напруженість електричного поля — значенням і розподілом як вільних, так і поляризаційних зарядів (див. формулу (1.91)). У цьому і полягає зручність при описанні електричних полів у діелектричних середовищах за допомогою вектора  $\vec{D}$ . У випадку середовища, яке не поляризується, наприклад вакууму,  $\vec{P} = 0$  і вектор індукції  $\vec{D}$  в системі СГСЕ збігається з напруженістю поля  $\vec{E}$ , а  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ . В СІ  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$  ( $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  не однакові за значеннями і розмірністю).

Запишемо теорему Гаусса для поля в діелектриках в інтегральній формі. Помножимо ліву і праву частини формули (1.93) на фізично нескінченно малий елемент об'єму та зінтегруємо по  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV. \quad (1.94)$$

Права частина рівності (1.94) являє собою сумарний заряд  $q$  в об'ємі  $V$ . Застосувавши до лівої частини цієї рівності математичну теорему Гаусса, маємо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_S D_n dS. \quad (1.95)$$

Зрівнявши праві частини формул (1.94) і (1.95), одержимо рівність

$$\int_S D_n dS = q, \quad (1.96)$$

яка є математичним записом електростатичної теореми Гаусса для поля в діелектриках в інтегральній формі. Ця теорема є слушною при довільному розміщенні діелектриків і поверхонь, що їх обмежують. Об'єм інтегрування може бути заповнений різними діелектриками, а поверхня  $S$ , що обмежує цей об'єм, може проходити довільно у вакуумі або перетинати діелектрики.

Покажемо, що від рівності (1.96) можна легко перейти до закону Кулона у звичній формі. Припустимо, що в однорідному діелектрику є точковий заряд  $q$ , який зосереджений, для простоти розрахунків, у центрі сфери радіуса  $r$ . Зінтегрувавши рівність (1.96) по сферичній поверхні радіуса  $r$ , одержимо  $\varepsilon_0 \varepsilon E \cdot 4\pi r^2 = q$ , або

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \vec{r}}{\varepsilon r^2}.$$

Звідси

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0 \vec{r}}{\varepsilon r^2}, \quad (1.97)$$

де  $q_0$  — пробний точковий заряд.

З формули (1.97) видно, що сила взаємодії точкових електричних зарядів у діелектриках є в  $\varepsilon$  разів меншою, ніж у вакуумі. Аналогічно у  $\varepsilon$  разів зменшуються напруженість і потенціал поля.

Друге основне рівняння електростатики  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ , яке виражає потенціальність електростатичного поля, не змінює свого вигляду для діелектриків. У загальному випадку не можна стверджувати, що також і  $\operatorname{rot} \vec{D} = 0$ , оскільки розподілу вільних зарядів не завжди достатньо для визначення  $\vec{D}$  за рівнянням (1.93). Потрібні додаткові умови, якими можуть бути граничні умови на поверхнях діелектрика.

Застосовуючи рівність (1.81), співвідношення (1.92) можна записати ще так:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

тобто

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (1.98)$$

Таким чином, у зовнішньому електричному полі речовина поляризується. Стан поляризації речовини повністю визначається вектором поляризації  $\vec{P}$ , який є сумарним дипольним моментом одиниці об'єму поляризованого однорідного діелектрика. Вклад поляризованої речовини в електричне поле напруженістю  $\vec{E}$  дорівнює вкладові, який могли б дати у вакуумі заряди, розподілені з об'ємною густиною

$\rho_{\text{пол}} = -\text{div} \vec{P}$ . У разі однорідної поляризації діелектрика цей вклад визначається розподілом поверхневих зарядів  $\sigma' = \pm P_n$ . Отже, електричне поле за наявності діелектриків збігається з полем, яке б збуджувалось у відсутності діелектриків тими самими вільними зарядами разом із поляризаційними зарядами  $\rho_{\text{пол}}$  та  $\sigma'$ .

### § 1.17. Неполарні діелектрики. Електронна теорія поляризації неполарних діелектриків

Електронна, або молекулярна, теорія поляризації діелектриків дає можливість пов'язати макроскопічні властивості діелектриків з їхньою молекулярною будовою, а також встановити залежність діелектричної проникності від температури.

*Неполарні діелектрики* в газоподібному, рідкому чи твердому стані — це речовини, які складаються з неполарних атомів або молекул. У зовнішньому електричному полі просторова симетрія розподілу зарядів порушується, позитивні заряди зміщуються у напрямі поля, а негативні — у протилежному напрямі. Неполарні молекули стають диполями, напрям дипольних моментів яких збігається з напрямом напруженості поля, тобто діелектрик поляризується. Оскільки в електричному полі зміщуються переважно електрони через малу масу порівняно з масою ядер, то механізм поляризації неполарних діелектриків називають *електронним* (іноді індукційним, оскільки дипольний момент наводиться, індукується зовнішнім полем).

Для лінійних ізотропних діелектриків можна вважати, що дипольний момент кожної молекули (атома) пропорційний напруженості поля  $\vec{E}'$ , тобто

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}', \quad (1.99)$$

де  $\alpha$  — поляризованість молекули або атома (цю величину називають ще молекулярною або атомною діелектричною сприйнятливістю);  $\vec{E}'$  — напруженість локального поля в місці розміщення розглядуваної молекули, тобто поля зовнішнього і поля зв'язаних зарядів діелектрика, які виникають внаслідок його поляризації. Диполі, для яких  $\vec{p} \sim \vec{E}$ , називають *м'якими* або *квазіпружними*. Величина  $\alpha$  є молекулярною константою, яка для різних молекул (атомів) різна і визначається їхньою структурою та силами взаємодії між зарядженими частинками. Оскільки внутрішнє поле в молекулах (атомах) велике (близько  $10^9$  В/м), то в практично застосовних зовнішніх полях навіть близько  $10^6$  В/м величина  $\alpha$  є малою і слабо залежить від густини та температури.

Для оцінювання  $\alpha$  можна скористатися такою моделлю поляризації молекул. Молекулу вважають провідною сферою, радіус якої  $a$  приблизно дорівнює радіусові молекули (близько  $10^{-10}$  м). У зовнішньому локальному полі  $\vec{E}'$  така сфера поляризується і набуває дипольного моменту (приклад 1.4)

$$\vec{p} = 4\pi \epsilon_0 a^3 \vec{E}'. \quad (1.100)$$

Порівнюючи формули (1.100) та (1.99), можна записати  $\alpha = 4\pi a^3$ . Зауважимо, що  $\alpha$  має розмірність об'єму ( $\text{м}^3$ ). Якщо  $a$  визначати за молекулярно-кінетичною теорією, то розрахункові й експериментальні значення  $\alpha$  збігаються.

На основі формул (1.80) та (1.99) вектор поляризації

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 n_0 \vec{E}'. \quad (1.101)$$

Для розріджених газів напруженість локального поля мало відрізняється від напруженості зовнішнього електричного поля  $\vec{E}$ . Тому можна наближено прийняти

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 n_0 \vec{E}. \quad (1.102)$$

Порівнявши формули (1.102) та (1.81), знайдемо

$$\kappa = \alpha n, \quad (1.103)$$

тобто в газах діелектрична сприйнятливість  $\kappa$  є сумою молекулярних (атомних) діелектричних сприйнятливостей  $\alpha$  молекул (атомів) одиниці об'єму діелектрика.

Відносна діелектрична проникність за формулою (1.84)  $\epsilon = 1 + \kappa = 1 + \alpha n_0$ . Для повітря за нормальних умов  $n_0 \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ , а  $\alpha = 4\pi a^3 \approx 10^{-29} \text{ м}^3$ . Отже,  $\alpha n_0 \approx 10^{-3}$ . Таким чином, для газів  $\epsilon$  мало відрізняється від одиниці, тобто в розрахунках, як і для вакууму, можна прийняти наближено  $\epsilon = 1$ . Зауважимо, що зі збільшенням розмірів молекул  $a$  значення  $\alpha$  зростає, але добуток  $\alpha n_0$  залишається малим.

Для газів при високих тисках, а також для рідин і твердих тіл треба враховувати поле, створене сусідніми поляризованими молекулами (атомами), тобто для розрахунку  $\vec{P}$  слід скористатися напруженістю локального поля  $\vec{E}'$ :  $\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$  (формула (7), приклад 1.5).

Тоді

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 n_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right). \quad (1.104)$$

Звідси

$$\vec{P} = \frac{\alpha \epsilon_0 n_0}{1 - \frac{\alpha n_0}{3}} \vec{E}. \quad (1.105)$$

З урахуванням формул (1.92) і (1.105) можна записати

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{\alpha \epsilon_0 n_0}{1 - \frac{\alpha n_0}{3}} \vec{E}. \quad (1.106)$$

Звідси

$$\frac{3(\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} = \alpha n_0. \quad (1.107)$$

Співвідношення (1.107) називають *формулою Клаузіуса — Москотті*. Вона задовільно узгоджується з дослідженнями для рідких і газоподібних неполярних діелектриків. Для полярних діелектриків ця формула є непридатною. З рівності (1.107) видно, що ліва частина не залежить від температури і тиску в межах сталості  $\alpha$ . Температура і тиск можуть впливати на сталість лівої частини рівності (1.107) лише через їхній вплив на концентрацію молекул (атомів)  $n_0$ .

Справді, молекули є квантовими системами, внутрішня енергія яких може набувати тільки дискретних значень. При невисоких температурах молекули перебувають у незбудженому стані, тобто на найнижчих енергетичних рівнях, а енергія теплового руху молекул є недостатньою для їхнього збудження. Тому з підвищенням температури внутрішня будова молекул газів не змінюється, а отже, залишається сталою і діелектрична проникність. При досить високих температурах помітна частина молекул дисоціює (термічна дисоціація), збільшується  $n_0$  і тоді  $\epsilon$  залежить від температури.

**Приклад 1.4.** Оцінити поляризованість  $\alpha$  атома водню, якщо напруженість зовнішнього поля  $\vec{E}$  напрямлена перпендикулярно до площини, в якій лежить орбіта руху електрона.

Розв'язання. Умовою стаціонарності руху електрона після накладання зовнішнього поля і поляризації атома є рівність сил  $\vec{f} = \vec{F} \cos \alpha$  (рис. 1.39), або

$$eE = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cos \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Звідси

$$E = \frac{ex}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

При малій поляризації  $x \ll r$

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

або

$$P = 4\pi\epsilon_0 r^3 E = \epsilon_0 \alpha E,$$

де  $\alpha = 4\pi r^3 \approx 1,87 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$ , що збігається за значенням з експериментом. Борівський радіус атома водню прийнято таким, що  $r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

**Приклад 1.5.** Обчислити локальне поле поляризованого діелектрика.

Розв'язання. Для розрахунку напруженості локального поля  $\vec{E}'$  виділимо в середовищі діелектрика фізично малу замкнену поверхню (для спрощення розрахунків — сферу), у центрі якої і будемо обчислювати  $\vec{E}'$ . Напруженість поля  $\vec{E}'$  в точці  $O$  (рис. 1.40) поляризованого діелектрика складатиметься з трьох напруженостей: поля напруженістю  $\vec{E}_1$ , створеного

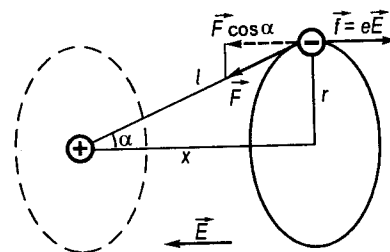


Рис. 1.39

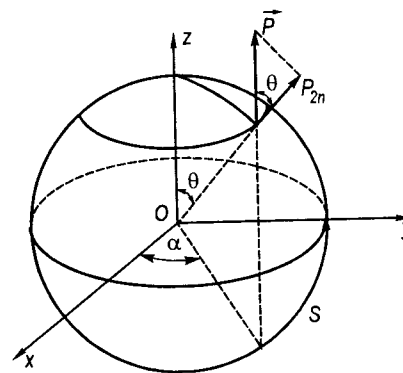


Рис. 1.40

поляризованою речовиною, розміщеною поза сферою; поля напруженістю  $\vec{E}_2$ , створеного поляризованою речовиною всередині сферичної поверхні, і зовнішнього поля напруженістю  $\vec{E}$ , тобто

$$\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}.$$

Для розрахунку  $\vec{E}_1$  припустимо, що зі сфери  $S$  діелектрик видалено. Тоді поле всередині цієї порожнини дорівнюватиме  $\vec{E}_1$ . Оскільки поляризаційні заряди від точки  $O$  розміщуються досить далеко, то можна знехтувати дискретною структурою діелектрика і замінити сукупність молекул неперервно розподіленим по об'єму вектором поляризації  $\vec{P}$ . Оскільки  $S$  є малою, то можна вважати, що вектор за значенням і напрямом у межах  $S$  скрізь однаковий.

Напруженість поля в центрі сфери створюватиметься зв'язаними зарядами на поверхні сфери, які індукуються на межі двох діелектриків з різною діелектричною проникністю:

$$\sigma' = -(P_{2n} - P_n) = -P_{2n}, \quad (1)$$

де  $P_{2n}$  — нормальна складова вектора поляризації із зовнішнього боку сфери, а  $P_n = 0$  — відповідна величина з внутрішнього боку сфери (у вакуумі). Якщо вектор  $\vec{P}$  напрямлений уздовж осі  $Oz$ , то

$$\sigma' = -P_{2n} = P \cos \theta. \quad (2)$$

У тілесному куті  $d\Omega$  міститься заряд

$$dq = \sigma' r^2 d\Omega, \quad (3)$$

де  $r$  — радіус сфери. Цей заряд у центрі сфери створює поле



$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta. \quad (4)$$

Враховуючи формули (2) і (3), з рівності (4) маємо

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} P, \quad (5)$$

або у векторній формі

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}. \quad (6)$$

Формула (6) справджується для нескінченного однорідного діелектрика. Якщо маємо діелектрик скінченних розмірів, то  $\vec{E}_1$  залежатиме від його розмірів і форми, оскільки на поверхні обмеженого діелектрика з'являються поляризаційні (зв'язані) заряди.

У випадку індукційного механізму поляризації всі дипольні моменти молекул речовини всередині сфери напрямлені однаково. Якщо припустити, що окремі молекулярні диполі розміщені у вузлах кристалічної ґратки кубічної структури, а їхнє результуюче поле визначається в одному з вузлів, то з урахуванням знаків створюваних ними полів можна показати, що сумарна напруженість  $\vec{E}_2$  дорівнюватиме нулеві незалежно від розміщення точки, в якій обчислюється це поле. Отже,

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}. \quad (7)$$

Цю формулу треба розглядати як наближену, оскільки прийнята модель не відображає реальних особливостей поляризації речовини залежно від її агрегатного стану, молекулярної структури, симетрії тощо. Проте вона показує, що локальне поле, яке діє на молекули поляризованого діелектрика, відмінне від зовнішнього і що сам діелектрик, поляризований зовнішнім полем, стає джерелом додаткового поля.

### § 1.18. Полярні діелектрики. Електронна теорія поляризації полярних діелектриків

Діелектрики, що складаються з молекул, власний дипольний момент яких за відсутності зовнішнього поля  $\vec{p}_0 \neq 0$ , називають *полярними*. Полярні діелектрики так само, як і неполярні, у разі відсутності зовнішнього поля не поляризовані. Це зумовлено тим, що власні дипольні моменти молекул полярних діелектриків внаслідок теплового руху орієнтуються безладно і їхній сумарний дипольний момент у довільному фізично нескінченно малому об'ємі дорівнює нулеві. Значення  $\vec{p}_0$  кожної молекули при накладанні зовнішнього поля практично не змінюється (жорсткі диполі).

У зовнішньому полі на кожну молекулу-диполь діє пара сил, яка намагається зорієнтувати сталі дипольні моменти  $\vec{p}_0$  у напрямі напруженості поля. Завдяки цьому фізично нескінченно малі об'єми діелектрика набувають результуючих дипольних моментів, тобто діелектрик поляризується. Такий механізм поляризації називають *дипольним* або *орієнтаційним*.

Крім цього, молекули полярних діелектриків набувають також додаткових, індукованих зовнішнім полем, дипольних моментів, і це вносить свій вклад у їхню поляризацію. Проте електронний механізм поляризації для них відіграє незначну роль і ним можна нехтувати. Справді, сталий дипольний момент полярних молекул має порядок  $p_0 = 10^{-29} - 10^{-30}$  Кл·м. Наведений же дипольний момент за формулою  $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$  навіть при  $E = 10^6$  В/м і  $\alpha = 4\pi a^3 = 12,56 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$  матиме порядок  $p \sim 10^{-34}$  Кл·м, тобто в середньому на чотири порядки менший.

Вектор поляризації для полярних діелектриків

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V} = n_0 \langle \vec{p} \rangle, \quad (1.108)$$

де  $\langle \vec{p} \rangle$  — середнє значення дипольних моментів для однорідних речовин, однакових за значенням, але зорієнтованих у просторі по-різному.

Щоб з'ясувати механізм поляризації полярних діелектриків, розглянемо спочатку випадок розріджених газів. Усередині газів напруженість локального поля  $\vec{E}'$  можна вважати такою, що дорівнює напруженості зовнішнього поля  $\vec{E}$ . Поляризація полярних діелектриків у слабкому зовнішньому полі при порівняно високих температурах зростає пропорційно  $\vec{E}$ . Орієнтуючій дії поля перешкоджає тепловий рух молекул-диполів. Поляризація визначається співвідношенням між орієнтуючою дією поля і дезорієнтуючою дією теплового руху. Отже, поляризація полярних діелектриків має залежати від температури.

Припустимо, що в одиниці об'єму діелектрика є  $n_0$  молекул із жорсткими дипольними моментами  $\vec{p}_0$ . Опишемо сферу одиничного радіуса і введемо полярні координати:  $\theta$  — полярний кут і  $\alpha$  — довгота (рис. 1.41). Полярну вісь зорієтуємо у напрямі  $\vec{E}$ . Орієнтація дипольного моменту  $\vec{p}_0$  довільної молекули визначатиметься координатами  $\theta$  і  $\alpha$  точки  $A$  перетину продовження  $\vec{p}_0$  з одиничною поверхнею сфери (так званий слід диполя на одиничній сфері). Якщо зовнішнього поля немає ( $\vec{E} = 0$ ), то осі диполів  $\vec{p}_0$  рівномірно розподілені в усіх напрямках і, отже, густина слідів диполів на поверхні сфери однакова, а їхня кількість пропорційна площі елемента сфери.

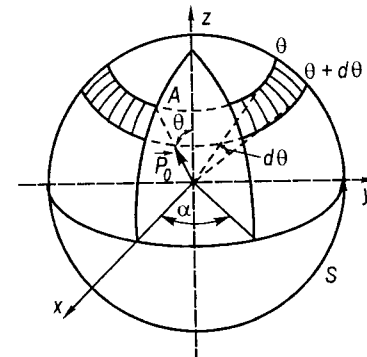


Рис. 1.41

Так, кількість слідів диполів  $dn$  на сферичному поясі, обмеженому полярним кутом  $\theta$  і  $\theta + d\theta$  (заштрихована частина), площа поверхні якого  $2\pi \sin\theta d\theta$ ,

$$dn = C \sin\theta d\theta, \quad (1.109)$$

де  $C$  — деяка константа.

При накладанні зовнішнього поля  $\vec{E}$  диполі  $\vec{p}_0$  зазнають переважної орієнтуючої дії в напрямі поля і, отже, концентрація слідів диполів на одиничній сфері вже не буде однаковою, а закон їхнього розподілу визначатиметься законом Больцмана. За цим законом розподіл молекул в умовах термодинамічної рівноваги у довільному потенціальному полі відрізняється від закону їхнього розподілу за відсутності поля співмножником  $e^{-W_p/kT}$ , де  $W_p$  — потенціальна енергія молекул у заданому полі;  $kT$  — енергія теплового руху молекул ( $k$  — стала Больцмана,  $T$  — абсолютна температура).

Диполь з моментом  $\vec{p}_0$ , який міститься в електричному полі напруженістю  $\vec{E}$ , має потенціальну енергію

$$W_p = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = qd\varphi = q\vec{l} \text{ grad } \varphi,$$

або

$$W_p = -\vec{p}_0 \vec{E}. \quad (1.110)$$

Рівність (1.109) за наявності зовнішнього поля запишеться так:

$$dn = C e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta, \quad (1.111)$$

де  $dn$  — кількість молекул, орієнтація осей дипольних моментів яких відносно напрямку поля лежить у межах від  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ . Як видно з формули (1.111), відхилення від рівномірного розподілу молекул

визначається співмножником  $e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}}$ , значення якого збільшується з ростом  $E$  і зменшенням  $T$ . Фізично це зрозуміло, оскільки орієнтуюча дія поля зростає зі збільшенням  $E$  і зниженням  $T$ .

При звичайних температурах і невеликих полях  $\frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \ll 1$ .

Тому співмножник  $e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}}$  можна розкласти в ряд і обмежитись першими двома членами цього ряду

$$e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} = 1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta + \dots \quad (1.112)$$

Тоді

$$dn = C \left( 1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta. \quad (1.113)$$

Коефіцієнт пропорційності  $C$  визначимо з умови, що загальна кількість молекул в одиниці об'єму дорівнює  $n_0$ :

$$\begin{aligned} \int dn &= \int_0^\pi C \left( 1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta = \\ &= C \int_0^\pi \sin \theta d\theta + C \frac{p_0 E}{kT} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = 2C + 0 = n_0. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Другий доданок у лівій частині рівності (1.114) дорівнює нулеві, оскільки він є сумою проєкцій диполів на полярну вісь. Ці проєкції статистично однаково часто набувають додатних значень і таких самих за модулем від'ємних. З (1.114) маємо, що  $C = \frac{n_0}{2}$ . Тоді

$$dn = \frac{n_0}{2} \left( 1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta. \quad (1.115)$$

Знаючи розподіл осей молекул за напрямками, визначимо результуючий дипольний момент одиниці об'єму молекул, тобто вектор поляризації  $\vec{P}$ . Для ізотропного діелектрика вектор  $\vec{P}$  колінеарний векторові  $\vec{E}$ . Отже, його числове значення дорівнюватиме сумі проєкцій дипольних моментів всіх  $n_0$  молекул на полярну вісь, напрям якої збігається з  $\vec{E}$ . Проєкція всіх  $dn$  диполів, осі яких спрямовані між  $\theta$  і  $\theta + d\theta$  на цю вісь, дорівнюватиме  $p_0 dn \cos \theta$ , а модуль вектора поляризації

$$P = \int_0^\pi p_0 dn \cos \theta = \frac{p_0 n_0}{2} \int_0^\pi \cos \theta \left( 1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta = \frac{n_0 p_0^2 E}{3kT}. \quad (1.116)$$

Співвідношення (1.116) запишемо у вигляді  $\vec{P} = \alpha \vec{E}$ , де  $\alpha = \frac{n_0 p_0^2}{3kT}$ .

При великих напруженостях поля  $\vec{E}$  і низьких температурах  $T$  пропорційність між  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$  порушується, а значення  $\vec{P}$  наближається до максимального (поляризація насичення  $\vec{P}_{\max} = n\vec{p}_0$ , де  $n$  — загальна кількість молекул поляризованого діелектрика) і наступне збільшення  $\vec{E}$  не спричиняє зростання  $\vec{P}$ . Напруженість поля, при якій настає насичення поляризації полярного діелектрика, називають *напруженістю поля насичення*. Якщо взяти  $p_0 = 10^{-29}$  Кл·м і

$T = 300 \text{ K}$ , то  $E_{\text{нас}} \approx \frac{kT}{p_0} \approx 4,2 \cdot 10^8 \text{ В/м}$ . Отже, умова  $p_0 E \ll kT$ , при якій правильно є формула (1.116), справджується при кімнатних температурах для напруженостей поля до мільйонів вольт на метр.

Оскільки  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то з урахуванням (1.116) одержимо

$$\epsilon = 1 + \frac{n_0 p_0^2}{3\epsilon_0 kT}. \quad (1.117)$$

Якщо врахувати ще електронну поляризацію, то вираз для  $\epsilon$  полярних газоподібних діелектриків матиме вигляд

$$\epsilon = 1 + n_0 \left( \alpha + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} \right). \quad (1.118)$$

Оскільки  $\alpha \approx 10^{-29} \text{ м}^3$ , а для кімнатних температур  $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$  і  $p_0 \approx 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ , то  $\frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} \approx 10^{-27} \text{ м}^3$ , тобто внесок у поляриза-

ність індукованих дипольних моментів приблизно в 100 разів менший від внеску сталих дипольних моментів. Отже, цим внеском здебільшого можна нехтувати. За допомогою сучасних експериментальних методів виділяють внесок в поляризацію електронної і дипольної складових. З цією метою досліджують залежність  $\epsilon$  від  $1/T$  і будують графік залежності  $\epsilon - 1 = f(1/T)$  (рис. 1.42). Екстраполюючи залежність  $\epsilon(1/T)$  в область високих температур, пряма лінія відтне відрізок  $OA = n_0 \alpha$ . На основі цього розраховують  $\alpha$ , а за нахилом графіка — сталий дипольний момент  $p_0$ . Розраховані величини задовільно збігаються з дослідними даними, отриманими за методом Штерна (відхилення пучків молекул у вакуумі в неоднорідному електричному полі). Для газів при великих тисках і для рідин треба враховувати відмінність локального поля  $\vec{E}'$  від зовнішнього  $\vec{E}$ , а також

взаємодію елементарних диполів між собою. Це досить ускладнює розрахунки. Тому для створення теорії поляризації полярних газів при високих тисках і рідин користуються іншими моделями поляризації.

### § 1.19. Іонна поляризація

Разом з електронною (індукційною) і дипольною (орієнтаційною) поляризаціями існує ще один механізм поляризації. Цей механізм стосується іонних твердих діелектриків. У зовнішньому електрично-

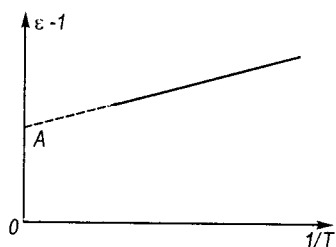


Рис. 1.42

му полі позитивні іони кристалічної ґратки зміщуються у напрямі напруженості поля  $\vec{E}$ , а негативні — проти. Внаслідок цього відбувається певна деформація кристалічної ґратки або, як часто говорять, зміщення позитивної і негативної підґраток, що зумовлює виникнення дипольних моментів, тобто поляризацію діелектриків. Таку поляризацію називають *іонною*. Теорію іонної поляризації будують аналогічно теорії поляризації неполярних діелектриків.

До іонних кристалів належить велика група твердих діелектриків, в яких переважають гетерополярні (кулонівські) сили взаємодії між частинками. Це лужно-галогідні кристали, а також слюда, кварц, мармур. Зауважимо, що реальні зв'язки частинок у кристалах найчастіше змішані. Розглядаючи іонні кристали, інколи не можна нехтувати в них ковалентним, молекулярним або водневим зв'язком атомів. Проте треба завжди мати на увазі, що переважає в них іонний зв'язок. В іонних кристалах електронна пружна деформація є слабкою порівняно зі зсувом катіонних та аніонних підґраток.

### § 1.20. Електричне поле на межі двох середовищ. Граничні умови

На межі двох середовищ з різними діелектричними властивостями вектори електричного поля змінюються за значенням і напрямом. Умови поведінки векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  на межі поділу середовищ називають *граничними*. Ці умови отримують із основних рівнянь поля. Встановимо спочатку граничні умови для нормальної складової вектора  $\vec{D}$ . Для цього скористаємось рівнянням  $\text{div} \vec{D} = \rho$ , або в інтегральній формі для випадку поверхневого розподілу вільних зарядів  $\sigma_0$

$$\int_S \vec{D}_n dS = \int_S \sigma_0 dS.$$

Нехай дано поверхню поділу  $S_{12}$  діелектриків 1 і 2 з діелектричними проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  (рис. 1.43).

Виділимо на поверхні  $S_{12}$  елементарну площу  $S_0$ , у межах якої поверхневу густину вільних зарядів можна вважати однаковою ( $\sigma_0 = \text{const}$ ). Побудуємо навколо  $S_0$  замкнену, наприклад циліндричну, поверхню і визначимо потік вектора індукції поля  $\vec{D}$ , створеного зарядами  $\sigma_0$ , крізь циліндричну поверхню  $S$ . Поставимо нормалі до зовнішніх частин поверхонь  $S_{12}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ . Тоді

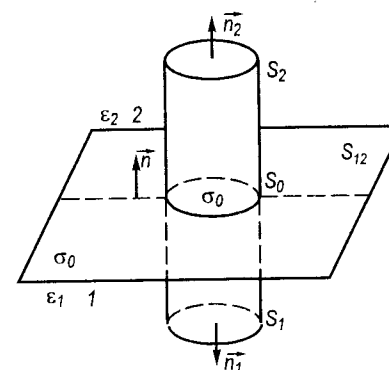


Рис. 1.43

$$N = \oint_S D_n dS = \int_{S_2} D_2 n_2 dS + \int_{S_1} D_1 n_1 dS + \int_{S_6} D_n dS = \int_{S_0} \sigma_0 dS.$$

Оскільки  $\vec{n}_2 \uparrow \uparrow \vec{n}$ , а  $\vec{n}_1 \uparrow \downarrow \vec{n}$ , то  $D_2 n_2 = D_{2n}$ , а  $D_1 n_1 = -D_{1n}$ .

Для знаходження граничних умов на межі поділу середовищ 1 і 2 прийемо, що висота циліндра  $h \rightarrow 0$ . При цьому  $S_6 \rightarrow 0$  і, отже,  $\int_{S_6} D_n dS = 0$ . Значення  $D_2$  і  $D_1$  у місцях розташування поверхонь  $S_2$  і  $S_6$

$S_1$  вважатимемо сталими, тому їх можна вивести з-під знаків інтегралів. Після інтегрування за відповідними поверхнями одержимо

$$D_{2n} S_2 - D_{1n} S_1 = \sigma_0 S_0.$$

Прийемо  $S_1 = S_2 = S_0$ , тоді

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0. \quad (1.119)$$

Це і є гранична умова для нормальної складової вектора індукції електростатичного поля  $\vec{D}$ . Як видно, при переході межі поділу двох діелектриків значення нормальної складової вектора  $\vec{D}$  стрибком змінюється на величину  $\sigma_0$ . Якщо  $\sigma_0 = 0$  (вільних зарядів на межі поділу немає), то  $D_{2n} = D_{1n}$ , тобто нормальна складова вектора  $\vec{D}$  не змінюється. Нормальна ж складова вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  при цьому змінюється і розмір цієї зміни залежить від співвідношення діелектричних проникностей середовищ  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ . Справді,  $\epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n}$ . Звідси

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (1.120)$$

На межі провідника і діелектрика з поверхневим розподілом вільних зарядів  $\sigma_0$  гранична умова визначається формулою (1.119). Якщо вважати середовище 1 провідником, то, як відомо, у ньому  $\vec{E}_1 = 0$ , тому  $D_{1n} = 0$  і, отже,  $D_{2n} = \sigma_0$ , або  $D_n = \sigma_0$ . Відповідно для нормальної складової напруженості  $\vec{E}$  поля

$$E_n = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.121)$$

У випадку контакту провідника з вакуумом ( $\epsilon = 1$ )

$$E_n = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}. \quad (1.122)$$

З рівностей (1.121) і (1.122) видно, що напруженість електричного поля біля поверхні провідника за наявності діелектрика зменшується в  $\epsilon$  разів. Формула (1.121) дає фактично безпосередній розв'язок

задачі про поле в плоскому конденсаторі. При цьому в явному вигляді не довелось враховувати зв'язаних поверхневих зарядів у діелектрику між обкладками конденсатора.

Виведемо граничні умови для тангенціальної складової вектора  $\vec{E}$ , тобто простежимо, як поводить себе дотична складова вектора  $\vec{E}$  до поверхні поділу двох діелектриків.

Побудуємо поблизу межі поділу діелектриків 1 і 2 замкнений контур  $ABCD$  (рис 1.44). Оскільки електростатичне поле є потенціальним, то циркуляція вектора  $\vec{E}$  дорівнює нулеві

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.123)$$

Для замкненого контура  $ABCD$  з формули (1.123) маємо

$$\int_{l_2} \vec{E} dl + \int_{BC} \vec{E} dl + \int_{l_1} \vec{E} dl + \int_{DA} \vec{E} dl = 0. \quad (1.124)$$

Щоб одержати граничну умову для тангенціальної складової вектора  $\vec{E}$  на межі поділу середовищ, спрямуємо висоту  $AD = BC$  обраного контура до нуля. Тоді

$$\int_{l_2} E_2 \tau_2 dl + \int_{l_1} E_1 \tau_1 dl = 0. \quad (1.125)$$

Оскільки  $\vec{\tau}_2 \uparrow \uparrow \vec{\tau}$ , а  $\vec{\tau}_1 \uparrow \downarrow \vec{\tau}$ , то  $E_2 \tau_2 = E_{2\tau}$  і  $E_1 \tau_1 = -E_{1\tau}$ . Тоді вираз (1.125) запишеться так:  $E_{2\tau} l_2 - E_{1\tau} l_1 = 0$ . Якщо  $l_1 = l_2 = l$ , то одержимо

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (1.126)$$

Звідси видно, що тангенціальна складова вектора напруженості електростатичного поля не змінюється при переході межі поділу двох середовищ з різними діелектричними властивостями:  $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ .

Якщо взяти межу поділу провідника (середовище 1) і діелектрика (середовище 2), то при цьому  $E_{1\tau} = 0$  (всередині провідника поля немає) і, отже,  $E_{2\tau} = 0$ . Це означає, що вектор напруженості електростатичного поля завжди перпендикулярний до межі поділу провідник — діелектрик або провідник — вакуум.

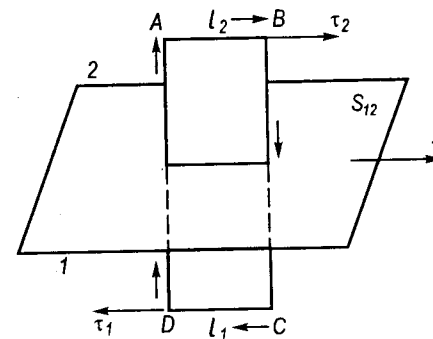


Рис. 1.44

З умов  $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$  і  $E_{1t} = E_{2t}$  видно, що при  $\epsilon_2 > \epsilon_1$   $E_{2n} < E_{1n}$ , тобто силові лінії електростатичного поля заломлюються, відхиляючись більше від нормалі при переході в середовище з більшою діелектричною проникністю. Виведемо закон заломлення силових ліній поля. З рис. 1.45 видно, що  $E_{1n} = \frac{E_{1t}}{\operatorname{tg}\alpha}$ , а  $E_{2n} = \frac{E_{2t}}{\operatorname{tg}\beta}$ . Взятвши до уваги

рівності  $E_{1t} = E_{2t}$  і  $\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ , одержимо

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (1.127)$$

**Приклад 1.6.** Визначити напруженість, вектор поляризації і значення зв'язаних зарядів для електростатичного поля, створеного точковим зарядом  $q$ , що розміщений у центрі двох концентричних сфер радіусами  $a_1$  і  $a_2$ . Діелектрична проникність сферичного шару речовини між  $a_1$  і  $a_2$  дорівнює  $\epsilon$  (рис. 1.46).

Розв'язання. Поле навколо заряду  $q$  має сферичну симетрію. Оберемо допоміжну сферичну поверхню радіуса  $r$  з центром у точці розміщення заряду  $q$ . Індукцію електростатичного поля в точках сферичної поверхні радіуса  $r$  визначимо за теоремою

Гаусса  $\int_S D_r dS = q$ , або  $D_r \cdot 4\pi r^2 = q$ . Звідси  $D_r = \frac{q}{4\pi r^2}$ . Тоді

$$\text{для } r < a_1 \quad E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

$$\text{для } a_1 < r < a_2 \quad E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2},$$

$$\text{для } r > a_2 \quad E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Отже, радіальна складова напруженості зазнає розривів на поверхнях сферичних куль при  $r = a_1$  і  $r = a_2$ .

Вектор поляризації визначаємо за формулою  $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$

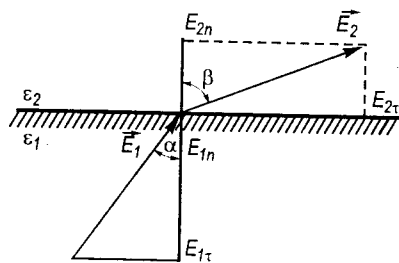


Рис. 1.45

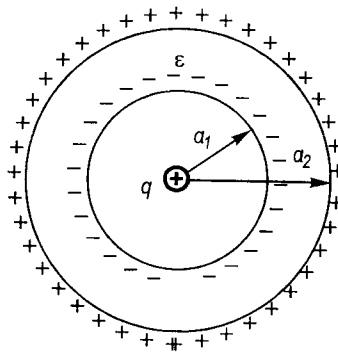


Рис. 1.46

$$\text{для } r < a_1 \quad P_r = D_r - \epsilon_0 E_r = 0;$$

$$\text{для } a_1 < r < a_2 \quad P_r = D_r - \epsilon_0 E_r = \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon r^2},$$

$$\text{для } r > a_2 \quad P_r = D_r - \epsilon_0 E_r = 0.$$

Поверхнева густина зв'язаних зарядів

$$\text{при } r = a_1 \quad \sigma_{зв1} = -P_r = -\frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon a_1^2},$$

$$\text{при } r = a_2 \quad \sigma_{зв2} = P_r = \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon a_2^2}.$$

Значення заряду на внутрішній межі поділу поверхонь  $q_{зв1} = \sigma_{зв1} \cdot 4\pi a_1^2 = -\frac{(\epsilon - 1)q}{\epsilon}$  і на зовнішній  $q_{зв2} = \sigma_{зв2} \cdot 4\pi a_2^2 = \frac{(\epsilon - 1)q}{\epsilon}$ . Як видно, ці заряди є однаковими за значенням і протилежними за знаками.

## § 1.21. Основна задача електростатики

Основною задачею електростатики є визначення характеристик електричного поля, утвореного системою зарядів на провідниках.

Можливі дві постановки задач електростатики.

1. Відомим є потенціал  $\phi(x, y, z)$  як функція просторових координат. Диференціюванням за координатами відповідно до формули  $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$  визначають напруженість електростатичного поля. Знаючи діелектричну проникність  $\epsilon$  з експериментальних вимірювань, наприклад, вимірювань ємності плоского або циліндричного конденсатора у вакуумі  $C_0$  та заповненого діелектричним однорідним середовищем  $C$  ( $\epsilon = C / C_0$ ), розраховують  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ . Потім за формулою  $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$  визначають об'ємну густину заряду  $\rho$ , а на основі граничної умови  $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$  визначають поверхневу густину вільних зарядів.

2. Відомою є густина неперервно розподілених вільних електричних зарядів в однорідному діелектрику. Тоді за формулою

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

визначають потенціал у точці з радіусом-вектором  $\vec{r}$ , а потім обчислюють всі інші параметри подібно до задачі 1. Радіус-вектор  $\vec{r}$  є центром елемента об'єму  $dV'$ , в якому розподілений заряд з об'ємною густиною  $\rho(\vec{r}')$  та поверхневою густиною  $\sigma(\vec{r}')$ . Інтегрування проводиться за всією областю розподілу вільних зарядів.

Загальна задача електростатики формулюється так. В однорідному діелектричному середовищі задано розміщення і форму всіх

провідників. Відомо також діелектричну проникність середовища  $\epsilon$ , що заповнює простір між провідниками, та об'ємну густину вільних електричних зарядів в усіх точках досліджуваного простору. Крім того, відомо або потенціали всіх провідників, або їхні заряди, або потенціали частини провідників і заряди всіх інших. Завдання полягає у визначенні силових характеристик  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  в усіх точках простору та розподілу зарядів на провідниках. Ця задача зводиться до розв'язку диференціального рівняння Пуассона з урахуванням початкових і граничних умов. Тут можуть бути дві постановки основної задачі.

1. Відомо потенціали провідників. Потрібно визначити вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  в просторі поза провідниками і закон розподілу густини зарядів на провідниках. Задача зводиться до відшукування такої потенціальної функції  $\phi$ , яка задовольняє рівняння Лапласа  $\nabla^2 \phi = 0$  в об'ємі поза провідниками, дорівнює нулеві на нескінченності та набуває заданих значень на поверхнях провідників.

2. Відомо повні заряди провідників. Потрібно визначити потенціали провідників, густину зарядів на їхніх поверхнях та вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  поза провідниками. Задача зводиться також до відшукування функції  $\phi$ , яка задовольняє рівняння Лапласа поза провідниками, дорівнює нулеві на нескінченності, а на поверхнях провідників набуває певних і не заданих сталих значень і задовольняє інтегральне рівняння

$$-\epsilon_0 \epsilon \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = q_i,$$

де  $q_i$  — повний заряд  $i$ -го провідника, а саме рівняння встановлюється на основі рівностей  $D_n = \sigma$  та  $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ .

В електростатиці важливою є теорема єдиності: *якщо знайдено розв'язок основної задачі електростатики, то він єдиний*. Інакше кажучи, якщо знайдено функцію  $\phi$ , яка задовольняє умови задачі, то цей розв'язок буде єдино правильним.

### § 1.22. Спонтанно поляризовані діелектрики

Розглянуті раніше неполярні і полярні діелектрики мають ту особливість, що вони поляризуються тільки під час накладання зовнішнього електричного поля, а після припинення його дії знову повертаються в неполяризований стан.

Однак у природі існує велика група діелектриків, переважно у твердому кристалічному стані, які виявляють макроскопічну поляризованість навіть за відсутності зовнішнього електричного поля. Це спонтанно (від лат. *spontaneus* — довільний) поляризовані діелектрики, тобто такі, поляризація яких зумовлена не зовнішніми діями, а внутрішніми причинами. До спонтанно поляризованих діелектриків належать так

звані піроелектрики і сегнетоелектрики. Спонтанна поляризація є наслідком зміщення центрів позитивних і негативних зарядів кристалічної ґратки речовини.

Піроелектрика (від гр. *πυρ* — вогонь) — це явище виникнення електричних зарядів на поверхні деяких кристалічних діелектриків при їх нагріванні або охолодженні. Суть цього явища така. У деяких кристалічних діелектриків у стані термодинамічної рівноваги внаслідок дії внутрішніх сил підґратка позитивних іонів зміщена відносно підґратки негативних іонів. Це зумовлює їхню спонтанну макроскопічну поляризацію. Ефект спонтанної поляризації безпосередньо не виявляється, оскільки зв'язані заряди, що виникають на поверхні діелектриків, з часом розсмоктуються або швидко компенсуються іонами протилежного знака, що адсорбуються з повітря. Однак при швидкій зміні температури змінюється і зміщення іонних підґраток кристалів, завдяки чому на гранях виникають додаткові зв'язані заряди протилежних знаків, тобто змінюється їхня поляризованість. Наявність цих зарядів і фіксують у макроскопічних дослідах. Виникнення на поверхні кристалів зв'язаних зарядів при зміні температури називають *прямим піроелектричним ефектом*, а самі кристали — *піроелектриками*.

Густина зарядів  $\sigma_{зв}$ , які при цьому виникають, пропорційна зміні температури  $\Delta T$

$$\sigma_{зв} = \rho \Delta T,$$

де  $\rho$  — піроелектрична константа, значення якої близько  $10^{-3}$  Кл/(м<sup>2</sup> · К).

Найвідомішим з давніх часів піроелектриком є турмалін (боратосилікатний мінерал змінного складу). Ще у XVIII ст. в Європі було відомо, що кристал турмаліну, вміщений у гарячий попіл, спочатку притягає його частинки, а потім відштовхує. Німецький фізик А. Кундт (1839—1894) для виявлення піроелектричного ефекту запропонував помістити кристал турмаліну в суміш сурику і сірки. Під час взаємодії цих речовин одна з них (сурик) заряджається позитивно, а інша (сірка) — негативно. Отже, ті грані кристала турмаліну, які під час нагрівання заряджаються позитивно, будуть покриватися сіркою і зафарбовуватися в жовтий колір, а негативно заряджені грані покриватимуться суриком і зафарбовуватимуться в червоний колір. Різноїменно заряджені грані виявляються розміщеними на протилежних частинах кристала. Щоб пересвідчитися, що турмалін спонтанно поляризований за нормальних зовнішніх умов без зміни температури, потрібно проводити дослідження відразу після свіжого сколювання граней. Однак ця поляризація швидко спадає до нуля.

Із зміною температури змінюється спонтанна поляризація піроелектриків. Оскільки нейтралізація зв'язаних зарядів настає не миттєво, то деякий час спостерігається їхня макроскопічна поляризація. З часом, якщо температура не змінюється, поляризованість піроелектриків спадає аж до нейтралізації, як уже зазначалось, переважно через адсорбцію іонів із навколишнього середовища. При накладанні зовнішнього електричного поля на кристали піроелектриків їхня поляризованість змінюється дуже слабо. Це свідчить про те, що за відсутності зовнішнього поля кристали піроелектриків практично поляризовані до насичення. Особливістю піроелектриків є те, що в них при зміні температури і замиканні протилежних граней провідником виникає електричний струм, напрям якого змінюється залежно від того, нагрівається піроелектрик чи охолоджується. Цей процес оборотний і може бути повторений багаторазово.

Як відомо, із зміною температури змінюються і розміри кристалів, тобто вони деформуються (теплова деформація). Це є причиною виникнення на поверхні кристалів додаткових зв'язаних зарядів. Тому поляризованість кристалів у разі зміни температури, але при незмінній об'ємі і формі, якщо немає градієнта температури, називають *первинним піроелектричним ефектом*.

Піроелектрики в природі досить поширені. Із 32 класів симетрії кристалів піроелектричні властивості мають 10. На основі законів термодинаміки й існування прямого піроелектричного ефекту можна стверджувати, що має існувати й *обернений піроелектричний ефект*. Він полягає у тому, що зі зміною напруженості електричного поля  $\vec{E}$  в умо-

вах адіабатної ізоляції змінюється температура піроелектричного матеріалу. Цей ефект називають ще *електрокалоричним*.

Крім турмаліну, до піроелектриків належать сульфат літію, цукор, окремі види кераміки тощо. Характерною особливістю їх є відсутність фазових переходів і наявність поляризації в усій області температур їхнього існування. Піроелектрики широко застосовуються в сучасній техніці, насамперед як індикатори і приймачі випромінювання та пристрої теплового бачення.

### § 1.23. Сегнетоелектрика

Експериментальні дослідження піроелектриків показали, що за своєю поведінкою в зовнішньому електричному полі вони можуть бути поділені на лінійні і нелінійні діелектрики. Цей поділ визначається характером залежності  $\bar{P}(\bar{E})$ . З-поміж нелінійних твердих діелектриків найпоширенішими є сегнетоелектрики.

*Сегнетоелектриками* називають полярні кристалічні діелектрики, які в певному інтервалі температур спонтанно поляризовані, а вектор спонтанної поляризації істотно залежить від зовнішніх впливів (електричних полів, змін температури тощо). На межах інтервалу температур спонтанної поляризації сегнетоелектрики зазнають фазових переходів і стають звичайними полярними діелектриками. Цим вони відрізняються від піроелектриків. Крім того, на відміну від піроелектриків, значення і напрям спонтанної поляризації їх можуть бути змінені навіть у порівняно слабких електричних полях.

Напрямок, паралельний векторові спонтанної поляризації  $\bar{P}_s$ , сегнетоелектрика, називають його *полярною віссю*. Сегнетоелектрик може мати одну (сегнетова сіль) або кілька (титанат барію) полярних осей. Із 32 класів симетрії кристалів 20 є нецентросиметричними, причому 10 із них мають полярну вісь. Внаслідок далекого порядку в монокристалах мікроскопічна симетрія визначає симетрію макроскопічну. Наявність полярної осі є наслідком відсутності будь-яких елементів симетрії, зміна яких спричиняла б зміну просторової орієнтації цієї осі. Отже, ці 10 класів кристалів потенціально є піроелектриками і в них спонтанна поляризація визначається симетрією монокристалів. Модифікацію кристалів, в яких сегнетоелектрики є спонтанно поляризованими, називають *полярною фазою*.

З підвищенням температури вище деякого значення  $T_K$ , характерного для кожного сегнетоелектрика, відбувається фазовий перехід, внаслідок якого сегнетоелектричні властивості зникають і кристал переходить у звичайний неполярний діелектрик. Такий стан кристала називають *параелектричним*, а фазу — *неполярною*. Температуру  $T_K$  називають *температурою Кюрі* або точкою фазового переходу — *точкою Кюрі*. Здебільшого сегнетоелектрики мають одну точку Кюрі, нижче від якої діелектричні кристали є сегнетоелектриками,

а вище — звичайними полярними діелектриками. Однак сегнетова сіль ( $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  — подвійна натрієво-калієва сіль винної кислоти з чотирма молекулами кристалізаційної води), а також солі  $\text{AgH}_3\text{JO}$  і  $\text{AgD}_3\text{JO}_6$  та деякі інші мають дві точки Кюрі (нижню  $T_{K,n}$  і верхню  $T_{K,v}$ ), тобто сегнетоелектричні властивості зникають із зниженням температури нижче від певної межі. Наприклад, для сегнетової солі  $T_{K,n} = 255 \text{ K} (-18^\circ \text{C})$ , а  $T_{K,v} = 297 \text{ K} (+24^\circ \text{C})$ .

Сегнетоелектрики мають ряд аномальних фізичних властивостей. У 1880 р. французькі фізики Жан (1855—1941) і П'єр (1859—1906) Кюрі відкрили і дослідили явище аномально великої електричної поляризації кристалів сегнетової солі під дією механічних напруг (п'єзоефект). Аномально високі діелектричні властивості сегнетової солі були відкриті американським вченим Дж. Валашеком у 1921 р. Грунтовні дослідження аномалій сегнетової солі виконали в 1930 р. російські радянські фізики І. В. Курчатов (1903—1960) і П. П. Кобеко (1897—1954). До речі, від назви сегнетової солі походить термін «сегнетоелектрика», який вперше ввів у науку І. В. Курчатов. Дослідженнями Б. М. Вула (н. 1903 р.) і І. М. Гольдмана (н. 1910 р.) в колишньому СРСР та незалежно від них Вейнера і Соломона в США; а також С. Огави в Японії у 1944 р. були відкриті аномальні діелектричні властивості титанату барію ( $\text{BaTiO}_3$ ,  $T_K = 393 \text{ K} (120^\circ \text{C})$ ), який завдяки своїм фізико-хімічним властивостям набув широкого практичного застосування, що сприяло одночасно активізації теоретичних і експериментальних досліджень сегнетоелектриків. Внаслідок досліджень виявилось, що сегнетоелектричні явища в природі є досить поширеними. У наш час відомо понад 600 сегнетоелектричних речовин, 2/3 з них — це подвійні й потрійні оксиди металів (титанати, цирконати, ніобати, танталати, вольфрамати, молібдати, телурати, германати, фосфати, сульфати, борати, нітрати тощо), але є й органічні сполуки, полімери, рідкі кристали. Відомості про сегнетоелектричні явища і структуру сегнетоелектриків завдяки сучасним методам дослідження (ядерно-магнітний і електронний парамагнітний резонанси та ін.) швидко наростають, і вчення про них уже стало окремим розділом фізики твердого тіла.

У сегнетоелектричних кристалах спонтанна поляризація може бути зумовлена усіма трьома типами поляризації: електронною, іонною й орієнтаційною. Ці складові по-різному впливають на сумарну поляризацію залежно від атомної будови кристалів, характеру хімічних зв'язків, фізичних характеристик складових атомів, а також від зовнішніх умов (електричних полів, температури, тиску тощо).

З усіх сегнетоелектриків  $\text{BaTiO}_3$  має найпростішу кристалічну структуру. При температурі, вищій за  $120^\circ \text{C}$  (неполярна фаза), він

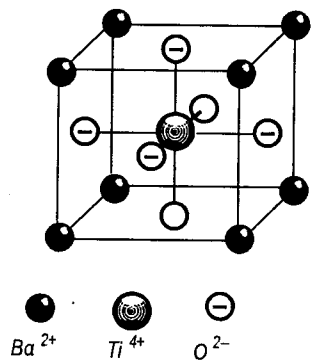


Рис. 1.47

має кубічну гратку типу перовськіту (мінерал перовськіт  $\text{CaTiO}_3$ ) з центром симетрії (рис. 1.47), внаслідок чого він неполяризований і не має сегнетоелектричних властивостей. У температурному інтервалі  $5 - 120^\circ\text{C}$  кристали  $\text{BaTiO}_3$  під час фазового переходу набувають тетрагональної модифікації з іншим порядком симетрії. При цих переходах відбувається зміщення іонів (переважно катіонів  $\text{Ti}^{4+}$ ) відносно симетрично розміщених у вершинах правильних октаєдрів аніонів  $\text{O}^{2-}$ , внаслідок чого  $\text{BaTiO}_3$  поляризується і набуває сегнетоелектричних властивостей. Полярний стан

елементарних ґраток  $\text{BaTiO}_3$  схематично зображено на рис. 1.48, а, б; неполярний — на рис. 1.48, в.

Кристали сегнетової солі при температурах  $T < T_{\text{К.н}}$  і  $T > T_{\text{К.в}}$  (неполярна фаза) мають ромбічну модифікацію. В інтервалі температур  $T_{\text{К.н}} < T < T_{\text{К.в}}$  внаслідок фазових переходів вони набувають моноклінної модифікації, порядок симетрії зменшується і кристали переходять у полярну фазу. Дипольні моменти окремих елементарних ґраток завдяки дуже сильній взаємодії між собою переважно орієнтуються в тому самому напрямі, а отже, кристалічний діелектрик набуває спонтанної поляризації.

Аналогічна переважаюча орієнтація можлива і для інших полярних діелектриків. Оскільки сталі дипольні моменти значно перевищують індуковані, то їхня переважаюча орієнтація в одному напрямі може спричинити дуже сильну поляризованість, а отже, діелектричну аномалію. Перехід у неполярну фазу зумовлений послабленням взаємодії між молекулярними диполями та їх дезорієнтацією.

У полярному інтервалі температур спонтанно поляризований стан сегнетоелектрика є статистично ймовірнішим, ніж неполяризова-

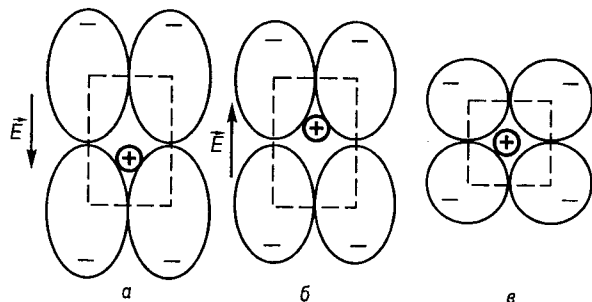


Рис. 1.48

ний. Якби було навпаки, то сегнетоелектрик поступово переходив би в неполярну фазу в тому самому інтервалі температур, але реально цього не відбувається. Рівноважному станові макроскопічної системи відповідає мінімум енергії. Отже, спонтанно поляризований стан сегнетоелектрика, як рівноважний, повинен мати мінімум енергії, що можливо за умови, коли зовнішнє поле спонтанно поляризованого діелектрика прямуватиме до нуля, тобто за умови доменного характеру поляризації з однаковою орієнтацією диполів у межах кожного домена (від фр. *domaines*, тут — ділянки, області однорідної спонтанної поляризації) і різною просторовою орієнтацією поляризації окремих доменів. Схематичне зображення доменів тетрагональної модифікації  $\text{BaTiO}_3$  показано на рис. 1.49. Стрілки і знаки  $\ominus$  та  $\oplus$  вказують напрям вектора  $\vec{P}_s$ . У такому разі поля окремих доменів взаємно компенсуватимуться і сегнетоелектрик у цілому не виявлятиме електричного поля. Вільна енергія спонтанного поля діелектрика буде мінімальною. До якої межі йде поділ сегнетоелектрика на домени? Щоб відповісти на це запитання, треба мати на увазі, що збільшення кількості доменів через зменшення їх розмірів спричиняє збільшення поверхні поділу і відповідно вільної поверхневої енергії між доменами, що також стає енергетично не вигідним. Процес поділу на домени звичайно припиняється тоді, коли повна енергія, яка складається з внутрішньої енергії всіх доменів, енергії зовнішнього поля і поверхневої енергії між доменами, стає мінімальною. Доменна структура реального сегнетоелектрика визначається природою і характером розподілу дефектів, а також його попередньою історією. Кількість доменів та взаємна орієнтація їхньої спонтанної поляризації залежать від симетрії кристалів. Форма, орієнтація і розміри доменів змінюються зі змінами температури, тиску, зовнішнього електричного поля тощо. Отже, якщо у звичайних піроелектриках спонтанна поляризація  $\vec{P}_s$  по всьому об'ємі має один напрям, тобто елементарні диполі зорієнтовані в один бік (рис. 1.50, а), то у сегнетоелектриках однакова орієнтація диполів спостерігається лише в межах кожного окремого домена, а орієнтації диполів сусідніх доменів не збігаються (рис. 1.50, б). Існує окремий тип сегнетоелектриків, в яких у межах кожного домена орієнтація окремих диполів є антипаралельною. Їх називають *антисегнетоелектриками* (рис. 1.50, в).

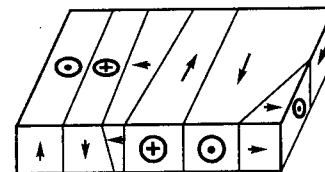


Рис. 1.49

Створено ряд експериментальних методів дослідження доменної структури сегнетоелектриків. До них належить метод заряджених порошків (про цей метод йшлося раніше). Метод декорування доменів



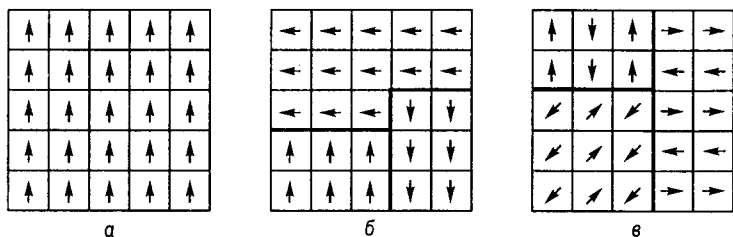


Рис. 1.50

полягає в нанесенні на поверхню кристалів частинок диму, дисперсної рідкої системи, вакуумному напиленні деяких металів і под. Визначають домени завдяки різниці в густині осідання речовини на різних ділянках поверхонь кристалів. Метод травлення, суть якого полягає в тому, що швидкість травлення частин кристалів, які мають протилежні знаки зв'язаних зарядів спонтанної поляризації, є різною. Це спричиняє виникнення рельєфу на гладенькій поверхні. Електролюмінесцентний метод полягає в дослідженні свідчення електролюмінофору ZnS у змінному електричному полі. На поверхню кристала наносять шар ZnS і поміщають між електродами плоского конденсатора. При накладанні змінної синусоїдної напруги з'являється свідчення ZnS у тих місцях, в яких діелектрик переполіаризується. Значного поширення останнім часом набули прямі методи спостереження доменів: оптичний у поляризованому світлі й електронно-оптичний.

У зовнішньому електричному полі напруженістю  $\vec{E}$  межі доменів зміщуються. При цьому об'ємні розміри доменів, поляризованих за полем, збільшуються за рахунок доменів, поляризованих проти поля. У сильних полях зразки сегнетоелектриків практично стають монодоменими (поляризація насичення). Після зняття зовнішнього поля поляризованість сегнетоелектриків може зберігатися протягом досить тривалого часу (подібно до постійних магнітів).

Вектори спонтанної поляризації  $\vec{P}_s$  сегнетоелектриків можуть бути визначені макроскопічно лише за умови орієнтації диполів усіх доменів в одному напрямі. Найчастіше  $\vec{P}_s$  визначають вимірюванням параметрів петель діелектричного гістерезису (від гр.  $\upsilon\sigma\tau\eta\sigma\zeta$  — відставання). Одержати петлю діелектричного гістерезису можна, наприклад, за допомогою простого пристрою (рис. 1.51). Низькочастотну на-

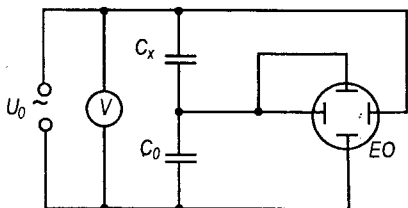


Рис. 1.51

пругу (50 Гц) прикладають до послідовно з'єднаних еталонного лінійного конденсатора  $C_0$  і конденсатора із сегнетоелектриком  $C_x$ . За умови  $C_x \ll C_0$  можна припустити, що майже вся напруга  $U$  спадає на  $C_x$ , тобто  $U_x \approx U$ . Цю напругу подають на вертикальні пластини осцилографа, а на горизонтальні —  $U_0$  з еталонного конденсатора  $C_0$ . Величина  $U_0 = U - U_x$  — напруга розгортки і вона є лінійною функцією  $U_x$ , яка, у свою чергу, залежить від поляризації сегнетоелектрика в конденсаторі  $C_x$ .

Виходячи із співвідношення  $C_x U_x = C_0 U_0 = q$ , де  $q$  — заряд на конденсаторах, та беручи до уваги, що  $q = \sigma S$ , а  $\sigma = P_s$ , одержимо

$$P_s = \frac{C_0 U_0}{S}$$

Отже, вимірювання  $P_s$  зводиться до вимірювання площі пластин конденсатора  $C_0$  і напруги  $U_0$ , значення якої завжди пропорційне зміщенню променя по вертикалі на екрані осцилографа.

На рис. 1.52 показано залежність  $\vec{P}(\vec{E})$  для сегнетоелектрика. Спочатку збільшення  $\vec{P}$  залежно від напруженості електричного поля  $\vec{E}$  відбувається вздовж кривої  $OA$ . У точці  $A$  поляризація всіх доменів виявляється орієнтованою вздовж поля напруженістю  $\vec{E}$ . При наступному збільшенні напруженості  $\vec{E}$  крива  $OA$  переходить у пряму лінію  $AD$ , тобто залежність  $\vec{P}$  від  $\vec{E}$  має лінійний характер. Якщо лінію  $AD$  продовжити до перетину з віссю ординат, то відрізок  $OC$  дає значення залишкової поляризації  $P_s$ . Зі зменшенням напруженості електричного поля зміна поляризації відбувається не по кривій  $DAO$ , а по новій кривій  $DAB$ . При досягненні  $\vec{E} = 0$  поляризація має деяке залишкове значення  $\vec{P}_s$ . Залишкова поляризація зникає тільки при накладанні певного електричного поля протилежного напрямку  $-\vec{E}_k$ . Напруженість  $\vec{E}_k$  поля, при якій усувається залишкова поляризація даного діелектрика, називається його *коерцитивною силою*. Наступна зміна напруженості поля спричиняє зміну  $\vec{P}$  вздовж кривої  $BA'D'$ , а зі зменшенням напруженості поля до нуля поляризація відбувається вздовж  $D'A'D''$ . Зміна напрямку напруженості та наступне її зростання зумовлюють утворення так званої *діелектричної петлі гістерезису*.

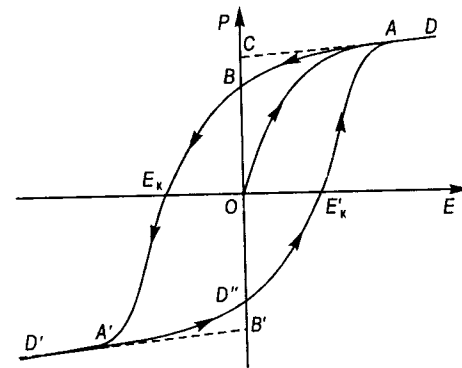


Рис. 1.52

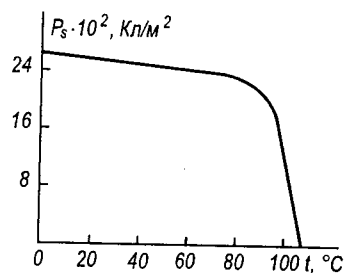


Рис. 1.53

Стрілки на кривій рис. 1.52 показують залежність  $\bar{P}$  від зміни напруженості електричного поля  $\bar{E}$ .

Вимірюючи параметри петлі гістерезису при різних температурах, можна дослідити залежність  $P_s(T)$ . Ця залежність для різних сегнетоелектриків є різною. Так, для титанату барію вона має вигляд, показаний на рис. 1.53.

Діелектрична проникність  $\epsilon$  сегнетоелектриків залежить від температури і в точці Кюрі набуває аномально великих значень. На рис. 1.54 показано залежність між  $\epsilon(T)$  і  $P(T)$  для тригліцинсульфату. Для багатьох сегнетоелектриків при  $T > T_K$  (неполярна фаза) температурна залежність  $\epsilon(T)$  наближено описується законом Кюрі — Вейса:

$$\epsilon = \frac{C}{T - T_K},$$

де  $C$  — стала Кюрі, яка є різною для різних сегнетоелектриків.

Діелектрична проникність сегнетоелектриків залежить від напруженості зовнішнього електричного поля, тобто  $\epsilon(\bar{E})$ . Ця залежність має складний характер.

Сегнетоелектрики широко застосовуються в різних галузях сучасної техніки: у виготовленні конденсаторів (великі  $\epsilon$ ), п'єзотехніці (великий п'єзоэффект), електро- і акустооптиці, нелінійній (велика нелінійність діелектричної сприйнятливості) та квантовій оптиці, системах обробки інформації. П'єзоелектричну кераміку використовують для виготовлення акустичних випромінювачів, високовольтних генераторів тощо. Застосування сегнетоелектриків швидко наростає. Темпи досліджень, розроблення і впровадження сегнетоелектриків зараз є більш високими, ніж феро- і напівпровідникових матеріалів.

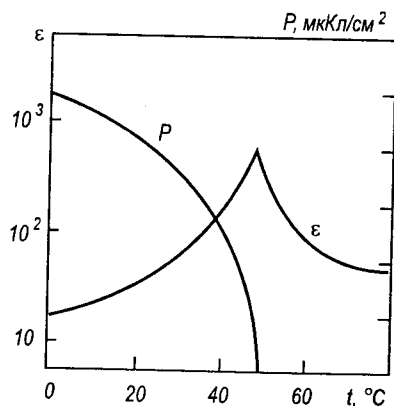


Рис. 1.54

## § 1.24. П'єзоелектрика

У природі існує багато кристалічних речовин, які при деформаціях у певних напрямках поляризуються. Явище виникнення на гранях кристалів зв'язаних електричних зарядів протилежних знаків внаслідок їх механічної деформації називають *прямим п'єзоелектричним ефектом* (від гр.  $\pi\epsilon\xi\omega$  — тисну). Це явище відкрили і дослідили у 1880 р. Жак і П'єр Кюрі на кристалі кварцу. Подальші дослідження показали, що п'єзоелектричні властивості мають майже 1500 різних кристалічних речовин, у тому числі турмалін, цинкова обманка, хлорат натрію, виннокислий калій, сегнетова сіль, цукор, титанат барію та багато інших. П'єзоелектричний ефект притаманний лише іонним кристалам, які не мають центра симетрії. Якщо кристал має центр симетрії, то у разі однорідної механічної деформації центр симетрії зберігається, а центри позитивних і негативних іонів кристала збігаються, отже, в них не може виникати п'єзополаризація. Знак зв'язаних зарядів на гранях кристала при деформаціях однозначно визначається напрямом і характером деформації. Якщо при стисканні на певній грані виникає позитивний заряд, то при розтягуванні ця грань заряджається негативно. Після припинення деформації кристалічний діелектрик повертається в неполярний стан. Такі діелектрики називають *п'єзоелектриками*.

Механізм виникнення п'єзоелектричного ефекту розглянемо на прикладі кристала кварцу — найпоширенішого п'єзоелектричного матеріалу, який широко застосовується завдяки його унікальним механічним і електричним властивостям. За звичайних умов кварц має так звану  $\alpha$ -модифікацію. Його кристал належить до тригональної системи з трьома осями симетрії другого порядку, які є полярними осями кристала. Оптична вісь кристала кварцу перпендикулярна до полярних осей. При механічній деформації на гранях, перпендикулярних до полярних осей, виникають заряди протилежних знаків. Хімічна формула кварцу  $\text{SiO}_2$ . Його кристалічна ґратка складається з позитивних іонів силіцію  $\text{Si}^{4+}$  і негативних іонів кисню  $\text{O}^{2-}$ . Наближено можна припустити, що іони силіцію і кисню розміщені в шестигранних комірках (рис. 1.55). Оптична вісь перпендикулярна до площини рисунка. Іони силіцію розміщені по спіралі: іон 3 глибше від іона 2, а іон 2 глибше від іона 1. Відповідно розміщені й іони кисню. Для спрощення розгляду

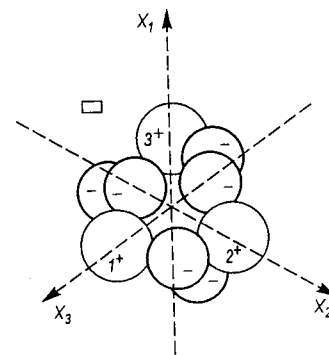


Рис. 1.55

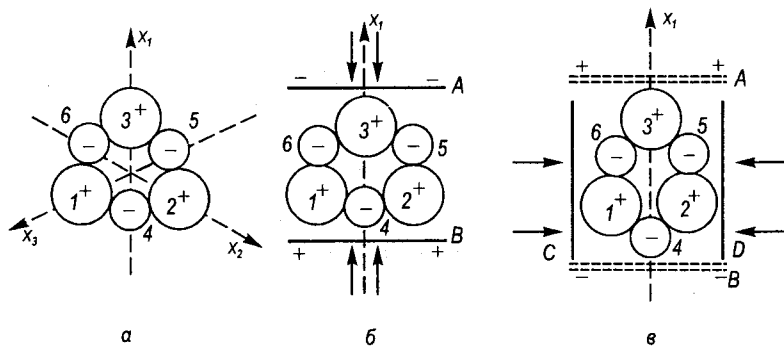


Рис. 1.56

замінімо кожну пару сусідніх іонів кисню одним негативним іоном з подвоєним зарядом. Одержимо спрощену модель комірки (рис. 1.56, а). У недеформованому стані «центр ваги» позитивних зарядів трьох іонів силіцію  $\text{Si}^{4+}$  і трьох подвоєних негативних іонів кисню  $2\text{O}^{2-}$  збігаються в центрі правильного шестикутника. Тому в цілому комірка є електрично нейтральною і не має електричного дипольного моменту. Якщо комірку стиснути в напрямі полярної осі  $X_1$  (рис. 1.56, б), то іон силіцію зміститься вниз усередину комірки і центр позитивних зарядів з центра шестикутника переміститься ближче до пластини В, яка зарядиться позитивно. Спарений іон кисню 4 переміститься вгору, що обумовить відповідно переміщення центра негативних зарядів, і пластина А зарядиться негативно. При розтягуванні комірки в напрямі осі  $X_1$  центри позитивних і негативних зарядів перемістяться в протилежних до першого випадку напрямках: верхня пластина зарядиться позитивно, нижня — негативно. Так виникає *повздожній п'єзоелектричний ефект*.

При стисненні в боковому напрямі (рис. 1.56, в) іони силіцію 1 і 2, а також іони кисню 5 і 6 зміщуються на однакову відстань у протилежних напрямках. Симетрія розміщення цих зарядів відносно вертикальної площини, що проходить через центр шестикутника, не порушується, і на пластинах С і D не виникають заряди. Однак іони силіцію 1 і кисню 4 зміщуються назовні, що зумовлює відповідну поляризацію: грань А заряджається позитивно, а грань В — негативно. При розтягуванні в боковому напрямі спостерігатиметься протилежна картина, і грані А і В перезарядяться. У цьому причина виникнення *поперечного п'єзоелектричного ефекту*. Між деформацією і числовим значенням зв'язаних зарядів на гранях кристала існує пряма пропорційна залежність.

Максимальний п'єзоелектричний ефект спостерігається тоді, коли деформацію здійснюють у напрямі однієї з полярних осей криста-

ла. Тому кварцеві пластини вирізають так, щоб пара площин, що утворюються при розрізанні, була перпендикулярна до однієї з полярних осей.

П'єзоелектричний ефект оборотний. Прикладання різниці потенціалів до граней кристала кварцу зумовлює його механічну деформацію (розтяг або стиск залежно від полярності напруги).

Явище деформації п'єзоелектричного кристала під дією прикладеної до його граней різниці потенціалів електричного поля називають *оберненим п'єзоелектричним ефектом*. Відносна деформація п'єзокристала в змінному електричному полі є максимальною, якщо частота поля збігається з власною частотою його механічних коливань (явище резонансу).

Використовують п'єзоелектричні матеріали для виготовлення п'єзодатчиків, призначених перетворювати механічні коливання в електричні, та акустичних генераторів — для перетворення електричних змін у звукові коливання. З них виготовляють адаптери для відтворення звуку, різні прилади для вимірювання частоти й амплітуди вібрацій двигунів, турбін, літаків тощо; п'єзоелектричні сейсмографи для реєстрації коливань земної кори, прилади для вимірювання прискорень — акселерометри, п'єзоелектричні манометри (датчики тиску), стабілізатори частоти радіостанцій тощо. Отримання і дослідження нових п'єзоелектричних речовин є однією з прикладних проблем фізики діелектриків.

### § 1.25. Енергія взаємодії електричних зарядів

Будь-яку сукупність електричних зарядів можна розглядати як систему точкових зарядів. Обчислимо потенціальну енергію такої системи, зумовлену взаємодією її точкових зарядів. Спочатку визначимо енергію взаємодії точкових зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , які розміщуються на відстані  $r_{12}$  один від одного. Вважатимемо, що заряди спочатку були у вакуумі на нескінченній відстані один від одного. Щоб їх наблизити на відстань  $r_{12}$ , треба виконати роботу, яка йде на зміну енергії взаємодії зарядів. Потенціальна енергія взаємодії зарядів при цьому

$$W_{\text{п}} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (1.128)$$

Оскільки обидва заряди входять у формулу (1.128) симетрично, то її можна записати у такому вигляді:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \left( \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} q_1 + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} q_2 \right) = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2), \quad (1.129)$$

де  $\varphi_1$  — потенціал, створений зарядом  $q_2$  в точці, де міститься заряд  $q_1$ ;  $\varphi_2$  — потенціал, створений зарядом  $q_1$  в точці, де міститься заряд  $q_2$ .

Вираз (1.129) визначає взаємну енергію двох точкових зарядів у вакуумі, тобто енергію, яка може виділитись, коли відстань між зарядами збільшити до нескінченності.

Енергія взаємодії системи  $n$  точкових зарядів

$$W_{\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (1.130)$$

де  $\varphi_i$  — потенціал у точці розміщення заряду  $q_i$ , створений рештою  $(n - 1)$  зарядів системи. Крім того, тут взято до уваги, що потенціал поля системи зарядів дорівнює сумі потенціалів полів окремих зарядів.

Поява коефіцієнта  $1/2$  пояснюється тим, що енергія кожної пари зарядів входить в суму двічі. Отже, у ній буде як член  $\frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}}$ , так

і однаковий за значенням член  $\frac{q_k q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ki}}$ .

Оскільки  $\varphi_k = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ki}}$ , то формулу (1.130) можна записати так:

$$W_{\pi} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ik} \frac{q_k q_i}{r_{ki}}, \quad (i \neq k). \quad (1.131)$$

Суму у виразі (1.131) знаходять для всіх індексів  $i$ , крім  $i = k$ .

Якщо система точкових зарядів розміщена в зовнішньому електростатичному полі, то до енергії взаємодії зарядів (1.130) потрібно додати ще енергію цих зарядів у зовнішньому полі. Остання вимірюється роботою сил поля, виконаною під час переміщення заданих зарядів із точок їх розміщення на нескінченність:

$$W'_{\pi} = \sum_{i=1}^n q_i \varphi(x_i, y_i, z_i),$$

де  $\varphi(x_i, y_i, z_i)$  — потенціал зовнішнього поля в точці з координатами  $x_i, y_i, z_i$ , де розміщений заряд  $q_i$ .

Користуючись уявленнями про точкові заряди, треба мати на увазі, що наведені формули можуть бути використані тільки тоді, коли заряди системи перебувають один від одного на відстанях, значно більших від лінійних розмірів тіл, на яких розміщені заряди.

При рівномірному розподілі зарядів в об'ємі з густиною  $\rho$  і на поверхні з густиною  $\sigma$  потенціальна енергія електрично заряджених тіл визначатиметься формулою (1.130) із заміною суми інтегралом:

$$W_{\pi} = \frac{1}{2} \left( \int_V \varphi \rho dV + \int_S \varphi \sigma dS \right).$$

**Приклад 1.7.** У вершинах куба розміщено негативні заряди, що дорівнюють заряду електрона  $e$ . У центрі куба міститься позитивний заряд  $2e$ , ребро куба  $b$  (рис. 1.57, а). Обчислити енергію взаємодії системи електричних зарядів кубічної конфігурації.

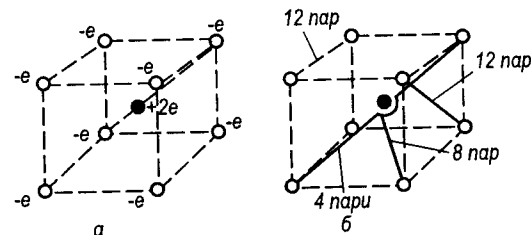


Рис. 1.57

**Розв'язання.** Оскільки розміщення зарядів має симетричний характер, то обчислення значно спрощуються. Підсумовуючи енергію взаємодії ідентичних пар зарядів, одержимо

$$U = - \frac{8(-2e^2)}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{2} b} + \frac{12e^2}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{12e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} b} + \frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4,32e^2}{b}.$$

На рис. 1.57, б показано, звідки взято кожний член цієї суми.

## § 1.26. Енергія електростатичного поля

Енергію, зосереджену в електростатичному полі нерухомих заряджених тіл, називають *електростатичною*. Щоб зарядити, наприклад, провідник, треба виконати роботу проти кулонівських сил електростатичного відштовхування між однойменно зарядженими частинками. Зарядження провідника можна здійснювати різними способами. Вважатимемо, що на провідник із нескінченності послідовно переносяться заряди  $dq$ . З накопиченням зарядів на провіднику наступне перенесення на нього зарядів  $dq$  все більше ускладнюватиметься внаслідок зростання кулонівських сил відштовхування між однойменними зарядами. Нехай в якийсь момент часу потенціал поверхні провідника дорівнює  $\varphi$ . Тоді під час перенесення із нескінченності на провідник заряду  $dq$  треба виконати роботу  $dA = \varphi dq$ . Оскільки потенціал провідника зв'язаний з його зарядом і ємністю співвідношенням  $\varphi = q / C$ , то

$$dA = \frac{1}{C} qdq.$$

Повна робота при зміні заряду провідника від 0 до  $q$

$$A = \frac{1}{2C} q^2.$$

Ця робота йде на надання енергії зарядженому провідникові, тобто

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{1}{2} q\varphi. \quad (1.132)$$

Формула (1.132) також виражає енергію конденсатора через різні параметри (процес заряджання конденсатора можна уявити як послідовне перенесення елементарних кількостей електрики з однієї обкладки конденсатора на іншу).

Запишемо формулу (1.132) для плоского конденсатора:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} C\Delta\varphi^2, \quad (1.133)$$

де  $\Delta\varphi$  — різниця потенціалів (напруга) між пластинами конденсатора. Якщо нехтувати крайовими ефектами і вважати поле однорідним, то враховуючи, що  $\Delta\varphi = Ed$ , а  $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$ , вираз (1.133) набуває вигляду

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0\epsilon E^2 V, \quad (1.134)$$

де  $V = Sd$  — об'єм, обмежений пластинами конденсатора.

Якщо поле неоднорідне, то вираз (1.134) записують у такій формі:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0\epsilon E^2 dV. \quad (1.135)$$

З погляду математики рівняння (1.134) і (1.135) є іншими формами запису рівняння (1.132). Однак формальне математичне перетворення рівнянь часто відкриває можливості зовсім нового фізичного інтерпретування виражених ними співвідношень. Так, рівняння (1.135) виражає електричну енергію у вигляді нескінченної суми доданків, кожний з яких дорівнює  $\frac{1}{2} \epsilon_0\epsilon E^2 dV$  і належить певному елементові об'єму  $dV$ . Тому в ці рівняння можна вкласти такий фізичний зміст: носієм електричної енергії є електричне поле, енергія якого у просторі локалізована так, що у випадку  $|\vec{E}| = \text{const}$  в кожній одиниці об'єму зосереджена енергія

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0\epsilon E^2 = \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D}, \quad (1.136)$$

де  $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}$  — вектор електричної індукції.

Величину  $w$  називають *об'ємною густиною енергії* електричного поля. Це свідчить про те, що електрична енергія подібно до речовини розподілена в просторі з певною об'ємною густиною. Такий висновок цілком відповідає концепції близькодії. Проте у концепції далекокодії стверджується, що електрична енергія є локалізованою на зарядженому провіднику.

Якому з цих двох уявлень про локалізацію електричної енергії надати перевагу? У межах електростатики принципово неможливо виконати жодного досліду, який дав би можливість зробити вибір на користь одного з цих уявлень. Це пояснюється тим, що в електростатиці електричне поле невіддільне від зарядів, джерел поля. Числовим значенням і розміщенням зарядів однозначно визначається електростатичне поле. Навпаки, знаючи напруженість електростатичного поля в будь-яких точках простору, можна однозначно вказати розподіл зарядів. Зовсім інша ситуація у разі змінних полів. Змінні електромагнітні поля можуть існувати самостійно, незалежно від джерел, які їх збудили. Електромагнітне поле при цьому існуватиме у вигляді електромагнітних хвиль, які, поширюючись у просторі, переносять енергію. Ця енергія не може бути потенціальною енергією взаємодіючих зарядів, оскільки їх немає.

Якщо електростатику розглядати як частину електродинаміки, то потрібно надавати перевагу теорії поля з її уявленнями про локалізацію електричної енергії у просторі.

## Розділ 2. Постійний електричний струм

### § 2.1. Електричний струм. Рівняння неперервності

*Електричним струмом* називають упорядкований рух електричних зарядів. Заряджені частинки, упорядкований рух або дрейф яких у даній речовині створює струм, називають *носіями заряду*. У металах і напівпровідниках струм створюють рухомі вільні електрони, в електrolітах — позитивні та негативні іони, в іонізованих газах — електрони і позитивні та негативні іони. Речовини, що проводять електричний струм, називають *провідниками* або *напівпровідниками* (або провідними середовищами). До провідників належать метали, електrolіти та плазма. Метали іноді називають провідниками першого роду, а електrolіти — провідниками другого роду.

Упорядкований рух носіїв заряду в провідному середовищі називають *струмом провідності*. Основним способом збудження струму

провідності є створення і підтримування в провідниках електричного поля. Під дією сил поля виникає упорядкований рух носіїв заряду: позитивні мікроскопічні заряди рухаються в напрямі вектора напруженості поля  $\vec{E}$ , а негативні — у протилежному напрямі. За напрям електричного струму прийнято вважати напрям руху позитивно заряджених частинок. У металах струм проходить проти напрямку впорядкованого руху електронів.

Якщо електричні заряди рухаються разом з тілом, на якому вони містяться, то створений ними струм називають *конвекційним*. Наприклад, конвекційні струми виникають в атмосфері при падінні заряджених краплин води під дією сил тяжіння. Короточасні електричні струми виникають у діелектричних середовищах внаслідок зміщення зв'язаних зарядів під дією зовнішнього електричного поля. Такі струми називають *струмами поляризації*.

Вивчаючи струм провідності, рух заряджених частинок у речовині зображають неперервними кривими — *лініями струму*. За напрям ліній струму в кожній точці речовини прийнято напрям упорядкованого руху позитивних носіїв заряду. Лінії струму утворюють замкнені циліндричні поверхні, які називають *трубками струму*. При цьому носії заряду під час руху не перетинають бокових поверхонь трубок струму.

Кількісними характеристиками електричного струму є сила струму і його густина. *Силою струму* називають скалярну величину, яка чисельно дорівнює зарядові, що переноситься крізь поперечний переріз провідника за одиницю часу. Якщо за нескінченно малий проміжок часу  $dt$  крізь поперечний переріз провідника проходить заряд  $dq$ , то за означенням сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

Електричний струм може бути утворений рухом носіїв як позитивного, так і негативного заряду. Струм, утворений перенесенням позитивного заряду в одному напрямі, еквівалентний струмові, зумовленому перенесенням такого самого за значенням негативного заряду в протилежному напрямі за той самий проміжок часу. Якщо в провіднику одночасно рухаються носії заряду обох знаків і при цьому за час  $dt$  крізь поперечний переріз вони переносять позитивний заряд  $dq^+$  в одному напрямі, а негативний заряд  $dq^-$  — у протилежному, то сила струму

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt},$$

де  $dq^-$  — абсолютне значення негативного заряду.

Співвідношення (2.1) виражає миттєве значення сили струму. Однак сила струму з часом може змінюватись, тобто  $I = I(t)$ . Тоді за скінченний проміжок часу  $\Delta t = t_2 - t_1$  носії струму переносять крізь поперечний переріз заряд

$$\Delta q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt. \quad (2.2)$$

Якщо за однакові скінченні проміжки часу  $\Delta t$  крізь поперечний переріз провідника проходять однакові заряди  $\Delta q$  і напрям струму при цьому не змінюється, то такий струм називають *стаціонарним* або *постійним*. Сила постійного струму визначається відношенням

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Електричний струм може бути розподілений по перерізу провідника нерівномірно, що зумовлено тривимірним характером руху заряджених частинок в об'ємі провідника. Носії заряду беруть участь у тепловому русі і мають деяку швидкість  $\vec{v}$ . При утворенні електричного поля в провіднику на хаотичний рух носіїв заряду накладається упорядкований рух (або дрейф) із середньою швидкістю  $\vec{v}_d$  і їх середня швидкість дорівнює  $\langle \vec{v} + \vec{v}_d \rangle$ . Оскільки середнє значення вектора швидкості хаотичного руху  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  (але не модуля  $\vec{v}$ ), то в електричному полі середня дрейфова швидкість носіїв заряду  $\langle \vec{v}_d \rangle = \vec{v}_d$ .

Для докладнішого описання перенесення зарядів у провіднику електричний струм характеризують вектором густини струму  $\vec{j}$ . Густина струму чисельно дорівнює відношенню сили струму  $dI$ , що проходить крізь перпендикулярну до напрямку руху носіїв поверхню  $dS$ , до площі цієї поверхні, тобто

$$j = \frac{dI}{dS} \quad (2.4)$$

Виразимо густину струму  $j$  через характеристики носіїв заряду. Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли провідник містить однакові носії позитивного заряду  $e$ . Нехай середня швидкість упорядкованого руху носіїв дорівнює  $\vec{v}_d$ . Виділимо всередині провідника нескінченно малий елемент площі  $dS$ , перпендикулярний до напрямку швидкості  $\vec{v}_d$ . Крізь площину  $dS$  протягом часу  $dt$  пройдуть заряджені частинки і перенесуть у напрямі швидкості  $\vec{v}_d$  електричний заряд, який дорівнює сумарному зарядові всіх частинок в об'ємі циліндра з основою  $dS$  завдовжки  $\vec{v}_d dt$  (рис. 2.1, а):  $dq = n_0 e v_d dS$ , де  $n_0$  — концентрація частинок-носіїв, тобто їх кількість в одиниці об'єму. Тоді згідно з формулою (2.1) крізь елемент площі  $dS$

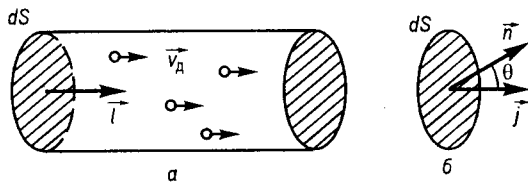


Рис. 2.1

проходить струм  $dI = n_0 e v_d dS$ . За означенням (2.4) крізь одиницю площі проходить електричний струм густиною

$$j = n_0 e v_d. \quad (2.5)$$

Густиною електричного струму називають вектор, значення якого описується формулою (2.5), а напрям збігається з напрямом  $\vec{v}_d$  упорядкованого руху позитивних зарядів:

$$\vec{j} = n_0 e \vec{v}_d. \quad (2.6)$$

Якщо в провіднику носіями струму є електрони (метали, вакуумні електронні лампи), то

$$\vec{j} = -n_0 |e| \vec{v}_d, \quad (2.7)$$

де  $|e|$  — абсолютне значення заряду електрона; знак мінус означає, що напрям струму протилежний напрямові упорядкованого руху електронів. У деяких провідниках (електроліти, плазма) в одиниці об'єму можуть міститись  $n_0^+$  позитивних носіїв заряду і  $n_0^-$  негативних, абсолютне значення зарядів яких дорівнює відповідно  $e^+$  і  $e^-$ . Якщо під дією електричного поля носії дрейфують у протилежних напрямках зі швидкостями  $\vec{v}_d^+$  і  $\vec{v}_d^-$ , то густина струму обчислюється за виразом

$$\vec{j} = n_0^+ e^+ \vec{v}_d^+ + n_0^- e^- \vec{v}_d^-. \quad (2.8)$$

Вектор густини струму  $\vec{j}$  визначає електричний струм у даній точці провідника, де заряджені частинки рухаються зі швидкістю  $\vec{v}_d$ . Знаючи густина струму в кожній точці провідника, можна розрахувати силу струму в цьому провіднику за формулою

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S \vec{j} \vec{n} dS = \int_S j_n dS, \quad (2.9)$$

де  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ;  $\vec{n}$  — вектор нормалі до елемента площі  $dS$ ;  $j_n = \vec{j} \vec{n} = j \cos \theta$  — проекція вектора  $\vec{j}$  на напрям нормалі  $\vec{n}$ ;  $\theta$  — кут між векторами  $\vec{j}$  і  $\vec{n}$  (рис. 2.1, б). Інтегрування проводиться за площею поперечного перерізу провідника. У разі рівномірного розподілу струму

по площі  $S$  поперечного перерізу провідника, перпендикулярній до напрямку струму, сила постійного струму

$$I = n_0 e v_d S = j S. \quad (2.10)$$

Сила струму вимірюється в амперах. В СІ одиниця сили струму — ампер (А) є основною, її означення буде дано під час вивчення електромагнітної взаємодії паралельних струмів. У системі одиниць Гаусса силу струму виражають в одиницях СГСЕ:  $1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЕ}$ .

З формули (2.3) в СІ визначається одиниця електричного заряду — кулон (Кл): 1 Кл — це кількість електрики, що при незмінному струмі в 1 А переноситься крізь поперечний переріз провідника за 1 с.

Одиницею густини струму в СІ є ампер на квадратний метр ( $\text{А/м}^2$ ).

У загальному випадку сила струму (див. формулу (2.9)) дорівнює потоковому вектору  $\vec{j}$  крізь поверхню поперечного перерізу провідника. Для електричних струмів справджується закон збереження заряду. Встановимо зв'язок між об'ємною густиною заряду і густиною струму. Для цього уявно виділимо у провіднику довільний об'єм  $V$ , обмежений замкненою поверхнею  $S$ . Нехай в об'ємі  $V$  міститься заряд  $q$ , розподілений з об'ємною густиною  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ . Якщо з об'єму  $V$  крізь поверхню  $S$  витікає позитивний заряд  $dq$  протягом часу  $dt$ , то за одиницю часу витікає заряд, що дорівнює силі струму:

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S j_n dS, \quad (2.11)$$

де знак мінус вказує на зменшення заряду в об'ємі  $V$ , а символ частинної похідної  $\frac{dq}{dt}$  підкреслює, що поверхня  $S$  є нерухомою. Заряд  $q$  виразимо через об'ємну густина  $q = \int_V \rho dV$  і перетворимо поверхневий інтеграл в об'ємний за формулою Остроградського — Гаусса

$\oint_S j_n dS = \int_V \text{div } \vec{j} dV$ . Після цього вираз (2.11) набуває вигляду

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div } \vec{j} dV.$$

Останнє співвідношення виконується для довільного об'єму  $V$ . Тому від рівності інтегралів можна перейти до рівності підінтегральних виразів:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}. \quad (2.12)$$

Співвідношення (2.11) і (2.12) називають *рівняннями неперервності* (або нерозривності) відповідно в інтегральній і диференціальній

формах. Ці рівняння виражають закон збереження заряду в макроскопічній електродинаміці: зміна заряду  $d\rho/dt$  у деякому об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$ , відбувається внаслідок витікання або втікання його крізь цю поверхню.

Якщо розподіл зарядів у провіднику є функцією тільки просторових координат  $\rho = \rho(x, y, z)$ , тобто не залежить від часу, то в ньому проходять постійні (стаціонарні) струми. За умови стаціонарності струму ( $d\rho/dt = 0$ ) рівняння (2.11) і (2.12) переходять у рівняння неперервності постійного струму:

$$\oint_S j_n dS = 0, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.14)$$

Отже, потік вектора  $\vec{j}$  крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулеві. Це означає, що для постійних струмів лінії струму є неперервними (замкнені криві). Іншими словами, постійний струм не має витоків і стоків зарядів, тобто всередині замкненої поверхні  $S$  у будь-якій точці  $(x, y, z)$  електричні заряди не виникають і не зникають: на місце зарядів, які вибули за одиницю часу, надходять нові — густина струму  $j$  у даній точці залишається постійною.

Закон збереження зарядів в електрично нейтральному однорідному провіднику зумовлює постійність сили струму по всій його довжині. У провіднику без розгалуження сила струму в окремих його частинах не залежить від матеріалу, довжини і площі поперечного перерізу цих частин. Густина постійного струму

$$j = I/S \quad (2.15)$$

залежить від площі  $S$  поперечного перерізу, перпендикулярного до напрямку струму (у точках, де переріз  $S$  провідника є меншим, густина струму  $j$  є більшою).

## § 2.2. Закон Ома. Опір провідників

Струм провідності як упорядкований рух заряджених частинок у провіднику може бути зумовлений лише дією сили на носії заряду з боку електричного поля  $\vec{F} = e\vec{E}$  ( $e$  — заряд окремих частинок, потік яких створює струм). З цього випливає, що всередині провідника, по якому проходить постійний струм, існує стаціонарне (не змінне в часі) електричне поле з напруженістю  $\vec{E}$ . Джерелом цього поля можуть бути тільки електричні заряди. В однорідних провідниках з постійним струмом ці заряди зосереджені на їх поверхнях. Вони є джерелом електричного поля в провіднику і забезпечують наявність постійного

струму. Поверхневі заряди і відповідний їх розподіл на провідниках, який забезпечує виникнення електричного поля всередині їх, зумовлюються підключенням джерела струму.

Стаціонарне електричне поле постійного струму всередині провідника створюється нерухожими, постійними в часі поверхневими

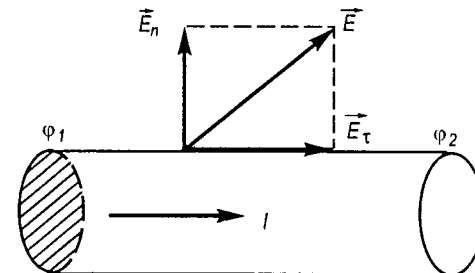


Рис. 2.2

зарядами. У цьому відношенні електричне поле постійного струму за своєю природою є кулонівським полем — воно аналогічне електростатичному полю нерухомих зарядів, і має потенціальний характер. Проте між електростатичним і стаціонарним полями є істотні відмінності. У провіднику, вміщеному в електростатичне поле, відбувається короткочасне зміщення вільних зарядів до поверхні провідника, після чого настає стан рівноваги. При рівновазі зарядів напруженість поля всередині провідника  $\vec{E} = 0$ , а поблизу поверхні вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до поверхні. За цих умов потенціал поля в усіх точках уздовж провідника стає однаковим і упорядковане перенесення зарядів є неможливим. Стаціонарне електричне поле постійного струму існує всередині провідника. Поблизу поверхні провідника вектор напруженості поля  $\vec{E}$  напрямлений під гострим кутом до поверхні, оскільки існує тангенціальна складова поля  $E_t$  у напрямі струму (рис. 2.2). Уздовж провідника в напрямі  $E_t$  потенціал поля змінюється.

Отже, стаціонарне електричне поле постійних струмів є потенціальним силовим полем і можна говорити про потенціал окремих точок провідника, по якому проходить струм, або про різницю потенціалів між ними. Уздовж провідника в напрямі струму потенціал монотонно зменшується від значення  $\phi_1$  на одному з його кінців до значення  $\phi_2$  на другому (див. рис. 2.2). Різницю потенціалів  $\phi_1 - \phi_2 = U$  називають *спадом напруги* на провіднику. Якщо струму немає, то говорять про напругу (наприклад, в електророзетці); у цьому разі спаду напруги немає.

Німецький фізик Г. Ом експериментально встановив закон: *сила струму в однорідному провіднику прямо пропорційна напрузі на кінцях цього провідника*

$$I = kU, \quad (2.16)$$

де  $k$  — коефіцієнт пропорційності, який називають *провідністю провідника*. На практиці частіше користуються оберненою до провіднос-



ті величиною  $R = l/k$ , яку Г. Ом назвав *електричним опором провідника*. Тоді формула закону Ома записується так:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2.17)$$

Опір однорідного провідника при не дуже великих струмах не залежить від сили струму, а визначається геометричними розмірами провідника, хімічною природою матеріалу та його фізичним станом (температура, тиск). Електричний опір металів зумовлений розсіянням електронів провідності на структурних неоднорідностях і теплових коливаннях кристалічної ґратки.

Опір провідника в СІ вимірюють в омах (Ом), а провідність — у сименсах (См). Одиницю опору визначають з формули (2.17): *1 Ом* — це опір такого провідника, в якому при напрузі 1 В проходить струм силою 1 А:  $[R] = V/A = 1 \text{ Ом}$ .

Опір однорідного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.18)$$

де  $l$  — довжина провідника;  $S$  — площа його поперечного перерізу;  $\rho$  — коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей матеріалу та фізичного стану провідника. Його називають *питомим опором матеріалу*. Одиницею питомого опору в СІ є ом-метр:  $[\rho] = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . За одиницю питомого опору в СІ взято опір куба з ребром 1 м, якщо струм проходить паралельно ребру цього куба. В електротехніці часто довжину провідника вимірюють у метрах, а площу поперечного перерізу — у квадратних міліметрах. Тоді питомий опір визначають в Ом-міліметрах у квадраті на метр. Найменший питомий опір мають чисті метали: срібло, мідь, золото, алюміній. Тому для передавання електричної енергії від генераторів до споживачів використовують дроти з міді або алюмінію. Питомий опір провідників значною мірою залежить від домішок, а також від способу їх виготовлення. Сплави з великим питомим опором використовують для виготовлення нагрівачів (ніхром), еталонних резисторів (константан, нікелін) тощо.

Залежність питомого опору однорідної речовини від температури характеризують температурним коефіцієнтом опору

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}. \quad (2.19)$$

*Температурний коефіцієнт опору*  $\alpha$  чисельно дорівнює відносній зміні опору провідника при зміні його температури на один кельвін. Для різних речовин температурний коефіцієнт опору має різне значення і може мати різні знаки: для металевих провідників  $\alpha > 0$ , а для

електролітів  $\alpha < 0$ . Як показують досліди, для більшості хімічно чистих металевих провідників існує певний інтервал температур поблизу  $0^\circ\text{C}$ , в якому температурний коефіцієнт опору приблизно дорівнює  $1/273 \text{ K}^{-1}$ . У кожному з таких температурних інтервалів питомий опір металу збільшується з підвищенням температури за лінійним законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ),$$

або

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad (2.20)$$

де  $\rho_0$  — питомий опір при  $0^\circ\text{C}$ ;  $t^\circ$  — температура за шкалою Цельсія;  $T$  — абсолютна температура.

Деякі сплави мають досить малі значення температурного коефіцієнта опору. Наприклад, в інтервалі температур  $0-100^\circ\text{C}$  для константану  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , для нікеліну  $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , тому дрід із таких сплавів використовують для виготовлення еталонів опору. Залежність опору металів від температури покладено в основу роботи приладів для вимірювання температури (термометри опору) та її регулювання (термостати), вимірювання енергії випромінювання (болетри) та інших.

У загальному випадку температурний коефіцієнт опору речовини змінюється зі зміною температури і залежність  $\rho(T)$  має нелінійний характер.

Величина  $\sigma$ , обернена до питомого опору провідника, називається *питомою провідністю* або *питомою електропровідністю*:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (2.21)$$

Питому електропровідність речовини в СІ вимірюють у сименсах на метр:  $[\sigma] = 1 \text{ См/м}$ .

Для провідників різної хімічної природи значення  $\sigma$  істотно відрізняються. Залежно від електропровідності всі речовини поділяються на провідники ( $\sigma > 10^6 \text{ См/м}$ ), діелектрики ( $\sigma < 10^{-10} \text{ См/м}$ ) і напівпровідники з проміжними значеннями  $\sigma$ . Цей поділ значною мірою умовний, оскільки електропровідність змінюється в широких межах при зміні стану речовини (температури, тиску, агрегатного стану) і залежить від зовнішніх впливів (магнітного та електричного полів опромінення тощо). Залежність електропровідності від температури провідника характеризується *температурним коефіцієнтом провідності*

$$\alpha = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT},$$

який дорівнює температурному коефіцієнту опору (2.19), взятому з протилежним знаком. Для чистих металів у деякому температурно-

му інтервалі питома провідність лінійно зменшується з підвищенням температури:

$$\sigma = \sigma_0(1 - \alpha t^\circ),$$

де  $\sigma_0$  — електропровідність при  $0^\circ\text{C}$ .

Поєднання експериментально встановлених законів, виражених формулами (2.16) і (2.17), дає закон Ома в диференціальній формі.

Виділимо уявно в околі деякої точки всередині провідника із стру-

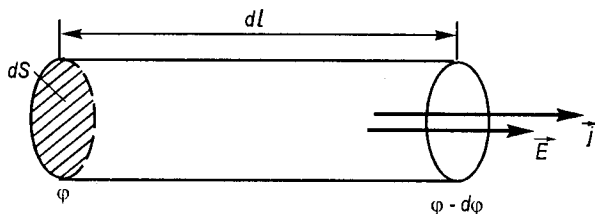


Рис. 2.3

мом елементарний об'єм у вигляді циліндра завдовжки  $dl$  і площею основи  $dS$  так, щоб його твірні збігались із напрямом вектора густини струму  $\vec{j}$  у цій точці (рис. 2.3). При напрузі  $dU = \varphi - (\varphi - d\varphi)$ , прикладеній до циліндра, крізь його поперечний переріз проходить струм силою  $jdS$ . Враховуючи, що  $dU = Edl$ , де  $E$  — напруженість електричного поля в даній точці, і опір (2.18) елементарного циліндра дорівнює  $\rho \frac{dl}{dS}$ , перепишемо вираз (2.17) у вигляді

$$jdS = \frac{dS}{\rho dl} Edl,$$

або

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E. \quad (2.22)$$

В ізотропних провідниках носії заряду в кожній точці рухаються вздовж електричного поля, тобто напрями векторів  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  збігаються і вираз (2.22) можна записати як векторне рівняння

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.23)$$

Формула (2.23) виражає закон Ома в диференціальній формі: *густина електричного струму в будь-якій точці фізично однорідного провідника пропорційна напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Коефіцієнт пропорційності — питома електропровідність  $\sigma$  — залежить*

тільки від хімічної природи матеріалу провідника, а його форма і розміри значення не мають.

Закон Ома з високою точністю виконується в широкому діапазоні значень напруженості поля для численних однорідних речовин (металів, сплавів, електролітів). Рівняння (2.23) одержало обґрунтування як у класичній, так і в квантовій теорії провідності металів при звичайних і високих температурах і є одним із найважливіших рівнянь електродинаміки. Проте закон Ома не має характеру фундаментального закону.

Електропровідність речовини в сильних електричних полях залежить від напруженості поля. Сильними вважають поля, носії заряду в яких набувають дрейфову швидкість, близьку до швидкості хаотичного руху. У цьому разі вводять поняття диференціальної електропровідності  $\sigma = dj/dE$  і нелінійну залежність  $j(E)$  виражають співвідношенням

$$\vec{j} = \int_0^E \sigma(\vec{E}) d\vec{E}. \quad (2.24)$$

Відхилення від лінійного закону (2.23) спостерігається також і в слабких полях, коли в провідниках змінюється концентрація носіїв заряду або коли концентрація є настільки низькою, що струм практично не залежить від напруженості поля (наприклад, струм насичення в іонізованих газах, вакуумних діодах, фотоелементах).

Різкі порушення закону Ома відбуваються в провідниках за наявності контакту між двома різними металами, між металом і напівпровідником або між двома напівпровідниками. Місця такого контакту називають *нелінійними провідниками* (або нелінійними елементами), тобто такими провідниками, в яких зв'язок між  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  є нелінійним. У цьому разі нелінійність супроводжується переважно односторонньою провідністю, тобто струм крізь нелінійні провідники може проходити практично в одному напрямі. Відхилення від закону Ома в нелінійних провідниках використовується так само широко, як і закон Ома в лінійних провідниках. Сучасні електроніка та радіотехніка були б неможливі без застосування нелінійних елементів.

### § 2.3. Сторонні сили. Електрорушійна сила. Закон Ома для неоднорідної ділянки і повного кола

Постійний струм проходить в провіднику доти, доки в ньому існує стаціонарне електричне поле. Припустимо, що в цьому полі на носіїв заряду діють одні тільки кулонівські сили, які переносять позитивні заряди в напрямі поля від вишого потенціалу до нижчого. Оскільки

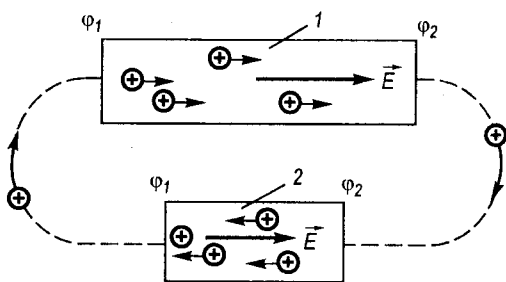


Рис. 2.4

згідно із законом Ома (2.23), струм припиниться. Отже, постійний струм у провіднику неможливо підтримувати за допомогою одних лише кулонівських сил. Для цього разом з кулонівськими силами потрібна дія інших сил неелектричної природи, внаслідок роботи яких можна протягом тривалого часу підтримувати незмінною напруженість електричного поля  $\vec{E}$  всередині провідника. Інакше кажучи, за допомогою додаткового процесу потрібно від кінця провідника з меншим потенціалом неперервно відводити принесені струмом позитивні заряди, а до кінця провідника з більшим потенціалом неперервно їх підводити. Такий кругообіг зарядів можна здійснити по замкненому контуру (рис. 2.4), утвореному провідником 1 і ділянкою 2 або кількома такими ділянками, по яких позитивні заряди переносяться проти напрямку сил електричного поля напруженістю  $\vec{E}$  (від нижчого потенціалу  $\phi_2$  до вищого  $\phi_1$ ). Переміщення носіїв позитивного заряду на цих ділянках проти напрямку вектора  $\vec{E}$  можливе тільки за допомогою сил неелектростатичного походження. Будь-які сили неелектростатичної природи, які діють на заряджені частинки, називають *сторонніми силами*. Сторонні сили можуть діяти як на окремих ділянках, так і по всій довжині замкненого контуру. Вони можуть бути зумовлені механічними або хімічними процесами, дифузією носіїв заряду в неоднорідному середовищі, змінними магнітними полями, освітленням поверхні деяких речовин короткохвильовим випромінюванням тощо. Пристрій, в якому виникають сторонні сили, називають *джерелом струму* (наприклад, гальванічний елемент, генератор електричного струму, термопара, сонячна батарея). *Джерелом електричної енергії* називають пристрій, який перетворює енергію будь-якого виду в електричну.

Отже, постійні струми проходять тільки в провідниках, приєднаних до джерел струму. При цьому на кінцях провідника підтримується постійна різниця потенціалів внаслідок роботи, яку виконують сторонні сили завдяки енергії джерела струму.

кулонівські сили потенціальні й роботу по переміщенню зарядів виконують завдяки енергії електричного поля, то переміщення носіїв заряду дуже швидко приведе до того, що поле всередині провідника зрівноважиться ( $\vec{E} = 0$ ), провідник стане екіпотенціальним і,

Густина струму  $\vec{j}$  не залежить від фізичної природи сили  $\vec{F}$ , яка діє на окремі носії зарядів і збуджує електричне поле в провіднику. Цю силу можна розкласти на дві частини: електричну силу і сторонню силу, до якої входять всі сили неелектростатичної природи. Сторонні сили можна характеризувати також напруженістю поля  $\vec{E}_{\text{ст}}$ , яка за означенням дорівнює сторонній силі, що припадає на одиницю заряду. Напруженість поля регулярної сили  $\vec{F}$ , яка діє в замкненому контурі на заряд  $e$  і підтримує незмінну в часі густина струму, можна визирати як суперпозицію обох силових полів:

$$\frac{\vec{F}}{e} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}, \quad (2.25)$$

де  $\vec{E}$  — напруженість поля електричних сил;  $\vec{E}_{\text{ст}}$  — напруженість поля сторонніх сил;  $e$  — абсолютне значення заряду окремих носіїв. З урахуванням напруженості сторонніх сил закон Ома набуває вигляду

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (2.26)$$

Дослідження показують, що напруженість поля сторонніх сил  $\vec{E}_{\text{ст}}$  в окремих джерелах струму можна виразити через градієнт деякого скаляра, характерного для даного джерела. На цій підставі можна вважати, що поле сторонніх сил проявляє властивість потенціального силового поля на окремих ділянках замкненого контуру, по якому проходить постійний струм. Узагальнимо це припущення на випадки, коли сторонні сили не залежать від сили струму, який проходить крізь джерело струму. Справді, сила струму залежить від електропровідності та геометричних розмірів провідника, приєднаного до електродів (або полюсів) джерела. Розікнемо коло, від'єднавши провідник від джерела. Тоді, згідно з припущенням, поле сторонніх сил не зміниться, але припиниться струм у колі, й за формулою (2.26) маємо  $\sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}) = 0$ . Всередині джерела струму електропровідність  $\sigma \neq 0$  (наприклад, у гальванічних елементах електричні струми підтримуються завдяки хімічним реакціям між електродами та електролітами), тому із попередньої рівності одержимо

$$(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}) = 0. \quad (2.27)$$

Звідси випливає, що всередині джерела поле сторонніх сил напруженістю  $\vec{E}_{\text{ст}}$  проявляє себе так само, як і потенціальне поле електричних сил напруженістю  $\vec{E}$ . Поза межами джерела при розімкненому колі електричних струмів немає, оскільки  $\sigma = 0$ , і співвідношення (2.27) не справджується, тобто  $(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}) \neq 0$ . Отже, в усьому просторі поле сторонніх сил не потенціальне (циркуляція вектора

напруженості  $\vec{E}_{\text{ст}}$  не дорівнює нулеві). Завдяки саме цій властивості сторонні сили здатні збуджувати і підтримувати постійні струми в провідниках, приєднаних до полюсів джерела струму.

Сторонні сили характеризують роботою, яку вони виконують при переміщенні зарядів по колу або на ділянці кола. Скалярну величину  $\mathcal{E}$ , яка дорівнює роботі сторонніх сил, віднесеній до одиниці позитивного заряду, називають *електрорушійною силою* (ЕРС) джерела струму, що діє в замкненому колі або на його ділянці. Якщо робота сторонніх сил по переміщенню заряду  $q$  дорівнює  $A$ , то за означенням

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} \quad (2.28)$$

Роботу сторонніх сил при переміщенні заряду  $q$  по замкненому колу можна виразити через криволінійний інтеграл по контуру струму:

$$A = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l},$$

де  $d\vec{l}$  — вектор елементарного переміщення позитивного заряду  $q$ .

Поділивши цю роботу на заряд  $q$ , одержимо вираз ЕРС, яка діє в замкненому колі:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \quad (2.29)$$

Електрорушійна сила, що діє в замкненому колі, визначається як циркуляція вектора напруженості поля сторонніх сил. Ділянка кола між перерізами 1 і 2 провідника, яка містить джерело струму, називається *неоднорідною ділянкою*. Очевидно, що електрорушійна сила, що діє на ділянці 1—2,

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \quad (2.30)$$

Криволінійний інтеграл (2.30) не залежить від положення початкової 1 і кінцевої 2 точок — його достатньо поширити лише на ту ділянку кола, де  $\vec{E}_{\text{ст}} \neq 0$ , тобто ту частину, яка проходить всередині джерела струму. Електрорушійна сила, незважаючи на цю традиційну назву, є енергетичною характеристикою самого джерела струму. Із формули (2.28) випливає, що розмірність ЕРС збігається з розмірністю потенціалу, тому  $\mathcal{E}$ , як і потенціал  $\phi$ , у системі одиниць СІ вимірюють у вольтах.

Розглянемо важливий випадок, коли постійні електричні струми проходять уздовж тонких провідників (дротів). У такому разі густину струму  $\vec{j}$  в усіх точках поперечного перерізу можна вважати однаковою і напрямленою паралельно осі провідника. Припустимо, що на ділянці провідника між перерізами 1 і 2 діють сто-

ронні сили, наприклад міститься гальванічний елемент, ЕРС якого дорівнює  $\mathcal{E}$  (рис. 2.5). Тоді густина струму в провіднику визначається законом Ома (2.26)

$$\vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}.$$

Помножимо це рівняння скалярно на елемент довжини провідника  $dl$ , взятий у напрямі струму, і зінтегруємо вздовж ділянки провідника від перерізу 1 до перерізу 2:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \quad (2.31)$$

З'ясуємо фізичний зміст інтеграла в лівій частині рівності (2.31). Вектори  $\vec{j}$  і  $d\vec{l}$  є колінеарними і їх скалярний добуток  $\vec{j} d\vec{l} = j dl$ . Якщо площа  $S$  поперечного перерізу вздовж провідника змінюється, то густина струму  $j$  у кожному перерізі змінюється так, що сила струму вздовж провідника  $I = jS$  залишається постійною. Враховуючи це співвідношення і формулу (2.21), одержимо

$$\int_1^2 \frac{j dl}{\sigma} = I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = IR_{12}, \quad (2.32)$$

де  $R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}$  — електричний опір ділянки 1—2 провідника, включаючи внутрішній опір самого джерела струму. Ця формула переходить у вираз (2.17), якщо провідник однорідний і має однакову товщину. Добуток сили струму на опір ділянки кола  $IR_{12}$  називають *спадом напруги* на цій ділянці. Спад напруги на неоднорідній ділянці 1—2 чисельно дорівнює роботі, яку виконують кулонівські і сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду із точки 1 у точку 2.

У правій частині рівності (2.31) перший інтеграл дорівнює різниці потенціалів  $\phi_1 - \phi_2$ , яка підтримується на кінцях ділянки 1—2, оскільки електричне поле постійних струмів є потенціальним, а другий інтеграл за означенням (2.30) дорівнює електрорушійній силі  $\mathcal{E}$  джерела струму. Отже, вираз (2.31) набуває вигляду

$$IR_{12} = \phi_1 - \phi_2 + \mathcal{E} \quad (2.33)$$

Формула (2.33) виражає в інтегральній формі закон Ома для неоднорідного кола. Спад напруги на ділянці кола визначається як алгеб-

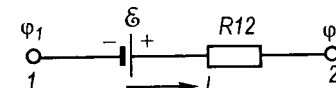


Рис. 2.5

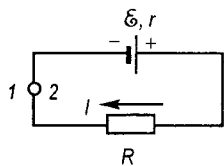


Рис. 2.6

рична сума різниці потенціалів на її кінцях і електрорушійної сили (або суми електрорушійних сил  $\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i$ ), що діє на цій ділянці. Ко-

ристуючись формулою (2.33), потрібно дотримуватись правила знаків: електрорушійна сила  $\mathcal{E}$  вважається додатною, якщо, переміща-

ючись у напрямі струму від точки 1 до точки 2 (див. рис. 2.5), проходимо джерело від негативного полюса (катода) до позитивного (анода); при протилежному положенні полюсів ЕРС вважається від'ємною і у формулу (2.33) входить зі знаком мінус. Якщо немає джерела струму, то на ділянці кола спад напруги дорівнює різниці потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  на її кінцях і закон Ома спрощується до вигляду виразу (2.16).

Якщо з'єднати кінці 1 і 2 неоднорідної ділянки, то їх потенціали вирівнюються ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ) і утворюється замкнене коло (рис. 2.6). Тоді зв'язок між силою струму і ЕРС виражається законом Ома для повного кола

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (2.34)$$

де  $R$  — опір провідника, приєднаного до полюсів джерела струму (опір зовнішньої частини кола);  $r$  — внутрішній опір джерела. Як видно із формули (2.34), спад напруги в зовнішньому колі з опором  $R$ , тобто на полюсах джерела струму,

$$U = IR = \mathcal{E} - Ir, \quad (2.35)$$

де  $Ir$  — спад напруги всередині джерела струму. Звідси випливає, що

$$\mathcal{E} = U \left( 1 + \frac{r}{R} \right), \quad (2.36)$$

тобто електрорушійна сила дорівнює різниці потенціалів  $U$  між полюсами розімкненого ( $R \rightarrow \infty$ ) джерела струму.

У замкненому колі можна отримати максимальну силу струму від даного джерела, якщо опір зовнішнього кола дорівнює нулеві (коротке замикання):

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (2.37)$$

Тут  $I_{\max}$  називають *струмом короткого замикання*.

## § 2.4. Робота і потужність електричного струму

При переміщенні зарядів по замкненому колу кулонівські й сторонні сили виконують роботу. Розглянемо ділянку однорідного провідника з опором  $R$ , на кінцях якого напруга дорівнює  $U$ . Якщо по ділянці проходить струм  $I$ , то крізь поперечний переріз провідника за час  $dt$  буде перенесено заряд  $dq = Idt$ . За означенням напруга  $U$  між двома точками провідника чисельно дорівнює роботі, яку виконують кулонівські сили під час перенесення одиниці заряду вздовж провідника між цими точками. При перенесенні заряду  $dq$  виконується елементарна робота

$$dA = Udq = IUdt.$$

При постійному струмі силою  $I$  за скінченний проміжок часу  $t$  робота електричного струму на зовнішній ділянці кола

$$A = IU \int_0^t dt = IUt. \quad (2.38)$$

На підставі закону Ома (2.16) можна також записати

$$A = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (2.39)$$

Якщо струм з часом змінюється, тобто  $I = I(t)$ , то робота струму за час  $t$  визначається формулою

$$A = \int_0^t I^2(t) R dt. \quad (2.40)$$

Кулонівські та сторонні сили разом за цей час, переміщуючи заряд  $q$  по замкненому колу, виконують завдяки енергії джерела струму загальну роботу  $A_{\text{заг}} > A$ , що дорівнює сумі робіт з перенесення заряду  $q$  по зовнішній і внутрішній частинах електричного кола. Оскільки ЕРС джерела струму чисельно дорівнює роботі, що виконується при перенесенні одиничного заряду по замкненому колу, то при постійному струмі  $I$  за час  $t$  виконується робота

$$A_{\text{заг}} = \mathcal{E} q = \mathcal{E} It. \quad (2.41)$$

Або на підставі закону Ома для повного кола

$$A_{\text{заг}} = \frac{\mathcal{E}^2 t}{R + r}. \quad (2.42)$$

*Потужністю електричного струму* називають величину, що чисельно дорівнює роботі, яку виконує струм за одиницю часу:

$$P = \frac{A}{t}$$

У зовнішній частині кола з опором  $R$  при постійному струмі виділяється корисна потужність

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \quad (2.43)$$

або з урахуванням (2.34) для повного кола корисна потужність на опорі  $R$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}. \quad (2.44)$$

При цьому загальна потужність джерела струму на зовнішній і внутрішній частинах електричного кола

$$P_{\text{дж}} = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}. \quad (2.45)$$

Відношенням корисної потужності до загальної потужності джерела визначають коефіцієнт корисної дії джерела струму

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{дж}}} = \frac{R}{R+r}. \quad (2.46)$$

Як видно з формули (2.44), при заданих характеристиках  $\mathcal{E}$  і  $r$  джерела струму корисна потужність залежить від опору  $R$  зовнішньої частини кола (опору споживача енергії електричного струму). Існує оптимальне значення опору  $R$ , при якому дане джерело струму видає максимальну потужність споживачеві. Для визначення цього опору достатньо дослідити на максимум функцію  $P(R)$ , задану рівнянням (2.44). З умови максимуму  $dP/dR$  одержуємо

$$(R+r)^{-2} - 2R(R+r)^{-3} = 0, \quad \text{або} \quad 1 - \frac{2R}{R+r} = 0.$$

Звідси знаходимо, що  $R = r$ , тобто оптимальний опір навантаження даного джерела струму дорівнює внутрішньому опорі цього джерела. За цієї умови

$$P_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}; \quad P_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{E}^2}{2r}; \quad \eta = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{дж}}} = \frac{1}{2}.$$

При такому режимі роботи джерела струму половина загальної потужності буде корисною.

З формули (2.45) випливає, що джерело струму розвиває найбільшу потужність при  $R = 0$  (коротке замикання). У цьому разі вся по-

тужність виділяється всередині джерела і корисна потужність (2.44) дорівнює нулеві. Зі збільшенням  $R$  загальна потужність джерела зменшується, прямує до нуля при  $R \rightarrow \infty$ , а корисна потужність зростає, сягаючи максимуму при  $R = r$ , після чого також прямує до нуля при  $R \rightarrow \infty$ .

Між одиницями роботи і потужності та одиницями сили струму, напруги і опору існує простий зв'язок:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = 1 \text{ А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = 1 \frac{\text{В}}{\text{Ом}} \text{с};$$

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ А} \cdot \text{В} = 1 \text{ А}^2 \cdot \text{Ом} = 1 \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}}.$$

### § 2.5. Закон Джоуля — Ленца. Закон збереження енергії електричного поля

У разі проходження струму по нерухомому провіднику, в якому не відбуваються хімічні перетворення, робота струму перетворюється у внутрішню енергію провідника. Це положення, встановлене експериментально Дж. Джоулем у 1841 р. і підтвержене точними дослідженнями російського фізика Е. Ленца (1804—1865) в 1842 р., формулюється як закон Джоуля — Ленца: *кількість теплоти, що виділяється в провіднику при проходженні по ньому постійного електричного струму, прямо пропорційна добуткові квадрата сили струму, опору провідника і часу проходження струму:*

$$Q = I^2 R t. \quad (2.47)$$

Оскільки повна кількість теплоти, виділеної в провіднику за час  $t$ , дорівнює роботі, виконаній струмом за цей час, то для визначення кількості теплоти можуть бути використані формули (2.38)—(2.39). Зокрема, якщо сила струму змінюється з часом, то

$$Q = \int_0^t I^2(t) R dt.$$

Виділення теплоти в провіднику, по якому проходить струм, пояснюється розсіянням енергії рухомих носіїв заряду. Під час руху носії зазнають дії сили опору, зумовленої зіткненнями їх між собою і з будь-якими частинками провідного середовища. На роботу проти сили тертя витрачається енергія упорядкованого руху носіїв (розсіюється енергія носіїв заряду). Наприклад, у металах носіями заряду є електрони провідності, а іони розміщені у вузлах кристалічної ґратки. При зіткненні електронів з іонами у вузлах ґратки відбувається перетворення енергії упорядкованого руху електронів в енергію хаотичного руху іонів і електронів. При цьому енергія упорядкованого

руху, яку електрон набуває під дією регулярної сили поля, розсіюється не безперервно, а тільки в моменти зіткнень. Спочатку між двома зіткненнями електрон нагромаджує енергію до деякого середнього значення, а потім частково або повністю втрачає її в момент зіткнення з іоном ґратки. Отже, енергія джерела струму передається електронам, а через них і кристалічній ґратці провідника у вигляді кінетичної енергії руху частинок. Ця енергія виділяється в провіднику у вигляді теплоти.

Формула (2.47) виражає сумарну (інтегральну) кількість теплоти, що виділяється в провіднику, опір якого дорівнює  $R$ . Кількість теплоти, виділеної в окремих місцях провідника, можна визначити через локальні характеристики провідника та електричного поля в ньому. Виділимо всередині провідника елементарний об'єм у вигляді циліндра (див. рис. 2.3), як це було зроблено при виведенні формули (2.22). За законом Джоуля — Ленца в цьому об'ємі протягом часу  $dt$  виділиться елементарна кількість теплоти

$$dQ = I^2 dR dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = j^2 \rho dV dt,$$

де  $dV = dS dl$  — елементарний об'єм. Кількість теплоти, яка виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу, називають *потужністю струму*:

$$w = dQ / (dV dt).$$

Із виразу для  $dQ$  маємо

$$w = \rho j^2. \quad (2.48)$$

Звідси, користуючись законом Ома (2.22) і співвідношенням (2.21), одержимо вираз закону Джоуля — Ленца в диференціальній формі

$$w = \sigma E^2, \quad (2.49)$$

або

$$w = \vec{j} \vec{E}. \quad (2.50)$$

У загальному випадку локальні характеристики матеріалу провідника  $\sigma$ , електричного поля  $\vec{E}$  і густини струму  $\vec{j}$  в різних точках провідника є функціями координат. Для визначення кількості теплоти, виділеної у всьому провіднику за час  $t$ , потрібно зінтегрувати вираз для  $w$  за об'ємом провідника, а потім — за часом  $t$ .

$$Q = \int_0^t dt \int_V \rho j^2 dV.$$

Звідси як окремий випадок ( $\rho = \text{const}$ ,  $j = \text{const}$ ) впливає формула (2.47) закону Джоуля — Ленца в інтегральній формі.

Робота електричного струму є мірою перетворення енергії джерела струму із одного виду в інший. Вона може перейти в механічну роботу, змінити хімічний склад провідника і його внутрішню енергію. В електричних явищах виконується закон збереження енергії: енергія джерела струму  $W$  дорівнює кількості виділеної в провіднику Джоулевої теплоти  $Q$ , збільшенню енергії електричного поля  $\Delta U$  і механічній роботі  $A$ , яку виконують сили електричного поля над провідником:

$$W = Q + \Delta U + A,$$

або в нескінченно малих величинах

$$dW = \delta Q + dU + \delta A, \quad (2.51)$$

де  $dW = \mathcal{E} Idt$ ;  $\delta Q = I^2 R dt$ ;  $dU = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} (E^2 - E_0^2) dV$ ;  $\delta A = -(dF)_{q,T}$ .

У цих рівняннях  $\mathcal{E}$  — ЕРС джерела струму;  $I$  — сила струму;  $dt$  — час переміщення заряду  $dq = Idt$ ;  $R$  — опір електричного кола;  $\epsilon$  — діелектрична проникність однорідного провідника струму;  $E_0$  і  $E$  — напруженість електричного поля до і після ввімкнення в коло джерела струму;  $dV$  — елемент об'єму, де зосереджені поля  $E_0$  і  $E$ ;  $F$  — вільна енергія речовини провідника, приріст якої визначається при незмінному заряді  $q = \text{const}$  і температурі  $T = \text{const}$ .

Як уже відмічалось, теплота виділяється внаслідок перетворення кінетичної енергії упорядкованого руху носіїв заряду у внутрішню енергію провідника. Зміна енергії електричного поля зумовлена зміною просторового розподілу вільних зарядів в об'ємі провідника після ввімкнення джерела струму в коло. Розглянемо в загальних рисах механічну роботу сил електричного поля. В електричному полі на провідники і діелектрики, яким надані електричні заряди, діють пондеромоторні сили. Такі сили виникають завжди, коли тілам, що розділені діелектричним середовищем, надається деяка кількість зарядів. При цьому в діелектриках і провідниках з'являються поляризаційні і пружні деформації, що утруднює кількісне визначення пондеромоторної взаємодії тіл. Тому для обчислення значення пондеромоторних сил  $f$  використовують загальну формулу роботи  $\delta A = \int \delta r$ , де під  $\delta A$  розуміють роботу всіх сил, які діють на тіла системи, і діелектричне середовище між ними при нескінченно малих можливих переміщеннях  $\delta r$ . Такі можливі переміщення називають *віртуальними* на відміну від дійсних переміщень, що виникають у системі при певному її русі. Термодинаміка встановлює зв'язок віртуальної роботи  $\delta A$  з приростом вільної енергії системи  $(dF)_{q,T}$  і дає, таким чином, загальний метод обчислення пондеромоторних сил. У термодинаміці діелектриків показано, що внаслідок поляризації діелектриків, які здатні деформуватись, приріст вільної енергії системи складається з пружної частини вільної енергії  $dF_{\text{пр}}$  та електричної частини  $dF_{\text{ел}}$ .

Складова  $dF_{пр}$  зумовлена залежністю діелектричної проникності від густини діелектрика, а складова  $dF_{ел}$  залежить від напруженості електричного поля. Такі самі складові має сила пондеромоторної взаємодії тіл. Наприклад, обчислення показують, що віднесена до одиниці площі повна сила притягання між пластинами конденсатора, заповненого ізотропним рідким діелектриком, подається виразом

$$\frac{f}{S} = (P - P_0) - \left( \varepsilon + \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

де  $P$  і  $P_0$  — гідростатичний тиск рідини всередині і зовні конденсатора;  $\tau$  і  $\varepsilon$  — густина і діелектрична проникність діелектрика;  $E$  — напруженість електричного поля.

Якщо діелектрик не деформується (слабо стискається), то пружна складова сили  $f/S$  у стаціонарному електричному полі зрівноважується гідростатичним тиском:

$$P - P_0 = \tau \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Із закону збереження енергії (2.51) випливають такі наслідки:

1) якщо всі провідники і діелектрики нерухомі, то  $\delta A = dU = 0$  і  $dW = \delta Q$ , тобто робота джерела струму повністю перетворюється в джоулеву теплоту;

2) якщо заряди провідників не змінюються, то  $dW = \delta Q = 0$  і  $\delta A = -dU$  — механічна робота сил електричного поля виконується завдяки зменшенню енергії електричного поля.

## § 2.6. Електричне коло. Правила Кірхгофа

Під *електричним колом* розуміють систему, яка складається із джерел струму і споживачів електричної енергії (опорів), з'єднаних між собою провідниками. Тут термін «опір» означає елемент кола (резистор). Наприклад, «дротяний опір 100 Ом, 5 Вт» — пристрій, виготовлений із тонкого дроту з високим питомим опором і призначений для використання в такому режимі, коли розсіювана ним потужність  $I^2 R$  не перевищує 5 Вт.

Найпростіше електричне коло — це замкнений контур, утворений джерелом струму ( $\mathcal{E}$ ,  $r$ ) і резистором  $R$  (див. рис. 2.6). Від одного джерела можна живити два або кілька споживачів, з'єднавши їх між собою послідовно або паралельно. З іншого боку, для забезпечення потрібної потужності струму можна використати два або кілька джерел, з'єднавши їх між собою послідовно, паралельно або змішано. В усіх випадках простого кола закон Ома дає можливість розрахувати електричні параметри як окремих ділянок, так і повного кола. На ри-

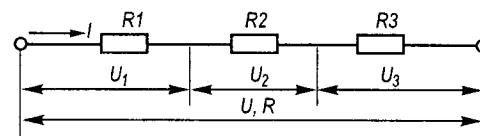


Рис. 2.7

сунку опір умовно позначається прямокутником, висота якого у три рази менша від довжини.

При послідовному з'єднанні опорів (рис. 2.7) сила струму  $I$ , який проходить по колу, дорівнює силі струмів, що проходять крізь кожний окремий опір:  $I = I_1 = I_2 = I_3$ ; спад напруги  $U$  на всій ділянці кола дорівнює сумі спадів напруг на кожному опорі:  $U = U_1 + U_2 + U_3$ ; опір зовнішнього кола  $R$  дорівнює сумі окремих опорів:  $R = R_1 + R_2 + R_3$ ; спади напруг на окремих опорах пропорційні цим опорам:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}; \quad \frac{U_1}{U_3} = \frac{R_1}{R_3}; \quad \frac{U_2}{U_3} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Звідси випливає, що напругу  $U$ , яка подається на опір  $R$ , можна поділити, тобто зняти частину  $U_1$  повної напруги з частини  $R_1$  цього опору (рис. 2.8):  $U_1 = U \frac{R_1}{R}$ . Такий пристрій називають *дільником напруги* (потенціометром).

При паралельному з'єднанні опорів (рис. 2.9) сила струму  $I$  в нерозгалуженій частині кола дорівнює сумі струмів у кожному окремому опорі:  $I = I_1 + I_2 + I_3$ ; спад напруги на всій ділянці кола паралельно з'єднаних провідників дорівнює спадам напруги на кожному окремому опорі:  $U = U_1 = U_2 = U_3$ ; величина, обернена повному опоріві  $R$ , дорівнює сумі величин, обернених опорам паралельних ділянок:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3};$$

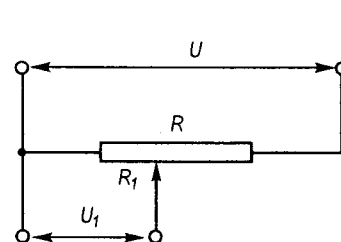


Рис. 2.8

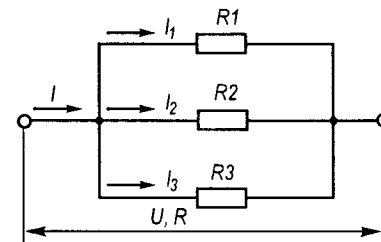


Рис. 2.9



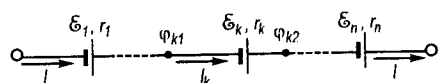


Рис. 2.10

струми, які проходять в окремих опорах, обернено пропорційні цим опорам:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_1}, \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Розглянемо батарею із  $n$  послідовно з'єднаних джерел струму, ЕРС яких дорівнюють  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, \dots, \mathcal{E}_n$ , а їх внутрішні опори відповідно  $r_1, \dots, r_k, \dots, r_n$  (рис. 2.10). У цьому разі крізь кожне джерело проходить однаковий струм  $I = I_1 = \dots = I_k = \dots = I_n$ . Для довільного джерела як неоднорідної ділянки кола рівняння закону Ома (2.33) має вигляд  $I r_k = \varphi_{k1} - \varphi_{k2} + \mathcal{E}_k$ . Записавши аналогічні рівняння для всіх  $n$  ділянок і додавши їх, одержимо

$$I \sum_{k=1}^n r_k = \sum_{k=1}^n (\varphi_{k1} - \varphi_{k2}) + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k,$$

або

$$I r = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

де  $\mathcal{E} = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k$  — електрорушійна сила батареї;  $r = \sum_{k=1}^n r_k$  — її внутрішній опір;  $\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_{k1} - \varphi_{k2})$  — різниця потенціалів на клемі батареї.

Якщо батарею утворюють  $n$  послідовно з'єднаних однакових джерел струму з електрорушійними силами  $\mathcal{E}_1$  і внутрішніми опорами  $r_1$ , то  $\mathcal{E} = n \mathcal{E}_1$ ,  $r = n r_1$ .

При паралельному з'єднанні  $n$  джерел струму (рис. 2.11) різниця потенціалів на клемі кожного джерела така сама, як і на клемі батареї. За рівнянням закону Ома (2.33) крізь  $k$ -те джерело проходить струм силою  $I_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_k} + \frac{\mathcal{E}_k}{r_k}$ . Струм крізь батарею  $I = \sum_{k=1}^n I_k$ , тобто

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k}{r_k},$$

або

$$I r = (\varphi_1 - \varphi_2) + r \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k}{r_k},$$

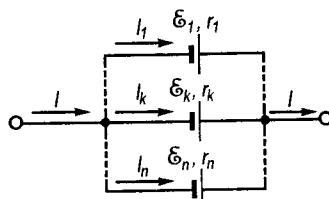


Рис. 2.11

де

$$\mathcal{E} = r \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}_k}{r_k} \quad (2.52)$$

— електрорушійна сила батареї;  $r$  — її внутрішній опір:  $\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}$ .

Якщо внутрішній опір усіх джерел струму однаковий  $r_1 = \dots = r_k = \dots = r_n$ , то внутрішній опір батареї  $r = r_1 / n$  і з формули (2.52) випливає, що ЕРС батареї дорівнює середньому арифметичному ЕРС усіх джерел струму:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k. \quad (2.53)$$

На практиці доводиться розраховувати складні, розгалужені кола постійного струму. Розгалужені кола становлять мережу, утворену двома або кількома замкненими електричними колами, які з'єднані між собою в окремих точках і мають спільні ділянки. Точку розгалуженого кола, в якій сходяться три або більше провідників із струмами, називають вузлом. Ділянкою замкненого контуру, довільно виділеного в електричній мережі, називають частину контуру між двома вузлами. На одній ділянці контуру можуть міститись джерело струму (або кілька джерел), резистори та інші елементи кола. По різних ділянках одного контуру проходять різні струми. За відомими опором ділянок і електрорушійними силами, що діють у них, можна визначити струми в усіх ділянках або, навпаки, для забезпечення потрібних струмів у ділянках можна розрахувати відповідні електрорушійні сили. Розв'язання таких задач значно спрощується, якщо користуватися двома правилами Кірхгофа.

Перше правило Кірхгофа виражає закон збереження заряду в будь-якій точці кола постійного струму і стосується вузлів розгалуженого кола: алгебрична сума сил струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулеві

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (2.54)$$

де  $n$  — кількість струмів, які сходяться у вузлі. Або інакше кажучи, сума струмів, що входять у вузол, дорівнює сумі струмів, що виходять із нього. Струми, які приходять до вузла, записують зі знаком плюс, а струми, які виходять із нього, — зі знаком мінус. Наприклад, для вузла, в якому сходяться  $n = 5$  струмів (рис. 2.12), рівняння за першим правилом Кірхгофа запишеться так:

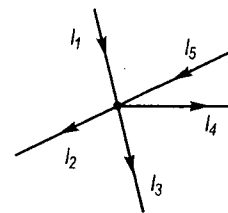


Рис. 2.12

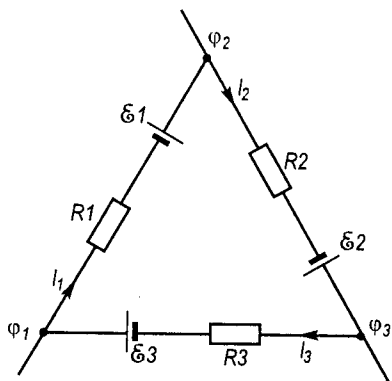


Рис. 2.13

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

Виконання рівності (2.54) у вузлах розгалуженого кола є необхідною умовою проходження постійних струмів у колі. Якби алгебрична сума струмів не дорівнювала нулеві, то у вузлах відбувалось би збільшення або зменшення зарядів. Це, у свою чергу, зумовлювало б зміну в часі потенціалів і сили струмів у ділянках кола.

Друге правило Кірхгофа є узагальненням закону Ома (2.34) на розгалужені електричні кола і стосується контурів. Для довільного контуру, уможливлено обраного в розгалу-

женому колі, друге правило Кірхгофа формулюється так: у контурі алгебрична сума падів напруг (добутків сил струмів на опори відповідних ділянок) дорівнює алгебричній сумі електрорушійних сил, які діють у цьому контурі,

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k, \quad (2.55)$$

де  $n$  — кількість ділянок у контурі;  $m$  — кількість ЕРС, що діють у контурі.

Для доведення рівності (2.55) розглянемо замкнений контур, який складається із трьох ділянок (рис. 2.13). Потенціали вузлів позначимо через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . За рівнянням закону Ома (2.33) для кожної ділянки можна записати:

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_3.$$

Додаючи ці рівняння, одержимо рівність

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3,$$

яка виражає друге правило Кірхгофа.

Спрощення розрахунків за правилами Кірхгофа порівняно із законом Ома полягає у вилученні невідомих потенціалів з рівнянь для струмів. Рівняння (2.55) можна скласти для всіх контурів, які можна виділити уможливлено в даному розгалуженому колі. Проте ці рівняння мають бути незалежними, тобто складеними тільки для тих контурів, які не можна утворити накладанням інших контурів цього кола один

на одного. При складанні рівнянь за другим правилом Кірхгофа слід додержуватися таких правил.

1. На схемі розгалуженого кола в усіх ділянках довільно позначити стрілками напрямки струмів. Обрати довільно напрям обходу простого контуру, наприклад за рухом стрілки годинника.

2. Обійти всі ділянки контуру в обраному напрямі. Якщо позначений в ділянці напрям обходу збігається з напрямом струму, то доданок  $IR$  береться зі знаком плюс; якщо ж ці напрями є протилежними, то він береться зі знаком мінус. Електрорушійну силу вважають додатною, якщо при обході контуру джерело струму проходить від негативного полюса до позитивного; у протилежному разі її вважають від'ємною.

3. Всі електрорушійні сили і всі опори мають входити в систему рівнянь.

Незалежні рівняння, складені за першим і другим правилами Кірхгофа, утворюють систему алгебричних рівнянь першого порядку. Кількість рівнянь у системі дорівнює кількості різних струмів, які течуть у розгалуженому колі. Розв'язок цієї системи дає можливість визначити будь-яку невідому величину (силу струму, опір, ЕРС джерела струму) на будь-якій ділянці кола. Якщо внаслідок обчислення деякі струми будуть отримані зі знаком мінус, то це означає, що їх справжні напрями протилежні напрямам, позначеним на схемі.

**Приклад 2.1. Міст Уінстона.** Для вимірювання опорів резисторів широко застосовуються методи, в основу яких покладена мостова схема Уінстона (рис. 2.14). Міст складається з резисторів  $R_1, R_2, R_3, R_x$ , опори трьох із них відомі, а  $R_x$  треба виміряти. У діагональ моста  $AC$  (діагональ живлення моста) вмикається джерело струму з ЕРС  $\mathcal{E}$ , а в діагональ  $BD$  (вимірювальна діагональ) — чутливий гальванометр (нуль-індикатор струму). Для вимірювання опору  $R_x$  приводять міст до стану рівноваги, тобто підбирають опори  $R_1, R_2, R_3$  так, щоб сила струму у вимірювальній діагоналі дорівнювала нулеві (відсутність струму відмічається гальванометром). Нехай у зрівноваженому мості крізь резистори  $R_1, R_x$  і  $R_2, R_3$  проходять струми відповідно  $I_1$  і  $I_2$ . Тоді для контурів  $ABDA$  і  $BCDB$  за другим правилом Кірхгофа можна записати рівняння

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0, \quad I_1 R_x - I_2 R_3 = 0.$$

Звідси одержуємо

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2},$$

або

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}. \quad (2.56)$$

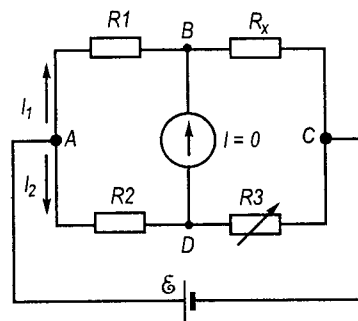


Рис. 2.14

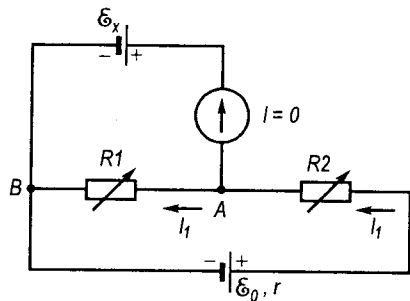


Рис. 2.15

При вимірюваннях  $R_x$  у широкому інтервалі опорів для зручності зрівноважування моста і спрощення обчислень за формулою (2.56) у мостах використовуються резистори з фіксованим відношенням  $R1/R2$  (0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; 1000) і резистор  $R3$  змінного опору.

**Приклад 2.2.** Вимірювання електрорушійних сил методом компенсації. Компенсаційний метод вимірювання ЕРС джерел струму (рис. 2.15) належить до найточніших. За цим методом вимірювана ЕРС  $\mathcal{E}_x$  порівнюється з ЕРС  $\mathcal{E}_0$  еталонного джерела струму, внутрішній опір якого дорівнює  $r_0$ , а опори  $R_1 + R_2 = R$ . Крізь гальванометр проходять у протилежних напрямках два струми: струм, створюваний ЕРС  $\mathcal{E}_x$ , і розгалужений у вузлі  $A$  струм від еталонного джерела. Опори  $R_1$  і  $R_2$  добирають так, щоб ці струми компенсували один одного і струм крізь гальванометр дорівнював нулеві. При цьому крізь опори  $R_1$  і  $R_2$  проходять однакові струми  $I_1$ . Використовуючи друге правило Кірхгофа, для контурів  $AB\mathcal{E}_xA$  і  $B\mathcal{E}_0AB$  складемо рівняння

$$I_1 R_1 = \mathcal{E}_x, \quad I_1 (R_1 + R_2 + r_0) = \mathcal{E}_0.$$

Поділивши перше рівняння на друге, одержимо

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + r_0}. \quad (2.57)$$

Якщо замість джерела ЕРС  $\mathcal{E}_x$  увімкнути в коло джерело  $\mathcal{E}'_x$ , то на підставі формули (2.57) можна порівняти їх електрорушійні сили:

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}'_x} = \frac{R_1}{R'_1},$$

де  $R'_1$  — нове значення опору  $R_1$ , при якому струм крізь гальванометр також дорівнює нулеві.

**Приклад 2.3.** У схемі зображеній на рис. 2.16, джерела струму мають електрорушійні сили  $\mathcal{E}_1 = 8$  В і  $\mathcal{E}_2 = 5$  В і внутрішні опори  $r_1 = 1$  Ом,  $r_2 = 0,5$  Ом. Опори  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом. Визначити струми в усіх ділянках кола.

Розв'язання. До розгалуженого кола застосуємо правила Кірхгофа. Напрями струмів  $I_1, I_2, I_3$  вкажемо стрілками, як показано на рисунку. Оскільки в колі є тільки два вузли, то достатньо записати рівняння за першим правилом Кірхгофа лише для одного з них, наприклад вузла  $A$ :  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ . Оберемо напрями обходу незалежних контурів  $AB\mathcal{E}_1A$  і  $B\mathcal{E}_2AB$  уздовж напрямів струмів  $I_1$  і  $I_2$ . Для цих контурів складемо рівняння за другим правилом Кірхгофа:

$$I_1 (R_1 + r_1) + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1,$$

$$I_3 R_3 + I_2 (R_2 + r_2) = \mathcal{E}_2.$$

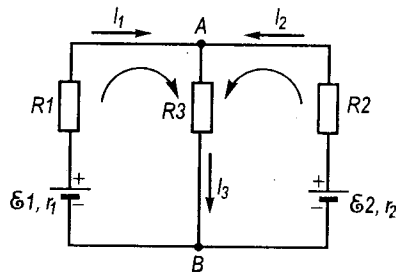


Рис. 2.16

Ці рівняння разом із попереднім рівнянням для струмів утворюють замкнену систему рівнянь. В одержані рівняння підставимо задані величини і перепишемо їх у такому вигляді:

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 = 0,$$

$$4 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = 8,$$

$$0 \cdot I_1 + 2,5 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = 5.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2,5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-16} = 2 \text{ А.}$$

Таким же способом обчислимо, що

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-16} = 0,5 \text{ А,}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-40}{-16} = 2,5 \text{ А.}$$

## § 2.7. Квазістаціонарні струми

Закони постійного струму можна застосовувати також для розрахунків електричних кіл, сила струму в яких змінюється з часом, якщо ці зміни відбуваються не дуже швидко. Це означає, що відносні зміни струмів і електрорушійних сил протягом часу встановлення електричної рівноваги в колі мають бути настільки малими, щоб миттєве значення сили струму було однаковим в усіх поперечних перерізах провідників схеми. Такі струми називають *квазістаціонарними* (від лат. quasi — ніби та stationarius — постійний) або *повільнозмінюваними*. Швидкість установлення електричної рівноваги в колі дуже велика, наприклад, змінні струми частотою 50 Гц є квазістаціонарними.

Застосування законів постійного струму для розрахунку схем квазістаціонарних струмів дає змогу встановити співвідношення між миттєвими значеннями електричних величин у вигляді диференціальних рівнянь. Залежність змінних електричних величин від часу отримують як розв'язки диференціальних рівнянь за відповідних початкових умов.

Розглянемо квазістаціонарні процеси в електричних колах, які містять конденсатори.

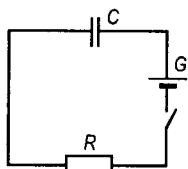


Рис. 2.17

**Зарядження конденсатора.** Конденсатор ємністю  $C$  увімкнений в коло, складене із джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E}$  і провідників опором  $R$  (рис. 2.17). У разі розімкненого ключа конденсатор незаряджений, після замикання ключа по колу проходить струм  $I$  і конденсатор заряджається. За другим правилом Кірхгофа  $IR + U = \mathcal{E}$ , де  $U = \frac{q}{C}$ , а  $I = \frac{dq}{dt}$  —

миттєве значення сили струму. Підставляючи ці значення в попередній вираз, одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q - \mathcal{E}C}{RC},$$

або після розділення змінних

$$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC},$$

де  $R$ ,  $C$  — постійні величини. Інтегруванням цього рівняння знаходимо

$$\ln(q - \mathcal{E}C) = -\frac{t}{RC} + \ln A,$$

або

$$q - \mathcal{E}C = Ae^{-t/(RC)},$$

де  $A$  — постійна інтегрування, яка визначається з початкових умов. У момент часу  $t = 0$  конденсатор був незаряджений:  $q = 0$ . Отже, постійна  $A = -\mathcal{E}C$  і закон зміни заряду на пластинах конденсатора має вигляд

$$q = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/(RC)}), \quad (2.58)$$

а закон зміни сили струму в колі  $I = \frac{dq}{dt}$  дається виразом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/(RC)}. \quad (2.59)$$

Заряд на пластинах конденсатора експоненціально зростає від нуля до максимального значення  $q_0 = \mathcal{E}C$  при  $t \rightarrow \infty$ . Струм, який проходить крізь конденсатор, досягає максимального значення  $I_0 = \mathcal{E}/R$  у початковий момент часу і спадає до нуля за експоненціальним законом. У формулах (2.58), (2.59) величина  $\tau = RC$  має розмірність часу і називається *часом релаксації електричного кола*. Час  $\tau$  дорівнює проміжковій часу, протягом якого сила струму, заряд і напруга на конденсаторі змінюються в  $e \approx 2,72$  раза.

**Розрядження конденсатора.** У процесі розрядження конденсатор замкнений на опір  $R$  (рис. 2.18) і в колі проходить розрядний струм. У будь-який момент часу спад напруги на опорі дорівнює напрузі на конденсаторі:  $IR = U$ . Миттєве значення напруги  $U = \frac{q}{C}$ , миттєва сила струму

$I = -\frac{dq}{dt}$ , де знак мінус вказує на зменшення заряду

конденсатора з часом. Диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC},$$

а його розв'язок

$$q = q_0 e^{-t/(RC)}, \quad (2.60)$$

де  $q_0$  — заряд конденсатора в початковий момент часу  $t = 0$ . Закон зміни сили струму в часі дається виразом

$$I = \frac{q_0}{RC} e^{-t/(RC)}. \quad (2.61)$$

Розрядний струм конденсатора в початковий момент часу досягає максимального значення  $I_0 = \frac{q_0}{RC}$  і експоненціально спадає до нуля.

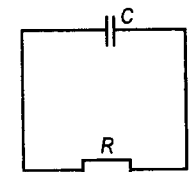


Рис. 2.18

## Розділ 3. Електропровідність твердих тіл

### § 3.1. Електричний струм у металах

Розглядаючи металеві провідники, ми вважали, що струм у металах створюють вільні, не зв'язані з певними атомами електрони — електрони провідності. Для пояснення електронного характеру провідності металів треба припустити, що атоми в металі частково дисоційовані на електрони і позитивні іони, внаслідок чого утворюється велика кількість так званих вільних електронів. За сучасними поглядами такими електронами є валентні електрони атомів металу, які найслабше зв'язані з ядрами атомів. У металах валентні електрони легко переходять від одного атома до іншого. Вони розподілені по всій кристалічній ґратці, у вузлах якої розміщені позитивні іони. Вільні електрони в об'ємі металу беруть участь у хаотичному тепловому русі, аналогічному тепловому рухові молекул

газу, а позитивні іони здійснюють теплові коливання навколо положення рівноваги. В одновалентних металах на один атом припадає один вільний електрон. Тому концентрацію вільних електронів у одновалентному металі можна обчислити як кількість атомів в одиниці об'єму металу.

Припущення про електронну природу струму в металах було обґрунтоване експериментально на початку ХХ ст. У 1901 р. німецьким фізиком Е. Ріке був проведений дослід, в якому крізь три металевих циліндри (мідний, алюмінієвий і мідний), з'єднані послідовно пришліфованими основами, пропускали електричний струм протягом тривалого часу (більше, ніж рік). По цьому колу загалом пройшов електричний заряд близько 3,5 млн. кулонів. Після припинення подачі струму і зважування циліндрів з точністю до  $0,3 \cdot 10^{-4}$  г не було виявлено ніяких слідів перенесення частинок міді та алюмінію. З цього дослідів випливає, що іони не беруть участі у створенні струму в металах. Електропровідність металів зумовлена перенесенням заряджених частинок, спільних для всіх металів, і не пов'язана з відмінністю їх фізичних і хімічних властивостей.

Найпереконливішими дослідями, які підтверджують електронний характер провідності металів, є досліди з визначення знака заряду та інертності заряджених частинок, що створюють струм. Можливість проведення таких дослідів впливає з простих розрахунків. Нехай металевий стрижень рухається поступально зі швидкістю  $v_0$  в напрямі власної осі. З такою самою швидкістю рухаються і носії заряду внаслідок взаємодії з кристалічною ґраткою. Припустимо, що стрижень раптово гальмується і в цей момент кінці його з'єднують нерухомим провідником з балістичним гальванометром. Оскільки носії заряду не зв'язані жорстко з кристалічною ґраткою, то вони продовжують напрямлений рух за інерцією вздовж стрижня, поки взаємодія з іонами ґратки не зупинить їх. Переміщення заряджених частинок у нерухомому стрижні створить короткочасний струм у замкненому колі, і гальванометр зареєструє заряд  $q$ , перенесений крізь поперечний переріз стрижня за час гальмування. За напрямом цього струму можна визначити знак носіїв заряду. Крім того, за даними дослідів можна визначити відношення заряду до маси (питомий заряд) носіїв у металевому стрижні.

При гальмуванні стрижня кінетична енергія носіїв заряду витрачається на роботу сили струму в нерухомому замкненому колі. За законом Джоуля — Ленца сила струму  $I$  в колі з опором  $R$  протягом часу  $dt$  виконує роботу

$$dA = I^2 R dt = jSRIdt = jSRdq,$$

де  $j$  — густина струму;  $S$  — площа поперечного перерізу стрижня;  $dq$  — заряд, перенесений крізь площу  $S$  за час  $dt$ . Позначимо через  $e$

заряд носіїв,  $v$  — швидкість носіїв у момент часу  $t$ ,  $n$  — кількість усіх носіїв у стрижні завдовжки  $l$ . Тоді  $j = en_0v = e \frac{n}{Sl} v$  і попередній вираз набуває вигляду

$$dA = n \frac{ev}{l} R dq. \quad (3.1)$$

Елементарна робота струму виконується завдяки зменшенню кінетичної енергії всіх носіїв за час  $dt$ , тобто

$$dA = -nd \left( \frac{mv^2}{2} \right) = -nmv dv, \quad (3.2)$$

де  $m$  — маса носія заряду. Зрівнявши праві частини рівнянь (3.1) і (3.2), маємо

$$eRdq = -mldv.$$

Інтегруючи це рівняння справа по  $v$  від  $v_0$  до 0, визначаємо повний заряд  $q$ , який проходить крізь гальванометр при гальмуванні стрижня:

$$q = \frac{m lv_0}{e R},$$

або питомий заряд носіїв струму в металі

$$\frac{e}{m} = \frac{lv_0}{qR}. \quad (3.3)$$

Існування інерційного руху носіїв заряду в металевому провіднику було підтверджено експериментально в 1913 р. російськими фізиками Л. І. Мандельштамом (1879—1944) і М. Д. Папалексі (1880—1947). У проведеному досліді вони використовували котушку з намотаним тонким дротом, кінці якого були з'єднані з телефонною трубкою. При швидких крутильних коливаннях котушки навколо її геометричної осі в колі з'являвся змінний струм, який спричиняв потріскування в телефоні. Проте в цьому досліді неможливо було визначити напрям струму і, відповідно, знак заряду його носіїв.

Досконаліший дослід провели в 1916 р. англійські фізики Ч. Стюарт і Р. Толмен (1881—1948), замінивши телефон чутливим балістичним гальванометром, а крутильні коливання — швидким обертанням котушки з великою кількістю витків тонкого дроту навколо власної осі, причому використовували по черзі дріт мідний, алюмінієвий та срібний. Довжина дроту дорівнювала приблизно 500 м, а лінійна швидкість витків при обертанні котушки досягала 300 м/с. Під час рівномірного обертання котушки гальванометр не виявляв електричного

струму, а при раптовому гальмуванні спостерігались відхилення стрілки гальванометра. Напрямок відхилення стрілки вказував на те, що струм у металах зумовлений рухом негативно заряджених частинок. Питомий заряд частинок визначили на підставі дослідних даних за формулою (3.3). При цьому виявилось, що для досліджуваних металів відношення  $e/m$  у межах точності вимірювань збігається зі значенням питомого заряду електрона, визначеного раніше іншими методами.

Питомий заряд носіїв струму в металі експериментально визначили Кеттерінг і Скотт у 1944 р., досліджуючи зміну моменту імпульсу відносно осі симетрії котушки, намотаної тонким дротом в один шар, при зміні сили струму в ній. Котушка, підвішена на пружній нитці вздовж геометричної осі, здійснювала крутильні коливання відносно своєї осі  $\varphi = A \sin \omega t$ . По витках котушки пропускали постійний струм. Якщо струм  $I$  зумовлений рухом електронів по витках радіуса  $r$ , то повний момент імпульсу всіх  $n$  електронів провідності відносно осі

$$L_e = nm \langle v_d \rangle r = n_0 S l m \langle v_d \rangle r = \frac{m}{e} n_0 e \langle v_d \rangle S l r,$$

де  $e$  і  $m$  — заряд і маса електрона;  $\langle v_d \rangle$  — середня дрейфова швидкість електронів;  $l$  і  $S$  — довжина дроту і площа його поперечного перерізу.

Оскільки сила струму  $I = jS = n_0 e \langle v_d \rangle S$ , то  $L_e = \frac{m}{e} l r I$ . Зміна

сили струму на  $\Delta I$  має зумовити зміну  $L_e$  на  $\Delta L_e = \frac{m}{e} l r \Delta I$ .

У замкненій системі кристалічна гратка — електрони зміна  $\Delta L_e$  спричиняє однакову за значенням і протилежну за знаком зміну моменту імпульсу гратки відносно тієї самої осі:  $\Delta L_r = -\Delta L_e = -\frac{m}{e} l r \Delta I$ .

З іншого боку, якщо зміна сили струму відбувається протягом часу, значно меншого за період коливань котушки  $T$ , то зміна моменту імпульсу гратки пропорційна зміні кутової швидкості коливань:

$\Delta L_r = I_0 \Delta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)$ , де  $I_0$  — момент інерції котушки відносно геометричної осі. Нехай зміна сили струму відбулась у момент, коли котушка проходила положення рівноваги, тоді

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \varphi_0 \cos \omega t = \omega \varphi_0, \quad \Delta L_r = I_0 \omega \Delta \varphi_0,$$

де  $\Delta \varphi_0$  — приріст амплітуди коливань котушки. Зрівнюючи два незалежних вирази для  $\Delta L_r$ , одержимо

$$I_0 \omega \Delta \varphi_0 = -\frac{m}{e} l r \Delta I,$$

або

$$\frac{\pi I_0}{T} \Delta \varphi_0 = \frac{m}{e} l r I,$$

де враховано, що в досліді зміна струму здійснювалася зміною напруги струму на протилежний:  $\Delta I = -2I$ . У досліді вимірювався приріст амплітуди  $\Delta \varphi_0$  і питомий заряд електрона обчислювався за формулою

$$\frac{e}{m} = \frac{T l r I}{\pi I_0 \Delta \varphi_0}.$$

Дослід проводився з котушками із мідного та алюмінієвого дроту. Виміряне цим методом середнє значення питомого заряду електрона відрізнялось на 0,2 % від прийнятого нині.

### § 3.2. Класична електронна теорія металів

**Загальні положення.** Класична (у розумінні неквантова) електронна теорія провідності металів створена в 1900 р. німецьким фізиком П. Друде (1863—1906). Ідеї Друде розвинув далі Х. Лоренц, підвівши під них досконалішу теоретичну основу. У своїй теорії П. Друде виходив із припущення, що висока електропровідність металів зумовлена великою кількістю носіїв заряду — електронів, які хаотично переміщуються в об'ємі металу. Електрони провідності утворюють в металі електронний газ, який має властивості одноатомного газу. При хаотичному русі електрони зазнають зіткнень з іонами кристалічної гратки металу. Тому можна говорити про середню довжину вільного пробігу електронів, яка за значенням має дорівнювати параметру кристалічної гратки, тобто  $\langle l \rangle \approx 10^{-10}$  м. Користуючись закономірностями кінетичної теорії газів, можна обчислити середню арифметичну швидкість  $\langle v \rangle$  теплового руху електронів; при температурі 273 К  $v \approx 10^5$  м/с. Електричний струм у металевому провіднику виникає під дією електричного поля як упорядкований рух електронів із середньою дрейфовою швидкістю  $v_d$ . Густина струму виражається формулою (2.6), яка дає можливість оцінити середню дрейфову швидкість  $v_d$  електронів у металі. Для металевих провідників з різних матеріалів існують максимальні технічно припустимі значення густини струму, перевищення яких призводить до небезпечного перегрівання провідника. Наприклад, для мідного ізолюваного дроту найбільша припустима густина струму дорівнює 11 А/мм<sup>2</sup>.

Оскільки для міді концентрація електронів провідності  $n_0 = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ , а заряд електрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , то середня швидкість упорядкованого руху електронів за цих умов  $v_d \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ .

Надзвичайно мала швидкість упорядкованого руху електронів порівняно зі швидкістю  $\langle v \rangle$  їх теплового руху при звичайних температурах пояснюється дуже частими зіткненнями електронів з іонами кристалічної ґратки. Як же узгоджується дуже мала дрейфова швидкість  $v_d$  електронів, яка зумовлює електричний струм у металі, з практично миттєвою передачею електричних, наприклад телефонних, сигналів по провідниках на величезні відстані? При замиканні протяжного електричного кола в провіднику створюється електричне поле, яке поширюється зі швидкістю світла  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . З такою швидкістю поширюються будь-які зміни електричного поля. Тому упорядкований рух електронів під дією електричного поля виникає на всій довжині кола практично одночасно з подачею сигналу. Наприклад, в електричному колі 300 км завдовжки установиться квазістаціонарне електричне поле і почнеться упорядкований рух електронів через проміжок часу 0,01 с після замикання кола (подачі сигналу).

В основу класичної електронної теорії провідності металів покладено такі положення.

1. Метал як кристалічне тверде тіло є системою позитивних іонів і вільних електронів. Кристалічну ґратку утворюють розташовані правильними і жорсткими рядами іони, які здійснюють теплові коливання навколо положення рівноваги (вузлів кристалічної ґратки). Всередині іонної ґратки хаотично рухаються електрони, створюючи електронний газ.

2. Електронний газ вважається ідеальним газом, взаємодією між електронами можна знехтувати, враховується тільки взаємодія з іонами ґратки. Електронний газ перебуває в термодинамічній рівновазі з іонною ґраткою.

3. Електронний газ підлягає законам одноатомного ідеального газу. Середня довжина вільного пробігу електрона не залежить від його швидкості хаотичного руху. Середня кінетична енергія теплового руху, що припадає на один електрон,

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (3.4)$$

де  $m$  — маса електрона;  $k$  — стала Больцмана;  $T$  — абсолютна температура металу.

4. Внаслідок хаотичного руху електронів у разі відсутності електричного поля в металі немає домінуючого напрямку переміщення зарядів. В електричному полі всередині металу на тепловий рух елек-

тронів накладається впорядкований рух у напрямі, протилежному до напрямку напруженості поля.

5. Електрон набуває енергії впорядкованого руху під дією зовнішнього електричного поля тільки на шляху вільного пробігу. Між електроном та іоном відбувається непружне зіткнення, і електрон передає іонній ґратці енергію впорядкованого руху, внаслідок чого виділяється джоулева теплота і метал нагрівається.

Основне завдання електронної теорії провідності металів полягає у теоретичному обґрунтуванні основних законів постійного струму, установлених експериментально, і поясненні властивостей металів.

**Закон Ома.** Як уже відмічалось, напрямлений дрейф електронів провідності під дією зовнішнього електричного поля зумовлює у провіднику струм, густина якого  $j = n_0 e v_d$ .

Швидкість упорядкованого руху електрона між двома послідовними зіткненнями з іонами змінюється рівномірно від нуля до  $\bar{v}_{d \text{ max}} = \bar{a} \langle \tau \rangle$  і її середнє значення

$$\bar{v}_d = \frac{1}{2} \bar{a} \langle \tau \rangle, \quad (3.5)$$

де  $\bar{a}$  і  $\langle \tau \rangle$  — прискорення і середній час вільного пробігу електрона. На шляху вільного пробігу з боку поля на електрон діє постійна сила  $e\bar{E}$  і він набуває прискорення

$$\bar{a} = \frac{e\bar{E}}{m},$$

де  $\bar{E}$  — напруженість зовнішнього поля в провіднику. Середній час вільного пробігу електронів можна визначити через середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle$  і середню швидкість руху електронів відносно кристалічної ґратки. Ця швидкість дорівнює сумі середньої швидкості  $\langle \bar{v} \rangle$  їх теплового руху і середньої швидкості  $\bar{v}_d$  упорядкованого руху. Як було показано, значенням  $\bar{v}_d$  порівняно з  $\langle \bar{v} \rangle$  можна знехтувати, тому

$$\langle \tau \rangle = \langle l \rangle / \langle v \rangle.$$

Підставляючи вирази для  $\bar{a}$  і  $\langle \tau \rangle$  у формулу (3.5), визначимо середню швидкість упорядкованого руху електронів і її максимальне значення в момент зіткнення з іоном:

$$\bar{v}_d = \frac{e \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle} \bar{E}, \quad \bar{v}_{d \text{ max}} = \frac{e \langle l \rangle}{m \langle v \rangle} \bar{E}. \quad (3.6)$$

З рівняння (2.6) і першої формули (3.6) знаходимо вираз для густини струму в металі:

$$\vec{j} = \frac{n_0 e^2 \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle} \vec{E}. \quad (3.7)$$

Це співвідношення збігається із законом Ома  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  і дає теоретичний вираз емпіричної константи, тобто питомої електропровідності металу

$$\sigma = \frac{n_0 e^2 \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle}. \quad (3.8)$$

**Закон Джоуля — Ленца.** Розглянемо перетворення енергії, що відбувається у разі зіткнень електронів провідності з кристалічною ґраткою металу.

Припустимо, що зіткнення електронів з іонами відбуваються абсолютно непружно. Тоді в кінці вільного пробігу кожний з електронів провідності втрачає швидкість упорядкованого руху і передає іонові енергію  $(mv_{\text{д max}}^2) / 2$ . За одиницю часу електрон у середньому зазнає  $\langle z \rangle$  зіткнень з іонами. Середня кількість зіткнень виражається через характеристики електронного газу:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}. \quad (3.9)$$

Всі  $n_0$  електронів провідності, які містяться в одиниці об'єму провідника, зазнають  $n_0 \langle z \rangle$  зіткнень за одиницю часу і передають іонній ґратці енергію

$$w = n_0 \langle z \rangle \frac{mv_{\text{д max}}^2}{2}. \quad (3.10)$$

Ця енергія перетворюється в енергію теплового руху іонів металу, тобто витрачається на нагрівання провідника. Підставляючи у формулу (3.10) вирази для  $\langle z \rangle$  із рівності (3.9) і  $v_{\text{д max}}$  із другої формули (3.6), визначаємо енергію, яка перетворюється в теплову в одиниці об'єму провідника за одиницю часу:

$$w = \frac{n_0 e^2 \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2. \quad (3.11)$$

Цей вираз обґрунтовує теоретично закон Джоуля — Ленца (2.49) і коефіцієнт  $\frac{n_0 e^2 \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle}$  виражає питому електропровідність металу (3.8).

При виведенні формул (3.7) і (3.11) було зроблено припущення про абсолютно непружні зіткнення електронів провідності з іонами.

**Закон Відемана — Франца.** Ще задовго до створення класичної електронної теорії металів, у 1853 р., експериментально був встановлений закон Відемана — Франца: для всіх металів відношення коефіцієнта теплопровідності до коефіцієнта електропровідності є величиною сталою:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = A.$$

Подальші дослідження датського фізика Л. Лоренца (1829—1891) показали, що відношення  $\lambda / \sigma$  прямо пропорційне абсолютній температурі металу:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = A_1 T, \quad (3.12)$$

де константа  $A_1$  не залежить від природи металу.

Теорія Друде обґрунтувала цей закон і дала теоретичний вираз константи  $A_1$ .

Теплопровідність металів в основному зумовлена рухом вільних електронів. Електронний газ у металі має властивості одноатомного ідеального газу, тому коефіцієнт теплопровідності металу можна виразити формулою

$$\lambda = \frac{1}{2} k n_0 \langle l \rangle \langle v \rangle, \quad (3.13)$$

де  $k$  — стала Больцмана;  $n_0$  — кількість вільних електронів в одиниці об'єму;  $\langle l \rangle$  і  $\langle v \rangle$  — середні значення їх довжини вільного пробігу і швидкості теплового руху.

Із формул (3.8) і (3.13) випливає, що

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{k m \langle v^2 \rangle}{e^2},$$

а з урахуванням виразу (3.4) встановлюємо, що це відношення пропорційне абсолютній температурі металу:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (3.14)$$

Співвідношення (3.14) виражає закон Відемана — Франца (3.12), якщо значення емпіричної величини  $A_1$  збігається зі значенням, обчисленим за формулою



$$A_1 = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2. \quad (3.15)$$

Виявилось, що обчислене за цим виразом значення  $A_1 = 2,23 \cdot 10^{-8} \left( \frac{\text{Дж}}{\text{Кл} \cdot \text{К}} \right)^3$  дещо менше від значення емпіричної величини  $A_1$ , але досить близьке до неї. Отже, теоретичний вираз (3.14) добре узгоджується з результатами дослідів.

**Труднощі класичної електронної теорії.** Удосконалюючи спрощену теорію П. Друде, Х. Лоренц застосував до електронного газу статистику Максвелла — Больцмана. Він виходив із того, що за відсутності електричного поля вільні електрони в металі мають підлягати розподілові за швидкостями відповідно до закону Максвелла. Проте в електричному полі порушується максвеллівський розподіл швидкостей електронів: на хаотичний рух накладається впорядкований рух електронів і в металі виникає електричний струм. Строгий підхід у межах класичної теорії дав можливість Х. Лоренцу вивести закон Ома у вигляді формули (2.23), але вираз для коефіцієнта електропровідності дещо відрізнявся від виразу Друде (3.8), а саме:

$$\sigma = \frac{2n_0 e^2 \langle l \rangle}{3m} < \frac{1}{v} \rangle. \quad (3.16)$$

Для відношення коефіцієнтів тепло- і електропровідності Х. Лоренц вивів закон Відемана — Франца (3.12), в якому константа  $A_1$  виявилась такою, що дорівнює  $2 \left( \frac{k}{e} \right)^2$ . Цей результат дає ще більшу розбіжність при низьких температурах з емпіричною величиною  $A_1$ , ніж формула (3.15).

Отже, теорія Друде — Лоренца, удосконалена застосуванням класичної статистики Максвелла — Больцмана до властивостей електронного газу в металі, не внесла істотних змін у спрощену теорію Друде, оскільки гірше узгоджується з дослідом. Пояснення цього парадоксального результату пізніше стало підставою для радикального перегляду основних положень класичної електронної теорії металів.

Крім того, класична електронна теорія не змогла пояснити й деякі інші важливі властивості металів, встановлені експериментально.

1. Експериментально встановлено, що в широкому інтервалі температур питома електропровідність металевих провідників обернено пропорційна абсолютній температурі:  $\sigma \sim 1/T$  (питомий опір  $\rho \sim T$ ). Із формул Друде (3.8) і Лоренца (3.16) випливає, що  $\sigma \sim 1/\sqrt{T}$ , оскільки за формулою (3.4) середня швидкість хаотичного руху вільних електронів  $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$  і  $\langle 1/v \rangle \sim 1/\sqrt{T}$ . Отже, класична електронна

теорія не пояснила температурної залежності електропровідності металів.

2. За законом Дюлонга і Пті атомна теплоємність твердих кристалічних тіл (металів і діелектриків) дорівнює  $3R$ , де  $R$  — універсальна (молярна) газова стала. Згідно з основними положеннями класичної електронної теорії на теплоємність металів має істотно впливати теплоємність електронного газу, тобто атомна теплоємність металу має складатись із теплоємності іонної ґратки, що дорівнює  $3R$  за законом Дюлонга і Пті, та теплоємності одноатомного електронного газу  $3R/2$ . Тоді повна теплоємність металу має дорівнювати  $9R/2$ , що в 1,5 раза більше атомної теплоємності діелектриків. Проте дослід показує, що атомні теплоємності металів і кристалічних діелектриків є однаковими. Це свідчить про те, що енергія теплового руху електронів провідності не змінюється при нагріванні металу і, відповідно, електронний газ не впливає на теплоємність. Пояснити мізерно малу теплоємність електронного газу за допомогою класичної електронної теорії неможливо.

3. Нарешті, класична електронна теорія наштовхується на великі труднощі при оцінюванні довжини вільного пробігу електронів у металах. Якщо експериментально визначити питому електропровідність  $\sigma$  металевого провідника і концентрацію  $n_0$  електронів провідності в ньому, то за формулою (3.8) можна обчислити середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle$  електронів. При цьому виявляється, що  $\langle l \rangle$  у сотні разів більша, ніж період кристалічної ґратки металу. Тобто доводиться припустити, що електрон пробігає без зіткнень з іонами ґратки сотні міжвузлових відстаней. Така «прозорість» металів для електронів провідності виявилась одним із найважливіших заперечень теорії Друде — Лоренца.

### § 3.3. Поняття про квантову теорію металів

Класична теорія, побудована на моделі вільного електронного газу, досягла значних успіхів при поясненні важливих властивостей металів і одночасно зазнала великих невдач. З позицій цієї теорії було важко зрозуміти, яким чином вільні електрони, беручи участь у процесах електро- і теплопровідності, у той самий час не впливають на теплоємність металів. Ці труднощі успішно подолав німецький фізик А. Зоммерфельд (1868—1951). Зберігши модель вільних електронів, він застосував до неї замість класичної статистики квантову.

Використаний Х. Лоренцом для електронного газу в металі закон розподілу Максвелла — Больцмана базується на класичних уявленнях про рух та взаємодію атомів (молекул) у рівноважному стані і виражає

розподіл за швидкостями молекул у газі за звичайних умов. Однак маса електронів значно менша від маси молекул, а концентрація валентних електронів у металі у  $10^4$  разів більша, ніж концентрація молекул у газі за нормальних умов ( $t = 0$  °С,  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Па). Електрони мають свої особливі властивості, притаманні лише мікрочастинкам. Тому для електронів у металі класична статистика не може бути прийнятним наближенням і потрібно було замінити її квантовою статистикою.

Електронний газ підлягає квантовій статистиці, створення якої пов'язують з іменами італійського фізика Е. Фермі (1901—1954) та англійського фізика П. Дірака (1902—1984). *Статистика Фермі — Дірака* враховує вплив специфічної природи окремих частинок електронного газу на властивості всієї системи частинок як цілого. Ця специфіка проявляється в тому, що електрон як фермі-частинка може перебувати тільки у певному квантовому стані. Якщо даний квантовий стан уже заповнений електроном, то ніякий інший електрон не може зайняти цей стан. У цьому полягає сформульований швейцарським фізиком В. Паулі (1900—1958) принцип заборони, згідно з яким у кожному квантовому стані може перебувати не більше ніж один електрон.

Припустимо, що на  $n$  однакових частинок припадає  $G$  різних станів, у кожному з яких може перебувати окрема частинка. Якщо кількість різних вакантних станів набагато більша від кількості частинок ( $G \gg n$ ), то кожна мікрочастинка може зайняти один із численних вакантних станів. У таких умовах мікрочастинки будуть «зустрічатись» одна з одною рідко, оскільки потреба в заселенні одного і того самого стану декількома частинками практично не виникає. Тому властивості всієї сукупності частинок як цілого не будуть залежати від природи окремих мікрочастинок, з яких складається система. Подібні системи частинок називають *невиродженими*, а умову  $n / G \ll 1$  називають *критерієм невиродженості*. Наприклад, для класичних частинок, параметри стану яких можуть змінюватись неперервно, кількість станів  $G$  завжди нескінченно велика, внаслідок чого такі частинки можуть утворювати тільки невироджені сукупності (системи) частинок. Зокрема, звичайні молекулярні гази в нормальних умовах є невиродженими і можуть описуватись класичною статистикою Максвелла — Больцмана.

Якщо кількість станів  $G$  виявляється одного порядку з кількістю частинок  $n$ , тобто коли виконується умова  $G \approx n$ , то питання про те, як заселяти стани, поодиноці чи колективно, стає актуальним. У цьому разі природа мікрочастинок проявляється повною мірою й істотно впливає на властивості системи. Такі системи частинок називають *виродженими*. Вироджені системи частинок можуть утворюватись тільки з квантово-механічних об'єктів. Тільки у таких об'єктів

параметри стану можуть змінюватись дискретно, внаслідок чого кількість  $G$  можливих станів може бути скінченною. Наприклад, поширення принципу Паулі на частинки електронного газу в металі означає, що між вільними електронами існує особлива взаємодія. Ця взаємодія не є силовою і проявляється як квантовий ефект, який не має класичної аналогії. Розрахунки показують, що в реальних умовах (до температури  $T = 10^4$  К) електронний газ у металах завжди вироджений і тому має описуватись квантовою статистикою Фермі — Дірака.

Не зупиняючись докладно на квантовій статистиці виродженого електронного газу, розглянемо тільки визначення деяких понять і основні результати, які одержують за допомогою статистики Фермі — Дірака.

Для того щоб задати стан всієї системи частинок електронного газу, треба вказати термодинамічні параметри стану системи, зокрема хімічний потенціал  $\mu$  електронного газу і температуру  $T$ . Щоб задати стан окремих частинок, треба вказати значення їх координат і складових імпульсів уздовж координатних осей або кінетичну енергію  $\epsilon$  частинок, яка визначається їхніми координатами та імпульсами. Зв'язок між цими двома типами величин здійснює повна статистична функція розподілу  $n_{\mu, T}(\epsilon) d\epsilon$ . Ця функція виражає кількість частинок з енергією від  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$  в системі, стан якої описується термодинамічними параметрами  $\mu$  і  $T$ . Повну функцію розподілу визначають як добуток двох функцій:

$$n(\epsilon) d\epsilon = f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon, \quad (3.17)$$

де функція  $g(\epsilon) d\epsilon$  описує розподіл станів за енергіями, а функція  $f(\epsilon)$  визначає ймовірність заповнення цих станів частинками і називається просто *функцією розподілу* або *функцією Фермі — Дірака*.

Для виродженого електронного газу закон розподілу Фермі — Дірака має вигляд

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}, \quad (3.18)$$

де  $\epsilon$  — кінетична енергія електрона в даному квантовому стані;  $\mu = \mu(T)$  — хімічний потенціал виродженого електронного газу, який залежить від температури. Стосовно цього газу величину  $\mu$  частіше називають *рівнем* (або *енергією*) *Фермі*. Як видно із (3.18), при  $\epsilon = \mu$  функція розподілу  $f(\epsilon) = 1/2$  при будь-якій температурі. Іншими словами, за статистичним змістом рівень Фермі — це енергетичний рівень, ймовірність заповнення якого дорівнює  $1/2$ .

Розглянемо вироджений газ у металах при абсолютному нулі температури. Стан електронного газу при  $T = 0$  К називають *повним виродженням*. Вільні електрони в металі перебувають у своєрідній потенціальній ямі (рис. 3.1), для виходу з якої потрібно виконати роботу проти сил зв'язку, що утримують електрони в металі. Заселення

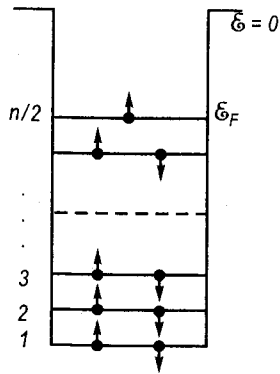


Рис. 3.1

рівень  $n/2$ . Саме цей рівень називають рівнем Фермі для виродженого електронного газу. Рівень Фермі відповідає найбільшій кінетичній енергії, яку може мати електрон у металі при абсолютному нулі температури. Її називають енергією Фермі  $\epsilon_F$ .

Отже, при абсолютному нулі температури всі стани з енергією  $\epsilon < \epsilon_F$  зайняті електронами, а стани з енергією  $\epsilon > \epsilon_F$  вільні. Іншими словами, при  $T = 0$  К імовірність заселення електронами станів з енергією  $\epsilon < \epsilon_F$  дорівнює 1, а ймовірність заселення станів з енергією  $\epsilon > \epsilon_F$  дорівнює нулеві. Цей результат дає також функція розподілу (3.18) при  $T = 0$  К:

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \epsilon < \mu(0) \\ 0, & \text{якщо } \epsilon > \mu(0) \end{cases} \quad (3.19)$$

Звідси випливає, що при  $T = 0$  К хімічний потенціал електронного газу, відрахований від дна потенціальної ями, дорівнює енергії Фермі і  $\mu(0) = \epsilon_F$ . Розрахунки показують, що

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3n_0}{\pi} \right)^{2/3}, \quad (3.20)$$

де  $m$  — ефективна маса електрона;  $n_0$  — концентрація вільних електронів у металі; а середня енергія, що припадає на один електрон,

$$\langle \epsilon_0 \rangle = \frac{3}{5} \epsilon_F. \quad (3.21)$$

Як видно з графіка функції розподілу Фермі — Дірака (3.18) при  $T = 0$  К (рис. 3.2), максимальна ймовірність заповнення квантових станів електронами при  $\epsilon < \epsilon_F$  обривається до нуля при  $\epsilon = \epsilon_F$ .

З підвищенням температури відбувається теплове збудження електронів і вони переходять на вищі енергетичні рівні. Такі електро-

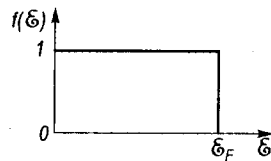


Рис. 3.2

енергетичних рівнів (вони вказані горизонтальними лініями) починається від дна ями, яке відповідає найменшій кінетичній енергії електронів. За принципом Паулі на кожному рівні можуть розміститися два електрони з протилежними спінами. Якщо газ містить  $n$  електронів, то останнім зайнятим буде

рівень Фермі в прямому і зворотному напрямках; у стані термодинамічної рівноваги середні кількості прямих і зворотних процесів є однаковими. При  $T > 0$  змінюється характер розподілу електронів за станами — «прямокутний» перехід від зайнятих станів до незайнятих «розмивається» на енергетичний інтервал завширшки  $kT$

(рис. 3.3). Енергія  $kT$  теплового руху значно менша від енергії Фермі  $\epsilon_F$ . Наприклад, при температурі 1000 К енергія  $kT \approx 0,086$  еВ, а розрахована за формулою (3.20) енергія Фермі для різних металів  $\epsilon_F = 3-10$  еВ. Тому тепловому збудженню піддаються тільки електрони, які займають вузьку енергетичну смугу  $kT$ , що безпосередньо розміщена біля рівня Фермі (на рис. 3.3 збуджені стани заштриховані). Електрони глибших рівнів практично не збуджуються тепловим механізмом, оскільки енергії  $kT$  не вистачає для переведення їх за рівень Фермі.

Чим вищою є температура, тим на більшу глибину  $kT$  розмивається розподіл Фермі — Дірака і збільшуються «крила» розподілу  $AB$  і  $BC$ , розташовані ліворуч і праворуч від  $\epsilon_F$  (див. рис. 3.3). Заштриховані площі над кривою  $AB$  і під кривою  $BC$  пропорційні кількості електронів, які відповідно покинули стани з енергією  $\epsilon < \epsilon_F$  і перейшли в стани з енергією  $\epsilon > \epsilon_F$ . Очевидно, за розміром ці площі є однаковими, тому що виражають одну і ту саму кількість електронів. Кількість  $\Delta n$  електронів, переведених за рівень Фермі, досить мала порівняно з кількістю всіх електронів провідності. Якщо за рівень Фермі переходить не більше половини збуджених електронів, то за наближеною оцінкою ця кількість  $\Delta n$  визначається співвідношенням

$$\frac{\Delta n}{n} \approx \frac{kT}{2\epsilon_F}. \quad (3.22)$$

Наприклад, при звичайній температурі  $T = 300$  К  $\Delta n/n < 1\%$ , а при  $T = 1000$  К для різних металів  $\Delta n/n \approx 1-2\%$ . Тільки ця незначна частина електронів провідності при температурі  $T$  отримує теплову енергію  $kT$  і бере участь у тепловому русі. Саме ці електрони наближено можна розглядати як класичні частинки, на кожен з яких припадає тепла енергія  $(3/2) kT$ .

Отже, у широкому інтервалі температур, при яких метал може існувати в конденсованому стані, електронний газ у металі є виродженим і його розподіл мало відрізняється від розподілу при абсолютному нулі температури.

Для сильно виродженого електронного газу ( $T > 0$ , але  $kT \ll \mu - \mathcal{E}$ ) наближені обчислення дають таку залежність хімічного потенціалу від температури:

$$\mu(T) = \mathcal{E}_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mathcal{E}_F} \right)^2 \right]. \quad (3.23)$$

Оскільки в широкому інтервалі температур  $kT \ll \mathcal{E}_F$ , то зменшенням хімічного потенціалу, що відбувається з підвищенням температури, можна знехтувати і вважати, що рівень Фермі при будь-якій температурі збігається з  $\mathcal{E}_F$ .

У сильно виродженому газі середня енергія, що припадає на один електрон, з підвищенням температури збільшується незначно:

$$\langle \mathcal{E}(T) \rangle = \frac{3}{5} \mathcal{E}_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mathcal{E}_F} \right)^2 \right]. \quad (3.24)$$

Розглянемо теплоємність електронного газу як складову теплоємності металів.

Якщо б усі електрони провідності були класичними частинками, то на кожного з них припадала б повна теплова енергія  $(3/2) kT$  і внутрішня енергія одного моля електронного газу дорівнювала б  $U = N_A (3/2) kT = (3/2) RT$  ( $N_A$  — число Авогадро), а електронна теплоємність була б

$$C'_m = (\partial U / \partial T)_V = (3/2) R. \quad (3.25)$$

Ця формула дає значення на два порядки вищі від експериментальних даних для більшості металів при звичайних температурах.

Причина такої розбіжності класичної теорії з експериментом полягає в специфічній природі електронів у металах як фермі-частинок, що підлягають принципу Паулі. Як впливає із формули (3.17), повна енергія системи  $n$  електронів визначається інтегралом

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} f(\mathcal{E}) g(\mathcal{E}) d\mathcal{E},$$

основний внесок в який роблять повністю зайняті електронами стани ( $f = 1$ ) з енергіями  $\mathcal{E} < \mu$ . Внесок енергії всіх цих станів у внутрішню енергію системи практично постійний і електронна теплоємність  $C = d\mathcal{E}/dT$  близька до нуля.

Така мізерно мала теплоємність електронного газу зумовлена незначною частиною електронів, енергія яких при температурі  $T$  більша від хімічного потенціалу  $\mu$  на значення  $kT$ . Внесок енергій

таких електронів у повну енергію  $\mathcal{E}_M$  одного моля виродженого електронного газу дорівнює  $N_A \langle \mathcal{E} \rangle$  або з урахуванням (3.24):

$$\mathcal{E}_M = \frac{3}{5} N_A \mathcal{E}_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mathcal{E}_F} \right)^2 \right].$$

Тоді електронна теплоємність одного моля металу

$$C_M = \frac{d\mathcal{E}_M}{dT} = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{\mathcal{E}_F}. \quad (3.26)$$

Із зіставлення виразів електронної теплоємності металів у квантовій теорії (3.26) і класичній (3.25) випливає, що

$$\frac{C_M}{C'_M} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{\mathcal{E}_F}.$$

При температурі металу  $T = 300$  К маємо  $kT / \mathcal{E}_F \approx 1 / 300$  і  $C_M \approx 10^{-2} C'_M$ . Саме на такий порядок відрізняються експериментальні й обчислені за класичною теорією значення електронної теплоємності.

Квантова теорія електропровідності металів усуває труднощі класичної теорії в поясненні температурної залежності питомої провідності і дає узгоджену з дослідами оцінку довжини вільного пробігу електронів у металах. У квантовій теорії рух «вільних» електронів у металі описується на підставі рівнянь квантової механіки з урахуванням взаємодії електронів з іонною ґраткою. Тому розглянемо основний результат квантової теорії без кількісних обчислень.

При постійній напруженості  $\vec{E}$  зовнішнього поля в металі швидкість дрейфу електронів провідності досягає постійного значення. Це можливо лише в тому разі, коли сила, що діє на електрон з боку поля, зрівноважується силою опору провідного середовища. Якби ця умова не виконувалась, то швидкість дрейфу безперервно збільшувалась би і навіть при слабких полях могла б стати як завгодно великою, тобто електропровідність металу була б нескінченною, а електричний опір дорівнював би нулеві. Знаючи скінченну швидкість дрейфу електронів, можна обчислити густину струму  $i$ , відповідно, питому провідність металу

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{m_e} \tau, \quad (3.27)$$

де  $n_0$  — концентрація вільних електронів;  $e$  і  $m_e$  — заряд електрона і його ефективна маса;  $\tau$  — час релаксації.

У квантовій механіці рух вільного електрона розглядається як поширення деякої «електронної хвилі» в просторі. За умови руху електронів провідності крізь ідеально правильну іонну ґратку із строго періодичним потенціалом електронна хвиля, яка описує рух електрона у такій ґратці, поширювалась би в ній без послаблення інтенсивності (без розсіяння в різних напрямках). У цьому разі метал не чинив би ніякого опору електричному струмові. Насправді в реальній ґратці завжди є домішки і виникають теплові флуктуації, які порушують її ідеальну структуру і спотворюють періодичність потенціалу. Ці та інші дефекти ґратки є причиною електричного опору. На них відбувається розсіяння електронних хвиль і послаблення потоку електронів подібно до того, як розсіюються світлові хвилі і послаблюється пучок світла під час проходження його крізь каламутне середовище.

З'ясуємо фізичний зміст часу релаксації  $\tau$  у формулі (3.27). Припустимо, що після усталення дрейфової швидкості електронів зовнішнє поле  $\vec{E}$  вимкнено. Внаслідок зіткнення електронів з дефектами ґратки ця швидкість зменшуватиметься, оскільки втрачатиметься напрям упорядкованого руху електронів і електронний газ переходить до стану рівноваги. Такі процеси переходу системи до стану рівноваги називають *релаксацією*. Проміжок часу, протягом якого відбувається розсіяння напрямленого руху електронів і перехід до стану хаотичного руху, називають *часом релаксації*. Якби електрон в одиничному акті розсіяння повністю втратив швидкість у даному напрямі і повертався в початковий стан хаотичного руху, то час релаксації дорівнював би просто середньому проміжковому часу вільного руху електрона  $\tau = \langle l \rangle / \langle v \rangle$ , як це було прийнято в класичній теорії (3.5).

Для повної втрати дрейфової швидкості в даному напрямі потрібно не одне, а в середньому  $v$  зіткнень електрона з розсіювальними центрами. Тоді середній шлях, який проходить електрон за час релаксації  $\tau$  з середньою швидкістю  $\langle v \rangle$ , дорівнює не середній довжині вільного пробігу  $\langle l \rangle$ , а

$$L = \langle l \rangle v = \langle v \rangle \tau. \quad (3.28)$$

Величину  $L$  називають *середньою транспортною довжиною вільного пробігу електрона*. Вона залежить від температури і значно перевищує відстань між двома найближчими вузлами кристалічної ґратки.

На електропровідність металу впливає квантовий стан електронного газу. У виродженому газі зовнішнє поле може впливати тільки на електрони, розміщені біля рівня Фермі, переводячи їх на вищі вільні енергетичні рівні. Іншими словами, в електропровідності виродженого газу можуть брати участь не всі вільні електрони, а лише ті з них, які мають енергію, що практично дорівнює енергії Фермі.

Саме для цих електронів треба враховувати час релаксації  $\tau_F$  у виразах (3.27) і (3.28), тобто

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{m_e} \tau_F = \frac{n_0 e^2}{m_e} \frac{l_F v_F}{v_F}, \quad (3.29)$$

де  $l_F$  — довжина вільного пробігу електронів, які мають енергію  $\mathcal{E}_F$ ;  $v_F$  — їхня швидкість;  $v_F$  — кількість зіткнень, внаслідок яких розсіюється швидкість у заданому напрямі.

Розглянемо залежність електропровідності  $\sigma$  від температури. В області високих температур, при яких електронний газ залишається сильно виродженим, електричний опір зумовлений в основному розсіянням електронів на теплових коливаннях ґратки (на фонових). При цьому докладний аналіз імовірності зіткнень електронів з фононами показує, що довжина вільного пробігу електронів обернено пропорційна абсолютній температурі:  $l_F \sim 1/T$ . З іншого боку, при високих температурах фонони мають настільки великі середні імпульси, що навіть у разі одиничних зіткнень електронів з ними (тобто коли  $v_F = 1$ ) електрони практично повністю втрачають швидкість у початковому напрямі. Нарешті, знаючи енергію Фермі, можна обчислити швидкість  $v_F$  електронів провідності в металі при абсолютному нулі температури із очевидної рівності  $\mathcal{E}_F = m(v_F)^2/2$ . Оскільки рівень Фермі при будь-якій температурі металу збігається з  $\mathcal{E}_F$  (див. формулу (3.23)), то можна вважати, що швидкість електронів  $v_F$  не залежить від температури. Отже, із формули (3.29) випливає, що питома провідність провідника з виродженим електронним газом при високих температурах обернено пропорційна абсолютній температурі:

$$\sigma(T) \sim \frac{l_F v_F}{v_F} \sim \frac{T^{-1}}{\text{const}} \sim \frac{1}{T},$$

а питомий опір таких провідників

$$\rho(T) \equiv \frac{1}{\sigma(T)} \sim T.$$

Цей результат квантової теорії підтверджується дослідями (2.20).

### § 3.4. Явище надпровідності

У 1911 р. нідерландський фізик Г. Камерлінг-Оннес (1853—1926) відкрив стрибкоподібне спадання до нуля електричного опору деяких металів при низьких температурах. Уперше це явище було виявлене в дослідях із ртуттю при температурах  $T \leq 4,2$  К. Сучасні

вимірювання свідчать, що питомий опір провідника в такому стані не перевищує  $10^{-25}$  Ом · м.

Явище спадання до нуля електричного опору в провідниках з електронним типом провідності при низьких температурах називають *надпровідністю*. Температуру  $T_k$ , нижче якої спостерігається перехід провідника в надпровідний стан, називають *критичною*. До переходу в надпровідний стан опір провідника може бути різним. Перехід у надпровідний стан відбувається різко. Тепер відомо, що майже половина хімічних елементів металевої групи переходять у надпровідний стан. Понад тисячу сплавів і сполук металів здатні переходити в надпровідний стан за певних умов. Така здатність речовини залежить від структури кристалічної ґратки. Наприклад, біле олово переходить у надпровідний стан, а сіре олово не виявляє надпровідності; ртуть переходить у надпровідний стан тільки в  $\alpha$ -фазі. З переходом у надпровідний стан кристалічна структура металу, його механічні, деякі теплові та оптичні властивості залишаються незмінними, істотно змінюються тільки електричні та магнітні властивості. Найважливіша властивість надпровідників — нульове значення електричного опору постійному струмові.

У 1914 р. Г. Камерлінг-Оннес виявив, що надпровідний стан руйнується магнітним полем, напруженість якого перевищує деяке критичне значення  $\vec{H}_k$ . Критичне значення магнітного поля залежить від природи надпровідника і його температури. Критичне магнітне поле може бути створене і струмом у самому надпровіднику. Тому значення сили струму, при якій надпровідність зникає, називають *критичним струмом*. Кожній температурі відповідає певне значення критичного магнітного поля і струму.

У 1933 р. німецькі фізики В. Мейснер (1882—1974) і Р. Оксенфельд відкрили ще одну важливу властивість надпровідників: зовнішнє магнітне поле напруженістю  $\vec{H} < \vec{H}_k$  не проникає всередину надпровідника, вісь якого напрямлена вздовж поля, а зосереджується тільки в тонкому поверхневому шарі. Це явище називають *ефектом Мейснера*. Ефект Мейснера пояснюється тим, що в надпровіднику, розміщеному в слабкому магнітному полі, а точніше, в його поверхневому шарі близько  $10^{-7}$ — $10^{-8}$  м завтовшки, створюються такі колові незгасаючі струми, які своїм магнітним полем повністю компенсують зовнішнє магнітне поле всередині надпровідника. Зовнішнє поле проникає тільки на глибину поверхневого шару, в якому проходять струми.

За поведінкою в досить сильних магнітних полях надпровідники поділяють на дві групи — надпровідники першого і другого роду. Надпровідники першого роду (переважно чисті метали) в магнітному

полі  $\vec{H} = \vec{H}_k$  втрачають надпровідність скачком, коли поле проникає в метал раптово і він в усьому об'ємі переходить у нормальний стан. У надпровідниках другого роду в магнітному полі надпровідний стан втрачається поступово в широкому інтервалі напруженостей поля. Поле починає проникати в об'єм провідника при нижній критичній напруженості  $\vec{H}_{k,n}$ , а при верхній критичній напруженості  $\vec{H}_{k,v}$  надпровідний стан повністю руйнується. Поле  $\vec{H}_{k,v}$  в окремих випадках буває дуже сильним і може досягати близько  $10^6$  А/м.

Явище надпровідності має суцільно квантову природу і може бути обґрунтоване тільки квантовою теорією. Надпровідний стан є макроскопічним квантовим станом металу. Такий стан створюється також у рідкому  ${}^4_2\text{He}$  при низьких температурах ( $T < 2,19$  К), у цьому разі квантова рідина проявляє властивість надплинності. Послідовну мікроскопічну теорію надпровідності створили в 1967 р. український фізик-теоретик М. М. Боголюбов і незалежно американські фізики Дж. Бардін (1908—1991), Л. Купер (н. 1930 р.) та Дж. Шріффер (н. 1931 р.).

Сучасна теорія надпровідності ґрунтується на ефекті Купера, який полягає в об'єднанні електронів провідності у метали в пари. Утворення пар електронів провідності при низьких температурах, передбачене Л. Купером теоретично в 1956 р., було підтверджене експериментально. Досліди показали, що струм надпровідності створюється рухом частинок, негативний заряд яких у два рази більший від заряду електрона. В основному стані металу при низьких температурах  $T \rightarrow 0$  електрони як фермі-частинки з напівцілим спіном підлягають принципу Паулі та законів розподілу Фермі — Дірака. Розподіл електронів за імпульсами такий, що у металі є електрони з однаковими і протилежно напрямленими імпульсами, а максимальні значення імпульсів обмежені енергією Фермі. Згідно з теорією Купера два електрони, що перебувають поблизу рівня Фермі та мають протилежно напрямлені імпульси і спіни, можуть об'єднатися й утворити зв'язаний стан (куперівську пару), незважаючи на кулонівські сили відштовхування між ними. Об'єднання електронів у пару відбувається завдяки їхній взаємодії через іонну ґратку. Взаємодія виникає внаслідок обміну віртуальними фононами (квазічастинками, що відповідають коливанням іонної ґратки) і має характер притягання. Куперівська пара має нульове значення спіна і невелику енергію зв'язку, її електричний заряд дорівнює  $2e$ . При  $T = 0$  всі електрони провідності об'єднуються в пари.

Квантові частинки з цілим спіном загалом не підлягають принципу Паулі. Сукупність таких частинок утворює невироджений газ, стан якого описується квантовою статистикою Бозе — Ейнштейна.

При  $T < T_0$  ( $T_0$  — температура конденсації бозе-газу) газ стає виродженим. Метал у надпровідному стані перебуває при  $T < T_0$ . За таких умов рух частинок відбувається практично без втрат енергії. Куперівські електронні пари розглядаються як бозе-частинки з нульовим спіном. У надпровідному стані в металі відбувається так звана бозе-конденсація — система куперівських пар переходить у стан надплинності. Отже, надпровідність металу трактується як надплинність електронної квантової рідини.

Однією з основних проблем у фізиці надпровідності є проблема підвищення температури переходу в надпровідний стан, тобто створення матеріалів, температура переходу яких у надпровідний стан була б значно вищою від температури рідкого азоту. Майже за 60 років з часу відкриття явища надпровідності вдалося розширити температурний інтервал переходу в надпровідний стан від 4,2 до 23,2 К ( $\text{Nb}_3\text{Ge}$ ). У 1986 р. виявлено надпровідність у системах Ва — La — Cu — O при температурах 30—35 К, а через рік групою фізиків США під керівництвом Ц. Ву (н. 1913 р.) було одержано надпровідну кераміку при температурі 92 К. Нині відкрито надпровідні полімери і ведуться пошуки нових матеріалів, здатних переходити в стан надпровідності при звичайних температурах. Вирішення цієї проблеми матиме надзвичайно важливе значення для науково-технічного прогресу.

### § 3.5. Енергетичний спектр електронів у кристалі. Метали, діелектрики і напівпровідники

Квантова теорія металів, викладена в § 3.3, не спроможна пояснити з єдиного погляду електричні властивості всіх твердих тіл (металів, діелектриків, напівпровідників), питома провідність яких лежить у широкому інтервалі значень від  $10^7$  до  $10^{-11}$  См/м. Ця теорія ґрунтується на припущенні, що потенціальна енергія електронів провідності у металі скрізь однакова, і розглядає рух електронів як вільний рух усередині «потенціальної ями». Насправді позитивно заряджені іони — вузли кристалічної гратки — створюють у металі електричне поле, яке є періодичною функцією координат, і потенціальна енергія електронів періодично залежить від координат. Періодичне електричне поле в кристалі спричиняє істотні зміни енергетичних станів електронів у твердому тілі порівняно з їхнім станом в ізолюваних атомах.

Згідно з квантовою теорією енергія електронів в атомі квантується, тобто може набувати тільки дискретних (розділених скінченними проміжками) значень, які називають *рівнями енергії*. Кожний електрон в основному стані атома має одне з дозволених значень енергії або займає один із дозволених енергетичних рівнів.

За принципом Паулі на кожному енергетичному рівні може перебувати не більше двох електронів, власні моменти імпульсів (спіни) яких мають протилежні напрями. Поки тотожні атоми ізолювані один від одного (не взаємодіють), вони мають однакове розміщення енергетичних рівнів.

Розглянемо подумки процес утворення кристала з  $n$  ізолюваних атомів. Для цього треба зменшити відстані між атомами до розмірів параметра кристалічної гратки (відстані між вузлами). Зі зближенням атомів між ними виникає і підсилюється взаємодія, внаслідок чого змінюється положення енергетичних рівнів у атомах. Після утворення кристала замість деякого одного рівня, однакового в усіх  $n$  атомів, виникають  $n$  дуже близьких рівнів, змішених один відносно одного на дуже малий, але скінченний проміжок енергії. Отже, енергетичний рівень ізолюваного атома розщеплюється в кристалі під впливом електричного поля кристалічної гратки на  $n$  дуже близько розміщених один від одного підрівнів, які утворюють смугу дозволених значень енергії, або енергетичну зону. Взаємодіючи, атоми в кристалі утворюють єдину квантову систему, у межах якої діє принцип Паулі:  $2n$  електронів, які заповнювали деякий рівень в ізолюваних атомах, розміщуються в кристалі попарно (з протилежними спінами) на  $n$  підрівнях відповідної енергетичної зони.

Різні рівні атома розщеплюються в кристалі неоднаково. Найбільших змін зазнає стан зовнішніх валентних електронів атома. Енергетичні зони, утворені з рівнів цих електронів, виявляються найширшими. Внутрішні електрони, які міцно зв'язані з ядром, піддаються незначному впливові електричного поля сусідніх атомів. Їхні енергетичні рівні в кристалі мають практично таку саму ширину, як і в ізолюваних атомах. Із схеми розщеплення різних рівнів (рис. 3.4) видно, що при відстані  $r$  між атомами, яка дорівнює періодові  $d$  кристалічної гратки, розщеплення нижніх рівнів  $1$ , зайнятих внутрішніми електронами, дуже мале порівняно з розщепленням рівнів  $3$  валентних електронів. Такому самому розщепленню, як рівні валентних електронів, піддаються також вищі енергетичні рівні, які не зайняті електронами в основному стані атома.

Отже, кожному енергетичному рівневі ізолюваного атома відповідає в кристалі зона дозволених енергій. Ці зони енергій розділені проміжками заборонених енергій, які називають *забороненими зонами*. Із збільшенням енергії електрона в атомі ширина дозволених зон збільшується, а ширина заборонених — зменшується. За значенням ширина заборонених зон дорівнює кільком електрон-вольтам.

Ширини дозволених і заборонених зон не залежать від розмірів кристала. Чим більше атомів містить кристал, тим тісніше розміщуються підрівні в дозволених зонах. Наприклад, у кристалі об'ємом  $1 \text{ см}^3$  міститься близько  $10^{23}$  атомів і при ширині валентної зони  $1 \text{ eV}$

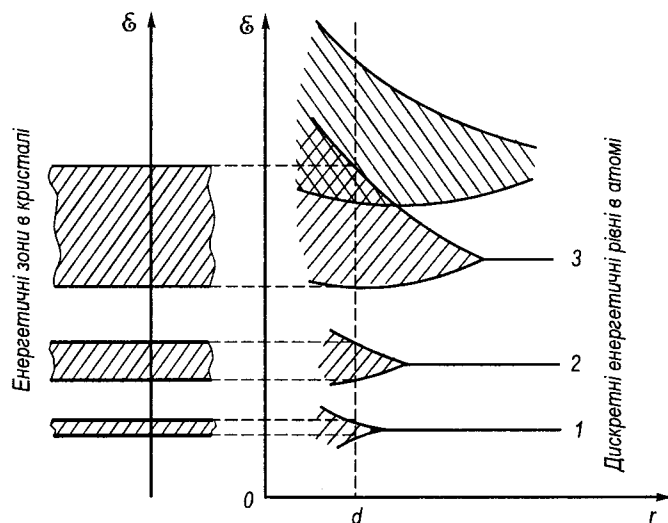


Рис. 3.4

відстань між підрівнями в ній дорівнює приблизно  $10^{-23}$  еВ. Ця відстань є настільки мізерною, що дозволені зони можна вважати практично безперервними. Проте скінченна кількість підрівнів у зоні відіграє важливу роль у розподілі електронів за квантовими станами.

За принципом Паулі на кожному підрівні може розміститись не більше ніж два електрони, тому при обмеженій кількості електронів у твердому тілі заповненими будуть лише декілька найнижчих енергетичних зон. При абсолютному нулі температури валентні електрони заповняють попарно нижні підрівні верхньої дозволеної зони, яку називають *валентною зоною*. Ступінь заповнення електронами енергетичних рівнів у валентній зоні визначається заповненням відповідного атомного рівня. Вище від валентної розміщується дозволена зона, утворена розщепленням того рівня, на якому перебуває електрон у збудженому стані атома. При температурі 0 К рівні цієї зони не заповнені електронами. Таку енергетичну зону називають *вільною*. Валентна і вільна зони розділені забороненою зоною. Проте в окремих кристалах зона, утворена при розщепленні рівнів збудженого стану атома, може перекриватися валентною зоною. Тоді утворюється широка так звана *гібридна зона*, рівні якої тільки частково заповнені електронами.

Розщеплення енергетичних рівнів електронів у твердих тілах і утворення зон дозволених і заборонених значень енергії властиве усім типам кристалічних тіл. Воно відбувається в металах і кристалічних

тілах не тільки з іонною ґраткою, а й у тому разі, коли ґратка побудована з нейтральних частинок — атомів і молекул. Атом чи молекула нейтральні в тому розумінні, що сумарний заряд ядер кожної молекули дорівнює сумарному зарядові її електронів. Проте напруженість електричного поля, створеного ядрами та електронами, досягає великих значень всередині атомів і молекул та безпосередньо поблизу від них. Отже, у будь-якому твердому тілі, яке складається з упорядковано розміщених частинок (іонів, атомів, молекул), енергетичний спектр електронів має зонний характер.

Зонна теорія твердих тіл розглядає наявність вільних електронів у кристалах як необхідну, але ще недостатню умову провідності тіл і утворення електричного струму. Відмінність в електропровідності твердих тіл різних типів (металів, діелектриків, напівпровідників) пояснюється двома факторами: по-перше, різним ступенем заповнення електронами валентної зони і, по-друге, шириною забороненої енергетичної зони, яка розділяє валентну та вільну зони. У зв'язку з цим можливі чотири випадки зонної структури твердих тіл при абсолютному нулі температури (рис. 3.5).

Якщо електрони заповнюють валентну зону частково (рис. 3.5, а), то достатньо надати електронам, що перебувають на верхніх рівнях, зовсім малої енергії (близько  $10^{-23}$ — $10^{-22}$  еВ) для того, щоб перевести їх на вищі рівні. Таку додаткову енергію електрон може отримати під дією створеного в тілі зовнішнього електричного поля або внаслідок теплового збудження. Енергія теплового руху при температурі 1 К дорівнює приблизно  $10^{-4}$  еВ, тобто значно більша від різниці енергій між сусідніми рівнями зони. При температурах, вищих за абсолютний нуль, частина електронів переходить на вищі рівні. Навіть слабе електричне поле переводить електрони на верхні вільні енергетичні рівні валентної зони, створюючи переважаючий рух електронів у напрямі проти поля — електричний струм. У цьому разі валентну зону називають зоною провідності. Отже, тверді тіла, валентна зона яких неповністю зайнята електронами, завжди будуть провідниками електричного струму. Саме така зонна структура властива металам. Тверде тіло проводить електричний струм також у випадку, коли повністю укомплектована електронами валентна зона перекривається вільною зоною і утворюється гібридна зона, заповнена електронами лише частково (рис. 3.5, б). Перекриванням валентної і вільної зон зумовлені металеві властивості лужноземельних елементів (Be, Mg, Ca, Zn, ...).

Тверді тіла, енергетичний спектр електронних станів в яких складається тільки з валентної зони, повністю зайнятої електронами, і вільної зони, є напівпровідниками (рис. 3.5, в) або діелектриками (рис. 3.5, г), залежно від ширини забороненої зони. Подальше збільшення енергії електрона можливе тільки на значення, не менше



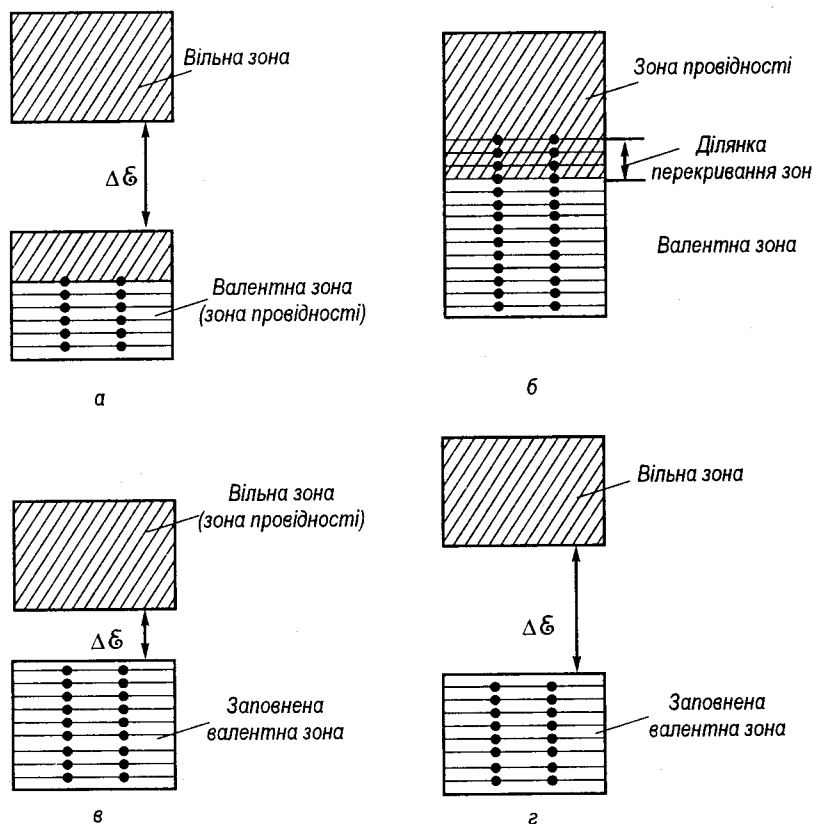


Рис. 3.5

від ширини забороненої зони  $\Delta E$ , тобто потрібно перевести електрон у вільну зону. Надати електрону таку енергію (кілька електрон-вольтів) можна за допомогою зовнішнього електричного поля.

Якщо ширина забороненої зони невелика ( $\Delta E \leq 1$  eV), то при звичайних температурах завдяки енергії теплового руху електрон може перейти із валентної зони у верхню вільну зону. Для цих електронів вільна зона стає зоною провідності. Одночасно стають можливими переходи електронів у межах валентної зони на її звільнені верхні рівні. Таке тверде тіло називають *електронним напівпровідником*.

Якщо ширина забороненої зони велика (кілька електрон-вольтів), то енергії теплового руху не вистачає для переведення у вільну зону помітної кількості електронів. У цьому разі кристал залишається *діелектриком* при всіх температурах, які можна досягнути звичайними способами.

Таким чином, зонна теорія твердих тіл як суцільно квантова теорія обґрунтовує з єдиного погляду електричні властивості металів, напівпровідників та діелектриків.

### § 3.6. Електропровідність напівпровідників

Напівпровідники — широкий клас речовин, питома електропровідність яких за значенням менша від електропровідності металів ( $\sigma \sim 10^8 - 10^6$  См/м) і більша від електропровідності діелектриків ( $\sigma \sim 10^{-9} - 10^{-22}$  См/м). Характерною особливістю напівпровідників є зростання електропровідності з підвищенням температури (електропровідність металів зменшується з підвищенням температури). До напівпровідників належать деякі хімічні елементи (германій, силіцій, селен, телур) і багато хімічних сполук. Усі речовини, що мають властивості напівпровідників, поділяють на три групи: *атомні*, або *елементарні, напівпровідники*, які мають атомну кристалічну ґратку; *напівпровідники з іонною кристалічною ґраткою*, наприклад, сульфід кадмію CdS, сульфід свинцю PbS; *напівпровідникові сполуки з валентними зв'язками*, в яких атоми утворюють кристали типу однієї гігантської молекули, такі, наприклад, як карбід силіцію SiC, арсенід галію GaAs, антимоніт індію InSb.

До групи атомних напівпровідників належать 12 хімічних елементів, компактно розмішених посередині періодичної таблиці елементів (рис. 3.6). Числами в кружках укавана ширина забороненої зони в електрон-вольтах для кристала даного хімічного елемента. Ширина забороненої зони зростає в кожному періоді при переході від елемента до елемента зліва направо і зменшується в кожній групі зверху вниз. Така закономірність визначається структурою зовнішніх електронних шарів в атомах. На відміну від атомів металу в атомах

Періоди	Групи елементів				
	III	IV	V	VI	VII
2	5 B (1,1)	6 C (5,2)			
3		14 Si (1,1)	15 P (1,5)	16 S (2,5)	
4		32 Ge (0,66)	33 As (1,2)	34 Se (1,7)	
5		50 Sn (0,1)	51 Sb (0,12)	52 Te (0,36)	53 J (1,25)

Рис. 3.6

напівпровідників зовнішні електрони досить міцно зв'язані з ядром, тому при утворенні з таких атомів кристала зовнішні електрони залишаються у складі своїх атомів.

Розрізняють власні й домішкові напівпровідники. Хімічно чисті напівпровідники називають *власними напівпровідниками* (наприклад, Si, Ge, Se, SiC, GaAs, InSb), а їхню електропровідність — власною провідністю.

**Власна провідність.** Типовими напівпровідниками є елементи IV групи періодичної системи елементів Менделєєва — германій і силіцій. Вони утворюють кристалічну ґратку, кожний атом в якій зв'язаний ковалентними зв'язками з чотирма рівновіддаленими від нього сусідніми атомами. Ковалентний зв'язок між атомами здійснюється електронними парами — двома електронами з протилежними спінами. Спрощена плоска схема розміщення атомів у кристалі Ge зображена на рис. 3.7 (справжнім розміщенням атомів є просторове), де подвійними лініями позначено ковалентні зв'язки, а чорними кружками — валентні електрони. В ідеальному кристалі всі валентні електрони беруть участь в утворенні зв'язків і тому при абсолютному нулі температури власний напівпровідник, як і діелектрик, має нульову електропровідність.

З підвищенням температури теплові коливання ґратки можуть розірвати окремі ковалентні зв'язки, внаслідок чого в кристалі з'являється деяка кількість вільних електронів. У покинутому електронном місці виникає надлишковий позитивний заряд  $+e$  — створюється позитивна квазічастинка, яку називають *діркою* (на рис. 3.7 дірка зображена світлим кружком). Дірка поводить себе як позитивний заряд, що дорівнює за значенням зарядові електрона. Місце дірки може заповнити електрон однієї із сусідніх пар, на місці електрона знову утворюється дірка і т. д. Через це електрон і дірка хаотично блукають у кристалі. Якщо вільний електрон зіткнеться з діркою, то вони рекомбінують, тобто електрон нейтралізує надлишковий позитивний заряд і втрачає спроможність вільного переміщення. У момент рекомбінації вільний електрон і дірка зникають одночасно.

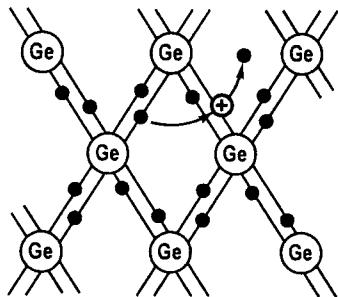


Рис. 3.7

При тепловому збудженні частина звільнених валентних електронів набуває енергії, достатньої для подолання забороненої зони і переходу у вільну зону, яка при частковому заповненні електронами стає зоною провідності (рис. 3.8). Процесові рекомбінації відповідає перехід електрона із зони провідності на один із вільних рівнів валентної зони, при цьому електрон

віддає енергію ґратці й випромінює фотони. При постійній температурі в кристалі встановлюється певна рівноважна концентрація електронів і дірок.

При накладанні на такий кристал зовнішнього електричного поля в ньому виникає напрямлений рух електронів зони провідності проти напрямку поля і дірок валентної зони в напрямі поля, тобто при температурах  $T > 0$  К власний напівпровідник стає провідником електричного струму. Чим вужча заборонена зона кристала і вища температура, тим більше електронів переходить у зону провідності і тим вищою стає електропровідність.

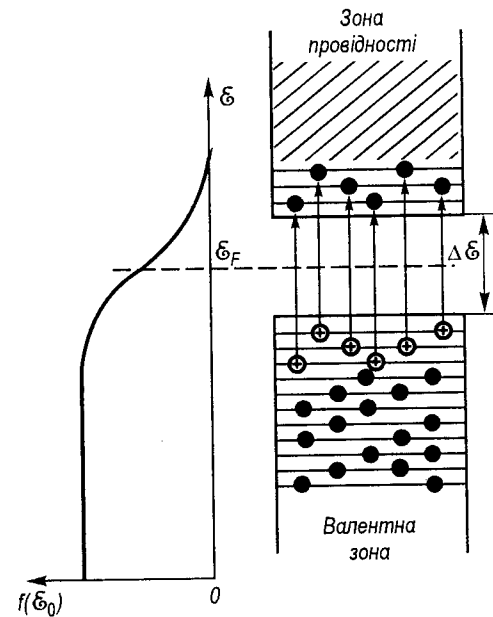


Рис. 3.8

Провідність власних напівпровідників, зумовлену електронами, називають *електронною провідністю* або *провідністю n-типу*. У зовнішньому полі електрон валентної зони може переміститись на місце дірки на вищому сусідньому рівні, а дірка з'явиться на тому місці, звідки вийшов електрон. Такий процес заповнення дірок електронами рівнозначний переміщенню дірки в напрямі поля. Провідність власних напівпровідників, зумовлену квазічастинками — дірками, називають *дірковою провідністю* або *провідністю p-типу*.

Отже, у власних напівпровідниках спостерігаються два механізми провідності — електронний і дірковий. Концентрація електронів у зоні провідності дорівнює концентрації дірок у валентній зоні, оскільки кількість дірок відповідає кількості електронів, які перейшли в зону провідності. Провідність напівпровідників може бути збудженою, тобто з'являється під впливом зовнішніх факторів (нагрівання напівпровідників, опромінення їх світлом або іонізуючим випромінюванням).

Одним із основних параметрів, які характеризують газ вільних носіїв заряду в напівпровідниках, є *хімічний потенціал*, або *рівень Фермі*. Обчислення показують, що у власних напівпровідниках рівень Фермі лежить посередині забороненої зони. Справді, для перенесення електрона з верхнього рівня валентної зони на нижній рівень зони

провідності витрачається енергія активації, що дорівнює за значенням ширині забороненої зони  $\Delta\epsilon$ . З появою електрона в зоні провідності завжди виникає дірка у валентній зоні, а значить, енергія, витрачена на утворення пари вільних носіїв заряду, має ділитись на дві однакові частини. Половина енергії, яка відповідає ширині забороненої зони, витрачається на збудження електрона в зоні провідності, а друга половина — на утворення дірки у валентній зоні. Тому початок відліку цих енергій лежить посередині забороненої зони. Рівень Фермі у власному напівпровіднику визначає енергію, від якої відбувається збудження електронів і дірок.

Розподіл електронів за рівнями валентної зони і зони провідності визначається функцією Фермі — Дірака (3.18). Для електронів, які перейшли в зону провідності, значення  $\epsilon - \epsilon_F$  дорівнює половині ширини забороненої зони. Тому  $\epsilon - \epsilon_F \gg kT$  і у формулі (3.18) одиницею у знаменнику можна знехтувати, тоді

$$f(\epsilon) \approx e^{-\frac{\Delta\epsilon}{2kT}}. \quad (3.30)$$

На рис. 3.8 крива розподілу Фермі — Дірака суміщена зі схемою енергетичних зон. Енергетичні рівні зони провідності й валентної зони лежать на ділянках кривої розподілу. Ймовірності їх заповнення визначаються формулою (3.30), тобто розподіли вільних електронів і дірок підлягають розподілу Максвелла — Больцмана (невироджений газ). Кількість електронів у зоні провідності й така сама кількість дірок у валентній зоні пропорційні ймовірності (3.30). Ці електрони і дірки є носіями заряду і можуть створювати струм. Провідність власного напівпровідника пропорційна кількості носіїв і тому має бути пропорційною виразу (3.30). Отже, з підвищенням температури провідність напівпровідника швидко зростає за експоненціальним законом:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta\epsilon}{2kT}}, \quad (3.31)$$

де  $\sigma_0$  — стала величина, що є характерною для даного напівпровідника.

Власна провідність спостерігається в усіх напівпровідниках при досить високих температурах.

**Домішкова провідність.** Введення домішок у напівпровідниковий кристал істотно впливає на електричні властивості напівпровідника. Під *домішками* розуміють як атоми або іони сторонніх елементів у вузлах основного кристала, так і порожні вузли та механічні дефекти (тріщини, зсуви, що виникають при деформації кристала, і под.). У більшості випадків домішки вводять спеціально для надання напівпровідникові потрібних властивостей. Наприклад, домішка

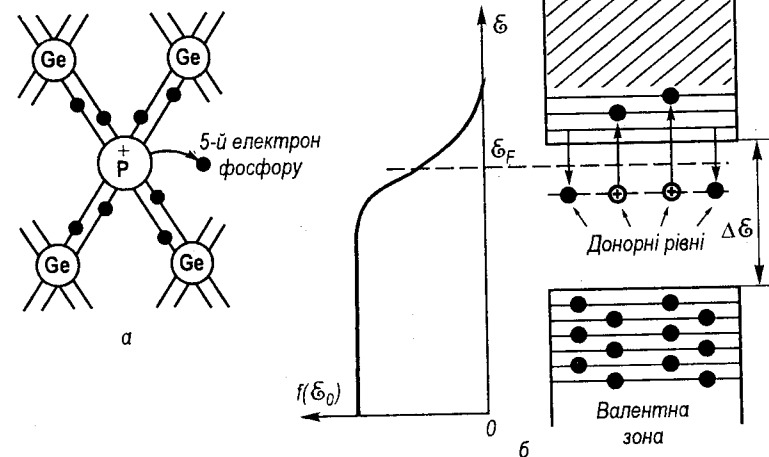


Рис. 3.9

у кристалі силіцію одного атома бору на  $10^5$  атомів силіцію збільшує провідність кристала в 1000 разів при кімнатній температурі.

Розглянемо домішкову провідність на прикладах кристалів германію і силіцію, якщо деякі атоми у вузлах цих кристалів замінити атомами, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів. Припустимо, що в кристалі германію невелику частину атомів чотиривалентного германію заступають атоми п'ятивалентного фосфору. Для утворення ковалентних зв'язків із сусідніми атомами германію атомові фосфору достатньо чотирьох електронів. П'ятий електрон не бере участі в утворенні хімічного зв'язку і при малій енергії зв'язку зі своїм атомом може відірватись від нього завдяки енергії теплових коливань ґратки. Внаслідок цього утворюється вільний електрон, який хаотично рухається в кристалічній ґратці і може брати участь в електропровідності, а в околі атома фосфору виникає зв'язаний із цим атомом надлишковий позитивний заряд (рис. 3.9, а). Утворення вільного електрона не супроводиться розривом ковалентного зв'язку, тобто на його місці не виникає дірка. Надлишковий позитивний заряд поблизу атома фосфору не може переміщатись по ґратці і в електропровідності участі не бере. Завдяки цьому зарядові атом п'ятивалентної домішки може захопити електрон провідності, який наблизиться до нього. Атоми домішки, які постачають електрони провідності в кристалах, називають *донорами*.

Мовою зонної теорії цей процес можна описати так. Домішки спотворюють електричне поле ґратки, внаслідок чого на енергетичний

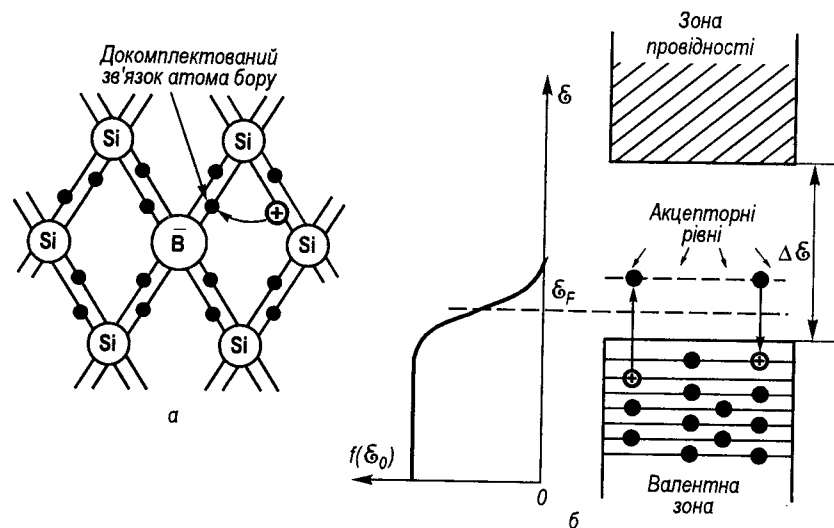


Рис. 3.10

схемі кристала виникають локальні, або домішкові, енергетичні рівні. У разі п'ятивалентної домішки у кристалі германію енергія вільних електронів дещо менша від енергії, яка відповідає нижньому рівню незаповненої зони провідності напівпровідника. Тому локальні рівні домішкових електронів розміщуються в забороненій зоні поблизу дна зони провідності. Ці рівні заповнені деякою кількістю електронів і їх ще називають *донорними* (рис. 3.9, б). Для переведення електронів з донорних рівнів у зону провідності потрібна енергія, значно менша за ширину забороненої зони. Навіть при звичайних температурах енергія теплового руху ґратки достатня для того, щоб електрон зміг перейти з донорних рівнів у зону провідності. Утворені при цьому дірки локалізуються на донорних рівнях і не беруть участі у провідності. На рис.3.9, б захопленню електрона провідності атомом домішки відповідає перехід електрона із зони провідності на один із донорних рівнів.

Отже, у напівпровідниках з домішкою, валентність якої на одиницю більша від валентності основних атомів, є тільки один вид носіїв заряду — електрони. Напівпровідники з такою провідністю називають *електронними* або *напівпровідниками n-типу*.

Припустимо тепер, що у кристалічну ґратку чотиривалентного силіцію введена домішка тривалентних атомів бору (рис.3. 10, а). Трьох валентних електронів атома бору не вистачає для утворення ковалентних зв'язків із чотирма найближчими атомами силіцію. Неуплектований зв'язок є тим місцем в околі атома бору, яке може

захопити електрон від пари ковалентного зв'язку одного із сусідніх атомів силіцію. На місці розірваного зв'язку утворюється дірка, а поблизу атома бору виникає надлишковий негативний заряд. Цей заряд зв'язаний з атомом домішки і не може створювати струм. Зате дірка може бути заповнена електронем, відірваним від іншої пари зв'язку; тобто дірка не локалізується в кристалі, а внаслідок послідовного заповнення електронами хаотично переміщується по ґратці як вільний позитивний заряд. Крім утворення дірок, у кристалі відбувається також зворотний процес. Розрив одного із чотирьох зв'язків атома домішки супроводжується звільненням електрона. Утворені таким чином електрон і дірка рекомбінують при зіткненні.

Згідно із зонною теорією тривалентна домішка бору в кристалі силіцію спричиняє утворення домішкових енергетичних рівнів у забороненій зоні кристала. У цьому разі домішкові рівні не заповнені електронами і розміщуються вище від верхнього рівня заповненої валентної зони на відстані 0,08 eV (рис. 3.10, б). Ця енергія значно менша за ширину забороненої зони  $\Delta\epsilon$ , і електрони переходять із валентної зони на домішкові рівні навіть при досить низьких температурах. Електрони, що перейшли на домішкові рівні, зв'язуються з атомами бору і втрачають здатність переміщатись по ґратці силіцію, тобто не можуть брати участі в електропровідності. Такі домішкові рівні називають *акцепторними*. Внаслідок переходу електронів на акцепторні рівні у валентній зоні з'являються «вакантні» електронні рівні — дірки. На рис. 3.10, б утворенню дірки відповідає перехід електрона з валентної зони на акцепторний рівень, а зворотний перехід — рекомбінації електрона й дірки. Під дією зовнішнього поля дірки дрейфують у напрямі поля і валентна зона кристала стає зоною діркової провідності.

Отже, у напівпровідниках із домішкою, валентність якої на одиницю менша від валентності основних атомів, виникають носії заряду тільки одного виду — дірки. Провідність у цьому разі називають *дірковою*, а напівпровідник з дірковою провідністю — *напівпровідником p-типу*.

На відміну від власної провідності, яка здійснюється одночасно електронами і дірками, домішкова провідність напівпровідників зумовлена в основному носіями заряду одного знака: електронами — у разі донорної домішки і дірками — у разі акцепторної. Ці носії заряду називають *основними*. Крім основних носіїв, у напівпровідниках з домішковою провідністю є також *неосновні носії заряду*. Якщо ширина забороненої зони основного кристала є невеликою, то з підвищенням температури енергія теплового руху виявляється достатньою для переходу електронів із валентної зони в зону провідності. Тоді й з'являються неосновні носії: у напівпровідниках n-типу —

дірки у валентній зоні, а в напівпровідниках  $p$ -типу — електрони в зоні провідності.

Утворення домішкових рівнів у напівпровідниках істотно змінює положення рівня Фермі  $\epsilon_F$ . Як показують розрахунки, при абсолютному нулі температури у напівпровідниках  $n$ -типу рівень Фермі розміщується посередині між нижнім рівнем зони провідності і донорними рівнями (див. рис. 3.9, б), а в напівпровідниках  $p$ -типу — посередині між верхнім рівнем валентної зони й акцепторними рівнями (див. рис. 3.10, б).

Питома електропровідність домішкового напівпровідника, як і власного, визначається в основному концентрацією носіїв заряду. З підвищенням температури концентрація домішкових носіїв швидко досягає насичення, тобто звільняються від електронів всі донорні рівні або заповнюються електронами всі акцепторні рівні. Після повного виснаження домішкових атомів подальше підвищення температури спричиняє збільшення провідності завдяки переходу електронів безпосередньо із валентної зони в зону провідності. Отже, провідність напівпровідника складається з домішкової і власної провідностей, причому при низьких температурах переважає домішкова провідність, а при високих — власна.

## Розділ 4. Електричні явища в контактах

### § 4.1. Робота виходу електрона з металу

Позитивні іони кристалічної ґратки металу створюють у ньому електричне поле, потенціал якого змінюється періодично вздовж прямої, що проходить через вузли ґратки. У першому наближенні цими змінами можна знехтувати і вважати потенціал  $\phi_0$  в усіх точках металу однаковим (так званий внутрішній потенціал металу, рис. 4.1, а). Вільний електрон з від'ємним зарядом  $e$  у вакуумі поза зовнішнім електричним полем має потенціальну енергію  $W_0 = 0$ . Під час його переходу з вакууму в метал з потенціалом  $\phi_0$  електрон набуває потенціальної енергії  $W_0 = -e\phi_0$  (рис. 4.1, б). Така зміна потенціальної енергії електрона відбувається на малому відрізку шляху  $x$ , що дорівнює кільком періодам кристалічної ґратки. З рис. 4.1, б видно, що метал для електрона є потенціальною ямою, вихід з якої можливий лише в тому випадку, коли електрон набуває кінетичної енергії, достатньої для переборення потенціального бар'єра  $W_0 = -e\phi_0$ . Для виходу у вакуум електрон має виконати роботу

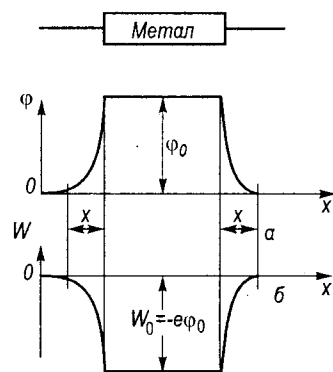


Рис. 4.1

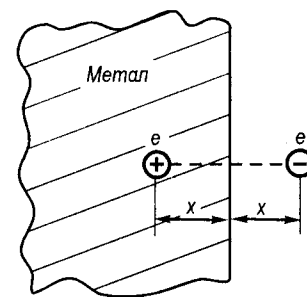


Рис. 4.2

проти сил, які утримують його в металі. Цю роботу називають *роботою виходу електрона*.

Розглянемо докладніше сили, які перешкоджають виходу електрона з металу. На електрон усередині металу з боку позитивних іонів діють сили, які з усіх боків у середньому взаємно зрівноважуються. Інша ситуація виникає, коли електрон перетинає поверхню металу. Якщо електрон з деяких причин опинився за межами металу на відстані  $x$  від поверхні, то на такій самій відстані всередині металу індукується такий самий за значенням позитивний заряд  $+e$  (рис. 4.2). Сила взаємодії електрона із зарядом, індукованим у металі цим самим електроном, завжди напрямлена до поверхні і намагається повернути електрон всередину металу. Здійснюючи хаотичний тепловий рух, електрони провідності в металі мають відповідний розподіл за швидкостями, внаслідок чого деяка кількість з них здатна покинути метал і віддалитися від нього на кілька міжатомних віддалей, створюючи над всією поверхнею металу «електронну хмару». Під поверхнею металу за індукцією виникає шар позитивного заряду. Цей заряд разом із негативним зарядом електронної хмари утворює подвійний електричний шар, поле якого аналогічне електричному полю зарядженого плоского конденсатора (рис. 4.3, а). Подвійний електричний шар перешкоджає виходу електронів за межі металу (у вакуумі). Електрони, які, переборюючи потенціальний бар'єр, покидають метал, потрапляють у поле подвійного електричного шару. На кожний з таких електронів у подвійному електричному шарі діє сила, завжди напрямлена всередину металу і пропорційна напруженості поля. У напрямі, перпендикулярному до поверхні металу, вона зростає до певного значення і потім спадає до нуля за межами подвійного електричного шару (штрихова крива на рис. 4.3, б). Це означає, що в поверхневому шарі металу існує потенціальний бар'єр, характер зміни якого зображений кривою  $W = W(x)$ . Потенціальна енергія

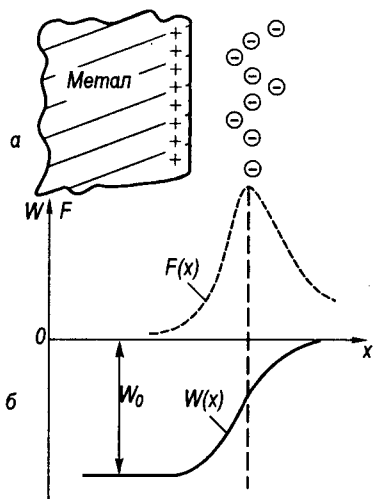


Рис. 4.3

Отже, внаслідок теплового руху найбільш швидкі електрони щосекунди «вистрибують» із металу, віддаляються від його поверхні на кілька міжатомних віддалей і деякі з них знову втягуються всередину металу. Встановлюється динамічна рівновага, коли кількість електронів, які виходять із поверхні металу, дорівнює кількості електронів, які втягуються назад у метал. При цьому біля поверхні металу встановлюється цілком визначена концентрація електронів  $n_0$ . Електронний газ біля поверхні металу не вироджений і його концентрація може бути описана розподілом Больцмана

$$n_0 = C \exp\left(-\frac{W}{kT}\right),$$

де  $C$  — стала, що залежить лише від температури  $T$ ;  $W$  — робота виходу, яка являє собою різницю енергій електрона всередині металу і за його межами.

Як уже зазначалося, при абсолютному нулі температури в металах найбільшу кінетичну енергію мають валентні електрони на рівні Фермі. На рис. 4.4 енергетичні рівні зони провідності металу вписані в потенціальну яму. Для вилучення електрона з металу у вакуум різним електронам треба надати різної енергії. Найменшу енергію потрібно затратити для вилучення з металу електронів, які перебувають на рівні Фермі:  $\Delta\epsilon = W_0 - \epsilon_F$ . При температурах  $T > 0$  енергія  $\Delta\epsilon$  також визначається як різниця глибини потенціальної ями і рівня Фермі.

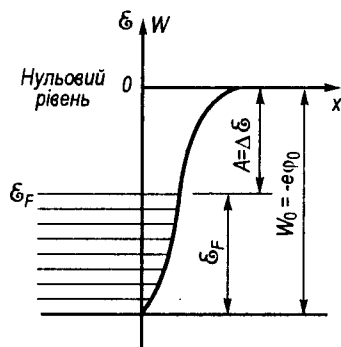


Рис. 4.4

електрона всередині металу дорівнює від'ємному значенню  $W_0$  і збільшується з віддаленням електрона від поверхні металу, досягаючи значення  $W = 0$  у вакуумі.

Роботою виходу електрона називають найменшу енергію, яку треба затратити для виходу електрона з металу у вакуум. Роботу виходу прийнято позначати як добуток:

$$A = e\phi, \quad (4.1)$$

де  $\phi$  називають *потенціалом виходу* або поверхневим стрибком потенціалу.

Робота виходу електрона є однією з важливих характеристик речовини. Вона залежить від природи матеріалу, стану його поверхні і може істотно змінюватися внаслідок адсорбції різних атомів або молекул на поверхні. Експериментальні дані показують, що робота виходу електрона з металів дорівнює кільком електрон-вольтам (так, для калію  $A = 2,2$  еВ, для платини —  $6,3$  еВ). Нанесення на поверхню, наприклад, вольфраму тонкого шару оксиду лужноземельного металу (Ca, Sr, Ba) знижує роботу виходу від  $4,5$  до  $1,5$  еВ.

#### § 4.2. Контактна різниця потенціалів

У разі дотикання двох різних металів між ними виникає різниця потенціалів, яку називають *контактною різницею потенціалів*. Це явище відкрив А. Вольта, який експериментально встановив два закони.

1. Контактна різниця потенціалів, що виникає під час дотикання двох різних металів, залежить тільки від хімічного складу і температури стичних металів.

2. Різниця потенціалів між кінцями кола, складеного з послідовно з'єднаних металевих провідників, температура яких однакова, не залежить від хімічного складу проміжних провідників. Вона дорівнює контактній різниці потенціалів, яка виникає у разі безпосереднього з'єднання крайніх провідників. Це так званий *закон послідовних контактів Вольти*. З цього закону випливає висновок: у замкненому колі твердих провідників з електронним типом провідності, контакти яких перебувають при однаковій температурі, результуюча контактна різниця потенціалів дорівнює нулеві. Отже, через контактну різницю потенціалів у такій системі електронних провідників не можна одержати електричний струм. Якби це було не так, то ми мали б справу з порушенням закону збереження енергії. Для одержання струму з використанням контактної різниці потенціалів потрібно або підтримувати контакти в електронних провідниках при різних температурах, або створювати контакт провідників з різним типом провідності, наприклад, утворювати контакт провідників з електронним та іонним типами провідності.

Контактна різниця потенціалів має різне значення для різних пар стичних металів, вона становить від кількох десятих вольта до кількох

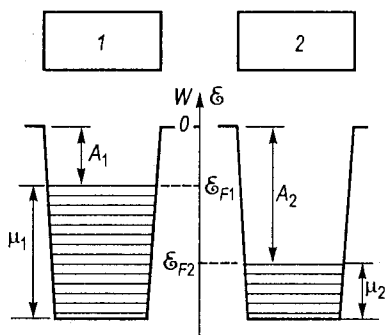


Рис. 4.5

вольтів. Досліджуючи різні стичні метали, А. Вольта показав, що можна утворити такий ряд послідовно з'єднаних металів, в якому кожен із металів відносно наступного матиме позитивний потенціал, а відносно попереднього — негативний. При кімнатній температурі доповнений тепер ряд Вольти такий: (+) Na, K, Bi, Ni, Co, Hg, Pt, Au, Cu, Sn, Al, Pb, Zn, Ag, Cd, Fe, As, Sb (-).

Значення контактної різниці потенціалів сильно залежить від наявності домішок у металах, а також від попередньої їх механічної обробки (деформації). Концентрація домішок іноді так змінює контактну різницю потенціалів, що це позначається на місці металу у вказаному ряду. Деякі напівпровідники у поєднанні з металами дають значно більшу контактну різницю потенціалів, ніж будь-яка комбінація металів.

Виникнення контактної різниці потенціалів між двома металами та експериментальні закони Вольти були обґрунтовані як у класичній електронній теорії, так і у квантовій теорії металів.

Контактна різниця потенціалів зумовлюється тим, що під час дотикування двох металів частина електронів переходить із одного металу в інший, внаслідок чого один метал заряджається позитивно, інший — негативно. Такий перехід зумовлюється як неоднаковими роботами виходу електрона з металу, так і різними концентраціями їх у цих металах.

Розглянемо обидві причини виникнення контактної різниці потенціалів з позицій квантової теорії. Припустимо, що метали 1 і 2 розміщені на великій відстані один від одного, мають однакову температуру, що дорівнює абсолютному нулеві (всі рівні енергії аж до рівня Фермі заповнені електронами), і відрізняються роботами виходу та концентраціями електронів провідності:  $A_1 < A_2$  і  $n_1 > n_2$  (рис. 4.5). За припущенням рівень Фермі  $\epsilon_{F1}$  в першому металі лежить вище від дна потенціальної ями, ніж рівень  $\epsilon_{F2}$  в другому.

Із зближення металів до відстані, на якій між ними відбувається безпосередній обмін електронами провідності, утворюється контакт. Він охоплює ділянку малої товщини  $d$ , яка включає тонкі приповерхневі шари (декілька міжатомних віддалей) стичних металів (рис. 4.6, а). Після утворення контакту почнеться дифузія електронів — електрони з найвищих енергетичних рівнів металу 1 переходять на більш низькі вільні рівні металу 2, що лежать вище від рівня  $\mu_2$ . Зворотний перехід електронів з металу 2 в метал 1 неможливий, оскільки в першому металі всі рівні з енергією  $\mu_2$  і нижче заповнені

електронами. Внаслідок дифузії перший метал заряджається позитивно, другий — негативно. Динамічна рівновага настає тоді, коли зрівнюються повні енергії (хімічні потенціали  $\mu_1$  і  $\mu_2$ ), які відповідають рівням Фермі електронних газів, тобто у стані рівноваги в обох металах рівні Фермі ( $\epsilon_{F1}$ , який неперервно опускається вниз, і  $\epsilon_{F2}$ , який неперервно піднімається вгору) розміщуються на однаковій висоті (рис. 4.6, б). За цієї умови потенціальна енергія електрона в металі 1, зарядженому позитивно до потенціалу  $\phi_1$ , зменшується на значення  $\Delta W_1 = e\phi_1$ , а в металі 2, зарядженому негативно до потенціалу  $\phi_2$ , — збільшується на  $\Delta W_2 = -e\phi_2$  (нагадаємо, що потенціал металу і потенціальна енергія електрона в ньому мають різні знаки). Нульовий рівень 01 першого металу опускається вниз на значення  $\Delta W_1$ , а нульовий рівень 02 другого металу піднімається вгору на  $\Delta W_2$  відносно положення 0 у незарядженому стані цих металів. Таких самих змишень зазнають інші енергетичні рівні електронів в обох металах. Це можна зрозуміти з таких міркувань. Наприклад, для переходу електрона з нульового рівня незарядженого металу на нульовий рівень металу, зарядженого негативно до потенціалу  $\phi_2$ , треба виконати роботу  $e\phi_2$  (на стільки змінюється потенціальна енергія електрона). Тому потенціальна енергія електрона, який перебуває на нульовому рівні 02 негативно зарядженого металу, буде на  $e\phi_2$  більшою, ніж на нульовому рівні незарядженого металу. Отже, рівень 02 розміщується вище від рівня 0 на значення  $e\phi_2$ . З тієї самої причини нульовий рівень позитивно зарядженого металу розміщується нижче від нульового рівня незарядженого металу.

Отже, у стані динамічної рівноваги встановлюється різниця потенціальних енергій електрона між нульовими рівнями в стичних металах, якій відповідає постійна різниця потенціалів

$$\Delta\phi_e = \frac{\Delta W_1 + \Delta W_2}{e} = \frac{e\phi_1 - e\phi_2}{e} = \phi_1 - \phi_2,$$

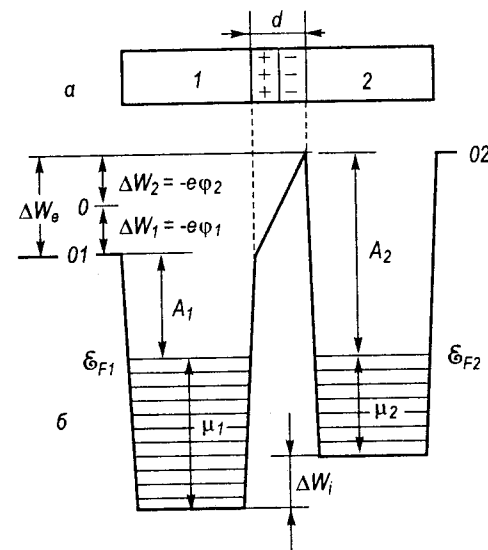


Рис. 4.6

або з урахуванням виразу (4.1)

$$\Delta\varphi_e = \frac{A_1 - A_2}{e} \quad (4.2)$$

Різниця потенціалів (4.2) виникає всередині контакту між точками, які лежать зовні металів безпосередньо поблизу поверхонь, що контактують. Тому  $\Delta\varphi_e$  називають *зовнішньою контактною різницею потенціалів*. Вона зумовлена різницею робіт виходу для електрона із стичних металів і дорівнює різниці потенціалів виходу  $\varphi_1 - \varphi_2$  для першого і другого металів.

Крім того, між внутрішніми точками металів виникає додаткова різниця потенціалів  $\Delta\varphi_i$ , яку називають *внутрішньою контактною різницею потенціалів*. Як зазначалось, у стані рівноваги металів повні енергії електронних газів вирівнюються, але кінетичні енергії електронів на рівнях Фермі неоднакові. У металі 1 максимальна кінетична енергія електронів дорівнює  $\mathcal{E}_{F1}$ , а в металі 2 —  $\mathcal{E}_{F2}$ . За припущенням  $\mathcal{E}_{F1} > \mathcal{E}_{F2}$ , тому в металах виникає дифузійний потік електронів, напрямлений із першого металу в другий. При такому переході електронів потенціальна енергія електрона в другому металі збільшується на  $\Delta W_i = \mathcal{E}_{F1} - \mathcal{E}_{F2}$  (див. рис. 4.6, б). Внаслідок цього потенціал усередині першого металу вищий, ніж усередині другого, і між металами виникає додаткова різниця потенціалів  $\Delta\varphi_i = \Delta W_i / e$ . З часом між електронними газами настає стан динамічної рівноваги, тоді внутрішня контактна різниця потенціалів

$$\Delta\varphi_i = \frac{\mathcal{E}_{F1} - \mathcal{E}_{F2}}{e} \quad (4.3)$$

Після встановлення рівноваги в контактуючих металах дифузійний потік електронів припиняється. Це означає, що в об'ємі металів напруженість електричного поля дорівнює нулеві. Електричне поле існує тільки на ділянці контакту, де тонкі поверхневі шари обох металів утворюють подвійний електричний шар завтовшки  $d$  (див. рис. 4.6, а). Саме між цими поверхневими шарами металів локалізується внутрішня контактна різниця потенціалів.

Кінетична енергія електронів на рівні Фермі залежить від концентрації електронів провідності в металі й визначається формулою (3.20). Підставивши (3.20) у (4.3), одержимо

$$\Delta\varphi_i = \frac{h^2}{8me} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} (n_1^{2/3} - n_2^{2/3}). \quad (4.4)$$

Звідси видно, що виникнення внутрішньої контактної різниці потенціалів зумовлено неоднаковими концентраціями електронів у стичних металах.

Вираз (4.4) отримано для температури  $T = 0$  К. Якщо врахувати залежність енергії Фермі від температури (формула (3.23)), то вираз (4.3) за умови, що  $kT \ll \mathcal{E}_F$ , матиме вигляд

$$\Delta\varphi_i = \frac{1}{e} \left[ (\mathcal{E}_{F1} - \mathcal{E}_{F2}) + \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \left( \frac{1}{\mathcal{E}_{F2}} - \frac{1}{\mathcal{E}_{F1}} \right) \right], \quad (4.5)$$

де  $\mathcal{E}_{F1}$  і  $\mathcal{E}_{F2}$  — енергія Фермі відповідно в першому і другому металах при абсолютному нулі температури.

Повна контактна різниця потенціалів  $\Delta\varphi_k$  між двома металами дорівнює алгебричній сумі зовнішньої і внутрішньої складових:

$$\Delta\varphi_k = \Delta\varphi_e + \Delta\varphi_i, \quad (4.6)$$

або з урахуванням виразів (4.2) і (4.4)

$$\Delta\varphi_k = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{h^2}{8me} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} (n_1^{2/3} - n_2^{2/3}). \quad (4.7)$$

Обидві причини виникнення контактної різниці потенціалів — неоднакові роботи виходу і різні концентрації електронів — у різних парах металів можуть діяти як в одному напрямі, так і в протилежних. Відповідно складові  $\Delta\varphi_e$  і  $\Delta\varphi_i$  в (4.6) матимуть однакові або протилежні знаки. Обчислення показують, що числові значення  $\Delta\varphi_e$  і  $\Delta\varphi_i$  істотно різняться між собою, а саме  $\Delta\varphi_e \gg \Delta\varphi_i$ , тобто контактна різниця потенціалів між двома металами практично визначається зовнішньою контактною різницею потенціалів.

У класичній електронній теорії металів зовнішня контактна різниця потенціалів  $\Delta\varphi_e$  визначається так само, як і у квантовій теорії, рівнянням (4.2). Вираз для внутрішньої контактної різниці потенціалів  $\Delta\varphi_i$  не збігається з виразами (4.4) і (4.5) квантової теорії і має вигляд (див. приклад 4.1)

$$\Delta\varphi'_i = \frac{kT}{e} \ln(n_1 / n_2). \quad (4.8)$$

На підставі (4.6) повна контактна різниця потенціалів у класичній електронній теорії дається формулою

$$\Delta\varphi'_k = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln(n_1 / n_2). \quad (4.9)$$

Вираз (4.9) якісно узгоджується із законом Вольти. Для кількісних обчислень користуються строго обґрунтованим виразом (4.7).

Таким чином, формули (4.7) і (4.9), отримані у квантовій і класичній теоріях металів, є математичними виразами першого закону Вольти. Вони показують, що  $\Delta\varphi_{12}$  залежить тільки від хімічної природи і температури стичних металів.



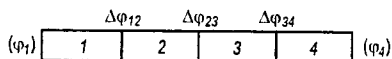


Рис. 4.7

Для доведення другого закону Вольти використаємо замість (4.7) простішу формулу (4.9). Розглянемо ділянку кола, утворену із чотирьох послідовно з'єднаних металевих провідників (рис. 4.7). Припустимо, що провідники виготовлені з різних матеріалів і температура всіх провідників однакова. У кожному контакті виникає стрибок потенціалу, тому з'єднані провідники мають різні потенціали. Різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_4$  між кінцями ділянки дорівнює алгебричній сумі всіх контактних стрибків потенціалу:

$$\varphi_1 - \varphi_4 = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} + \Delta\varphi_{34}.$$

Враховуючи вираз (4.9), знаходимо

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_4 &= \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln(n_1 / n_2) + \frac{A_2 - A_3}{e} + \frac{kT}{e} \ln(n_2 / n_3) + \\ &+ \frac{A_3 - A_4}{e} + \frac{kT}{e} \ln(n_3 / n_4) = \frac{A_1 - A_4}{e} + \frac{kT}{e} \ln(n_1 / n_4), \end{aligned}$$

тобто  $\varphi_1 - \varphi_4$  не залежить від природи проміжних провідників.

Контактну різницю потенціалів можна виміряти методом компенсації. Пластинки  $A$  і  $B$ , виготовлені з досліджуваних металів, розміщують паралельно на невеликій відстані одну від одної (рис. 4.8). Одна з пластинок закріплюється нерухомо. Друга за допомогою механічного пристрою приводиться в коливальний рух у напрямі нормалі до її площини з частотою в кілька десятків герц і амплітудою в кілька десятків міліметра. Оскільки пластинки з'єднані між собою провідниками вимірювальної схеми, то внаслідок виникнення контактної різниці потенціалів між ними існує електричне поле. На внутрішній поверхні кожної пластинки з'являється електричний заряд  $q = S\Delta\varphi$ , де  $S$  — електрична ємність системи пластинок як плоского конденсатора. При періодичній зміні відстані між пластинками заряд на них також періодично змінюється і в зовнішньому колі виникає змінний (переривчастий) струм  $I = \Delta\varphi(dC/dt)$ . Внаслідок цього на навантажувальному опорі  $R$  виникає змінна напруга, яка після підсилення реєструється на екрані осцилографа  $O$ . Контактну різницю потенціалів  $\Delta\varphi$  можна скомпенсувати напругою протилежного знака від зовнішнього джерела. Тоді електричного струму в резисторі  $R$  не буде. Компенсація струму відмічається в момент зникнення коли-

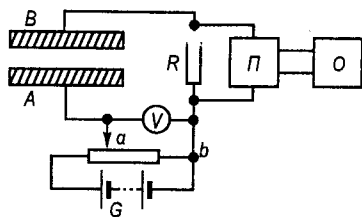


Рис. 4.8

вань напруги на екрані осцилографа. У цей момент контактна різниця потенціалів дорівнює напрузі між точками  $a$  і  $b$  подільника напруги. Значення цієї напруги вимірюють електронним вольтметром  $V$ .

**Приклад 4.1.** Встановити аналітичний вираз внутрішньої контактної різниці потенціалів, користуючись положеннями класичної електронної теорії металів.

**Розв'язання.** Припустимо, що два метали з концентраціями вільних електронів  $n_1$  і  $n_2$  дотикаються і мають однакову температуру  $T$ . Нехай концентрація електронів у першому металі більша, ніж у другому ( $n_1 > n_2$ ). У ділянці контакту виникає перепад тисків електронного газу  $p_1 > p_2$ , оскільки при  $T = \text{const}$  тиск пропорційний концентрації електронів. Внаслідок цього утворюється дифузійний потік електронів із першого металу в другий і між металами виникає додаткова різниця потенціалів. Після досягнення динамічної рівноваги концентрація вільних електронів у стичних металах вирівнюється, але кількість електронів у другому металі збільшується на  $\Delta n$  і між металами встановлюється внутрішня контактна різниця потенціалів  $\Delta\varphi_i$ .

Для перенесення  $\Delta n$  електронів крізь поперечний переріз контакту електронний газ першого металу виконує роботу ізотермічного розширення

$$A = \frac{m\Delta n}{mN_A} RT \ln(p_1 / p_2) = \Delta n kT \ln(n_1 / n_2).$$

Цю саму роботу можна визначити як роботу переміщення заряду  $q = e\Delta n$  в електричному полі подвійного електричного шару між поверхнями з різницею потенціалів  $\Delta\varphi_i$ :

$$A = e\Delta n\Delta\varphi_i.$$

Зіставивши два останні вирази, одержимо

$$\Delta\varphi_i = \frac{kT}{e} \ln(n_1 / n_2).$$

**Приклад 4.2.** Оцінити кількість  $\Delta n/S$  електронів, перенесених крізь одиницю площі поперечного перерізу контакту з одного металу в інший, якщо контактна різниця потенціалів між цими металами  $\Delta\varphi_k = 1$  В.

**Розв'язання.** Повна контактна різниця потенціалів виникає внаслідок перенесення електронами заряду  $q = e\Delta n$  з одного металу в інший крізь подвійний електричний шар між стичними металами. Цей шар можна розглядати як заряджений плоский конденсатор, в якому роль обкладок виконують поверхневі шари металів, а відстань між ними дорівнює товщині  $d$  подвійного електричного шару. Виходячи з означення ємності конденсатора і враховуючи формулу ємності плоского конденсатора, можна записати

$$\frac{e\Delta n}{\Delta\varphi_k} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d},$$

де  $\Delta n$  — кількість електронів, перенесених крізь площу  $S$  поперечного перерізу контакту. Звідси визначаємо кількість електронів, перенесених крізь одиницю площі:

$$\frac{\Delta n}{S} = \frac{\epsilon_0\epsilon\Delta\varphi_k}{ed}.$$

Товщина подвійного електричного шару не може бути меншою за відстань  $a$  між іонами в кристалах металів. Тому за товщину подвійного шару приймемо значення параметра  $a$  кристалічної ґратки більшості металів, а саме  $d \approx a = 3 \cdot 10^{-10}$  м. Обчислення за останньою формулою при  $\epsilon = 1$  показує, що  $\Delta n/S = 1,84 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2}$ .

Зіставимо це значення  $\Delta n/S$  з поверхневою густиною  $n_s$  електронного газу в металі. Якщо в  $1 \text{ м}^3$  металу (наприклад, в алюмінії, сріблі) міститься приблизно  $6 \cdot 10^{28}$  атомів і кожний атом посилає в електронний газ по одному валентному електрону,

то на площу  $1 \text{ м}^2$  припадає електронів  $n_s \approx 10^{19} \text{ м}^{-2}$ . Тоді відношення  $\frac{\Delta n / S}{n_s} \approx 0,02$ ,

тобто для створення контактної різниці потенціалів  $1 \text{ В}$  на межі подвійного електричного шару найменшої товщини треба, щоб з контактної поверхні одного металу на контактну поверхню іншого металу переходила незначна частина вільних електронів — всього лише  $2\%$ . Настільки мала зміна концентрації вільних електронів у ділянці контакту не може помітно змінити електропровідність у цій ділянці порівняно з електропровідністю в об'ємі металу. Отже, контакт двох металів пропускає електричний струм так само, як і метал в об'ємі. Сила струму не залежить від напряму проходження струму крізь цей контакт.

### § 4.3. Контакт металу з напівпровідником

**Запірний шар.** Розглянемо процеси, які відбуваються на ділянці контакту металу з напівпровідником. Припустимо, що контакт утворений металом  $M$  і електронним напівпровідником  $n$ -типу. Нехай робота виходу електрона з металу  $A_M$  більша від роботи виходу електрона з напівпровідника  $A_n$  (рис. 4.9). За цієї умови після утворення контакту електрони переходитимуть із напівпровідника в метал, внаслідок чого контактний шар напівпровідника збідниться електронами і зарядиться позитивно, а метал набуде негативного заряду. Стан рівноваги досягається, як і в стичних металах, коли зрівнюються рівні Фермі  $\epsilon_{FM}$  і  $\epsilon_{Fn}$ . Між металом і напівпровідником утворюється подвійний електричний шар і установлюється контактна різниця потенціалів, значення якої таке саме, як і в разі контакту двох металів (кілька вольтів). Однак умови для створення подвійного електричного шару зовсім інші, ніж у ділянці контакту двох металів. Це пов'язано зі значно меншою концентрацією електронів провідності в напівпровіднику. Зокрема, у кристалі германію з домішкою донорних атомів концентрація електронного газу  $n \approx 10^{21} \text{ м}^{-3}$ , параметр ґратки

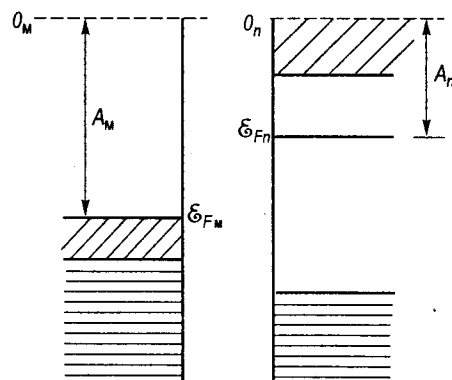


Рис. 4.9

$a \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$  і на  $1 \text{ м}^2$  його поверхні припадає  $n_s \approx 10^{14} \text{ м}^{-2}$  електронів. Контактна різниця потенціалів  $1 \text{ В}$  створюється переходженням із напівпровідника в метал  $\Delta n / S \approx 10^{17}$  електронів/м<sup>2</sup> (див. приклад 4.2). Такий потік електронів крізь контактну поверхню напівпровідника «вимиває» практично всі електрони провідності з його поверхневого шару, товщина якого  $d = \frac{\Delta n / S}{n_s} a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Отже,

на контакті металу з напівпровідником утворюється подвійний електричний шар значної товщини, яка приблизно на три порядки перевищує міжатомну віддаль у кристалах. Контактна різниця потенціалів  $\Delta\phi_K$  між металом і напівпровідником дорівнює спадові потенціалу в подвійному електричному шарі (рис. 4.10). Оскільки цей шар практично позбавлений електронів провідності і його товщина значно більша за довжину вільного пробігу електронів, то він чинить дуже великий опір електричному струмові порівняно з опором у решті об'єму напівпровідника. Такий контактний шар називають *запірним шаром*.

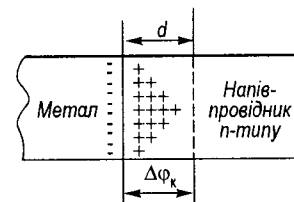


Рис. 4.10

**Вплив електричного поля в контактному шарі на енергетичні рівні напівпровідника.** По всій товщині запирного шару міститься позитивний заряд іонізованих атомів домішки, який створює електричне поле всередині контакту. При  $\Delta\phi_K \approx 1 \text{ В}$  і  $d \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  напруженість контактного поля можна оцінити відношенням  $\Delta\phi_K / d \approx 2 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ . Це значення на три порядки менше від напруженості внутрішнього поля в кристалі, яка визначає енергетичний спектр напівпровідника. Тому контактне поле не може значно змінити структуру цього спектра (ширину забороненої зони, енергію активації домішок тощо). Однак воно діє на всі енергетичні рівні напівпровідника, викривляючи їх на ділянці контакту.

Для пояснення такої дії контактного поля звернемося до рис. 4.9. Між відокремленими металом і напівпровідником немає контактного поля, і енергетичні рівні прийнято зображати горизонтальними прямими. Цим вказується, що енергія електрона, який перебуває на даному рівні, є однаковою в усіх точках напівпровідника. Утворення контакту і виникнення контактної різниці потенціалів змінюють картину (рис. 4.11). На електрон у контактному полі діє сила, яка намагається виштовхнути його з контактного запирного шару. Подолання цієї сили пов'язане з виконанням роботи, яка переходить у потенціальну енергію електрона. Тому в міру переміщення електрона у контактному полі його потенціальна енергія  $W_n(x)$  зростає, досягаючи найбільшого значення  $W_{n0} = e\Delta\phi_K$  на контактній поверхні напівпровідника з металом. Отже, дія контактного поля зводиться тільки до паралельного викривлення енергетичних зон і донорних рівнів напівпровідника по всій товщині  $d$  запирного шару. Значення енергії  $W_{n0}$  називають *потенціальним бар'єром* для електронів, які переходять із напівпровідника в метал.

Розрахунки показують, що зі збільшенням відстані  $x$  від контакту потенціальна енергія електрона в контактному полі зменшується за параболічним законом

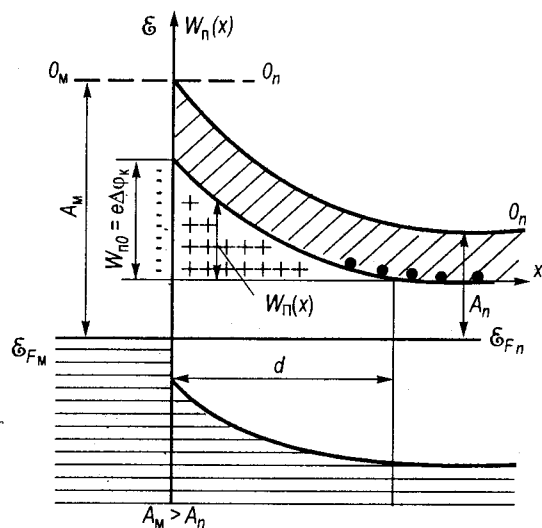


Рис. 4.11

$$W_n(x) = \frac{e^2 n_{0n}}{2\epsilon_0 \epsilon} (d-x)^2, \quad (4.10)$$

де  $n_{0n}$  — концентрація електронів (основних носіїв заряду) у  $n$ -напівпровіднику;  $\epsilon$  — діелектрична проникність напівпровідника.

Зважаючи на те, що при  $x=0$   $W_{n0} = A_M - A_n \approx e\Delta\phi_K$ , із (4.10) знаходимо товщину запірного шару:

$$d = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \epsilon \Delta\phi_K}{en_{0n}}}. \quad (4.11)$$

Товщина запірного шару зростає зі збільшенням контактної різниці потенціалів і зменшується з підвищенням концентрації основних носіїв.

Крім розглянутого прикладу, можливі ще такі випадки контакту металу з напівпровідником: 1)  $A_M < A_n$  (напівпровідник  $n$ -типу); 2)  $A_M > A_p$  (напівпровідник  $p$ -типу); 3)  $A_M < A_p$  (напівпровідник  $p$ -типу).

Якщо робота виходу металу менша від роботи виходу електронно-го напівпровідника, то електрони переходять із металу в напівпровідник і утворюють у контактному шарі напівпровідника негативний об'ємний заряд (рис. 4.12, а). У цьому разі з переміщенням до контактної поверхні напівпровідника енергія електрона не збільшується, а навпаки, зменшується, енергетичні зони викривляються у проти-

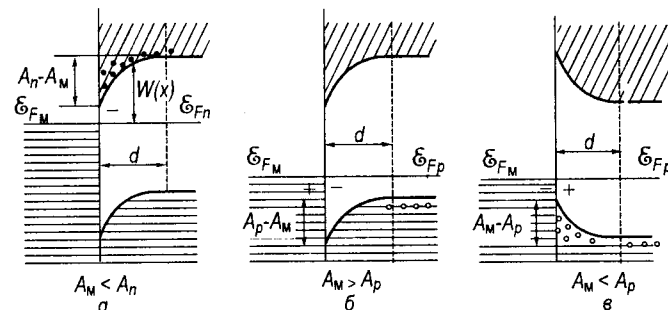


Рис. 4.12

лежний бік порівняно з контактом при  $A_M > A_n$ . Внаслідок цього провідність контактного шару збільшується порівняно з провідністю напівпровідника в об'ємі. Отже, при  $A_M < A_n$  на ділянці контакту не створюється запірний шар (контакт має омичний характер).

Під час контакту металу з напівпровідником  $p$ -типу за умови  $A_M > A_p$  (рис. 4.12, б) з напівпровідника в метал переходять електрони, які до утворення контакту були зв'язані з акцепторними атомами. Звільнені місця на акцепторних рівнях займають інші електрони, які переходять з валентної зони. У контактному шарі напівпровідника (валентній зоні) збільшується концентрація основних носіїв позитивного заряду — дірок, що зумовлює до підвищення провідності контактного шару порівняно з провідністю решти об'єму напівпровідника.

Якщо  $A_M < A_p$ , то електрони переходять з металу на акцепторні рівні та рівні валентної зони напівпровідника. У контактному шарі створюється надлишок негативних іонів акцепторних домішок і зменшується концентрація основних носіїв заряду — дірок у валентній зоні (рис. 4.12, в). У цьому разі дуже знижується провідність контактного шару і він стає запірним.

Запірний контактний шар має однобічну, або вентильну, провідність, тобто проводить електричний струм практично в одному напрямі: або з металу в напівпровідник, або з напівпровідника в метал. Однобічна провідність запірного шару пояснюється залежністю його опору від напрямку зовнішнього електричного поля відносно напрямку поля всередині контакту.

Якщо напрями зовнішнього і контактного полів протилежні, то основні носії заряду втягуються в контактний шар із об'єму напівпровідника і товщина запірного шару зменшується. Відповідно зменшується його опір і крізь контакт метал — напівпровідник проходить електричний струм. Цей напрям зовнішнього поля в контактному шарі називають *пропускним*. Якщо напрям зовнішнього поля

збігається з напрямом контактної області, то основні носії заряду в напівпровіднику віддаляються від контактної поверхні і товщина запертого шару збільшується. Його опір зростає настільки, що в цьому напрямі контакт практично не пропускає електричного струму — це запертий напрям.

Отже, для запертого шару на контакті металу з напівпровідником за умови  $A_M > A_n$  пропускним є напрям струму із металу в напівпровідник, а для контакту металу з напівпровідником  $p$ -типу при  $A_M < A_p$  — із напівпровідника в метал.

#### § 4.4. Контакт електронного і діркового напівпровідників

Контакт двох домішкових напівпровідників з провідністю різних типів називають *електронно-дірковим переходом* або  *$p-n$ -переходом*. На властивостях таких переходів ґрунтується принцип дії численних напівпровідникових приладів, які широко застосовуються в обчислювальній, електро- і радіотехніці та електроніці. У зв'язку з широким застосуванням важливе практичне значення мають методи виготовлення  $p-n$ -переходу.

Створити  $p-n$ -перехід безпосереднім механічним притисканням електронного і діркового напівпровідників неможливо, навіть якщо поверхні, що контактують, ретельно відшліфовані. Такі поверхні завжди містять величезну кількість різноманітних домішок і дефектів, які дуже змінюють властивості напівпровідників. Тому  $p-n$ -переходи виготовляють методом сплавлення або при вирощуванні кристалів. Наприклад, у тонку пластинку монокристала з дуже чистого германію з електронним механізмом провідності вплавають з одного боку кусочок індію. При нагріванні цієї системи у вакуумі або в атмосфері інертного газу атоми індію дифундують у германій на деяку глибину. Після охолодження розплаву на ділянці, в яку проникають атоми індію, провідність германію стає дірковою, а решта кристала зберігає електронну провідність. На внутрішній межі обох ділянок з провідністю різного типу утворюється  $p-n$ -перехід. Крім того, для отримання  $p-n$ -переходів використовують метод, який полягає в утворенні на поверхні кристала  $n$ -типу за допомогою хімічних реакцій монокристалічної плівки з провідністю  $p$ -типу. Широко застосовується також метод іонного легування, при якому поверхневий шар напівпровідника за допомогою іонного пучка легується домішкою, яка утворює в цьому шарі ділянку з провідністю протилежного типу.

Розглянемо в загальних рисах фізичні процеси, які відбуваються в  $p-n$ -переході. Нехай дві ділянки напівпровідника з провідностями різного типу розділяє внутрішня плоска межа (рис. 4.13, а): ліворуч

від неї розміщено напівпровідник  $n$ -типу (його робота виходу  $A_n$ , рівень Фермі  $\epsilon_{Fn}$  і концентрація основних носіїв — електронів  $n_{0n}$ ), а праворуч — напівпровідник  $p$ -типу (робота виходу  $A_p$ , рівень Фермі  $\epsilon_{Fp}$ , концентрація основних носіїв — дірок  $n_{0p}$ ). Припустимо, що концентрації атомів-донорів у  $n$ -напівпровіднику і атомів-акцепторів у  $p$ -напівпровіднику є однаковими і при не надто низьких температурах всі домішки повністю іонізовані (рис. 4.13, б). Тоді можна вважати, що концентрація основних носіїв у  $n$ -напівпровіднику дорівнює концентрації основних носіїв у  $p$ -напівпровіднику ( $n_{0n} = n_{0p}$ ). Крім основних носіїв, у цих ділянках містяться неосновні носії: у  $n$ -ділянці — дірки, концентрація яких  $n_{np}$ , а в  $p$ -ділянці — електрони, концентрація яких  $n_{nn}$ . У кожній з ділянок концентрація неосновних носіїв є значно меншою від концентрації основних носіїв.

Система переходить до стану рівноваги завдяки дифузії електронів із  $n$ -напівпровідника, де їхня концентрація вища, у  $p$ -напівпровідник, де концентрація електронів нижча; дірки дифундують у протилежному напрямі — у напрямі  $p \rightarrow n$ . Після переходу електронів у  $n$ -напівпровіднику поблизу внутрішньої межі залишаються іонізовані донорні атоми, некомпенсований позитивний заряд яких розподілений в об'ємі шару завтовшки  $d_1$ . У  $p$ -напівпровіднику внаслідок переходу дірок поблизу межі залишаються іонізовані акцепторні атоми, які створюють негативний об'ємний заряд у шарі завтовшки  $d_2$  (рис. 4.13, а). Ці об'ємні заряди утворюють подвійний електричний шар завтовшки  $d = d_1 + d_2$ , локалізований на ділянці переходу основних носіїв. Напруженість електричного поля подвійного шару напрямлена від  $n$ -напівпровідника до  $p$ -напівпровідника, тобто

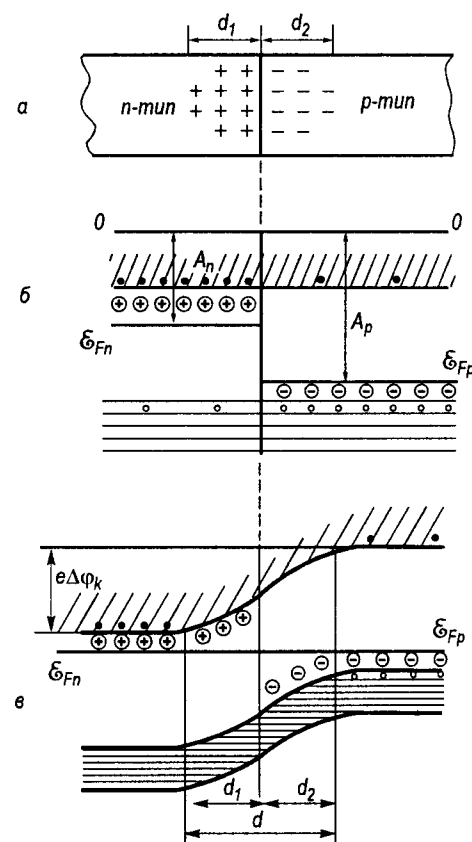


Рис. 4.13

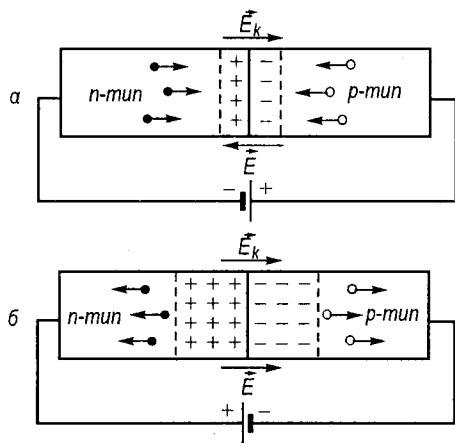


Рис. 4.14

контактне поле протидіє подальшому переходу електронів у напрямі  $n \rightarrow p$  і дірок у напрямі  $p \rightarrow n$ .

Динамічна рівновага характеризується вирівнюванням рівнів Фермі в обох напівпровідниках, установленням контактної різниці потенціалів  $\Delta\phi_k$  і певної товщини  $d$   $p$ - $n$ -переходу, який простягається на глибину  $d_1$  у  $n$ -напівпровідник і на глибину  $d_2$  в  $p$ -напівпровідник (рис. 4.13, в). Якщо концентрації донорів й акцепторів однакові, то  $d_1 = d_2$ . По всій товщині

$p$ - $n$ -переходу енергетичні зони викривляються. Всі енергетичні рівні акцепторного напівпровідника піднімаються відносно рівнів донорного напівпровідника на висоту, яка визначається різницею початкових положень рівнів Фермі:  $W_0 = A_p - A_n$ . Внаслідок цього в  $p$ - $n$ -переході виникають потенціальні бар'єри як для електронів, так і для дірок. Висоту рівноважного потенціального бар'єра можна виразити також співвідношенням  $W_0 = e\Delta\phi_k$ .

Товщина  $p$ - $n$ -переходу залежить від контактної різниці потенціалів і концентрації основних носіїв:

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon\Delta\phi_k}{e} \frac{(n_{0n} + n_{0p})}{n_{0n}n_{0p}}}. \quad (4.12)$$

Досліди показують, що для напівпровідників контактна різниця потенціалів дорівнює кільком десятим вольтів, а товщина  $p$ - $n$ -переходу  $d \approx 10^{-6} - 10^{-7}$  м. Таку різницю потенціалів основні носії заряду здатні подолати тільки при температурі в кілька тисяч градусів. Отже, при звичайних температурах  $p$ - $n$ -перехід є запірним шаром для основних носіїв.

Опір запірного шару можна змінити за допомогою зовнішнього електричного поля. Прикладемо до кристала зовнішню напругу так, щоб вищий потенціал «+» був поданий на  $p$ -ділянку, а нижчий потенціал «-» — на  $n$ -ділянку. Тоді зовнішнє електричне поле в кристалі буде напрямлене протилежно до поля контактного запірного шару. Воно спричинить рух електронів з об'єму  $n$ -напівпровідника і дірок з об'єму  $p$ -напівпровідника до внутрішньої межі  $p$ - $n$ -переходу (рис. 4.14, а). Рухаючись назустріч, електрони і дірки рекомбінують

одні з одними, що зумовлює зниження потенціального бар'єра. Товщина запірного шару і його опір при цьому зменшуються. При відповідній напруженості зовнішнього поля опір запірного шару стає рівним опорів всього об'єму напівпровідникового кристала. Тоді  $p$ - $n$ -перехід пропускати струм у напрямі від  $p$ -напівпровідника до  $n$ -напівпровідника; цей напрям зовнішнього поля називають *прямим* або *пропускним*.

Якщо змінити полярність прикладеної до кристала напруги, то напрям зовнішнього електричного поля збігатиметься з напрямом контактного поля (рис. 4.14, б). У цьому разі зовнішнє поле підсилуватиме поле контактного шару і зумовить рух електронів у  $n$ -напівпровіднику та дірок у  $p$ -напівпровіднику від межі  $p$ - $n$ -переходу в протилежних напрямках. Внаслідок цього запірний шар розшириться, збільшиться його опір і підвищиться потенціальний бар'єр у  $p$ - $n$ -переході для електронів та дірок. Напрямок зовнішнього поля, в якому розширюється запірний шар і  $p$ - $n$ -перехід не проводить електричного струму, називають *зворотним* або *запірним*.

Отже,  $p$ - $n$ -перехід має односторонню (вентильну) провідність.

#### § 4.5. Напівпровідникові діоди і тріоди (транзистори)

Одностороння провідність контактів двох напівпровідників з провідністю різних типів (або металу з напівпровідником) використовується для випрямлення і перетворення змінних струмів. Напівпровідниковий пристрій, який містить один  $p$ - $n$ -перехід і два омичних контакти, називають *напівпровідниковим* або *кристалічним діодом*.

Напівпровідникові діоди за конструкцією  $p$ - $n$ -переходу поділяють на діоди з точковими контактами і діоди з площинними контактами. У точковому германієвому діоді (рис. 4.15) до кристала германію 1 з провідністю  $n$ -типу притискається тонкий вольфрамовий дріт 2 вістря, яке покрите алюмінієм. Якщо крізь діод у прямому напрямі пропустити короткочасний імпульс струму, то внаслідок нагрівання різко зростає дифузія алюмінію в германій. Поблизу точкового контакту формується збагачений алюмінієм шар германію з провідністю  $p$ -типу. На межі цього шару з основним кристалом германію утворюється  $p$ - $n$ -перехід, який характеризується дуже малою ємністю. Завдяки малій ємності точкові діоди застосовуються для випрямлення (детектування) височастотних електричних коливань. У площинних діодах викори-

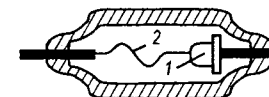


Рис. 4.15

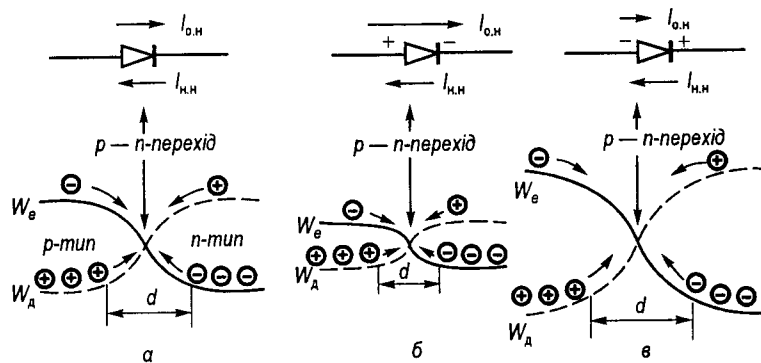


Рис. 4.16

стовуються заірні шари з великою площею поверхні на контакті металу з напівпровідником або двох напівпровідників з провідністю різних типів (способи виготовлення таких  $p-n$ -переходів коротко описані в § 4.4).

Розглянемо електричні струми, які проходять крізь напівпровідниковий діод. На рис. 4.16 схематично зображені напівпровідниковий діод і потенціальні бар'єри в  $p-n$ -переході для електронів (суцільна крива  $W_e$ ) і дірок (штрихова крива  $W_d$ ). У стані динамічної рівноваги теплове збудження надає спроможність деякій кількості основних носіїв подолати потенціальний бар'єр (електрони переходять у напрямі  $n \rightarrow p$ , а дірки — у напрямі  $p \rightarrow n$ ). Внаслідок цього крізь  $p-n$ -перехід проходить невеликий струм  $I_{0,n}$  (рис. 4.16, а), значення якого значною мірою залежить від висоти потенціального бар'єра. Неосновних носіїв у кристалі дуже мало. Для них потенціальний бар'єр не створює перепони — вони наче «сповзають» з нього і легко проникають крізь межу  $p-n$ -переходу (електрони в напрямі  $p \rightarrow n$ , а дірки —  $n \rightarrow p$ ). Неосновні носії виникають щосекунди й утворюють у діоді струм  $I_{n,n}$ , значення якого майже не залежить від висоти потенціального бар'єра. Струм  $I_{n,n}$  проходить назустріч струмові основних носіїв. Рівновага відповідає такій висоті потенціального бар'єра, при якій струми  $I_{0,n}$  та  $I_{n,n}$  компенсують один одного, тоді результуючий струм діода  $I = I_{0,n} + I_{n,n} = 0$ .

Подамо на діод зовнішню напругу  $U$  в прямому напрямі (рис. 4.16, б). Підвищення потенціалу  $p$ -ділянки діода спричиняє збільшення потенціальної енергії дірок  $W_d$  і зменшення потенціальної енергії електронів  $W_e$  у цій ділянці, а в  $n$ -ділянці зниження її потенціалу супроводжується зменшенням  $W_d$  і збільшенням  $W_e$ , тобто в  $p-n$ -переході зменшується висота потенціального бар'єра для електронів і дірок на значення, пропорційне прикладеній напрузі (вона дорівнює  $eU$ ). Внаслідок цього збільшується сила струму ос-

новних носіїв  $I_{0,n}$ , а сила струму неосновних носіїв залишається практично без зміни. Отже, результуючий струм проходить у напрямі  $p \rightarrow n$ . Цей струм називають *прямим* — він відповідає прикладеній в прямому напрямі напрузі. Розрахунки показують, що при постійній температурі зі збільшенням  $U$  сила прямого струму швидко зростає за експоненціальним законом. Для германієвих  $p-n$ -переходів при напрузі 1 В густина прямого струму може досягати  $10^6 \text{ A / м}^2$ .

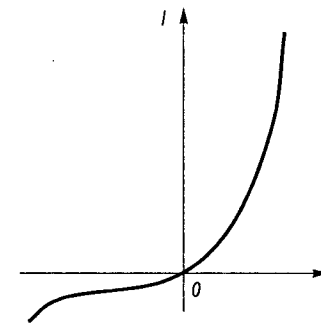


Рис. 4.17

Змінимо полярність зовнішньої напруги на діоді. Під дією зворотної напруги потенціальний бар'єр в  $p-n$ -переході підвищиться на  $eU$  і зменшиться сила струму основних носіїв  $I_{0,n}$  (рис. 4.16, в). При цьому виникає слабкий результуючий струм, який проходить крізь діод у напрямі  $n \rightarrow p$  (зворотний струм). Зі збільшенням зворотної напруги  $U$  цей струм досить швидко перестає залежати від  $U$  (досягає насичення) і прямує до граничної межі, абсолютне значення якої називають *струмом насичення*  $I_n$ . Струм насичення повністю визначається потоком неосновних носіїв. Оскільки концентрація неосновних носіїв є низькою, то й значення  $I_n$  є дуже малим. Наприклад, для германієвих  $p-n$ -переходів густина струму насичення дорівнює близько  $10^{-2} \text{ A / м}^2$ , а для силіцієвих переходів — ще менша.

Залежність сили струму в напівпровідниковому діоді від прикладеної до нього зовнішньої напруги називають *вольт-амперною характеристикою діода* (рис. 4.17). Вона виражається формулою

$$I = I_n \left[ \exp\left(\pm \frac{eU}{kT}\right) - 1 \right], \quad (4.13)$$

де знак плюс відповідає напрузі  $U$ , прикладеній в прямому напрямі, а знак мінус — у зворотному. При незначних напругах, прикладених у прямому напрямі, струм крізь діод різко зростає. Наприклад, згідно з (4.13), при кімнатній температурі ( $T = 300 \text{ K}$ ) і  $U = +0,5 \text{ В}$  прямий струм  $I_{пр} \approx I_n e^{20}$ , а при напрузі  $U = -0,5 \text{ В}$  зворотний струм перебуває в стані насичення  $I_{зв} = I_n$ , тобто в цьому інтервалі напруг прямий струм крізь діод перевищує зворотний приблизно в  $10^9$  разів. Отже, діод має практично односторонню провідність.

Ця властивість діода використовується для випрямлення змінного струму. Якщо на ввімкнений в коло діод подати напругу, яка змінюється за гармонічним законом (рис. 4.18, а), то крізь діод проходитиме в одному напрямі пульсуючий (випрямлений) струм

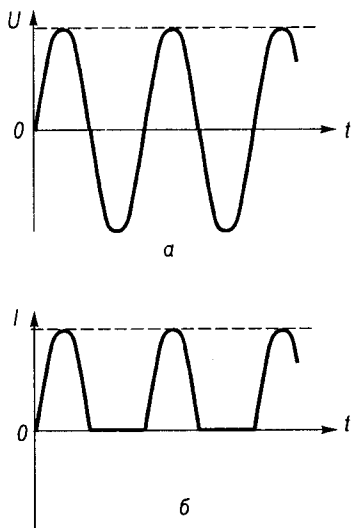


Рис. 4.18

(рис. 4.18, б). Коефіцієнтом випрямлення діода називається відношення прямого струму до зворотного при однаковій напрузі, прикладеній у прямому і зворотному напрямках.

Під час нагрівання діода можна досягнути такої температури, при якій концентрація неосновних носіїв буде дорівнювати концентрації основних носіїв. При такій температурі зникає потенціальний бар'єр в  $p-n$ -переході, яким зумовлені випрямні властивості діода. Безперервним збільшенням зворотної напруги на діоді досягається таке її значення, при якому різко падає опір запірного шару і зворотний струм стрибкоподібно зростає. Це явище називають *пробоем  $p-n$ -переходу*. Германієві діоди можуть витримувати зворотні напруги 1000 В при температурі 100 °С. Ще вищі

зворотні напруги витримують силіцієві діоди.

Напівпровідниковий триод, або *транзистор*, — це кристал, який містить два  $p-n$ -переходи. Він був створений у 1953 р. американськими фізиками Дж. Бардіном, У. Браттейном (1902—1987) і У. Шоклі (н. 1910 р.). Залежно від порядку, в якому чергуються ділянки кристала з провідностями різних типів, розрізняють  $p-n-p$  і  $n-p-n$ -транзистори. Транзистор складається з трьох частин: середню ділянку транзистора, яка має  $n$ - або  $p$ -провідність, залежно від типу транзистора, називають його *базою*, а прилеглі до бази з обох боків ділянки з провідностями інших типів утворюють *емітер* і *колектор*. Ці ділянки відділені від бази двома  $p-n$ -переходами: емітерним 1 і колекторним 2. Концентрація носіїв у емітері й колекторі має бути більшою, ніж концентрація носіїв у базі. Для транзистора типу  $p-n-p$  на рис. 4.19, а наведено криві потенціальної енергії носіїв — електронів (суцільна лінія) і дірок (штрихова лінія) у стані рівноваги.

Розглянемо коротко принцип дії  $p-n-p$ -транзистора, увімкненого в електричне коло (рис. 4.20). Як видно з рисунка, на емітерний перехід подається напруга в прохідному (прямому) напрямі, а на колекторний перехід подається більша напруга в запірному (зворотному) напрямі. Внаслідок цього відбудеться зниження потенціального бар'єра на першому переході й підвищення бар'єра на другому (рис. 4.19, б). Проходження струму  $I_e$  в колі емітера еквівалентне вприскуванню, або інжекції, дірок у ділянку бази (неосновних носіїв

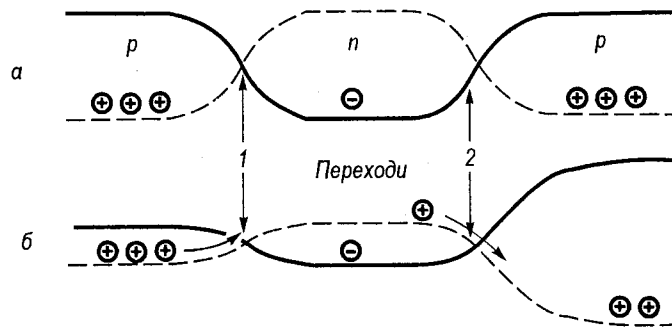


Рис. 4.19

для бази). Дірки, інжектвані з емітера в базу, дифундують у напрямі до колектора. При невеликій товщині бази майже всі дірки досягають колектора. Тут вони підхоплюються полем колектора і збільшують силу струму  $I_k$ , який проходить у запірному напрямі в колі колектора. Із описаного випливає, що сила струму в колі колектора дорівнює приблизно силі струму в колі емітера ( $I_k \approx I_e$ ).

Подамо на вхідний опір  $R_{вх}$  зовнішній сигнал напругою  $U_{вх}$  (рис. 4.20). Оскільки емітерний перехід увімкнений у прямому напрямі, то він має низький опір і сила струму  $I_e = U_{вх} / R_{вх}$ . Колекторний перехід увімкнений у зворотному напрямі, його опір дуже великий. Тому послідовно з ним можна увімкнути великий навантажувальний опір  $R_{вих}$ , на якому відбувається спад вихідної напруги  $U_{вих}$ . Тоді сила струму колектора  $I_k = U_{вих} / R_{вих}$ . Очевидно, що зміна колекторного струму дорівнює зміні струму в колі емітера. Тому

$$\frac{U_{вих}}{U_{вх}} = \frac{R_{вих}}{R_{вх}}$$

Звідси випливає ефект підсилення напруги: оскільки  $R_{вих} \gg R_{вх}$ , то  $U_{вих} \gg U_{вх}$ .

На навантажувальному опорі виділяється потужність  $P_{вих} = U_{вих} I_k$ , а на вході в колі емітера витрачається потужність  $P_{вх} = U_{вх} I_e$ . Враховуючи, що  $I_k \approx I_e$  і  $U_{вих} \gg U_{вх}$ , приходимо до

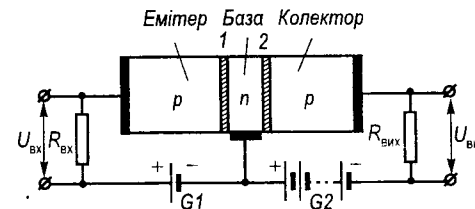


Рис. 4.20

висновку про підсилення потужності:  $P_{\text{вих}} \gg P_{\text{вх}}$ . Підсилення потужності відбувається завдяки джерелу струму, увімкненому в коло колектора. За допомогою германієвих транзисторів можна підсилувати напругу і потужність майже в 10 000 разів.

Існують транзистори інших типів та інші схеми вмикання їх. Транзистор вніс революційні зміни в багато галузей техніки, зокрема в галузі електронних засобів зв'язку, і забезпечив створення швидкодійних ЕОМ з великим обсягом пам'яті.

#### § 4.6. Термоелектричний струм

За законом послідовних контактів Вольти, у замкнутому колі, що складається з кількох металів або напівпровідників з однаковою температурою, електричного струму немає. Якщо ж температура в місцях контакту різна, то в колі виникає струм, який називають *термоелектричним*. Електрорушійну силу, що зумовлює цей струм, називають *термоелектрорушійною силою* (термо-ЕРС).

Явище термоелектричного струму відкрив у 1821 р. німецький фізик Т. Зеєбек (1770—1831). Для спостереження цього явища досить приєднати до мілівольметра два мідних дроти і замкнути їх константановим або залізним дротом. При нагріванні одного зі спаїв у колі виникає термо-ЕРС. Якщо цей спай охолодити, а другий спай нагріти, то знак термо-ЕРС змінюється і стрілка мілівольметра відхиляється в протилежний бік. Систему з двох різних контактуючих металів, металу і напівпровідника або двох напівпровідників з провідностями різних типів називають *термопарою*.

Електрорушійна сила диференціальної термопари складається з електрорушійних сил обох її спаїв. Електрорушійна сила спаю залежить як від природи металів, що перебувають у контакті, так і від температури спаю  $\mathcal{E} = f(T)$ . Якщо температура більш нагрітого спаю  $T_1$ , а холоднішого —  $T_2$ , то термоелектрорушійна сила термопари

$$\mathcal{E} = f(T_1) - f(T_2). \quad (4.14)$$

Термоелектричні властивості пари двох металів при малій різниці температур спаїв характеризує величина  $\alpha = \frac{d\mathcal{E}}{dT}$ , яку називають *коефіцієнтом термо-ЕРС*. Для різних металів значення  $\alpha$  є неоднаковим. Тому для зручності на практиці коефіцієнт  $\alpha$  різних металів визначають відносно свинцю. Тоді коефіцієнт  $\alpha_{12}$  металу 1 відносно металу 2 визначається так:

$$\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2, \quad (4.15)$$

де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — коефіцієнти термо-ЕРС відповідно першого і другого металів відносно свинцю.

Існують такі пари металів, для яких функціональна залежність  $f(T)$  у певному інтервалі температур має лінійний характер, тобто

$$f(T) = f_0 + \alpha T.$$

Тоді

$$\mathcal{E} = \alpha(T_1 - T_2). \quad (4.16)$$

До таких пар належать Cu — Bi, Ag — Cu, Au — Cu, Pt — Fe, мідь — константан, хромель — алюмель\* та ін. Для багатьох термопар залежність  $f(T)$  описується рівнянням  $f(t) = f_0 + \alpha t + \beta t^2$  ( $f_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — сталі). Для них

$$\mathcal{E} = \alpha(t_1 - t_2) \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} (t_1 + t_2) \right). \quad (4.17)$$

Виникнення термоелектричного струму в металах можна пояснити на основі формул для внутрішньої контактної різниці потенціалів (4.5) або (4.9), оскільки  $\mathcal{E}_{F1}$  і  $\mathcal{E}_{F2}$  залежать від температури.

Щоб з'ясувати механізм виникнення термо-ЕРС у парі двох напівпровідників, контакти яких мають різні температури, спочатку розглянемо процеси, що відбуваються в напівпровідниках *n*- і *p*-типу окремо, кінці яких мають різні, але постійні температури.

Нехай напівпровідник *n*-типу має форму стрижня (рис. 4.21, а), лівий кінець якого нагріто до температури  $T_1$ , а правий підтримується при постійній температурі  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). З підвищенням температури напівпровідника *n*-типу концентрація електронів провідності збільшується. Концентрація електронів у напівпровіднику *n*-типу ліворуч виявиться більшою, ніж праворуч. Виникає градієнт концентрації електронів, який зумовлює їхню дифузію зліва направо. Ліва частина (більш нагріта) збіднюється електронами і заряджається позитивно, а права — негативно. Внаслідок цього всередині напівпровідника виникає електричне поле, напруженість якого  $\vec{E}$  напрямлена від нагрітого кінця до холодного. Це поле гальмуватиме дифузію електронів і за певного значення  $\vec{E}$  дифузія припиняється і встановлюється стаціонарний стан. Формально можна вважати, що в напівпровіднику градієнт концентрації електронів, який збуджує електричний

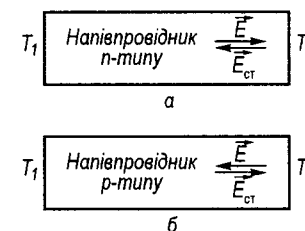


Рис. 4.21

\* Константан: сплав 60% Cu, 40% Ni; хромель: 90% Cr, 10% Ni; алюмель: 95% Ni, інші 5% — Al, Si, Mn.



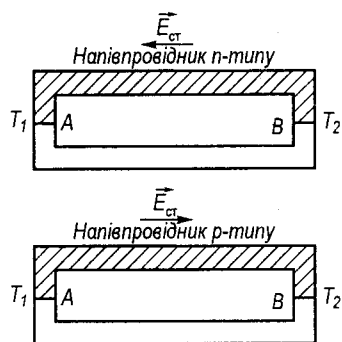


Рис. 4.22

струм, еквівалентний напруженості поля сторонніх сил  $\vec{E}_{ст}$ . У стаціонарному стані  $\vec{E}$  і  $\vec{E}_{ст}$  зрівноважуються. Отже, поле сторонніх сил у напівпровіднику *n*-типу напрямлене від холодного кінця до нагрітого.

Якщо нагрівати один кінець напівпровідника *p*-типу, то матиме місце дифузія дірок і нагрітий кінець зарядиться негативно, холодний — позитивно, а електричне поле, що відповідає стаціонарному стану, буде напрямлене від холодного кінця до гарячого. Поле сторонніх сил у цьому разі напрямлене від гарячого до холодного кінця напівпровідника (рис. 4.21, б).

У напівпровідниках змішаної провідності внаслідок дифузії електронів і дірок можуть бути випадки, коли електричні поля компенсують одне одного. Тоді різниця потенціалів між кінцями напівпровідникового стрижня не виникає. Саме це властиво для свинцю, тому коефіцієнт термо-ЕРС  $\alpha$  виражають відносно нього.

Якщо з'єднати кінці стрижня напівпровідника *n*- або *p*-типу із свинцевим провідником (рис. 4.22) і нагрівати контакт *A*, а контакт *B* підтримувати при температурі  $T_2 < T_1$ , то на основі попередніх уявлень про механізм виникнення термо-ЕРС у першому випадку струм у контакті *A* проходить від напівпровідника до свинцю, а в другому — навпаки.

На основі наведеного механізму виникнення термо-ЕРС можна зробити висновок, що термоелектричні властивості мають проявлятися більше в напівпровідниках, ніж у металах, що й підтверджується дослідом. Це можна пояснити тим, що електрони в металах перебувають у виродженому стані, їхня енергія мало залежить від температури, а концентрація електронів практично однакова як при низьких, так і при високих температурах. У металів також незначна залежність рівня Фермі від температури, тому й коефіцієнт термо-ЕРС  $\alpha$  для

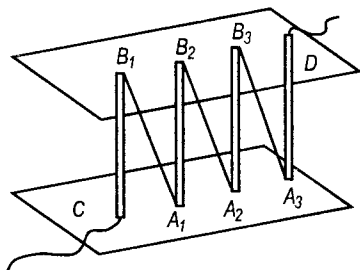


Рис. 4.23

металів і сплавів значно менший, ніж для напівпровідників. Про це переконливо доводять наведені в табл. 4.1 значення  $\alpha$ . Знак коефіцієнта термо-ЕРС вказує на природу носіїв заряду в напівпровіднику: знак плюс — на діркову провідність, мінус — на електронну.

Таблиця 4.1

Метал, сплав	$\alpha$ , мкВ/К	Напівпровідник	$\alpha$ , мкВ/К
Вісмут	-68,0	TiS	-780
Нікель	-20,8	V <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	-750
Калій	+13,8	FeO	-500
Натрій	-6,5	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	-430
Платина	-4,4	Bi-Te-Se	-170
Алюміній	-0,4	Bi-Sb-Te	+160
Константан	-38,0	Ti <sub>2</sub> S	+800
Копель	-38,0	Se	+1000
Ніхром	+18,0	CuO	+1120
Алюмель	-17,3	Cu <sub>2</sub> O	+1200

Явище термо-ЕРС широко застосовується для вимірювання температур. Це зумовлено тим, що для переважної більшості пар металів (метал і напівпровідник, два напівпровідники) термо-ЕРС являє собою однозначну і лінійну функцію температури. Крім цього, для вимірювання термо-ЕРС існують досить точні методи. Все це дає підстави взяти термо-ЕРС за термометричний параметр. Термопарні методи вимірювання охоплюють досить широкий інтервал температур. Для кожної пари існує певний інтервал температур, в якому залежність  $\mathcal{E} = f(T)$  має лінійний характер. Так, в інтервалі 73 — 673 К використовують мідно-константанову термопару, 73 — 1273 К — залізо-константанову, 73 — 1673 К — хромель-алюмельову. Досить високу відтворюваність результатів вимірювання має платиново-платинородієва термопара (Pt — 90%, Rh — 10%). Така термопара є еталоном для реалізації Міжнародної температурної шкали в інтервалі 630,5 — 1063,0 °С. В області температур рідкого водню застосовують термопари золотонейзильберові і платинонейзильберові. Для ще нижчих температур, аж до температури рідкого гелію, використовують термопари (99 ат. % Au + 1 ат. % Co) — (99 ат. % Ag + 1 ат. % Au) і золотосрібні. Нині для роботи при високих температурах застосовують напівпровідникові термопари, які мають високу хімічну і термічну стійкість.

Для вимірювання різниці температур використовують так звану диференціальну термопару. Її спаї поміщають у ті середовища (тіла), різницю температур яких вимірюють. Щоб підвищити чутливість термопари, використовують батарею, тобто кілька з'єднаних послідовно диференціальних термопар (рис. 4.23). Спаї  $B_1, B_2, B_3$  мають

однакову температуру, а спаї  $A_1, A_2, A_3$  — іншу; ЕРС такої батареї дорівнює сумі ЕРС окремих елементів.

Явище виникнення термо-ЕРС використовується для прямого перетворення теплової енергії в електричну, ККД напівпровідникових термоелементів сягає 15—20 %. Створено ряд термоелектрогенераторів для прямого перетворення в електричну теплової, сонячної та ядерної енергій. Досить зручними виявились термоелектрогенератори на «ізотопному паливі». Такі генератори можуть працювати десятки років без заміни джерела теплоти і термобатареї. Вони використовуються для живлення автоматичних радіометеорологічних станцій, маяків тощо.

#### § 4.7. Явища Пельтьє і Томсона

У 1834 р. французький фізик Ж. Пельтьє (1785—1845) відкрив явище, яке полягає в тому, що під час пропускання електричного струму крізь коло, складене з двох різних металів, один спай нагрівається, а другий охолоджується. Це явище називають *явищем Пельтьє*, і фактично воно є оберненим до явища Зеебека. При зміні напрямку струму на протилежний змінюється також характер процесів у контактах. Той контакт, який у першому випадку нагрівався, у другому — охолоджується.

Явище Пельтьє легко продемонструвати за допомогою приладу, зображеного на рис. 4.24. У скляну трубку  $A$  крізь пробку вставляють два різних спаяних провідники у вигляді циліндричних стрижнів (краще всього вісмут і сурма). До цих стрижнів від батареї підводиться струм, напрям якого можна змінювати за допомогою перемикача  $S$ . Трубка  $A$  сполучена з горизонтальною скляною трубкою  $C$ , в яку ввели краплю забарвленої рідини  $K$ . При напрямі струму від сурми до вісмуту спостерігається переміщення краплі праворуч, тобто відбувається виділення теплоти в спай. При зміні напрямку струму крапля переміщається ліворуч, тобто в спай відбувається поглинання теплоти.

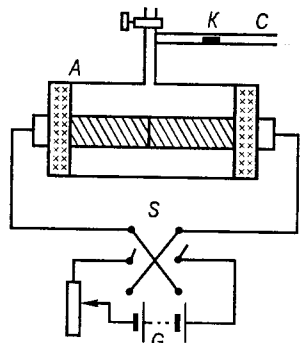


Рис. 4.24

Для вимірювання теплоти Пельтьє дослідним шляхом користуються установкою, схему якої (рис. 4.25) вперше запропонував французький фізик Ф. Леру (1832—1907). Він припаяв до кінців вісмутного дроту мідні провідники і їхні спаї опустив у два калориметри. Якщо в спай  $A$  струм проходить від міді до вісмуту, то, крім теплоти Джоуля — Ленца  $I^2Rt$ ,

виділяється теплота Пельтьє  $Q$ , тобто в калориметрі 1 виділяється теплота

$$Q_1 = I^2Rt + Q. \quad (4.18)$$

У калориметрі 2 струм проходить від вісмуту до міді. При цьому відбувається охолодження спаю і поглинання теплоти Пельтьє  $Q$ , тобто в калориметрі 2 виділяється теплота

$$Q_2 = I^2Rt - Q. \quad (4.19)$$

З формул (4.18) і (4.19) одержимо:

$$Q = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2). \quad (4.20)$$

Умовились теплоту Пельтьє, що виділяється, вважати додатною, а теплоту Пельтьє, що поглинається, — від'ємною. Дослід показує, що теплота Пельтьє, яка виділяється або поглинається в спай, на відміну від теплоти Джоуля — Ленца, пропорційна зарядові, що проходить крізь спай, тобто

$$Q = \Pi q = \Pi It, \quad (4.21)$$

де  $\Pi$  — *коефіцієнт Пельтьє*, який залежить від природи провідників, що перебувають у контакті, та від їхньої температури. Для металів коефіцієнт Пельтьє близько  $10^{-2}$ — $10^{-3}$  В, а для напівпровідників —  $3 \cdot 10^{-1}$ — $10^{-3}$  В.

Класична електронна теорія пояснювала виділення теплоти Пельтьє дією внутрішньої контактної різниці потенціалів на електрони, які утворюють електричний струм. Якщо контактна різниця потенціалів є такою, що прискорює електрони, то в цьому спайі виділяється додаткова теплота Пельтьє, а в тому спайі, де контактна різниця потенціалів гальмує рух електронів провідності, теплота Пельтьє поглинатиметься. Кількісні розрахунки, виконані на основі уявлень класичної електронної теорії, не збігаються з результатами дослідів. Так, коефіцієнт Пельтьє має збігатися з внутрішньою контактною різницею потенціалів. На досліді це не має місця. Отже, класична електронна теорія провідності металів має ще одне утруднення і не спроможна пояснити явища Пельтьє. Це пояснюється тим, що в класичній електронній теорії вважається однаковою середня кінетична енергія теплового руху електронів обох металів. Насправді це не так, оскільки рівні Фермі в обох металах є різними. Класична теорія враховує тільки відмінність потенціальних енергій електронів з різних боків межі поділу металів. При переході електронів з одного металу

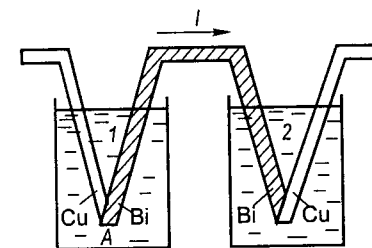


Рис. 4.25

в іншій треба враховувати зміну повної енергії. На основі таких уявлень можна пояснити явище Пельтьє не тільки в металах, а й у напівпровідниках  $n$ -типу.

Аналогічно можна пояснити виділення (поглинання) теплоти Пельтьє в контактах двох напівпровідників  $p$ -типу. Зазначимо, що крізь межу поділу тут проходять тільки електрони. Тому з одного боку межі відбувається утворення пар електрон-дірка, а з іншого — рекомбінація електрона з діркою. Перший із цих процесів супроводжується виділенням енергії, другий — її поглинанням. Від співвідношення між цими енергіями залежать значення і знак коефіцієнта Пельтьє.

Явище Пельтьє, як і термоелектричне явище Зеебека, особливо проявляється в колах, що складаються з напівпровідників  $p$ - і  $n$ -типу. Якщо електричне поле має такий напрям, що струм проходить від напівпровідника  $p$ -типу до напівпровідника  $n$ -типу, то дірки в першому напівпровіднику та електрони в другому рухатимуться назустріч. При цьому електрони з вільної зони напівпровідника  $n$ -типу проходять межу поділу, потрапляють у заповнену зону напівпровідника  $p$ -типу і там займають місця дірок. Внаслідок їх рекомбінації виділяється енергія, тобто контакт нагрівається. Якщо струм проходить від напівпровідника  $n$ -типу до напівпровідника  $p$ -типу, то електрони в напівпровіднику  $n$ -типу і дірки в напівпровіднику  $p$ -типу рухатимуться у протилежних напрямках. При цьому дірки, які відходять від межі поділу, поповнюватимуться завдяки утворенню нових пар при переході електронів із заповненої зони у вільну в напівпровіднику  $p$ -типу. Утворення таких пар відбувається за рахунок енергії теплового руху атомів кристалічної ґратки напівпровідника  $p$ -типу. Електрони і дірки, що утворюються під дією електричного поля, рухатимуться у протилежних напрямках. За наявності електричного струму процес утворення нових пар буде неперервним. Внаслідок цього теплота в контакті поглинатиметься.

Явище Пельтьє використовується для створення компактних холодильних приладів. За їх допомогою здійснюють термостатування різних елементів радіотехнічних схем напівпровідникових діодів і тріодів, кварцових стабілізаторів частоти, високостабільних резисторів тощо. Це явище широко використовується також для охолодження біологічних препаратів під час транспортування, локального охолодження медичних інструментів при операціях на оці, охолодження предметних столиків мікроскопів, термостатування холодних спайів термопар та ін. На основі цього явища розроблено термоелектричні високовакуумні уловлювачі для дифузійних паромасляних насосів. Оскільки знак теплоти Пельтьє залежить від напрямку

струму, то термоелементи використовуються для охолодження або опалення приміщень залежно від погоди.

Застосовуючи методи термодинаміки для вивчення термоелектричних явищ (явища Зеебека, Пельтьє), У. Томсон у 1856 р. передбачив існування ще одного термоелектричного явища, яке названо його ім'ям. Він вважав, що навіть у хімічно однорідному нерівномірно нагрітому провіднику за наявності електричного струму має додатково, крім теплоти Джоуля — Ленца, виділятися або поглинатися теплота. Це явище експериментально відкрив Ф. Леру в 1867 р.

Для спостереження явища Томсона користуються експериментальною установкою (рис. 4.26), однакові провідники 1 і 2 якої з'єднані послідовно й увімкнені в коло електричного струму. Кінці цих провідників підтримуються за допомогою термостатів при температурах  $T_1$  і  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Внаслідок цього в провідниках виникає градієнт температури  $dT/dx$  і відбувається перенесення теплоти завдяки теплопровідності. Користуючись диференціальною термопарою, на провідниках при розімкненому електричному колі визначають точки  $a$  і  $b$ , температури яких є однаковими. Потім перемикачем  $S$  замикають електричне коло. За наявності струму температури точок  $a$  і  $b$  стають різними: в одній з них температура підвищиться, а в іншій — знизиться. Це свідчить про те, що в одному стрижні, крім теплоти Джоуля — Ленца, виділяється додатково теплота Томсона, а в іншому — поглинається. Зі зміною напрямку струму зміна температури у провідниках має протилежний характер.

Явище Томсона пояснюється локальними неоднорідностями провідника, які зумовлені наявністю градієнта температур. Тому явище Томсона подібне по суті до явища Пельтьє. Відмінність між ними та, що неоднорідність між провідниками зумовлена неоднаковістю температур, а не хімічним складом. Явище Томсона вважається додатним, якщо електричний струм, що проходить у напрямі градієнта температури, зумовлює нагрівання провідника; від'ємним, якщо при тих самих напрямках струму і градієнта температур провідник охолоджується.

Теоретичні розрахунки Томсона, підтверджені експериментально, свідчать про те, що кількість теплоти, яка виділяється (поглинається) в одиниці об'єму за одиницю часу, пропорційна градієнту температури  $dT/dl$  і густині струму  $j$ , тобто

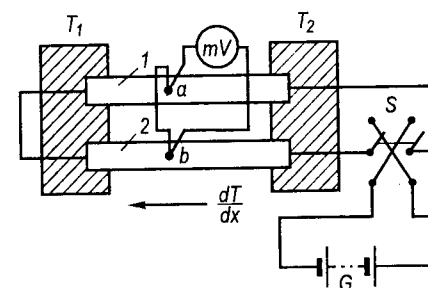


Рис. 4.26

$$\frac{dQ}{dVt} = k \frac{dT}{dl} j, \quad (4.22)$$

де  $dQ$  — теплота Томсона;  $dV$  — об'єм провідника;  $t$  — час проходження струму;  $k$  — коефіцієнт Томсона, який залежить від природи провідника та його стану.

Формула (4.22) виражає закон Томсона у диференціальній формі. Якщо різниця температур  $\Delta T$  кінців провідника завдовжки  $\Delta l$  і площею поперечного перерізу  $S$  є незначною ( $\Delta V = S\Delta l$ ), то від диференціальної форми запису закону Томсона приходимо до його запису в інтегральній формі:

$$\frac{Q}{S\Delta l t} = k \frac{\Delta T}{\Delta l} \frac{I}{S}; \quad Q = k\Delta T I t, \quad (4.23)$$

де  $Q$  — теплота Томсона, яка виділяється в провіднику при силі струму  $I$ . Значення коефіцієнта Томсона малі. Наприклад, для вісмуту  $k \approx 10^{-5}$  В/К.

## Розділ 5. Електричний струм у вакуумі

### § 5.1. Термоелектронна емісія. Залежність струму насичення від температури

Явище виходу електронів з металів називають *емісією*. Емісія електронів може відбуватись при бомбардуванні поверхні металу електронами або іонами (вторинна електронна емісія) під дією світла, що падає на метал (фотоелектронна емісія) і внаслідок теплового руху електронів провідності. Емісію, зумовлену тепловим рухом електронів, називають *термоелектронною*.

Електрони в металах, перебуваючи в тепловому русі, розподілені за швидкостями так, що при довільній температурі завжди є електрони з енергією, достатньою для переборення потенціального бар'єра (виконання роботи виходу). Такі електрони вириваються (емітують) з металу, утворюючи навколо нього електронну хмару. Якщо у вакуумі, де розміщується нагрітий метал, існує електричне поле, напруженість якого напрямлена до поверхні металу, то виникає електричний струм. Його називають *термоелектронним*. Явище термоелектронної емісії відкрив у 1883 р. американський винахідник у галузі електротехніки Т. Едісон (1847—1931). Це явище зручно спостерігати за допомогою вакуумної лампи з двома електродами, яку називають

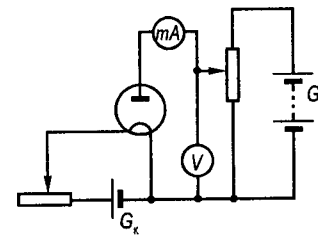


Рис. 5.1

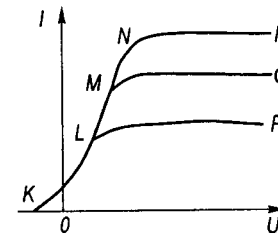


Рис. 5.2

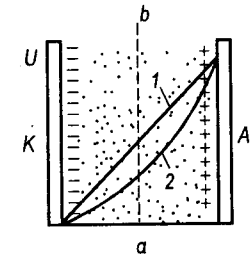


Рис. 5.3

*вакуумним діодом*. Один з електродів (катод) являє собою дріт із тугоплавкого металу (вольфрам, молібден тощо), який розжарюється електричним струмом. Другий електрод — анод. Здебільшого анод має форму циліндра, уздовж осі якого розміщено катод.

Якщо катод холодний, то з увімкненням діода в електричне коло (рис. 5.1) струму в колі не буде. Це пояснюється тим, що досить розріджений газ усередині діода (вакуум) не містить заряджених частинок. Тому електропровідність вакуумного діода дорівнює нулеві. У разі нагрівання катода за допомогою додаткового джерела струму до високої температури міліамперметр виявляє виникнення струму за умови, що позитивний полюс батареї  $G_a$  з'єднаний з анодом, а негативний — з катодом. При зміні полярності батареї  $G_a$  струму в колі не буде. Це свідчить про те, що носіями заряду у вакуумі є негативно заряджені частинки. Цими частинками є електрони, оскільки ніяких хімічних перетворень біля електродів за наявності термоелектронного струму не відбувається. Якщо збільшувати напругу між катодом і анодом при постійній температурі розжарювання катода, то сила термоелектронного струму спочатку також буде збільшуватись (рис. 5.2). Проте залежність сили струму від напруги (вольт-амперна характеристика діода) має нелінійний характер, тобто закон Ома для вакуумного діода не виконується. При наступному збільшенні анодної напруги сила термоелектронного струму досягає деякого максимального значення, яке називають *струмом насичення*. На рис. 5.2 лінії LP, MQ і NF зображають струми насичення того самого вакуумного діода для різних температур розжарювання катода ( $T_1 < T_2 < T_3$ ). При струмі насичення всі електрони, які вилітають за одиницю часу з катода, досягають анода.

Нелінійну залежність термоелектронного струму від анодної напруги можна пояснити впливом просторового заряду між катодом і анодом на розподіл потенціалу в діоді. Якщо припустити, що катод і анод є плоскими паралельними пластинками (рис. 5.3), то у разі відсутності термоелектронного струму (катод холодний) розподіл потенціалу між катодом і анодом зображається прямою лінією 1.

За наявності термоелектронного струму між катодом і анодом виникає просторовий заряд, який змінює розподіл потенціалу в діоді (крива 2). При такому розподілі потенціалу його значення в будь-якій площині  $ab$  буде меншим, ніж за відсутності просторового заряду. Внаслідок цього швидкості руху електронів за наявності просторового заряду зменшуються. Зі збільшенням анодної напруги концентрація електронів просторового заряду між катодом і анодом зменшується. Це зменшує гальмівну дію просторового заряду. Внаслідок цього термоелектронний струм зростає.

Початкові ділянки вольт-амперної характеристики діодів, коли  $I < I_n$ , для різних температур розжарювання катода збігаються (див. рис. 5.2, крива KLMN). Аналітичну залежність термоелектронного струму від анодної напруги, коли  $U \ll U_n$ , отримали незалежно один від одного російський фізик С. А. Богуславський (1883—1923) та американський фізик І. Ленгмюр (1881—1957). Вона має такий вигляд:

$$I = BU^{3/2}, \quad (5.1)$$

де коефіцієнт  $B$  залежить від форми і розмірів електродів діода. Для плоского діода

$$B = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}},$$

де  $S$  — площа поверхні катода (анода);  $d$  — відстань між катодом і анодом;  $e$  і  $m$  — відповідно заряд і маса електрона.

Формула (5.1) виражає закон Богуславського — Ленгмюра, її ще називають «законом  $3/2$ ». За допомогою формули (5.1) дослідним шляхом можна визначити питомий заряд ( $e/m$ ) електрона.

Вакуумні діоди характеризують такими параметрами: статичним опором  $R_0$ , крутизною характеристики  $S$ , диференціальним опором  $R_i$  та ін.

Статичний опір визначають при постійній анодній напрузі  $U_a$  і відповідному анодному струмі:

$$R_0 = \frac{U_a}{I_a}.$$

Оскільки вольт-амперна характеристика діода нелінійна, то  $R_0$  має різні значення для різних точок кривої  $I_a = f(U_a)$ .

Крутизна характеристики  $S$  визначається як відношення зміни сили анодного струму  $\Delta I_a$  до зміни анодної напруги  $\Delta U_a$ , яка зумовила зміну струму, тобто

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_a}.$$

Величину, що визначається відношенням зміни анодної напруги  $\Delta U_a$  до зміни анодного струму  $\Delta I_a$ , тобто величину, обернену до крутизни характеристики  $S$ , називають диференціальним опором розрядного проміжку діода:

$$R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} = \frac{1}{S}.$$

Не можна ототожнювати статичний опір  $R_0$  з диференціальним опором  $R_i$ , оскільки фізичний зміст і абсолютні значення їх є різними. Так, при термоелектронних струмах насичення  $R_0$  має певне значення, а  $R_i = \infty$ , оскільки при цьому  $\Delta I_a = 0$ .

Вольт-амперні характеристики вакуумного діода для різних температур розжарювання катода (див. рис. 5.2) вказують на залежність струму насичення від температури. Проте струм насичення часто характеризують його густиною, оскільки густина термоелектронного струму насичення  $j_n$  визначає емісійну здатність катода. Визначимо залежність  $j_n$  від температури катода. Для цього будемо користуватися уявленнями класичної електронної теорії. Якщо з одиниці поверхні катода за одиницю часу емітує  $n_1$  електронів, то густина струму насичення

$$j_n = n_1 e. \quad (5.2)$$

Щоб обчислити кількість електронів  $n_1$ , розглянемо кусок металу, нагрітого до високої температури  $T$ , що розміщується в посудині такої самої температури. Навколо металу утвориться електронна хмара, яка перебуватиме у термодинамічній рівновазі з металом. Ця картина формально подібна до термодинамічної рівноваги насиченої пари з рідиною. Вважатимемо, що електрони у хмарі рухаються хаотично. Тоді на основі рівноймовірності всіх напрямів руху електронів можна записати, що кількість електронів, які конденсуються за одиницю часу на одиниці поверхні металу,  $n'_1 = \frac{1}{6} n_2 < v_{\text{кв}} >$ , де  $n_2$  — об'ємна концентрація електронів електронної хмари;  $< v_{\text{кв}} >$  — середня квадратична швидкість теплового руху електронів. Умовою термодинамічної рівноваги металу з електронною хмарою є рівність  $n'_1 = n_1$ , тоді

$$n_1 = \frac{1}{6} n_2 < v_{\text{кв}} >. \quad (5.3)$$

Концентрацію електронів  $n_2$  хмари можна подати через концентрацію електронів  $n$  у металі за допомогою статистичного розподілу Больцмана, а саме:

$$n_2 = ne^{-A/(kT)}, \quad (5.4)$$

де  $A$  — робота виходу електрона з металу;  $k$  — стала Больцмана.

Оскільки швидкість теплового руху електронів  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  пропорційна  $\sqrt{T}$ , то, враховуючи співвідношення (5.3) і (5.4), вираз для густини термоелектронного струму насичення (5.2) можна записати так:

$$j_{\text{н}} = CT^{1/2}e^{-A/(kT)}, \quad (5.5)$$

де  $C$  — стала, яка є неоднаковою для різних металів. Формулу (5.5) залежності густини струму насичення катода від температури вивів у 1901 р. англійський фізик О. Річардсон (1879—1959).

Застосувавши до моделі ідеального електронного газу квантову статистику Фермі — Дірака, незалежно один від одного О. Річардсон і С. Дешман вивели в 1923 р. вираз для густини струму насичення у функції температури:

$$j_{\text{н}} = DT^2e^{-A/(kT)}, \quad (5.6)$$

де  $D = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A} / (\text{K}^2 \cdot \text{m}^2)$  — стала, яка є однаковою для всіх металів. Співвідношення (5.6) називають *формулою Річардсона — Дешмана*.

Незважаючи на те що у формулу (5.5) входить множник  $T^{1/2}$ , а у формулу (5.6) —  $T^2$ , відмінність між цими формулами є незначною. Це зумовлено тим, що залежність струму насичення від температури в обох формулах визначається в основному залежністю експоненціального множника  $e^{-A/(kT)}$  від температури. Тому обидві формули дають практично однакові результати.

З формул (5.5) і (5.6) видно, що при тій самій температурі емісія електронів значною мірою залежить від роботи виходу і буде тим інтенсивнішою, чим меншу роботу виходу електрона має катод.

Формула (5.6) не тільки виражає залежність термоелектронного струму насичення від температури, вона вказує також метод визначення роботи виходу електрона з катода. Так, злогарифмувавши (5.6), одержимо

$$\ln j_{\text{н}} = \ln D + 2 \ln T - \frac{A}{k} \frac{1}{T}. \quad (5.7)$$

Оскільки зміна температури спричиняє незначну зміну другого члена порівняно з третім у рівнянні (5.7), то з достатнім ступенем точності можна записати

$$\ln j_{\text{н}} = \text{const} - \frac{A}{k} \frac{1}{T}. \quad (5.8)$$

З формули (5.8) видно, що залежність  $j_{\text{н}}$  від  $T$  має бути лінійною у напівлогарифмічній системі координат  $\ln j_{\text{н}}$ ,  $\frac{1}{T}$  (рис. 5.4). Цей висновок добре узгоджується з дослідними даними. З рис. 5.4 видно, що

$$\text{tg } \alpha = \frac{A}{k}, \text{ або } A = k \text{ tg } \alpha.$$

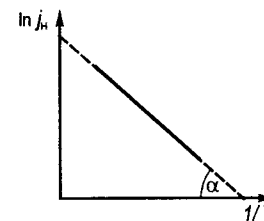


Рис. 5.4

Знайдені з термоелектричних вимірювань значення роботи виходу  $A$  електронів з металу добре узгоджуються з результатами вимірювання значень  $A$  іншими методами. Значення роботи виходу, отримані цим методом для деяких металів, наведено нижче.

Метал	W	Mo	Pt	Co	Th	Mg	Na	Cs
Робота виходу, еВ	4,50	4,27	5,29	4,41	3,38	3,46	2,27	1,81

Католи електронних ламп виготовляють із вольфраму та з інших металів, покритих оксидом лужноземельних металів. Для отримання значних термоелектронних струмів при використанні вольфрамових, молібденових і платинових катодів потрібна досить висока температура їх розжарювання. Так, для вольфрамового катода при температурі 1273 К  $j_{\text{н}} \leq 10^{-4} \text{ A} / \text{m}^2$ , при 2273 К  $j_{\text{н}} = 10^3 \text{ A} / \text{m}^2$ , а при  $T = 2773 \text{ K}$   $j_{\text{н}} \approx 10^5 \text{ A} / \text{m}^2$ . Важливим із практичного боку є отримання значних емісійних струмів при порівняно низьких температурах катода. Зниження температури розжарювання катода забезпечує їхню економічність щодо споживання електричної енергії, збільшує строк роботи лампи та стабільність її параметрів. Через це вольфрамові католи тепер застосовуються тільки в потужних генераторних лампах неперервної дії деяких типів, у високовольтних випрямних лампах (кенотронах) і в деяких інших електронних приладах. Вольфрам з домішками 0,5—2,0 % торію має значно більшу емісійну здатність, ніж чистий вольфрам. Це пояснюється тим, що робота виходу електронів із торійованого катода знижується до 2,6 еВ. Торійовані католи економічніші, ніж вольфрамові. Широкого застосування набули в техніці так звані оксидні католи. При їх виготовленні на металеву основу наносять шар вуглецевих сполук лужноземельних металів ( $\text{BaCO}_3$ ,  $\text{SrCO}_3$ ,  $\text{CaCO}_3$ ). При прожарюванні ці солі

розкладаються ( $\text{CaCO}_3 \rightleftharpoons \text{CaO} + \text{CO}_2$ ) і металева підкладка покривається шаром оксидів лужноземельних металів  $\text{BaO}$ ,  $\text{SrO}$ ,  $\text{CaO}$  або їхніми сумішами. Потім такий катод активують, тобто деякий час крізь лампу пропускають термоелектронний струм при температурі катода близько 1273 К. Внаслідок цього на його поверхні утворюється моношар іонів лужноземельних металів, які значно зменшують роботу виходу електронів, тобто збільшують емісійні властивості катодів. Робоча температура сучасних оксидних катодів становить 1050—1200 К при  $j_n \approx 10^4 \text{ А/м}^2$ , а при імпульсах струму тривалістю  $10^{-6} - 10^{-7} \text{ с}$  густина струму може досягнути  $10^6 \text{ А/м}^2$ .

### § 5.2. Електронні лампи та їх застосування. Електронно-променева трубка

Основною властивістю двохелектродних ламп є їх одностороння провідність. Тому вони застосовуються для перетворення змінного струму в постійний, а також для детектування струмів високої частоти в приймачах та у вимірювальних приладах. Тепер для цього здебільшого використовують напівпровідникові діоди.

Найпростіша схема однопівперіодного лампового випрямляча показана на рис. 5.5. Змінний струм від трансформатора (рис. 5.6, а) подається на діод. Оскільки крізь двохелектродну лампу струм проходить за умови, що анод матиме позитивний, а катод — негативний потенціал, то струм проходить крізь резистор  $R$  тільки протягом проміжків часу, що відповідають додатним значенням напруги (рис. 5.6, б;  $0 - \frac{1}{2}T$ ,  $T - \frac{3}{2}T$ ). Випрямлений струм і напруга будуть пульсуючими з частотою джерела змінного струму. Така форма залежності напруги або сили струму від часу в більшості випадків непридатна для живлення радіоапаратури, яка потребує постійної напруги не тільки за знаком, а й за значенням. Тому пульсації напруги

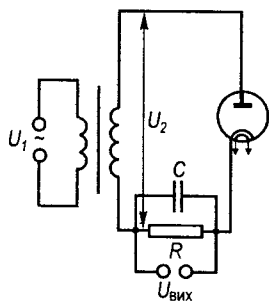


Рис. 5.5

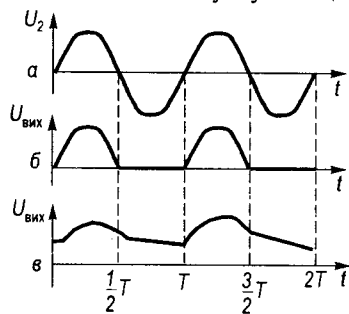


Рис. 5.6

треба згладити. Найпростіший спосіб згладжування пульсацій полягає в увімкненні паралельно з навантажувальним резистором  $R$  конденсатора  $C$ . Конденсатор  $C$ , заряджаючись анодним струмом при додатному значенні напруги  $U_2$ , запасе енергію, а при від'ємному значенні  $U_2$  (анодного струму немає) є джерелом струму. Внаслідок цього крізь навантажувальний опір проходить згладжений струм (рис. 5.6, в).

Однопівперіодні випрямлячі застосовуються для живлення висковольтних кіл електронно-променевої трубок (в індикаторах радіолокаційних станцій, телевізорах, електронних осцилографів тощо) та в інших пристроях, де потрібна висока напруга (десятки кіловольт) при малій силі струму (кілька міліампер). У цьому разі конденсатор не встигає помітно розрядитись на навантажувальному резисторі за час півперіоду, коли зміна напруги має від'ємне значення, і пульсації випрямленої напруги будуть незначними. Недоліком таких випрямлячів є те, що вони однопівперіодні, тобто їхній коефіцієнт корисної дії менший за 50%.

Зі схеми двопівперіодного випрямляча (рис. 5.7) видно, що у випадку позитивного потенціалу на аноді  $A_1$  струм проходить в його колі і не проходить в колі анода  $A_2$ . У наступному півперіоді струм проходить у колі анода  $A_2$  і не проходить у колі анода  $A_1$ . Оскільки напруга на конденсаторі  $C$  пульсує, то струм у навантаженні, крім постійної, матиме змінну складову. Для зменшення останньої застосовують фільтри з дроселем низької частоти  $L$ , які мають велику індуктивність. Такий дросель чинить великий опір для змінної складової струму, перешкоджаючи його проходженню крізь резистор  $R$ .

У триелектродній електронній лампі (рис. 5.8), яку називають *тріодом*, між катодом і анодом розміщують третій електрод (сітку). Принцип дії триелектродної лампи полягає в керуванні силою анодного струму за допомогою напруги  $U_c$ , прикладеної між сіткою і катодом. Тому сітку тріода називають *керуючою*. Зміна напруги  $U_c$  зумовлює зміну електричного поля, що діє на просторовий заряд біля катода. Незначна зміна сіткової напруги значно змінює анодний

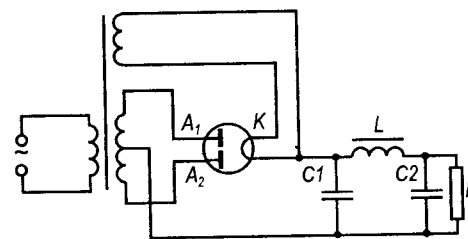


Рис. 5.7

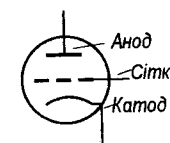


Рис. 5.8

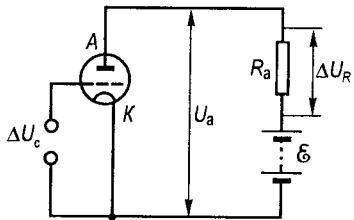


Рис. 5.9

анодного струму  $I_a$  збільшується. При цьому частина електронів потрапляє на сітку, утворюючи сітковий струм  $I_c$ . Якщо на сітку подається негативний потенціал відносно катода, то дія просторового заряду посилюється і сила анодного струму зменшується, а сіткового струму не буде.

У триелектродних лампах при не дуже високих частотах зміна анодного струму відбувається практично одночасно зі зміною сіткової напруги, тобто вона майже безінерційна. Властивість безінерційності тріода втрачається при досить високих частотах зміни напруги на сітці, коли час пробігу електрона від катода до анода одного порядку з періодом зміни  $U_c$ .

Оскільки сітка розміщується ближче до катода, ніж анод, то її поле впливає сильніше на силу анодного струму, ніж поле анода. Отже, для отримання однакової зміни анодного струму сіткову напругу змінюють значно менше, ніж анодну. Це дає можливість підсилювати напругу, введenu в коло сітки. Підсилення відбувається завдяки енергії джерела анодної напруги. Якщо в колі анода ввімкнути навантажувальний опір, то при проходженні крізь нього анодного струму  $I_a$  виникає спад напруги  $U_R$ . Незначна зміна сіткової напруги  $\Delta U_c$  спричиняє значну зміну напруги  $\Delta U_R$  (рис. 5.9).

Анодний струм залежить від сумісної дії на потік електронів електричних полів анода і сітки, створюваних напругами між цими електродами і катодом. Тому анодний струм у тріоді визначається результуючим електричним полем сітки та анода. Російський вчений М. А. Бонч-Бруевич (1888—1940) запропонував метод розрахунків, в якому вважається, що це результуюче поле створюється так званою діючою, або керуючою, напругою, яка через величини  $U_c$  і  $U_a$  виражається так:

$$U_k = U_c + DU_a, \quad (5.9)$$

де  $D$  — проникність тріода. Вона показує, яка частина електричного поля анода проникає крізь сітку до катода. Значення  $D < 1$  і залежить від будови сітки та її розміщення відносно катода. Оскільки в тріоді є струм у колі сітки  $I_c$  і в колі анода  $I_a$ , то сила повного струму  $I = I_c + I_a$ . Сила струму тріода є функцією напруги  $U_k$ , тобто

струм за досить малих витрат енергії джерела сіткової напруги. Якщо на сітку подається позитивний потенціал відносно катода, то сіткова напруга  $U_c$  допомагає аноду притягувати до себе електрони, оскільки позитивний заряд сітки компенсує частково або повністю гальмівну дію просторового заряду біля катода. Внаслідок цього сила

$$I = f(U_c + DU_a). \quad (5.10)$$

В електричних схемах роботи тріодів, як правило, сила сіткового струму значно менша від сили анодного струму ( $I_c \ll I_a$ ). Тоді можна записати, що

$$I_a = f(U_c + DU_a). \quad (5.11)$$

На практиці функціональну залежність (5.11) характеризують за допомогою двох сукупностей кривих, які називають сітковими і анодними характеристиками. Сіткові характеристики — криві залежності сили анодного струму від сіткової напруги при постійній анодній напрузі, тобто  $I_a = f(U_c)$  при  $U_a = \text{const}$ . Анодні характеристики — сукупність кривих залежності сили анодного струму від анодної напруги при постійних значеннях сіткової напруги, тобто  $I_a = f(U_a)$  при  $U_c = \text{const}$ . Взагалі анодний струм змінюється нелінійно зі зміною як сіткової напруги  $U_c$ , так і анодної  $U_a$ . Тільки на середніх ділянках характеристик  $I_a = f(U_c)$ ,  $I_a = f(U_a)$  наближено можна вважати, що ця залежність має лінійний характер. На цих ділянках можна вважати постійними похідні

$$S = \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} \quad \text{і} \quad R_i = \left( \frac{\partial U_a}{\partial I_a} \right)_{U_c}. \quad (5.12)$$

Величина  $S$  (крутизна сіткової характеристики) показує зміну анодного струму в разі зміни сіткової напруги на 1 В. Крутизна сіткової характеристики є одним із досить важливих параметрів тріода. Чим більша крутизна, тим чутливіша лампа до зміни сіткової напруги. Величину  $R_i$  називають диференціальним або внутрішнім опором лампи.

Величини  $R_i$ ,  $S$  і  $D$  є основними характеристиками тріода. Встановимо зв'язок між ними. Для цього здиференціюємо обидві частини залежності (5.11) по  $I_a$  за умови, що  $U_c = \text{const}$ , і матимемо

$$1 = \frac{\partial f}{\partial U_k} \left( \frac{\partial U_k}{\partial U_a} \right)_{U_c} \left( \frac{\partial U_a}{\partial I_a} \right)_{U_c}.$$

Оскільки

$$\left( \frac{\partial U_k}{\partial U_a} \right)_{U_c} = D; \quad \frac{\partial f}{\partial U_k} = \left( \frac{\partial f}{\partial U_c} \right)_{U_a} = S; \quad \left( \frac{\partial U_a}{\partial I_a} \right)_{U_c} = R_i,$$

то

$$SDR_i = 1. \quad (5.13)$$

Співвідношення (5.13) називають внутрішнім рівнянням лампи. У межах прямолінійної ділянки характеристики сила анодного



струму змінюється пропорційно зміні сіткової напруги. Це має важливе значення в усіх випадках, коли триод працює як підсилювач, оскільки зміна сили анодного струму повністю передає характер зміни сіткової напруги. Внаслідок цього зміна напруги на навантажувальному опорі буде однаковою за формою зі зміною напруги, прикладеної між сіткою і катодом.

Основним призначенням триода є підсилення змінних напруг. Розглянемо докладніше роботу триода як підсилювача. Зміна сіткової напруги  $\Delta U_c$ , як уже зазначалося, спричиняє зміну сили анодного струму  $\Delta I_a$ . Згідно із законом Ома напруга між анодом і катодом для ділянки кола  $AR\&K$  визначатиметься співвідношенням

$$U_a = \mathcal{E} - I_a R_a. \quad (5.14)$$

Зміна сили анодного струму зумовлює зміну анодної напруги:

$$\Delta U_a = -\Delta I_a R_a. \quad (5.15)$$

Залежно від співвідношення між навантажувальним опором  $R$  і внутрішнім опором  $R_i$  триода зміна анодної напруги  $\Delta U_a$  може бути більшою або меншою, ніж  $\Delta U_c$ . Розглянемо перший випадок, коли навантажувальний опір значно більший від внутрішнього опору триода, тобто  $R_a \gg R_i$ . Тоді анодний струм визначатиметься опором  $R_a$  і струм буде постійним. Це означає, що відповідно до (5.11) буде постійною і керуюча напруга, тобто

$$U_c + DU_a = \text{const}. \quad (5.16)$$

З формули (5.16) маємо  $\Delta U_c + D\Delta U_a = 0$ , або

$$\frac{\Delta U_a}{\Delta U_c} = -\frac{1}{D} = \mu. \quad (5.17)$$

Оскільки проникність сітки  $D < 1$  завжди, то  $\mu > 1$ , тобто маємо підсилення напруги. Коефіцієнт  $\mu$  показує, у скільки разів зміна напруги на навантажувальному опорі  $\Delta U_a$  більша за зміну сіткової напруги, і його називають *коефіцієнтом підсилення*. Знак мінус у формулі (5.17) вказує на те, що коливання сіткової й анодної напруг відбуваються у протилежних фазах.

У другому граничному випадку, коли  $R_a \ll R_i$ , анодна напруга дорівнює ЕРС джерела  $\mathcal{E}$ , тобто анодна напруга буде постійною. Тоді з (5.11) можна записати

$$\Delta I_a = \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} \Delta U_c. \quad (5.18)$$

Враховуючи вираз для крутизни сіткової характеристики (5.12), вираз (5.18) набуває вигляду

$$\Delta I_a = S \Delta U_c. \quad (5.19)$$

Якщо зміна сили струму сітки  $\Delta I_c$ , а опір між сіткою і катодом  $R_i$ , то  $\Delta U_c = \Delta I_c R_i$ . Тоді з (5.19) знайдемо

$$\frac{\Delta I_a}{\Delta I_c} = S R_i. \quad (5.20)$$

Звідси видно, що коли  $R_a \ll R_i$ , то підсилення струму буде тим більшим, чим більша крутизна сіткової характеристики  $S$ .

У загальному випадку, коли навантажувальний опір  $R_a$  і внутрішній опір триода  $R_i$  є величинами одного порядку, зміну сили анодного струму можна записати так:

$$\Delta I_a = \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} \Delta U_c + \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_a} \right)_{U_c} \Delta U_a. \quad (5.21)$$

Враховуючи формули (5.12) і (5.15), вираз (5.21) набуває вигляду

$$\Delta I_a = S \Delta U_c - \frac{R_a}{R_i} \Delta U_a, \quad \text{або} \quad \Delta I_a = \frac{R_i S}{R_a + R_i} \Delta U_c. \quad (5.22)$$

Тоді на основі (5.15) і (5.22) зміна анодної напруги

$$\Delta U_a = -\frac{R_a}{R_a - R_i} R_i S \Delta U_c. \quad (5.23)$$

Підсилення електричного сигналу можна здійснювати багатокаскадними підсилювачами, в яких напругу, підсилену електронною лампою, подають на сітку другої лампи, а напругу, підсилену другою лампою, подають на сітку третьої лампи і т. д. Напруга на сітку кожної лампи подається не безпосередньо, а через конденсатор. Він не перешкоджає проходженню змінних підсилюваних сигналів і запобігає потраплянню високої постійної напруги анодної батареї на сітку. Між сіткою і катодом кожного триода увімкнено резистор для витікання електричного заряду сітки. Якби не було витіку електричних зарядів із сітки, то вона могла б зарядитись до негативного запірного потенціалу й анодний струм припинився б.

Докладний аналіз роботи різних підсилювачів можна знайти в спеціальній радіотехнічній літературі.

Підсилювачі з електронними лампами широко застосовуються у радіотехніці, телеграфії, телефонії, автоматичній й телемеханіці, а також для багатьох технічних і наукових цілей. Триелектродні лампи набули також широкого застосування в генераторах електромагнітних хвиль високих частот. Триоди застосовуються в різних спеціальних імпульсних пристроях, у колах формування імпульсів напруги і струму, а також у вимірювальній техніці.

Проте не слід думати, що збільшення кількості ламп (каскадів) у багатоламповому підсилювачі дає можливість зареєструвати будь-який досить малий сигнал. Із збільшенням загального коефіцієнта підсилення на виході багатолампового підсилювача виникають швидкі й випадкові коливання напруги, на фоні яких неможливо зробити аналіз підсилюваного сигналу. Це пояснюється тим, що в усіх електронних лампах спостерігаються незначні флуктуації анодного струму, які зумовлені атомістичною (дискретною) природою електричного заряду. У разі підсилення слабких сигналів ці флуктуації є перешкодами. Вони обмежують збільшення чутливості радіоприймачів та інших електронних пристроїв, призначених для виявлення, підсилення та вимірювання слабких електричних сигналів. Якщо вихідним приладом є телефон, то флуктуації проявляють себе у вигляді неперервного шуму. Тому такі хаотичні коливання напруги називають *електричними шумами*. Поряд з електричними шумами, зумовленими основними електронними процесами всередині лампи, можуть спостерігатись також шуми через недоліки в її конструкції. До них належать фон від нагрівання катода змінним струмом, коливання струму внаслідок механічних вібрацій електродів лампи (віброшуми), шуми від зміни струмів витікання через погану ізоляцію та інші явища. Тому для підсилення і реєстрації електричного сигналу треба, щоб він перевищував рівень власних шумів підсилювача. Сучасні лампові підсилювачі дають можливість виявляти електричні сигнали до  $10^{-7}$  В і нижче.

Крім двох- і триелектродних ламп для різних цілей виготовляють багатоелектродні лампи різних конструкцій.

Явище термоелектронної емісії лежить також в основі роботи *електронно-променевої трубки*. Це електровакуумний прилад, в якому для світлової індикації, комутації та інших цілей використовують тонкий електронний пучок, що має діаметр близько десятих часток міліметра. Формування такого пучка здійснюється за допомогою системи електродів, яку називають *електронним прожектором* або *електронною гарматою*.

Електронний пучок, спрямований уздовж осі трубки, потрапляє на люмінесціюючий екран — шар речовини (наприклад, оксиду цинку, кремнекислого цинку), нанесений на внутрішню поверхню скляної трубки. У трубці створено високий вакуум. На екрані, куди потрапляє електронний пучок, виникає світна пляма. Різні люмінофори дають свічення того чи іншого кольору. У трубках для візуального спостереження свічення зелене або жовте, а в трубках для фотографування осцилограм — синє.

На шляху електронного пучка під прямим кутом одна до одної розміщено дві пари металевих пластин. Якщо між кожною з пар пластин немає різниці потенціалів, то вони не впливають на елек-

тронний пучок. Якщо на якій-небудь парі пластин створити різницю потенціалів, то на електроні пучка, що пролітають в електричному полі між пластинами, діятиме сила в напрямі до пластини позитивного потенціалу. Внаслідок дії цієї сили електронний пучок зазнає відхилення від початкового напрямку і світна пляма на екрані відповідно зміститься відносно центра екрана. Це зміщення пропорційне різниці потенціалів відхиляючих пластин. Дійсно, на електрон в електричному полі плоского конденсатора з довжиною пластин  $l$  і відстанню між ними  $d$  діятиме сила  $F = eE = e(\Delta\phi/d)$ . Ця сила за час  $t = l/v$  ( $v$  — швидкість рівномірного руху електрона) зміщує електрон до позитивно зарядженої пластини конденсатора на  $\Delta x = at^2/2$  ( $v_0 = 0$ ). Оскільки  $F = ma$ , то  $\Delta x = \frac{el^2}{2mv^2d} \Delta\phi$ . Враховуючи

цю закономірність, електронно-променева трубка може бути використана для визначення як значення, так і полярності електричного сигналу, підведеного до відхиляючих пластин. На практиці до однієї з пар пластин (пластин, що відхиляють електронний пучок у горизонтальному напрямі) подають змінну в часі пилкоподібну напругу, яку називають *розгортальною*. На пластини, що здійснюють відхилення електронного пучка у вертикальному напрямі, подається досліджувана напруга. Під дією електричних полів обох пар пластин електронний промінь на екрані креслить криву, яка зображує функціональну залежність досліджуваної напруги від часу. Основною властивістю електронно-променевої трубки є досить мала інерційність електронного пучка.

Фокусування електронного пучка та його відхилення в електронно-променевій трубці можна здійснити також за допомогою магнітних полів. Таку електронно-променеву трубку називають *магнітною*.

За допомогою електронно-променевих трубок здійснюють перетворення електричних сигналів у світлові (осцилографічні трубки, індикаторні радіолокаційні трубки, кінескопи, знакодрукерські трубки); світлових сигналів, від інфрачервоних до рентгенівських, у електричні (передавальні телевізійні трубки); електричних сигналів в електричні ж (запам'ятовуючі, кодувальні трубки, трубки для електрозапису тощо).

### § 5.3. Вторинна та автоелектронна емісії

Під час бомбардування поверхонь твердих тіл та рідин пучком електронів спостерігається випромінювання вторинних електронів. Це явище називають *вторинною електронною емісією*. Падаючі електрони називають *первинними*, вибиті — *вторинними*, а тіло, що опромінюється первинними електронами, — *емітером*. Якщо товщина емітера менша за середню відстань пробігу первинних електронів, то

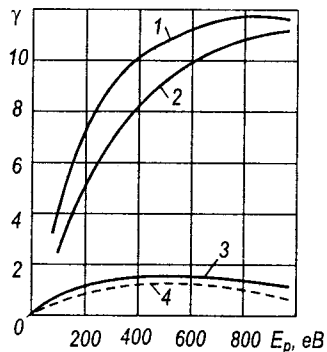


Рис. 5.10

вторинні електрони емітуються як з боку бомбардованої поверхні, так і з протилежної. Розподіл вторинних електронів за енергіями утворює неперервний спектр від 0 до енергії первинних електронів  $E_p$ . До вторинних електронів входять пружно і непружно відбиті первинні та вибиті вторинні електрони, тобто електрони речовини емітера, які отримали енергію від первинних електронів, достатню для виходу з емітера у вакуум. Найбільш імовірна енергія таких електронів становить 2—4 еВ для металів і близько 1 еВ для діелектриків.

Кількісно вторинну електронну емісію характеризують коефіцієнтом вторинної емісії — відношенням кількості вторинних електронів  $n$  до кількості первинних електронів  $n_0$ :

$$\gamma = \frac{n}{n_0} = \delta + \eta + \rho, \quad (5.24)$$

де  $\delta$  — коефіцієнт справжньої вторинної емісії;  $\eta$  і  $\rho$  — коефіцієнти відповідно непружного і пружного відбиття електронів.

Для вивчення вторинної електронної емісії використовують електронно-променеві трубки особливих конструкцій. Дослід показує, що початкова енергія основної частини вторинних електронів, які залишили емітер, становить кілька електрон-вольтів і що вона в широкому інтервалі не залежить від енергії первинних електронів.

Вивчення розподілу вторинних електронів за енергіями показує, що в їх складі є незначна кількість електронів, енергія яких дорівнює енергії первинних електронів. Це пружно розсіяні первинні електрони. Зі збільшенням кінетичної енергії первинних електронів  $E_p$  коефіцієнт  $\gamma$  спочатку зростає, досягає максимального значення, а потім зменшується (рис. 5.10, для сурм'яно-цезієвого (1), мідно-берилієвого (2), срібного (3) і мідного (4) емітерів).

Розглянемо залежність коефіцієнта  $\gamma$  від енергії первинних електронів. Для цього спочатку проаналізуємо механізм втрати енергії первинними електронами. Якщо первинний електрон наблизиться до електрона атома на досить малу відстань, то останній перейде на більш високий збуджений енергетичний рівень. У кожному такому випадку первинний електрон втрачає частину своєї енергії. Якщо первинний електрон має енергію кілька тисяч електрон-вольтів, то він спричиняє збудження будь-якого електрона атома, а при енергії близько 100 еВ він може збудити тільки електрони зони провідності.

У будь-якому випадку електрони атомів твердого тіла у разі збудження переходять на більш високий енергетичний рівень, вищий від рівня Фермі. Це так звані *внутрішні вторинні електрони*. Такі електрони з деякою ймовірністю можуть залишити тверде тіло і стати вторинними, якщо вони виникли біля поверхні твердого тіла і їх імпульс направлений до неї. При зіткненнях таких електронів з електронами в зоні провідності перші втрачають свою енергію; якщо внутрішні вторинні електрони виникли досить далеко від поверхні тіла, то їх вилітання з тіла не відбудеться. Саме так можна пояснити зменшення коефіцієнта  $\gamma$  для енергії первинних електронів  $E_p > E_{\max}$ . Зменшення  $\gamma$  для випадку  $E_p < E_{\max}$  можна пояснити тим, що зменшення енергії первинних електронів до нуля зменшує кількість внутрішніх вторинних електронів і при досить малих енергіях первинних електронів справжніх вторинних електронів не буде, а струм у колі створюватимуть пружно розсіяні первинні електрони. На основі цих міркувань можна пояснити факт практичної незалежності  $\gamma$  від температури, оскільки в цьому процесі не бере участі механізм теплового збудження.

У металах, де досить велика концентрація електронів провідності, вторинні електрони зазнають частих зіткнень з ними, швидко передають свою енергію електронам провідності і мають малу ймовірність вийти назовні. Тому для більшості чистих металів коефіцієнт  $\gamma$  не перевищує 2. Так, для міді  $\gamma_{\max} = 1,29$ , заліза — 1,32, срібла — 1,47, ртуті — 1,75, берилію — 0,53, цезію — 0,72, алюмінію — 0,97.

Внаслідок досить малої концентрації вільних електронів у напівпровідниках і діелектриках для них коефіцієнт  $\gamma$  значно більший. Так, для слюди  $\gamma = 2-3$ , для хлористого натрію — 6—18, для сурм'яно-цезієвого та мідно-берилієвого емітера — 8—12 і т. д.

Явище вторинної електронної емісії лежить в основі дії електронних помножувачів, які призначені для підсилення слабких електронних струмів. За допомогою таких помножувачів можна отримати коефіцієнт підсилення первинного струму близько  $10^5-10^7$ . Вторинна електронна емісія використовується також у передавальних телевізійних трубках. Досить успішним виявилось застосування електронного помножувача в поєднанні з люмінофором для реєстрації елементарних частинок (сцинтиляційний лічильник).

Емісія електронів з поверхні металів може відбуватись під дією сильного електричного поля, яке вириває електрони з металу. Це явище називається *автоелектронною* або *холодною емісією*.

Напруженість поля, що потрібна для створення значної емісії, становить  $10^9-10^{10}$  В/м. Густина струму автоелектронної емісії для металевого катода при напруженості поля біля його поверхні близько  $10^8$  В/м у кілька разів більша від густини струму термоелектронної емісії при

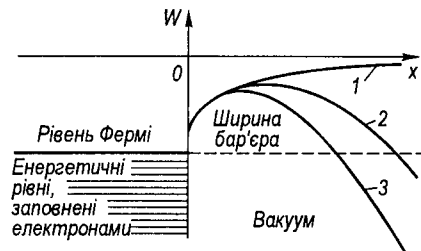


Рис. 5.11

температурі 2000 К. Процес холодної емісії принципово відрізняється від термоелектронної емісії. При холодній емісії електрони долають потенціальний бар'єр на межі катода не за рахунок кінетичної енергії їхнього хаотичного теплового руху, як при термоелектронній емісії, а внаслідок так званого тунельного ефекту, фізична суть якого розкривається у квантовій механіці. Згідно із законами квантової механіки мікрочастинки, як і світло, проявляють і корпускулярні, і хвильові властивості, тобто електрон має також і хвильові властивості. Електронна хвиля частково відбивається, а частково проникає крізь потенціальний бар'єр. Поведінка електрона тут подібна до поведінки світлової хвилі при повному відбитті (часткове проникнення в інше середовище на відстань, що дорівнює довжині хвилі). На рис. 5.11 графічно зображено залежність енергії електрона  $W$  від відстані  $x$  до поверхні металу, якщо зовнішнього електричного поля немає (крива 1), за наявності слабкого зовнішнього електричного поля (крива 2) і сильного поля (крива 3). Характерним при цьому є зменшення висоти потенціального бар'єра над рівнем Фермі. Це зумовлює збільшення густини струму термоелектронної емісії. Крім цього, зменшується ширина потенціального бар'єра. Згідно з уявленнями квантової механіки збільшується ймовірність появи електронів з протилежного боку бар'єра, тобто збільшується кількість електронів, що проникають за одиницю часу крізь потенціальний бар'єр внаслідок тунельного ефекту.

Автоелектронну емісію досліджують за допомогою приладів, в яких анодом є нанесений на внутрішню поверхню сферичної колби шар металу, катодом — тонкий металевий дріт, кінець якого оплавлений у вигляді кульки. Він має радіус у десятки частки мікрометра і розміщується в центрі сферичного анода. Різниця потенціалів між електродами в кілька тисяч вольтів створює напруженість електричного поля біля поверхні катода близько  $10^{10}$  В/м. Покриваючи внутрішню поверхню анода шаром люмінофору, отримують на ньому збільшене зображення катода, що дає можливість спостерігати окремі емісійні центри на поверхні катода.

Густина струму автоелектронної емісії так само чутлива до зміни напруженості електричного поля  $E$ , як і густина струму термоелектронної емісії до зміни температури  $T$ .

Автоелектронна емісія на практиці не застосовується як спосіб добування електронних пучків. Вона досить ефективно використо-

вується під час вивчення фізичних властивостей поверхонь і адсорбції газів, оскільки подібні експерименти можна проводити при звичайних і навіть при досить низьких температурах (температура рідкого гелію) на дуже малих площах поверхонь. Ці дослідження мають важливе значення для вивчення каталізу (зміна швидкості або збудження хімічної реакції речовинами) та корозії (руйнування металів у разі їхньої взаємодії із середовищем).

При порівняно невисоких температурах (близько 2000 К) і напруженостях електричного поля біля поверхні катода (близько  $10^7$  В/м) термоелектронна та автоелектронна емісії є незначними. При більш високих температурах і більших напруженостях електричного поля біля поверхні катода емісійний струм з катода буде зумовлений як термоелектронною, так і автоелектронною емісіями. Такі процеси можливі при електричних розрядах у газах потужної електричної дуги. У деяких випадках автоелектронна емісія є основним процесом, який забезпечує емісію електронів з катода. Прикладом є розряд у ртутних випрямлячах, коли потрібна для автоелектронної емісії напруженість поля досягається завдяки досить малій товщині шару, в якому зосереджено катодне падіння потенціалу.

Автоелектронна емісія також може проявляти шкідливу дію, оскільки спричинює неочікуваний електричний розряд, при якому відбуваються перегрівання і руйнування приладів. Такі явища спостерігаються при досить загострених краях окремих емітерів в електронних помножувачах, недостатньо заокруглених краях електричних лінз в електронних мікроскопах тощо.

## Розділ 6. Електричний струм у рідинах

### § 6.1. Електроліти. Електролітична дисоціація

За хімічним складом розрізняють *однокомпонентні*, або *чисті*, рідини і дво- або багатокомпонентні *рідкі суміші* (розчини). За електричною провідністю речовини в рідкому стані поділяють на *провідники* (рідкі метали, деякі напівметали і напівпровідники, після плавлення вони мають електронну провідність); *напівпровідники* (після плавлення окремі напівпровідники зберігають характерні властивості напівпровідників: мають електронну або діркову провідність, чутливі до освітлення та зміни температури); *діелектрики* (рухомими носіями заряду в них можуть бути електрони та іони, але їх концентрація є надзвичайно малою й зумовлена домішками). Чисті рідини в переважній більшості є діелектриками (вода, продукти перероблення нафти, спирти тощо). Зумовлено це тим, що чисті рідини складаються

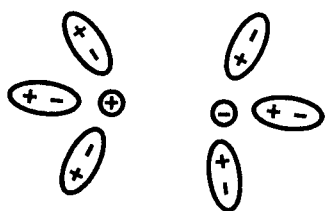


Рис. 6.1

з нейтральних атомів або молекул, їхні заряди зв'язані в атомах і, отже, не можуть брати участі у створенні струму.

Серед дво- або багатокомпонентних рідких сумішей виділяють *електроліти*. У широкому розумінні слова це речовини, які мають іонний механізм провідності. Їх часто називають *провідниками другого роду*. Найбільш ти-

повими представниками електролітів є водні розчини неорганічних кислот ( $\text{HCl}$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{HNO}_3$ ), лугів ( $\text{NaOH}$ ,  $\text{KOH}$ ,  $\text{Ca(OH)}_2$ ), солей ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{AgNO}_3$ ,  $\text{CuSO}_4$ ). Замість води розчинниками можуть бути спирти або неорганічні рідини (гексан, діоксан, бензол тощо). Такі розчини солей, кислот, лугів також мають іонну провідність, але їхня електропровідність значно менша від електропровідності водних електролітів. Зазначимо, що не всі водні розчини речовин є електролітами. Наприклад, розчин цукру у воді не є електролітом і не проводить електрики.

Упорядкований рух іонів (струм) в електролітах відбувається під дією електричного поля, яке створюється джерелом струму, під'єднаним до електродів, опущених в електроліт.

Які процеси зумовлюють утворення в електролітах носіїв заряду (іонів)? Сучасна фізична теорія провідності електролітів пояснює це тим, що молекули розчиненої речовини розпадаються в розчиннику на складові частини, які під час розчинення набувають різнойменних зарядів, тобто стають позитивними і негативними іонами. Явище розпаду речовини на різнойменно заряджені іони під дією розчинника називають *електролітичною дисоціацією*.

Процес розпаданя молекул на окремі іони можна уявити так. Навколо кожного з іонів розчиненої речовини, наприклад  $\text{NaCl}$ , орієнтуються полярні молекули розчинника (води). Позитивно заряджені іони натрію притягують негативні полюси дипольних молекул води. При цьому вони відштовхують негативні іони хлору. Аналогічна картина матиме місце для іонів хлору (рис. 6.1). Процес взаємодії іонів з дипольними молекулами розчинника називають *сольватацією*. Такий процес послаблює зв'язки між іонами натрію і хлору. Внаслідок теплового руху молекул можливі й розриви цих зв'язків і утворення іонів натрію та хлору. З наступним збільшенням відстані між іонами сила кулонівської взаємодії зменшується в  $\epsilon$  разів ( $\epsilon$  — діелектрична проникність розчинника). Частинки розчиненої речовини взаємодіють з молекулами розчинника, утворюючи комплекси — *сольвати* (для водних розчинів — гідрати).

При зближенні позитивного і негативного іонів вони можуть з'єднатись (рекомбінувати) і утворити нейтральну молекулу. Інші ней-

тральні молекули, навпаки, можуть дисоціювати на іони. Внаслідок цього встановлюється динамічна рівновага процесів дисоціації і рекомбінації, при якій статистично частка дисоційованих молекул у середньому залишається незмінною в часі. Творцем теорії електролітичної дисоціації є шведський фізико-хімік С. Арреніус (1859 — 1927).

Під час створення електричного поля введенням в електроліт металевих електродів, приєднаних до позитивного і негативного полюсів джерела струму, відбувається переміщення позитивних іонів (катіонів) до катода, а негативних іонів (аніонів) у протилежному напрямі — до анода. Виникає електричний струм. При цьому відбувається розділення і виділення утворених іонів (продуктів розпаду розчиненої речовини) на електродах. Це явище називають *електролізом*.

Як зазначалося, здатність молекул розчиненої речовини дисоціювати у різних розчинниках неоднакова. Для кількісної характеристики дисоціації вводять *коефіцієнт дисоціації*  $\alpha$ , який визначається відношенням кількості дисоційованих молекул розчиненої речовини до повної їх кількості. Припустимо, що в одиниці об'єму розчину перебуває  $n_0$  молекул розчиненої речовини, з яких  $n$  дисоціювали. Коефіцієнт дисоціації

$$\alpha = n / n_0. \quad (6.1)$$

Для  $\alpha = 1$  дисоціація буде повною, а при  $\alpha = 0$  її взагалі не буде. Якщо  $\alpha \rightarrow 1$ , то такі електроліти називають *сильними*, а при  $\alpha \rightarrow 0$  — *слабкими*. Теорію сильних електролітів розробили німецькі вчені П. Дебай (1884 — 1966) і Е. Хюккель (1896 — 1980).

Залежно від кількості різних іонів, що утворюються в розчині, електроліти називають бінарними ( $\text{KCl}$ ,  $\text{NaOH}$ ,  $\text{HN}_3$ ), *тернарними* ( $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{SrCl}_2$ ) і т. д. Для спрощення будемо розглядати бінарні електроліти. У загальному випадку в одиниці об'єму недисоційованих молекул буде  $n_0 - n = (1 - \alpha)n_0$ . Очевидно, кількість молекул, які дисоціюють за одиницю часу в одиниці об'єму  $\Delta n'$ , пропорційна кількості недисоційованих молекул, тобто

$$\Delta n' = A(1 - \alpha)n_0,$$

де  $A$  — коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи електроліту і його температури.

Кількість актів рекомбінації  $\Delta n'$  в одиниці об'єму за одиницю часу пропорційне як кількості позитивних  $\alpha n_0$ , так і негативних  $\alpha n_0$  іонів, що містяться в одиниці об'єму бінарного електроліту, тобто

$$\Delta n' = B \alpha^2 n_0^2,$$

де  $B$  — коефіцієнт пропорційності. У стані динамічної рівноваги між обома процесами  $\Delta n' = \Delta n'$ , або

$$A(1 - \alpha)n_0 = B \alpha^2 n_0^2. \quad (6.2)$$

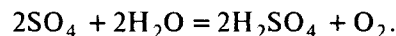
Звідси маємо

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{A}{B n_0} \quad (6.3)$$

Формула (6.3) виражає закон розведення Оствальда. Відношення  $A/B$  називають *константою рівноваги* або *константою дисоціації*. Із закону Оствальда випливає, що для досить розведених розчинів ( $n_0 \rightarrow 0$ ) коефіцієнт дисоціації  $\alpha \rightarrow 1$ , тобто всі молекули розчиненої речовини дисоціюють. Закон розведення Оствальда добре виконується для слабких електролітів, тобто таких, для яких ступінь дисоціації є малим ( $\alpha \ll 1$ ). Для сильних електролітів ( $\alpha \rightarrow 1$ , майже всі молекули розчинника дисоціюють) закон Оствальда для концентрованих розчинів погано узгоджується з дослідними результатами, за винятком сильно розбавлених розчинів, для яких дійсно  $\alpha \approx 1$ . За сучасною теорією розчинів вважають, що для сильних електролітів у дійсності всі молекули розчинника дисоційовані, а відхилення від закону Оствальда пояснюються взаємодією іонів між собою та з молекулами розчинника.

## § 6.2. Електроліз. Закони Фарадея

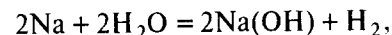
*Електролізом* називають явище виділення речовини на електродах, що відбувається, коли крізь електроліт проходить постійний електричний струм. При цьому на катоді відбувається реакція відновлення катіонів. Вона пов'язана з приєднанням електронів до катіонів. На аноді відбуваються реакції окиснення, пов'язані з віддачею електронів аніонами. Електроліз вперше спостерігали в 1800 р. У. Нікольсон, А. Карлейль, І. Ріттер при розкладанні води електричним струмом. У 1807 р. Г. Деві електролізом отримав натрій і калій. В процесі електролізу можливе виділення як первинних, так і вторинних продуктів. Так, під час електролізу водного розчину соляної кислоти  $\text{HCl}$  на аноді відбувається виділення атомів хлору, а на катоді — атомів водню, тобто первинних продуктів. Під час електролізу водного розчину сірчаної кислоти  $\text{H}_2\text{SO}_4$  на катоді виділяється водень. Іони  $\text{SO}_4^{2-}$ , віддаючи електрони аноду, перетворюються в радикали  $\text{SO}_4$ , які вступають в реакцію з водою:



У цьому разі кількість сірчаної кислоти в розчині не зменшується і кінцевим результатом електролізу буде розкладання води на водень і кисень.

Характер електролізу залежить також і від природи електродів. Так, під час електролізу водного розчину кухонної солі  $\text{NaCl}$  можна

отримати як первинні, так і вторинні продукти. Якщо під час електролізу катодом є ртуть, то натрій, що виділяється на катоді, розчиняється у ртуті, утворюючи амальгаму. З неї можна легко виділити металічний натрій. У цьому разі виділяється первинний продукт електролізу. Якщо ж катод платиновий, то натрій, що виділяється на катоді, вступає в реакцію з водою:



і на катоді виділяється вторинний продукт електролізу — водень.

Явище електролізу кількісно вивчав М. Фарадей. Він вперше зробив поділ продуктів електролізу на первинні та вторинні. У 1833 р. М. Фарадей за допомогою дослідів встановив два закони електролізу, які названо його ім'ям.

Перший закон Фарадея формулюється так: *маса  $m$  речовини, що виділяється на кожному з електродів, прямо пропорційна заряду  $q$ , який пройшов крізь електроліт*, тобто

$$m = kq, \quad (6.4)$$

де  $k$  — *електрохімічний еквівалент*, неоднаковий для різних речовин. Він чисельно дорівнює масі речовини, яка виділяється під час електролізу при проходженні крізь електроліт заряду  $q = 1$  Кл. Якщо крізь електроліт проходить постійний електричний струм  $I$  протягом часу  $t$ , то  $q = It$  і рівняння (6.4) записують у вигляді

$$m = kIt. \quad (6.5)$$

Якщо сила струму змінюється з часом, то

$$m = k \int_0^t I(t) dt.$$

Другий закон Фарадея вказує на те, що *електрохімічні еквіваленти речовин прямо пропорційні їх хімічним еквівалентам*:

$$k = Cx = C \frac{A}{z}, \quad (6.6)$$

де  $C$  — коефіцієнт пропорційності, який має однакове значення для всіх речовин. *Хімічним еквівалентом  $x$*  називають відношення атомної маси  $A$  до валентності  $z$  речовини. Замість сталої  $C$  користуються оберненою до неї величиною, яку називають *числом Фарадея* і позначають  $F = 1/C$ . Тоді рівняння (6.6) перепишеться так:

$$k = \frac{1}{F} \frac{A}{z}. \quad (6.7)$$

На основі формул (6.4) і (6.7) одержують об'єднаний закон Фарадея

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{z} q, \quad (6.8)$$

або

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{z} It. \quad (6.9)$$

Припускаючи, що на електроді під час електролізу виділяється маса речовини, яка чисельно дорівнює хімічному еквіваленту, з формули (6.8) одержуємо, що  $F = q$ . Число Фарадея  $F$  чисельно дорівнює електричному заряду, який має пройти крізь електродит, щоб на електроді виділився один моль речовини.

Дослідним шляхом встановлено, що  $F = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль. Знаючи число Фарадея і число Авогадро  $N_A$ , можна визначити заряд  $q$  одновалентного іона (або електрона):

$$q = \frac{F}{N_A} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Саме так Г. Стоней у 1874 р. оцінив значення елементарного заряду (приблизно  $10^{-20}$  Кл) і висловив думку про дискретність електричного заряду. Ідеї про атомізм електричного заряду висловлювали Б. Франклін у 1749 р., І. Ріттер у 1801 р., М. Фарадей у 1833 р., Дж. Максвелл у 1873 р., німецькі фізики В. Вебер (1804—1891) у 1845, 1871 рр., Г. Гельмгольц (1821—1894) у 1881 р. та ін. У промові, присвяченій пам'яті М. Фарадея, Г. Гельмгольц сказав: «Якщо ми визнаємо існування атомів хімічних елементів, то ми не можемо уникнути і дальшого висновку, що електрика, як позитивна, так і негативна, розділена на певні елементарні кількості, які поводять себе, як атоми електрики»\*.

**Приклад 6.1.** Струм, сила якого  $I = 1$  А, пропускають протягом часу  $t = 1$  хв крізь підкислену воду. Який об'єм займе гримучий газ, що при цьому утворюється, за нормальних умов?

Розв'язання. Об'єм гримучого газу  $V$  дорівнює сумі об'ємів водню  $V_1$  і кисню  $V_2$ , що виділяються під час електролізу, тобто

$$V = V_1 + V_2. \quad (1)$$

Об'єм водню визначимо, поділивши його масу на густину водню:

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1 V_{1M}}{M_1}, \quad (2)$$

де  $V_{1M} = 22,4 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль — об'єм моля газу за нормальних умов;  $M_1$  — маса моля водню.

Аналогічно знаходимо об'єм кисню

\* *Жизнь науки* /Сост. С. П. Капица. — М.: Наука, 1973. — С. 549.

$$V_2 = \frac{m_2 V_{2M}}{M_2}. \quad (3)$$

Масу водню і кисню, що виділились під час електролізу, визначимо за формулами

$$m_1 = \frac{A_1 It}{F z_1}, \quad m_2 = \frac{A_2 It}{F z_2}, \quad (4)$$

де  $A_1, A_2, z_1, z_2$  — відповідні атомні маси та валентності водню і кисню. На основі формул (2) — (4) вираз (1) набуває вигляду ( $V_{1M} = V_{2M} = V_M$ )

$$V = \frac{It V_M}{F} \left( \frac{A_1}{z_1 M_1} + \frac{A_2}{z_2 M_2} \right). \quad (5)$$

Підставивши у формулу (5) відповідні значення величин, одержимо

$$V = \frac{1 \cdot 60 \cdot 22,4}{9,65 \cdot 10^4} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{16}{2 \cdot 32} \right) \approx 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^3\text{)}.$$

### § 6.3. Електропровідність електролітів

Якщо зовнішнього електричного поля немає, то іони в електроді перебувають в хаотичному тепловому русі. Оскільки всі напрями теплового руху рівномірні, то переважаючого напрямку перенесення іонів немає, тобто струму не буде. За наявності зовнішнього електричного поля на іони діє сила  $\vec{F} = q\vec{E}$  і вони набувають додаткової швидкості. Зауважимо, що рухаються не самі іони, а сольвати — іони, оточені полярними нейтральними молекулами розчинника, тобто рухаються цілі комплекси. Позитивні іони набувають додаткової швидкості в напрямі напруженості електричного поля, а негативні — у протилежному напрямі. Напрявлений рух позитивних і негативних іонів під дією зовнішнього електричного поля створює електричний струм. Густина струму  $\vec{j}$  в електроді складається з густини струму  $\vec{j}_+$ , зумовленої напрямленим рухом позитивних іонів, та густини струму  $\vec{j}_-$  рухомих негативних іонів, тобто

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-. \quad (6.10)$$

Для спрощення розгляду явища провідності електролітів вважатимемо, що концентрація позитивних іонів  $n_+$  дорівнює концентрації негативних іонів  $n_-$ , тобто  $n_+ = n_- = n$ . Тоді заряд  $q_+$  позитивного іона дорівнює заряду  $q_-$  негативного іона, тобто  $q_+ = q_- = q$ . Оскільки в електролітах, як і в металах, концентрація носіїв заряду не залежить від наявності зовнішнього електричного поля, а сумарний заряд позитивних і негативних зарядів у будь-якому об'ємі електроліту дорівнює нулеві, то можна записати

$$\begin{aligned}\bar{j}_+ &= q_+ n_+ \bar{v}_+ = q n \bar{v}_+, \\ \bar{j}_- &= q_- n_- \bar{v}_- = q n \bar{v}_-, \end{aligned} \quad (6.11)$$

де  $\bar{v}_+$  і  $\bar{v}_-$  — швидкості впорядкованого руху під дією зовнішнього поля відповідно позитивних і негативних іонів (сольватів).

При впорядкованому русі іони в електролітах зазнають численних співударів з іншими молекулами. На них діють в'язкі сили тертя, які мають те саме походження, що й при русі макроскопічних тіл у рідинах або газах. З механіки відомо, що в'язкі сили тертя, яких зазнають тіла під час руху в рідинах або газах, при малій швидкості руху пропорційні швидкості. Тому на позитивні і негативні іони при їхньому напрямленому русі діятимуть відповідно в'язкі сили тертя  $\bar{F}_1 = -k_+ \bar{v}_+$  і  $\bar{F}_2 = -k_- \bar{v}_-$  ( $k_+$ ,  $k_-$  — коефіцієнти тертя для позитивних і негативних іонів). Тоді рівняння динаміки для напрямленого руху іонів матимуть вигляд

$$\begin{aligned}q\bar{E} - k_+ \bar{v}_+ &= m_+ \bar{a}_+, \\ q\bar{E} - k_- \bar{v}_- &= m_- \bar{a}_-, \end{aligned} \quad (6.12)$$

де  $\bar{a}_+$ ,  $\bar{a}_-$  — прискорення відповідно позитивних і негативних іонів.

Досліди показують, що за відсутності поляризації електродів (мала густина струму) сила струму під час електролізу не змінюється. Це свідчить про те, що при певних швидкостях напрямленого руху іонів сила тертя зрівноважується силою дії електричного поля, тобто прискорення іонів дорівнюють нулеві ( $\bar{a}_+ = \bar{a}_- = 0$ ). Тоді з рівнянь (6.12) одержимо:

$$\begin{aligned}\bar{v}_+ &= \frac{q}{k_+} \bar{E} = b_+ \bar{E}, \\ \bar{v}_- &= \frac{q}{k_-} \bar{E} = b_- \bar{E}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

де величини  $b_+ = q/k_+$  і  $b_- = q/k_-$  називають *рухливостями позитивних і негативних іонів*. З рівнянь (6.13) видно, що рухливість іона чисельно дорівнює швидкості його напрямленого руху при напруженості електричного поля  $E = 1$  В/м. На основі формул (6.11) і (6.13) вираз (6.10) набуває вигляду

$$\bar{j} = qn(b_+ + b_-)\bar{E}. \quad (6.14)$$

Якщо коефіцієнт дисоціації  $\alpha$ , то  $n = \alpha n_0$  ( $n_0$  — концентрація розчиненої речовини) і вираз (6.14) перепишеться так:

$$\bar{j} = q\alpha n_0(b_+ + b_-)\bar{E}. \quad (6.15)$$

Формула (6.15) виражає закон Ома в диференціальній формі для електролітів. Питома електропровідність електроліту

$$\sigma = q\alpha n_0(b_+ + b_-). \quad (6.16)$$

Введемо поняття *еквівалентної концентрації*  $\eta$ , під якою розуміють величину, що дорівнює кількості молів розчиненої речовини, яка припадає на одиницю об'єму ( $1 \text{ м}^3$ ) розчину. Оскільки  $n_0$  — кількість молекул розчиненої речовини в одиниці об'єму, а  $N_A$  — кількість молекул у молі, то  $\eta = n_0 / N_A$ . Запишемо добуток  $qn_0$  через  $N_A$ :

$$qn_0 = qN_A \frac{n_0}{N_A}.$$

Оскільки  $qN_A = F$ , а  $n_0 / N_A = \eta$ , то формула (6.16) набуває вигляду

$$\sigma = \alpha F \eta (b_+ + b_-). \quad (6.17)$$

Відношення питомої електропровідності  $\sigma$  до еквівалентної концентрації розчиненої речовини називають *еквівалентною електропровідністю*:

$$\Lambda = \frac{\sigma}{\eta} = \alpha F (b_+ + b_-). \quad (6.18)$$

Для нескінченно розбавленого розчину ( $\alpha \rightarrow 1$ ) еквівалентна електропровідність

$$\Lambda_\infty = F(b_+ + b_-). \quad (6.19)$$

Тоді з (6.18) і (6.19) маємо

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}. \quad (6.20)$$

Вимірюючи еквівалентну електропровідність за формулою (6.20), можна обчислити коефіцієнт дисоціації  $\alpha$ . За формулою (6.18) або (6.19) знаходять суму рухливостей іонів ( $b_+ + b_-$ ).

При невеликих концентраціях розчинів коефіцієнт дисоціації є величиною постійною. Сума рухливостей  $b_+ + b_-$  за цієї умови також залишається величиною приблизно постійною. Отже, при малій концентрації розчину електропровідність пропорційна концентрації.

Концентраційна залежність електропровідності при великих концентраціях розчину значно ускладнюється. Тут треба враховувати залежність коефіцієнта дисоціації, а також рухливості іонів від концентрації. У концентрованих розчинах рухливість іонів зменшується внаслідок електричної взаємодії іонів один з одним. Тому при значних концентраціях розчину прямої пропорційності між електропровідністю і концентрацією розчину не спостерігається. З підвищенням



температури коефіцієнт дисоціації збільшується, оскільки більш інтенсивний рух молекул перешкоджає процесу молізації і полегшує дисоціацію молекул. Під час нагрівання розчину його в'язкість зменшується, внаслідок чого рухливість іонів збільшується. Тому питома провідність електролітів з підвищенням температури зростає.

При високих напруженостях електричного поля ( $E \geq 10^6$  В/м) спостерігається відхилення від закону Ома і залежність  $\bar{j} = f(\bar{E})$  має нелінійний характер.

**Приклад 6.2.** Еквівалентна електропровідність розчину KCl при деякій концентрації дорівнює  $\Lambda = 0,0122 \text{ м}^2/(\text{Ом} \cdot \text{моль})$ , питома електропровідність його при тій самій концентрації  $\sigma = 0,122 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$  і еквівалентна електропровідність його для нескінченно розбавленого розчину  $\Lambda_\infty = 0,0130 \text{ м}^2/(\text{Ом} \cdot \text{моль})$ . Визначити: 1) коефіцієнт дисоціації  $\alpha$  для даної концентрації KCl; 2) еквівалентну концентрацію розчину; 3) суму рухливостей іонів  $\text{K}^+$  і  $\text{Cl}^-$ .

Розв'язання. Коефіцієнт дисоціації знаходимо за формулою (6.20):

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} = \frac{0,0122}{0,013} = 0,94.$$

Еквівалентну концентрацію розчину обчислюємо так:

$$\eta = \frac{\sigma}{\Lambda} = \frac{0,122}{0,0122} = 10 \text{ моль/м}^3.$$

Суму рухливостей іонів калію і хлору знаходимо за формулою (6.19):

$$b_+ + b_- = \frac{\Lambda_\infty}{F} = \frac{0,0130}{9,65 \cdot 10^4} = -1,35 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с}).$$

### § 6.4. Електрохімічні потенціали

Досліди показують, що при зануренні металів в електроліт відбувається їхня взаємна електризація. На металі і в електроліті з'являються заряди протилежних знаків. При цьому метал матиме відносно електроліту певний *потенціал*, який називають *електрохімічним*.

Виникнення електрохімічних потенціалів пояснив німецький фізик В. Нернст (1864—1941). Для якісного з'ясування цього питання розглянемо метал, занурений у водний розчин солі цього ж металу, наприклад цинк у розчині сульфату цинку  $\text{ZnSO}_4$ . Молекули води мають великий дипольний момент, вони оточують позитивно заряджені іони цинку поверхні металу і відщеплюють їх. Іони цинку, які перейдуть з електрода в розчин, нічим не відрізняються від іонів цинку, що виникають внаслідок дисоціації молекул  $\text{ZnSO}_4$ . Поряд із процесом розчинення цинку матиме місце й обернений процес, при якому іони цинку внаслідок теплового руху відкладаються на цинковому електроді. Через певний проміжок часу ці процеси зрівноважуються. При цьому цинк набуває негативного заряду, а електроліт — позитивного. На межі цинку та електроліту утворю-

ється тонкий поверхневий шар зарядів протилежних знаків, який називають *подвійним електричним шаром*. У ньому виникає електричне поле, напруженість якого напрямлена від електроліту до металу. Це поле протидіє переходу позитивних іонів цинку в електроліт. Те саме відбувається, коли цинковий електрод занурити у воду. При зануренні металу в розчин солі цього самого металу він не завжди заряджається негативно. Так, при зануренні мідного стрижня в розчин мідного купоросу  $\text{CuSO}_4$  іони міді відкладаються на міді. Внаслідок цього мідь заряджається позитивно, а електроліт — негативно. Отже, при зануренні металу у воду або водний розчин, в якому наявні іони цього ж металу, на межі метал — розчин виникає подвійний електричний шар, тобто виникає різниця потенціалів між металом і електролітом. Її значення залежить від концентрації іонів даного металу в розчині та від природи металу.

Щоб виміряти різницю потенціалів між металевим електродом і електролітом, треба приєднати його до вольтметра, а другу клему вольтметра з'єднати з електролітом за допомогою іншого електрода. Тоді між електролітом і допоміжним електродом також виникає різниця потенціалів і вольтметр вимірюватиме не різницю потенціалів між металевим електродом і електролітом, а різницю потенціалів між двома різними електродами, зануреними в той самий електроліт. Різниця потенціалів між двома різними металевими електродами залежить як від їхньої природи, так і від концентрації розчину електроліту. Для зручності розрахунків електрорушійних сил гальванічних джерел струму на практиці визначають потенціал будь-якого металевого електрода відносно так званого *нормального водневого електрода*, який приймають за стандарт. Це електрод із платини, покритий методом електролізу дрібнодисперсною платиною і занурений у розчин, що містить іони водню з нормальною концентрацією. Нагадаємо, що концентрація розчину називається нормальною, якщо в  $1 \text{ м}^3$  розчину міститься  $1 \text{ кмоль}$  іонів водню.

Електрохімічний потенціал електрода в розчині його солі з нормальною концентрацією іонів, виміряний відносно водневого електрода, називають *нормальним електрохімічним потенціалом*.

У фізичній хімії розроблено методи вимірювання нормальних електрохімічних потенціалів та способи обчислення потенціалу водневого електрода відносно електроліту з нормальною концентрацією іонів водню, який дорівнює  $U' = +0,274 \text{ В}$ . Якщо позначити нормальний електрохімічний потенціал через  $U_n$ , то можна визначити й абсолютний нормальний потенціал  $U = U_n + 0,274 \text{ В}$ . Користуючись значеннями  $U_n$  і  $U$  деяких електродів (табл. 6.1), неважко визначити електрорушійну силу  $\mathcal{E}$  гальванічного елемента як різницю електрохімічних потенціалів його електродів. Так, для нормальної концентрації електроліту гальванічний елемент з цинковим і мідним електродами

має електрорушійну силу  $\mathcal{E} = U_{\text{Cu}} - U_{\text{Zn}} = 0,61 \text{ В} - (-0,50 \text{ В}) = 1,11 \text{ В}$  (елемент Даніеля).

Таблиця 6.1

Електрод	$U_{\text{н}}, \text{В}$	$U, \text{В}$	Електрод	$U_{\text{н}}, \text{В}$	$U, \text{В}$
Na	-2,72	-2,45	Pb	-0,12	+0,15
K	-2,92	-2,65	Cu	+0,34	+0,61
Mg	-1,55	-1,28	Ag	+0,80	+1,07
Zn	-0,77	-0,50	O <sub>2</sub>	+1,23	+1,50
Cd	-0,40	-0,13	Cl <sub>2</sub>	+1,36	+1,63
Hg	+0,86	+1,13	H <sub>2</sub>	0	+0,274

Як відомо, причиною виникнення електрорушійних сил у різних джерелах струму є дія сторонніх сил, які мають неелектростатичне походження. Фізична природа цих сил різна в різних джерелах струму. Виникнення електрохімічних потенціалів між металевим електродом і електролітом, а отже, і різниці потенціалів між двома різними металевими електродами, зануреними в електроліт, зумовлено силами молекулярної взаємодії. Оскільки різниця потенціалів між електродами розімкнутого джерела струму дорівнює його електрорушійній силі, то сторонніми силами в гальванічних елементах є сили молекулярної взаємодії.

### § 6.5. Хімічні джерела струму

Хімічні джерела струму — це пристрої, в яких енергія хімічних реакцій безпосередньо перетворюється в електричну енергію. До них належать гальванічні елементи, акумулятори, електрохімічні генератори, які називають також паливними елементами.

**Гальванічні елементи.** Як приклад розглянемо гальванічний елемент Даніеля (рис. 6.2). У ньому цинковий електрод занурений у розчин цинкового купоросу  $\text{ZnSO}_4$ , а мідний електрод — у розчин мідного купоросу  $\text{CuSO}_4$ . Обидва розчини відокремлені один від одного пористою перегородкою, яка не перешкоджає рухові іонів крізь неї, але захищає розчини від швидкого перемішування їх. Якщо концентрації обох розчинів є нормальними, то ЕРС такого елемента, як було показано в § 6.4, дорівнює 1,11 В. Якщо ж електроди замкнуті провідником через споживач, то електрони від цинкового електрода рухатимуться у зовнішньому колі до мідного електрода. При цьому цинк стане менш негативно зарядженим, ніж це потрібно для рівноваги. Тому нові іони будуть відщеплюватись і переходити від цинку в електроліт. Крім того, електрони, досягнувши мідного електрода, компенсують частково його позитивний заряд. Для відновлення рівноваги іони міді з розчину осідатимуть на мідному електроді. Отже, у замкнутому елементі цинк переходить з електрода в розчин, а мідь виділяється на електроді.

Крім елемента Даніеля, досить простим за своєю будовою є елемент Вольти. Він складається з мідного і цинкового електродів, опущених у слабкий розчин сірчаної

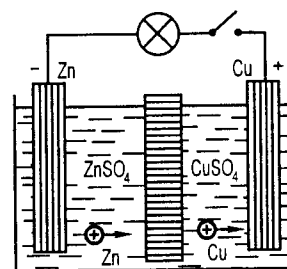


Рис. 6.2

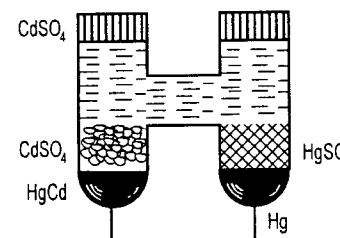


Рис. 6.3

кислоти. Внаслідок реакції на цинковому електроді  $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{ZnSO}_4 + \text{H}_2$  він заряджається негативно. При замиканні електродів іони водню рухаються до мідного електрода й осідають на ньому. Після тривалої роботи елемента мідний електрод покривається шаром водню. Такий електрод здатний посилати в розчин іони водню і цим самим створювати додаткову ЕРС, яка є протилежною дії електрорушійної сили самого елемента. Це спричинює зменшення ЕРС елемента. Крім цього, шар водню, що утворюється на мідному електроді, збільшує внутрішній опір елемента. Все це призводить до зменшення сили струму в колі. Отже, проходження електричного струму в гальванічних елементах може супроводжуватись рядом ускладнень, як це має місце в елементі Вольти. Явище виникнення додаткової ЕРС, яка послаблює ЕРС самого елемента, називають *електролітичною поляризацією* або *поляризацією гальванічних елементів*. Щоб усунути шкідливий вплив поляризації елементів, застосовують різні способи. Одним із них є добір таких рідин у гальванічних елементах, що під час роботи не відбувається зміни складу електродів. Такий спосіб деполяризації має місце в елементі Даніеля.

Ще одним способом деполяризації елементів є хімічний. Він полягає в тому, що в електроліт додають речовини, які активно взаємодіють з речовинами, що зумовлюють поляризацію елемента. Для усунення шкідливого впливу водню, що виділяється на електроді, як деполяризатори застосовують різні окисники, а в разі виділення кисню на електроді використовують деполяризатори-відновники. До таких елементів належать марганцево-цинкові (елементи Лекланше), марганцево-повітряно-цинкові, мідно-цинкові, оксидно-ртутні, хлоросрібно-магнієві, срібно-цинкові та ін.

Гальванічні елементи широко застосовуються для живлення радіоприймачів, малогабаритної електронної обчислювальної техніки, радіозондів, ракетної техніки тощо.

**Нормальний елемент Вестона.** Для забезпечення еталонів напруг у лабораторній практиці використовується ртутно-кадмієвий нормальний елемент Вестона, запропонований у 1892 р. і офіційно прийнятий для метрологічних цілей у 1908 р. Цей елемент відрізняється від інших гальванічних елементів високою стабільністю ЕРС. Їх виготовляють в Н-подібних запаяних скляних посудинах, у дно яких впаяно платинові електроди (рис. 6.3). Позитивним електродом є ртуть, в контакт з якою перебуває деполяризатор — паста із суміші сірчаної ртуті  $\text{Hg}_2\text{SO}_4$  і кристалів сірчаноокислого кадмію  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$ . Негативним електродом є 6 — 12%-на амальгама кадмію, яка кон-

тактує з кристалами  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$ . Електролітом є насичений розчин сірчаноокислого кадмію у воді. Нормальні елементи зберігаються при постійній температурі в масляних або повітряних термостатах. При температурі  $t = 20^\circ \text{C}$  їхня електрорушійна сила  $\mathcal{E} = (1,018\ 64 \pm 0,000\ 02) \text{ В}$ . Температурна залежність ЕРС таких елементів в інтервалі температур  $0 - 40^\circ \text{C}$  виражається рівнянням

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{t=20^\circ} - 4 \cdot 10^{-5}(t - 20) - 10^{-6}(t - 20)^2 - 10^{-6}(t - 20)^3.$$

Для менш відповідальних вимірювань у повсякденній лабораторній або виробничій практиці користуються ненасиченим варіантом елемента Вестона, в якому над електродами немає кристалів  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$ , а концентрація електроліту така, що насичення настає тільки при  $4^\circ\text{C}$ . Електрорушійна сила таких елементів при  $20^\circ\text{C}$   $\mathcal{E} = (1,019\ 2 \pm 0,000\ 2)\text{В}$ , тобто точність відтворення є значно меншою. Ненасичений елемент при кімнатній температурі має досить невеликий температурний коефіцієнт ЕРС (близько  $1\ \text{мкВ/К}$ ), тому немає потреби його старанного термостатування.

На відміну від насичених ненасичені елементи — транспортабельні, але мають менший строк використання. Насичені елементи Вестона при бережному користуванні задовольняють вимогам еталонів ЕРС протягом  $10 - 20$  років. Нормальні елементи застосовуються не як джерело струму, а як джерела постійної напруги в різних вимірювальних компенсаційних схемах, при перевірці та градуванні вимірювальних приладів. Від таких елементів можна брати тільки дуже слабкі струми, які не перевищують кількох міліампер, оскільки за такої умови напругу елемента можна вважати незмінною.

**Акумулятори.** Розглянуті хімічні джерела струму, гальванічні елементи вважаються джерелами одноразового користування, оскільки в них є певний запас реагуючих речовин, після витрачання яких елемент стає непридатним для користування. Різновидністю гальванічних елементів є акумулятори, або вторинні елементи. Це гальванічні елементи, в яких речовини, що витрачаються при споживанні струму, поперечно нагромаджуються на електродах під час електролізу. Таке джерело струму після розрядження може бути переведене в попередній стан (заряджений) пропусканням крізь нього електричного струму від зовнішнього джерела. Найбільшого поширення набув свинцевий, або кислотний, акумулятор. Перший діючий зразок свинцевого акумулятора створив у 1859 р. Г. Планте. Сучасні кислотні акумулятори складаються з ґратчастих свинцевих пластин, які заповнені пастою із  $\text{PbO}$ , та води. Такі пластини опускають у розчин сірчаної кислоти. Внаслідок реакції  $\text{PbO} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{PbSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$  на пластинах утворюється малорозчинний сірчаноокислий свинець  $\text{PbSO}_4$ . Під час пропускання електричного струму (зарядження) крізь акумулятор іони водню  $\text{H}^+$  рухаються до катода, нейтралізуються на ньому і вступають у реакцію  $\text{PbSO}_4 + 2\text{H} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{SO}_4$ . Негативні іони  $\text{SO}_4^{2-}$  досягають анода, нейтралізуються і також вступають у реакцію  $\text{PbSO}_4 + \text{SO}_4 = \text{Pb}(\text{SO}_4)_2$ . Потім відбувається реакція  $\text{Pb}(\text{SO}_4)_2 + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 2\text{PbO}_2 + 2\text{H}_2\text{SO}_4$ . Отже, при зарядженні акумулятора катод перетворюється в чистий свинець, а анод — у пероксид свинцю  $\text{PbO}_2$ . З реакцій видно, що концентрація сірчаної кислоти під час зарядження акумулятора зростає. Під час розрядження акумулятора кінцевим результатом реакцій буде утворення на обох електродах сірчаноокислого свинцю  $\text{PbSO}_4$  і зменшення концентрації розчину сірчаної кислоти. Наприкінці зарядження ЕРС свинцевого акумулятора досягає  $2,7\ \text{В}$ , під час розрядження вона швидко зменшується до  $2,2\ \text{В}$ , а потім повільно зменшується до  $1,85\ \text{В}$ . Подальше розрядження акумулятора є небажаним.

Крім ЕРС, акумулятори характеризуються ємністю, під якою розуміють електричний заряд, що проходить крізь поперечний переріз провідника у колі акумулятора при його розрядженні до нижньої межі напруги. Ємність акумуляторів вимірюють в ампер-годинах. Крім кислотних, широкого застосування набули лужні акумулятори. До них належать кадмієво-нікелеві, залізо-нікелеві, срібно-цинкові та срібно-кадмієві. Перший патент на кадмієво-нікелевий акумулятор отримав у 1899 р. В. Юнгнер, а на залізо-нікелевий — у 1901 р. Т. Едісон. Кислотні акумулятори застосовують в основному в автомобільному транспорті, в авіації, на телефонних станціях. Лужні акумулятори використовують в авіації, у засобах зв'язку, на штучних супутниках Землі.

**Паливні елементи.** До паливних елементів належать хімічні джерела струму, в яких електрична енергія утворюється внаслідок хімічної реакції між відновником і окисником, що неперервно подаються до електродів іззовні, а продукти реакції виводяться з паливного елемента. Отже, паливний елемент теоретично здатний працювати неперервно і як заводно довго. Вперше ідею використання паливних елементів у вели-

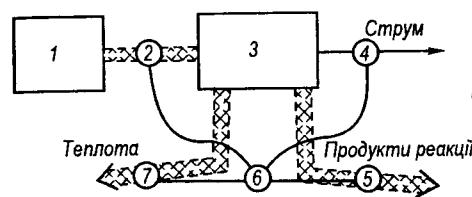


Рис. 6.4

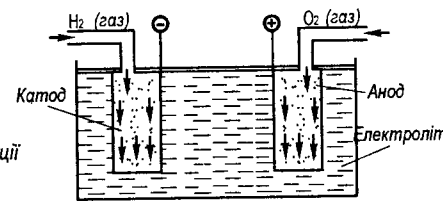


Рис. 6.5

кій енергетиці висловив у 1894 р. німецький фізико-хімік В. Оствальд (1853—1932) як альтернативну звичайному методу виробництва електричної енергії на теплових електростанціях. Важливе значення у розробленні цієї проблеми мали праці О. К. Давтяна, який у 1974 р. опублікував першу монографію про паливні елементи.

На відміну від розглянутих хімічних джерел струму паливні елементи для своєї роботи потребують цілий ряд допоміжних систем. Сукупність батареї паливних елементів і допоміжних систем називають *електрохімічним генератором*. Схему такого генератора зображено на рис. 6.4 (1 — система зберігання і підготовки реагуючих речовин; 2 — система підведення реагуючих речовин; 3 — батарея паливних елементів; 4 — система регулювання струму; 5 — система відведення продуктів реакції; 6 — система контролю і регулювання; 7 — система відведення теплоти).

Паливні елементи за робочою температурою поділяють на низькотемпературні (нижче ніж  $150^\circ\text{C}$ ), середньотемпературні ( $150 - 250^\circ\text{C}$ ) і високотемпературні ( $550 - 1000^\circ\text{C}$ ). У низькотемпературних елементах електролітами є водні розчини лугів або кислот, в середньотемпературних — висококонцентровані водні розчини лугів або кристалогідрати, у високотемпературних — розплави солей (карбонати) або тверді електроліти (кераміка на основі двооксиду цирконію  $\text{ZrO}_2 \cdot 0,17\ \text{CaO}$  або  $\text{ZrO}_2 \cdot 0,11\ \text{V}_2\text{O}_5$ ). У паливних елементах як окисники використовують повітря, чистий кисень і пероксид водню. Відновниками (палива) можуть бути гідразин  $\text{N}_2\text{H}_4$ , водень, спирти (метанол, етиленгліколь та ін.), оксид вуглецю, вуглеводи, вугілля.

З усіх варіантів паливних елементів найбільш досконало вивчено киснево-водневі елементи з лужними та кислотними електролітами. Розглянемо схему роботи найпростішого киснево-водневого паливного елемента (рис. 6.5). Газоподібні водень і кисень підводяться до пористих металевих електродів, які активовані катализаторами. Електроди, виготовлені з нікелю, платини, їхніх сплавів або вугілля, занурюють в електроліт. На межі метал — електроліт відбуваються основні процеси, які зумовлюють виникнення ЕРС між електродами. На катоді молекули водню  $\text{H}_2$  розпадаються на атоми, які спочатку адсорбуються речовиною катода, а потім втрачають по електрону. При цьому електрод заряджається негативно, а позитивні іони потрапляють у розчин, захоплюються молекулами води й утворюють іони  $\text{H}_2\text{OH}^+$ . На аноді кисень взаємодіє з речовиною електрода, розпадається на атоми, які забирають у металу електрони й утворюють негативні іони  $\text{O}^-$ . Ці іони під час взаємодії з молекулами води утворюють негативні іони гідроксиду  $\text{OH}^-$ . При цьому анод заряджається позитивно. На аноді відбувається реакція  $\text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4e \rightarrow 4\text{OH}^-$ .

Паливні елементи як автономні джерела струму використовуються в космічній техніці. Перші великомасштабні роботи з використання їх у великій енергетиці розпочалися на початку 70-х років ХХ ст. Розроблено проекти і ведеться будівництво таких енергосистем потужністю кілька десятків мегаватів. Застосування паливних елементів у великій енергетиці — це одна з досить важливих проблем. Однак ця проблема ще далеко до повного вирішення.

З часів створення і поширення електрогенераторів, робота яких ґрунтується на явищі електромагнітної індукції, хімічні джерела струму використовувалися виключно в автономній енергетиці. Вони не застосовувались як основні енергоджерела на

електростанціях через високу вартість електроенергії порівняно з енергією, добутою за допомогою теплових машин. Тепер все ширше обговорюються питання можливості застосування хімічних джерел струму у великій енергетиці. Це зумовлено як розробленням нових типів хімічних джерел струму, так і поступовим зменшенням запасів природного палива.

Передбачається використання хімічних джерел струму у великій енергетиці в таких напрямках. Перший напрям передбачає безпосереднє перетворення хімічної енергії природного палива в електричну за допомогою паливних елементів.

Другий напрям передбачає вирівнювання графіка навантажень електростанцій. На звичайних електростанціях нерівномірність роботи визначається добовою, тижневою і сезонною нерівномірністю споживання електроенергії. На енергоустановках нового типу (сонячні, вітрові, приливні та ін.) вироблення електричної енергії пов'язане з природними явищами і відбувається нерівномірно. Згладжування цих нерівномірностей за допомогою тимчасового накопичення і наступного використання частини електроенергії має важливе економічне значення.

І, нарешті, третій напрям використання хімічних джерел струму у великій енергетиці передбачає реалізацію термоелектрохімічних циклів, які дають змогу перетворювати теплову енергію в електричну без участі теплових машин. Прикладом простого термоелектрохімічного циклу може бути цикл із застосуванням хлоридів міді. При високій температурі ( $t > 500\text{ }^\circ\text{C}$ ) хлорид міді  $\text{CuCl}_2$  дисоціює з поглинанням теплоти на  $\text{Cu}$  і  $\text{Cl}_2$ . При більш низькій, наприклад кімнатній, температурі реакція проходить у зворотному напрямі і може бути використана в паливному елементі для вироблення електричної енергії.

В інших варіантах термоелектрохімічних циклів за рахунок теплової енергії не отримують електроенергію, а виробляють висококалорійне паливо — водень. Термоелектрохімічні цикли розраховані насамперед на утилізацію теплової енергії ядерних реакторів.

## § 6.6. Застосування електролізу в техніці

Явище електролізу досить широко застосовується в техніці. Розглянемо деякі з цих застосувань.

**Гальванопластика.** У 1837 р. російський фізик Б. С. Якобі (1801—1874) вперше запропонував метод відтворення форми предмета електролітичним осадженням металів. Цей метод називають *гальванопластикою*. Для виготовлення рельєфної копії з предмета (монети, медалі тощо) з нього знімають спочатку зліпок із воску, стеарину чи з будь-якого іншого пластичного матеріалу. Цей зліпок роблять електропровідним, покриваючи його поверхню порошкоподібним графітом, і занурюють в електролітичну ванну як катод, де на ньому й осаджується шар металу потрібної товщини. Цей метод застосовується для виготовлення друкарських кліше, металевих копій із скульптур, матриць для штампування грамофонних пластинок тощо.

**Гальваностегія.** За допомогою електролізу можна покрити металеві предмети шаром іншого металу. Цей процес називають *гальваностегією*. Особливе технічне значення мають при цьому електролітичні покриття важкоокислювальними металами, а саме: нікелювання і хромування, сріблення та золочення, пластування, електролітичне покриття заліза цинком. Щоб отримати потрібне покриття, предмет старанно очищають механічно, добре знежирюють і поміщають як катод в електролітичну ванну, яка містить іони того металу, яким хочуть покрити предмет. Гальваностегія використовується для нанесення захисних (антикорозійних) або декоративних покриттів на вироби.

**Очищення, або рафінування, металів.** Електроліз застосовують для добування чистих металів. Очищені метали у вигляді пластин використовують у гальванічній ванні як аноди. Електроліт виготовляють із солі даного металу, а катоди — з очищеного металу. При певній густині струму аноди розчинятимуться, а домішки осідатимуть на дно ванни. Так, якщо опускати у водний розчин мідного купоросу  $\text{CuSO}_4$  пластину-анод з неочищеної міді і пластину-катод з очищеної міді, то іони  $\text{Cu}^{++}$  рухатимуться

до катода і на ньому виділятиметься чиста мідь. Іони  $\text{SO}_4^{--}$  після нейтралізації на аноді вступатимуть з ним у реакцію  $\text{Cu} + \text{SO}_4 = \text{CuSO}_4$ . Отже, кількість мідного купоросу в розчині залишається постійною і відбувається перенесення міді з анода на катод. Таким способом добувають чисту мідь, яку називають *електролітичною*.

**Електрометалургія.** За допомогою електролізу руд у розплавленому стані добувають метали (алюміній, цинк, натрій, магній, берилій, кальцій, фтор тощо). Добування металів за допомогою електролізу в сучасній кольоровій металургії має велике значення. Тепер увесь алюміній добувають цим способом. Для цього розплав глинозему  $\text{Al}_2\text{O}_3$  і кріоліту  $\text{Na}_2\text{AlF}_6$  піддають електролізу. Електроліз відбувається при температурі близько  $900\text{ }^\circ\text{C}$ . Нагрівання здійснюється завдяки виділенню Джоулевої теплоти під час проходження струму.

**Електролітичне травлення і полірування.** За допомогою електролізу можна полірувати поверхні металевих виробів. Це зумовлено залежністю напруженості електричного поля від форми поверхні металевого предмета, розміщеного в електролітичній ванні. Біля загострень предмета буде більша напруженість електричного поля, а отже, більшою буде й густина струму. Внаслідок цього розчинення металу в електроліті у цих місцях буде більшим. Це й сприяє поліруванню металевих виробів.

**Електролітичні конденсатори.** Явище електролізу використовується для виготовлення електролітичних конденсаторів (рис. 6.6). Вони мають два алюмінієвих електроди, які занурено в електроліт із суміші борної кислоти  $\text{H}_3\text{BO}_3$  і розчину аміаку  $\text{NH}_4\text{OH}$  з добавкою гліцерину. Електроліт часто виготовляють у вигляді пасти, якою просочують паперову прокладку між електродами. При проходженні струму анод вкривається непровідною плівкою оксиду алюмінію, яка підтримується завдяки електролізу. Цей шар є діелектриком конденсатора, обкладками якого є алюмінієвий електрод і електроліт. Другий алюмінієвий електрод призначений для вмикання конденсатора в електричне коло. Оскільки товщина плівки оксиду алюмінію досить мала, то можна виготовити конденсатори великих ємностей. Нині виготовляють електролітичні конденсатори ємністю в кілька тисяч мікрофарад. Електролітичний конденсатор має велику ємність тільки для певної полярності напруги, тобто якщо окиснений електрод з'єднаний з позитивним полюсом джерела. У разі зміни полярності напруги ізолюючий шар зникає. Крізь конденсатор проходить великий струм, внаслідок чого відбувається його руйнування. Заміна алюмінію танталом зменшує об'єм електролітичних конденсаторів і поліпшує їхні електричні характеристики. Електролітичні конденсатори застосовуються в основному в електричних фільтрах низької частоти або в колах пульсуючих напруг до 600 В.

**Добування важкої води.** Електролітичне розкладання води на водень і кисень широко використовується для добування цих газів. У звичайній воді завжди в незначній кількості є молекули важкої води (вода, в якій замість водню містяться нукліди водню-дейтерію з атомною масою 2). Іони  $\text{D}^+$  мають меншу рухливість, ніж іони  $\text{H}^+$ . Тому у виділених газах під час електролізу концентрація дейтерію буде значно меншою, ніж концентрація важкої води у звичайній воді. Внаслідок цього концентрація важкої води в електроліті підвищуватиметься. Отже, за допомогою електролітичного розкладання звичайної води протягом значних проміжків часу можна отримати воду з великим вмістом молекул  $\text{D}_2\text{O}$ .

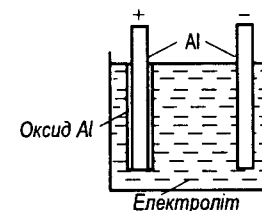


Рис. 6.6

## Розділ 7. Електричний струм у газах

### § 7.1. Іонізація і рекомбінація

Гази на відміну від металів і електrolітів за звичайних умов складаються з електрично нейтральних атомів та молекул і тому не є провідниками електрики. Досліди підтверджують це. Заряджений електромметр на ізольованій підставці в сухому атмосферному повітрі довгий час не втрачає свого заряду тому, що він практично не розряджається через повітря, бо в ньому немає вільних зарядів. Якщо до двох обкладок плоского повітряного конденсатора під'єднати джерело струму і послідовно увімкнути гальванометр, то в разі замикання електричного кола гальванометр не зафіксує струму, оскільки повітряний прошарок між обкладками конденсатора є ізолятором. Підігрівши повітряний прошарок конденсатора запаленим сірником, будемо спостерігати помітний струм. Отже, щоб газ став провідним, треба внести або створити в ньому вільні носії заряду. Це можна здійснити, перш за все, способом іонізації нейтральних атомів або молекул газу. Іонізація газів можлива під впливом космічного, рентгенівського або радіоактивного проміння, через зіткнення атомів із швидкими електронами або іншими елементарними чи атомними частинками, під час нагрівання газів тощо. У кожному разі відбувається відщеплення з електронної оболонки атома чи молекули одного або кількох електронів. Цей процес називають *іонізацією*. Внаслідок іонізації з'являються вільні електрони і позитивно заряджені іони. Вільні електрони, у свою чергу, можуть захоплюватись нейтральними атомами або молекулами, перетворюючи останні в негативні іони. Таким чином, у газі під дією іонізаторів з'являються позитивні і негативні іони та вільні електрони. Газ стає провідником струму. Між іншим, гази (наприклад, повітря) за звичайних природних умов мають незначну провідність, зумовлену частковою іонізацією їх під дією космічного проміння та опромінення радіоактивними елементами, які завжди в невеликій кількості є на поверхні землі та в повітрі.

Атоми і молекули є стійкими системами заряджених частинок. Для відриву від атома електрона потрібно затратити енергію, яку називають *енергією* або *роботою іонізації*. Робота іонізації  $A_i$  атомів різних газів не однакова. Вона залежить від хімічної природи газу та енергетичного стану електрона в атомі або молекулі. Виражається робота іонізації в електрон-вольтах. Енергію іонізації характеризують *потенціалом іонізації*  $\phi_i$ , під яким розуміють ту різницю потенціалів, яку має пройти електрон у прискорювальному електричному полі, щоб набути енергії, яка дорівнює роботі іонізації:

$$\phi_i = A_i / e.$$

Іони та вільні електрони в іонізованому газі, як і нейтральні атоми та молекули, перебувають у постійному хаотичному русі. У разі зближення протилежно заряджених частинок вони з'єднуються між собою і утворюють нейтральні атоми та молекули. Цей процес називають *рекомбінацією*. Під час рекомбінації позитивного іона та електрона або двох іонів протилежних знаків звільняється енергія, яка витрачалась при їх іонізації. Якщо іонізація газу відбувається досить довго, то за відсутності зовнішнього електричного поля між процесами іонізації і рекомбінації встановлюється динамічна рівновага. Це означає, що кількість пар іонів, створюваних іонізатором за одиницю часу в одиниці об'єму газу, дорівнюватиме кількості нейтральних атомів і молекул, які утворюються в тому ж об'ємі газу за той самий час.

Рекомбінація іонів супроводжується виділенням енергії здебільшого у вигляді світлового випромінювання, тому процеси, які відбуваються при рекомбінації, характерні світінням газу.

**Приклад 7.1.** Показати, що мінімальна енергія електронів, які зумовлюють іонізацію газів, є дещо більшою від роботи іонізації. Визначити також найменше значення середньої довжини вільного пробігу електрона.

**Розв'язання.** Для отримання потоків швидких електронів їх прискорюють за допомогою електричного поля. Енергія електронів при цьому визначається так:

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \quad (1)$$

де  $m$ ,  $e$ ,  $v$  — відповідно маса, заряд і швидкість електрона;  $U$  — прискорювальна напруга електричного поля.

Зіткнення електрона з атомом або молекулою під час їхньої іонізації вважається непружним ударом. Тоді на основі закону збереження імпульсу спільна швидкість електрона та атома (молекули) після удару

$$v_1 = \frac{mv}{m + M}, \quad (2)$$

де  $M$  — маса атома або молекули.

Кінетична енергія електрона при непружному ударі витрачається на роботу іонізації  $A_i$  та на приведення в рух частинок після удару, тобто

$$\frac{mv^2}{2} = A_i + \frac{(m + M)v_1^2}{2}. \quad (3)$$

На основі співвідношень (2) і (3) одержуємо

$$\frac{mv^2}{2} = A_i \left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad (4)$$

Звідси видно, що мінімальна кінетична енергія електрона при іонізації ударом має бути більшою від роботи іонізації на  $\frac{m}{M} A_i$ . Електрон набуває такої кінетичної енергії у прискорювальному електричному полі напруженістю  $E$  тоді, коли середня відстань вільного пробігу  $\langle l \rangle$  електрона задовольняє умові

$$A_i \left(1 + \frac{m}{M}\right) = eU = eE < l >, \quad (5)$$

звідки

$$< l > = \frac{A_i}{eE} \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{\varphi_i}{E} \left(1 + \frac{m}{M}\right), \quad (6)$$

де  $\varphi_i$  — потенціал іонізації.

### § 7.2. Несамостійний розряд у газах

Явища, які пов'язані з проходженням електричного струму крізь газ і супроводжуються зміною стану газу (склад, тиск, енергетичні стани молекул тощо), називають електричним розрядом у газах. Залежно від механізму іонізації розряди в газах поділяють на несамостійні і самостійні. Електричний розряд вважають *несамостійним*, якщо він виникає тільки під дією іонізатора, а з припиненням його дії розряд зникає. Електропровідність газів досліджують за допомогою газорозрядної трубки (рис. 7.1) з двома електродами, наповненої досліджуваним газом. Напругу між електродами змінюють потенціометром. Іонізацію здійснюють довільним способом, наприклад, ультрафіолетовим або рентгенівським випромінюванням. Як видно з вольт-амперної характеристики електричного розряду (рис. 7.2), в газі при постійній потужності іонізатора спочатку зі зміною напруги  $U$  струм змінюється лінійно. З подальшим збільшенням напруги залежність  $I = f(U)$  набуває нелінійного характеру, а при  $U > U_1$  сила струму не залежить від напруги ( $I_n = \text{const}$ ). Струм  $I_n$  називають *струмом насичення*. З підвищенням напруги  $U > U_2$  спостерігається значне зростання сили струму, яке супроводжується тепловими і світловими ефектами. Струм у газах при несамостійному розряді створюється напрямленим рухом іонів і електронів під дією електричного поля.

Розглянемо несамостійний газовий розряд кількісно. Для спрощення вважатимемо, що газовий розряд відбувається між двома

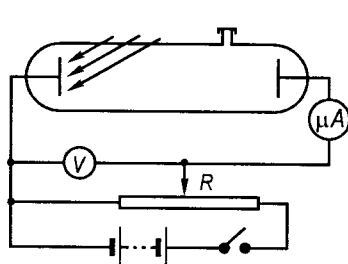


Рис. 7.1

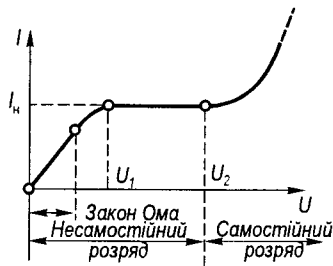


Рис. 7.2

плоскими електродами, де концентрація позитивних і негативних іонів однакова ( $n_+ = n_- = n$ ); заряди позитивних і негативних іонів за абсолютним значенням дорівнюють заряду електрона ( $q_+ = q_- = |e|$ ). У газових розрядах часто спостерігається нерівномірний розподіл іонів між електродами. При цьому градієнт концентрації їх  $dn/dx$  не дорівнює нулеві і виникає помітний дифузійний потік іонів.

У разі створення між електродами різниці потенціалів крім дифузійних потоків іонів виникає напрямлений рух позитивних і негативних іонів, тому повна густина струму буде визначатись виразом

$$j = n_+ q_+ v_+ + n_- q_- v_- - q_+ D_+ \frac{dn_+}{dx} - q_- D_- \frac{dn_-}{dx} =$$

$$= nev_+ + nev_- - eD_+ \frac{dn_+}{dx} - eD_- \frac{dn_-}{dx}, \quad (7.1)$$

де  $v_+$ ,  $v_-$ ,  $D_+$ ,  $D_-$  — відповідно швидкості напрямленого руху і коефіцієнти дифузії позитивних і негативних іонів. Якщо концентрація іонів в усьому об'ємі між електродами однакова, то дифузійних потоків іонів не буде. Тоді вираз (7.1) спрощується:

$$\vec{j} = ne\vec{v}_+ + ne\vec{v}_- = ne(b_+ + b_-)\vec{E}, \quad (7.2)$$

де  $b_+$ ,  $b_-$  — рухливості іонів газу, які введено аналогічно рухливостям іонів електроліту;  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля. Формула (7.2) подібна до закону Ома. Вона буде еквівалентною закону Ома за умови, якщо множник  $ne(b_+ + b_-)$  не залежить від  $\vec{E}$ . Це справджується у разі досить малих  $\vec{E}$ , де спостерігається лінійний характер вольт-амперної характеристики.

Запишемо рівняння балансу іонів у газі за наявності в ньому електричного струму і постійної дії зовнішнього іонізатора. Нехай під дією іонізатора щосекунди в одиниці об'єму утворюється  $\Delta n$  пар іонів. Внаслідок рекомбінації щосекунди зникає в одиниці об'єму певна кількість пар іонів  $\Delta n_1$ , яка пропорційна як концентрації позитивних іонів  $n_+$ , так і концентрації негативних іонів  $n_-$ , тобто  $\Delta n_1 = \alpha n^2$  ( $\alpha$  — коефіцієнт рекомбінації;  $n_+ = n_- = n$ ). За наявності електричного струму також відбуватиметься зменшення концентрації іонів газу. Якщо площа електрода  $S$ , а відстань між електродами  $l$ , то при силі струму  $I$  (густині струму  $j$ ) зменшення кількості іонів в одиниці об'єму за одиницю часу визначатиметься так:

$$\Delta n_2 = \frac{I}{Sle} = \frac{j}{le}.$$

Рівняння балансу матиме вигляд

$$\frac{dn}{dt} = \Delta n - \Delta n_1 - \Delta n_2 = \Delta n - \alpha n^2 - \frac{j}{le}. \quad (7.3)$$

Умовою динамічної рівноваги кількості іонів у міжелектродному просторі за наявності струму є  $dn/dt = 0$ , тобто

$$\Delta n = \alpha n^2 + \frac{j}{le}. \quad (7.4)$$

Розглянемо граничні випадки. Якщо густина струму незначна і втрати іонів внаслідок їх переміщення до електродів під дією поля напруженістю  $\bar{E}$  значно менші від їх втрат через рекомбінацію, тобто  $j/(le) \ll \alpha n^2$ , то  $n = \sqrt{\Delta n/\alpha}$  і вираз (7.2) матиме вигляд

$$\bar{j} = e \sqrt{\frac{\Delta n}{\alpha}} (b_+ + b_-) \bar{E}. \quad (7.5)$$

Цей випадок реалізується за досить малих напруженостей електричного поля  $\bar{E}$ . Для таких полів виконується закон Ома в газових розрядах.

Тепер вважатимемо, що зменшенням концентрації іонів через їхню рекомбінацію можна нехтувати порівняно зі зменшенням концентрації іонів завдяки наявності електричного струму, тобто  $\alpha n^2 \ll j/(le)$ . Тоді

$$j = e l \Delta n. \quad (7.6)$$

Звідси видно, що за такої умови густина струму не залежить від напруженості поля  $\bar{E}$ . Формула (7.6) виражає *густину струму насичення*. Значення  $j$  залежить від  $\Delta n$ , тобто від іонізуючої здатності іонізатора. Чим більша потужність іонізатора (чим більше утворюється за одиницю часу пар іонів  $\Delta n$ ), тим більшим буде струм насичення  $I_n$  за тих самих значень напруги  $U$ .

З формули (7.6) випливає дещо несподіваний на перший погляд висновок про те, що густина струму насичення  $j$  тим більша, чим більша відстань між електродами. Цей висновок справедливий за умови, що іонізація відбувається в усьому об'ємі між електродами. Оскільки при струмі насичення кількість іонів, що утворюються за одиницю часу, дорівнює кількості іонів, які щосекунди досягають електродів, тому відповідно й густина струму насичення пропорційна  $l$ , бо при більшій відстані між електродами виникатиме більша кількість іонів. Для проміжних значень напруженості електричного поля залежність сили струму від напруженості має складніший характер; закон Ома не виконується.

Для вимірювання коефіцієнтів рекомбінації англійський фізик Е. Резерфорд (1871—1937) у 1897 р. запропонував такий метод. Досліджуваний газ продувається зі швидкістю  $v$  крізь латунну

трубку (рис. 7.3), попередньо пройшовши шар вати. Крізь вікно  $A$  здійснюється іонізація газу. Утворені іони захоплюються потоком газу і під час свого руху частково рекомбінують. На деяких відстанях  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  від місця іонізації вздовж трубки розміщено однакові електроди 1, 2, 3, ...,  $n$ . Кожний із них окремо може бути з'єднаний з електрометром. Всі інші електроди з'єднуються з трубкою, під'єднаною до одного з полюсів батареї  $G$ . Другий полюс батареї заземлюють. Спочатку електрод 1 з'єднують з електрометром  $B$ . Між електродом і стінками труби створюють сильне електричне поле, під дією якого всі іони одного знака потрапляють на електрод. За час  $t$  вони передадуть електродові заряд  $q_1 = n_1 e v t S$  ( $S$  — площа електрода;  $n_1$  — концентрація іонів біля електрода 1;  $e$  — заряд одновалентного іона). Потім приєднують електрод 2 до електрометра й аналогічно вимірюють за такий же проміжок часу  $t$  заряд  $q_2 = n_2 e v t S$ . На основі співвідношення (3) прикладу 7.2 запишемо:

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \alpha t, \quad (7.7)$$

де  $t$  — час, за який потік газу проходить відстань між електродами 1 і 2, тобто  $l_2 - l_1$ . Тоді

$$t = \frac{l_2 - l_1}{v}.$$

Підставивши у формулу (7.7) відповідно  $n_1, n_2$  і  $t$ , одержимо:

$$\alpha = \left( \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} \right) \frac{S v^2 e t}{l_2 - l_1}. \quad (7.8)$$

Описаний метод вимірювання коефіцієнта рекомбінації  $\alpha$  дає порівняно хороші результати. Існує ряд інших експериментальних методів вимірювання значення  $\alpha$ , результати яких тією чи іншою мірою збігаються з розглянутим вище методом.

**Приклад 7.2.** Під дією іонізатора концентрація іонів у газі встановилася такою, що дорівнює  $n_0$ . Встановити закономірність зменшення концентрації іонів після припинення дії іонізатора.

**Розв'язання.** Після припинення дії іонізатора концентрація іонів зменшуватиметься внаслідок рекомбінації. Вважатимемо, що концентрації позитивних і негативних іонів однакові. Нехай після припинення дії іонізатора в момент часу  $t$  концентрація іонів дорівнює  $n$ . Рекомбінація відбувається під час зустрічі позитивних і негативних іонів. Кількість таких зустрічей пропорційна концентрації як позитивних, так і

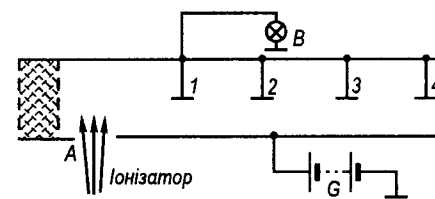


Рис. 7.3

негативних іонів, тобто пропорційна  $n^2$ . Тоді зменшення концентрації іонів за проміжок часу  $dt$  можна записати так:

$$dn = -\alpha n^2 dt. \quad (1)$$

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$-\frac{dn}{n^2} = \alpha dt. \quad (2)$$

Зінтегруємо рівняння (2) у межах від  $t = 0$  (момент припинення дії іонізатора) до деякого часу  $t$ , в момент якого концентрація іонів дорівнює  $n$ :

$$-\int_{n_0}^n \frac{dn}{n^2} = \alpha \int_0^t dt,$$

звідки

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} = \alpha t. \quad (3)$$

Звідси одержимо

$$n = \frac{n_0}{1 + \alpha n_0 t}. \quad (4)$$

Формула (4) виражає закономірність зменшення концентрації іонів після припинення дії іонізатора.

### § 7.3. Рухливість іонів

На іон, маса якого  $m$  і заряд  $e$ , в однорідному електричному полі напруженістю  $\vec{E}$  діє сила  $\vec{F} = e\vec{E}$ , і він набуває прискорення  $\vec{a} = e\vec{E} / m$ . За час  $\langle t \rangle$  при початковій швидкості  $\vec{v}_0 = 0$  іон дрейфує в напрямі поля і проходить шлях  $s = a \langle t \rangle^2 / 2 = eE \langle t \rangle^2 / (2m)$ .

Середній час  $\langle t \rangle$  між зіткненнями іонів при їх хаотичному русі із середньою арифметичною швидкістю  $\langle v \rangle$  дорівнює  $\langle t \rangle = \langle l \rangle / \langle v \rangle$  ( $\langle l \rangle$  — середня довжина вільного пробігу іонів). Час  $\langle t \rangle$  і середня довжина вільного пробігу  $\langle l \rangle$  визначаються так, щоб можна було вважати, що при кожному зіткненні іон повністю втрачає енергію свого впорядкованого руху. Тоді середня швидкість упорядкованого руху в напрямі поля (дрейфова швидкість  $\langle v_d \rangle$ ) визначається як відношення  $s$  до  $t$ , тобто

$$v_d = \frac{s}{\langle t \rangle} = \frac{e \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle} E. \quad (7.9)$$

Звідси рухливість

$$b = \frac{e \langle l \rangle}{2m \langle v \rangle}. \quad (7.10)$$

З формули (7.10) можна зробити висновки, що рухливість позитивних і негативних іонів з однаковими масами є однаковою. Проте досліди показують, що рухливість негативних зарядів більша від рухливості позитивних. Це пояснюється тим, що рухливостями негативних зарядів визначаються рухливостями негативних іонів і електронів, а рухливість електронів через їх малу масу досить велика. З формули (7.10) випливає також, що рухливість іонів обернено пропорційна тискові, оскільки  $\langle l \rangle \sim 1/p$ . Цей висновок підтверджується дослідом.

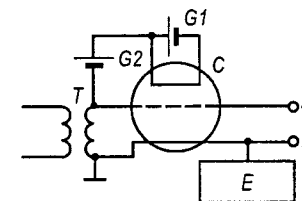


Рис. 7.4

У цілому формула (7.10) не передає всієї картини руху іонів. Дослід свідчить про те, що значення рухливостей, знайдені експериментально, менші від значень, одержаних теоретичними розрахунками. Для пояснення цих розбіжностей французький фізик П. Ланжевен (1873—1946) запропонував враховувати поляризованість іонів під час наближення їх один до одного при зіткненнях.

Для вимірювання рухливості іонів існує ряд методів. Розглянемо один із них, який запропонував Е. Резерфорд. Скляна колба дослідної установки (рис. 7.4) заповнюється досліджуванним газом. Платинова дротина  $S$  нагрівається джерелом струму  $G1$  до високої температури і створює іони між електродами  $C$  і  $A$  (електрод  $A$  виготовлено у вигляді сітки). Іони певного знака під дією електричного поля джерела напруги  $G2$  рухаються до сітки  $A$ . Між електродами  $A$  і  $B$  за допомогою трансформатора  $T$  створюються змінна різниця потенціалів  $U = U_0 \sin \omega t$  і відповідне електричне поле напруженістю  $E = \frac{U_0}{l} \sin \omega t$  ( $l$  — відстань між електродами  $A$  і  $B$ ;  $\omega$  — циклічна частота зміни напруги  $U$ ).

Нехай у момент часу  $t = 0$  позитивний іон проходить сітку  $A$  і електричне поле дорівнює нулеві. Потім цей іон рухається до електрода  $B$  зі швидкістю  $v = bE = b \frac{U_0}{l} \sin \omega t$  і за час  $t$

проходить відстань  $x = \int v dt = \frac{bU_0}{l\omega} (1 - \cos \omega t)$ . Найбільша відстань,

на яку іон зможе віддалятися від електрода  $A$ ,  $x_{\max} = \frac{2bU_0}{l\omega}$ . Якщо  $x_{\max} < l$ , то іон не потрапляє на електрод  $B$  і електрометр  $E$ . Добором значень  $U_0$  домагаються показів електрометра. Тоді  $l = x_{\max}$  і рухливість (враховуємо, що  $\omega = 2\pi/T$ )

$$b = \frac{l^2 \omega}{2U_0} = \frac{\pi l^2}{U_0 T}.$$



Дослід показує, що рухливість позитивних іонів не залежить помітно від напруженості поля. Рухливість негативних іонів при невеликих напруженостях також майже не залежить від їх значень. Однак при великих значеннях напруженості рухливість їх зростає. Рухливість іонів, особливо негативно заряджених, крім того, залежить значною мірою від наявності домішок.

У табл. 7.1 наведено числові значення рухливості іонів при тиску 1 атм і температурі 18 °С.

Таблиця 7.1

Газ	Рухливість іонів, $\text{cm}^2/(\text{V} \cdot \text{c})$		$b_-/b_+$
	позитивних $b_+$	негативних $b_-$	
Водень	5,91	8,26	1,40
Кисень	1,29	1,79	1,40
Азот	1,27	1,84	1,45
Аргон	1,37	1,70	1,24
Оксид вуглецю	1,10	1,14	1,04
Хлор	0,65	0,51	0,79
Водяна пара (100 °С)	0,62	0,51	0,78

#### § 7.4. Самостійний розряд у газах

Як зазначалось у § 7.2, з підвищенням напруги до значень  $U > U_2$  сила струму в газовому розряді різко зростає в сотні і тисячі разів. Дослід показує, що за певних умов припинення дії іонізатора не впливає на протікання розряду. Електричний струм у газі, який проходить без дії зовнішнього іонізатора, називають *самостійним розрядом*. Самостійний розряд підтримується за досить високої напруги на електродах, при якій той розряд, що почався, самостійно створює потрібні для його подальшого протікання електрони та іони. Поповнення носіїв заряду при самостійному розряді може відбуватись із різних причин, зокрема завдяки механізмові ударної іонізації атомів (молекул) газу. Це процес вибивання електронів з нейтральних атомів під час зіткнення їх з потоком швидких електронів. Отже, несамоістийний розряд переходить у самостійний тоді, коли нові іони утворюються внаслідок внутрішніх процесів, що відбуваються у самому газі.

Первинні електрони, які спричиняють лавиноподібне зростання концентрації носіїв заряду в міжелектродному газовому просторі,

можуть з'явитися внаслідок вибивання електронів сильним електричним полем з окремих молекул газу або з холодного катода (автоелектронна емісія), іонізації газу космічним,  $\gamma$ - або рентгенівським промінням тощо. Первинні електрони на шляху вільного пробігу прискорюються сильним зовнішнім полем і розганяються до швидкостей, коли їх кінетична енергія дорівнює або й стає більшою від роботи іонізації атомів газу. При цьому з'являються позитивні іони та нові електрони, які також набувають енергії, потрібної для іонізації нейтральних атомів газу. Цей процес народження все нових носіїв заряду багаторазово повторюється і лавиноподібно наростає. Так відбувається з кожним електроном, аж поки він не досягне анода. Це спрощена картина ударної іонізації. У дійсності не при кожному зіткненні відбувається іонізація, далеко не всі електрони на шляху вільного пробігу набувають енергії, потрібної для іонізації нейтральних атомів. Разом з процесом іонізації відбувається просто збудження атомів, коли вони переходять на більш високі енергетичні рівні, а при поверненні в нормальний стан випромінюють світло і, отже, газ при самостійному розряді світиться.

Ударна іонізація відбувається за умови, коли кінетична енергія заряджених частинок (електронів)  $W_k$  стає більшою від роботи іонізації  $A_i$  атомів газу, тобто

$$W_k > A_i, \text{ або } \frac{W_k}{e} > \varphi_i,$$

де  $\varphi_i$  — потенціал іонізації. Кінетичну енергію електрон набуває в постійному електричному полі на шляху вільного пробігу:

$$W_k = eE \langle l \rangle = e \frac{U}{d} \langle l \rangle,$$

де  $d$  — відстань між електродами. Умова ударної іонізації набуває вигляду

$$\frac{U \langle l \rangle}{d} > \varphi_i.$$

З цієї умови випливає, що досягти ударної іонізації атомів газу можна або збільшенням напруженості електричного поля  $E = U/d$ , або збільшенням  $\langle l \rangle$  (розрідженням газу).

Розглянемо елементарні основи теорії самостійного розряду. Зазначимо, що при великих значеннях напруженості поля  $E$  рекомбінацією носіїв заряду можна нехтувати, оскільки зразу після виникнення різнойменних зарядів вони розводяться в протилежні боки сильним електричним полем.

Прийmemo, що відстань між електродами в газорозрядній трубці  $d$  (рис. 7.5). Нехай за час  $t$  біля катода утворилися первинні електрони

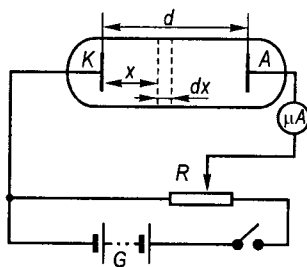


Рис. 7.5

концентрацією  $n_0$ . Рухаючись у прискорювальному електричному полі, електрони на своєму шляху  $x$  будуть іонізувати атоми газу. Вважатимемо, що на шляху  $x$  внаслідок ударної іонізації утворилось у кожній одиниці об'єму  $n$  вторинних електронів. Виділимо шар газу  $dx \gg \langle l \rangle$ . Пролітаючи крізь цей шар,  $n$  електронів іонізують атоми і їхня концентрація на цьому шляху зростає на  $dn$ . Очевидно, що  $dn$  буде прямо пропорційним як кількості електронів  $n$ , так і відстані  $dx$ :

$$dn = \alpha n dx, \quad (7.11)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт ударної іонізації,  $m^{-1}$ .

Зінтегрувавши останній вираз, одержимо:

$$n = C e^{\alpha x}. \quad (7.12)$$

При  $x = 0$   $C = n_0$ . Тоді

$$n = n_0 e^{\alpha x}. \quad (7.13)$$

Кількість електронів, які досягають одиниці площі анода ( $x = d$ ),

$$n_a = n_0 e^{\alpha d}. \quad (7.14)$$

З формули (7.14) випливає, що при  $n_0 = 0$   $n_a$  також дорівнює нулеві і, отже, ударної іонізації не відбудеться. Щоб розряд був самостійним, треба, щоб електронні лавини підтримували самі себе, тобто щоб у газі відбувався ще один процес, завдяки якому утворювалися б нові електрони. Одним із таких процесів може бути вторинна електронна емісія з катода під час його бомбардування іонами. Позначимо кількість електронів, що звільняються з одиниці поверхні за одиницю часу під дією зовнішнього іонізатора і внаслідок вторинної електронної емісії, через  $n_k$ . Тоді густина потоку електронів на аноді буде

$$n_a = n_k e^{\alpha d}. \quad (7.15)$$

Внаслідок ударної іонізації кількість електронів, що виникає в лавині, дорівнює кількості позитивних іонів, які при цьому утворюються, тобто

$$n_a - n_k = n_k (e^{\alpha d} - 1). \quad (7.16)$$

Під час бомбардування катода іонами внаслідок вторинної електронної емісії з нього звільнятиметься електронів  $\gamma n_k (e^{\alpha d} - 1)$ , де  $\gamma$  —

коефіцієнт пропорційності (для металів  $\gamma < 1$ ). Тоді, враховуючи одночасну дію зовнішнього іонізатора і вторинну електронну емісію з катода, можна записати, що

$$n_k = n_0 + \gamma n_k (e^{\alpha d} - 1). \quad (7.17)$$

Звідси

$$n_k = \frac{n_0}{1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1)}. \quad (7.18)$$

Густина потоку електронів на аноді

$$n_a = \frac{n_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1)}. \quad (7.19)$$

На аноді струм газового розряду повністю визначається рухом електронів, тому густина струму на основі (7.19) виражатиметься так:

$$j = en_a = \frac{en_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1)}. \quad (7.20)$$

При стаціонарному режимі розряду густина струму має бути однакою в усьому проміжку газового розряду, тому в будь-якій точці густина струму складатиметься із суми густин електронного  $j_e$  та іонного  $j_i$  струмів, тобто

$$j = j_e + j_i.$$

Аналіз виразу (7.20) свідчить про те, що за умови, коли  $1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1) \rightarrow 0$ , густина струму  $j \neq 0$  навіть у разі припинення дії зовнішнього іонізатора ( $n_0 = 0$ ). Отже, умовою виникнення самостійного розряду є рівність

$$\gamma (e^{\alpha d} - 1) \rightarrow 1. \quad (7.21)$$

Напругу, при якій виконується умова (7.21), називають *напругою пробою газу* або *напругою запалювання газового розряду*.

Розглянуту теорію самостійного розряду вперше розробив англійський фізик Дж. Таунсенд (1868—1957). З часом вона зазнала доповнень. Так, було виявлено, що електрони для підтримання електронної лавини можуть утворюватись не тільки ударною іонізацією електрона; можлива іонізація атомів і молекул іонами та фотоіонізація. Крім цього, слід враховувати також неоднорідність електричного поля, яке зумовлене об'ємними зарядами при іонізації газу. Все це вказує на складність теорії самостійного газового розряду. Тому на сьогодні єдиної теорії самостійного газового розряду, яка враховувала б усі можливі процеси, ще не створено.

## § 7.5. Тліючий розряд

Форма і взаємне розміщення електродів, режим їхньої роботи (підведена потужність, характер охолодження та інші параметри) визначають тип розряду. Кожному типові відповідає певний стан іонізованого газу, який характеризується температурою, електропровідністю, спектрами випромінювання і поглинання тощо. Більше того, виявляється, що стан деякого елемента іонізованого газу для конкретного типу розряду істотно залежить від того, в якій області розрядного проміжку міститься цей елемент, та від його відстані до електрода. У зв'язку з цим розрізняють не тільки типи розрядів, а й області розрядного проміжку, що належать до того самого типу розряду.

Найпростішим і найбільш вивченим типом розряду, в якому газ перебуває в дуже нерівноважному стані, є *тліючий розряд*. Він спостерігається в газах при низьких тисках (близько  $10^3$  Па і менше). Тліючим розрядом називають самостійний розряд, в якому звільнення електронів з катода відбувається внаслідок бомбардування його позитивними іонами і фотонами, що утворюються в газі. Для спостереження розряду цього типу беруть скляну трубку 30—50 см завдовжки, в яку впаяно два електроди (рис 7.6, а). Коли напруга між електродами становить кілька сотень вольтів і тиск газу у трубці близько  $7 \cdot 10^3$  Па, виникає самостійний розряд у вигляді тонкої гнучої нитки, а при тиску близько  $133 \cdot 10^{-1}$ — $133 \cdot 10^{-2}$  Па розряд має вигляд, який схематично зображено на рис 7.6, а. Розрядний проміжок між катодом і анодом поділяється на ряд областей. Безпосередньо до катода прилягає вузький, так званий *астоновий* темний простір 1. У цьому шарі електрони, звільнені з катода, ще не набули енергії, достатньої для збудження атомів і молекул газу. Його ширина становить кілька десятих часток міліметра. До цього шару прилягає тонкий світлий шар 2, який називають *катодним світінням*. У цьому шарі відбувається збудження атомів і молекул електронами без іонізації їх. При переході в нормальний стан збуджені атоми випромінюють світло. За катодним шаром іде темний шар 3, який названо *темним катодним простором* або *темним кружковим простором*. У цьому просторі відбуваються іонізація атомів і молекул та наростання електронних лавин. Область темного катодного простору найважливіша для підтримання самостійного розряду, оскільки в ній утворюються позитивні іони, які й зумовлюють вторинну емісію



Рис. 7.6

електронів з катода. Світлий шар 4 називають *тліючим світінням*. Воно виникає внаслідок рекомбінації електронів з іонами, а також переходів атомів із збудженого стану в нормальний. Цей шар має різку межу з боку катода. Його яскравість поступово зменшується і переходить у так званий *темний фарадеїв простір* 5. Області 1—5 називають катодними частинами розряду. В них відбуваються всі процеси, внаслідок яких розряд є самостійним. За фарадеєвим простором лежить світла область 6, яка досягає анода. Цю область називають *позитивним світним стовпом*. Іноді цей стовп розпадається на кілька шарів, або страт. Позитивний стовп — це іонізований газ, і його світіння зумовлене в основному рекомбінацією електронів з позитивними іонами. Наявність позитивного стовпа не впливає на підтримання самостійного розряду. Однак ця область найцікавіша з погляду застосування тліючого розряду.

З'ясуванню характеру фізичних процесів, які відбуваються в кожній області тліючого розряду, допомагають криві розподілу потенціалу  $\phi$  і напруженості електричного поля  $E$  вздовж розрядної трубки 1 (рис. 7.6, б, в). Оскільки в позитивному стовпі хід залежності потенціалу від  $l$  лінійний, а напруженість постійна, то з цього випливає висновок, що концентрації позитивних і негативних зарядів є однаковими. Якщо в газорозрядній трубці зробити анод рухомим, то під час його переміщення до катода катодні області розряду 1—5 залишатимуться без змін, а позитивний стовп буде скорочуватись до повного зникнення його. З подальшим переміщенням анода в тліючий шар світіння зникає зовсім. Розряд припиняється, коли анод буде на межі просторів 1 і 2.

Дослід показує, що коли сила струму при розряді є невеликою, то катодний спад потенціалу не залежить від сили струму. Зміна сили струму зумовлює тільки зміну розміру світної поверхні на катоді. Такий спад потенціалу називають *нормальним катодним спадом*. Коли ж сила струму досягає певного значення, вся поверхня катода покривається світною плівкою і катодний спад потенціалу починає зростати із збільшенням сили струму. У цьому разі його називають *аномальним катодним спадом*, а розряд — *аномальним тліючим розрядом*. Виявляється, що нормальний катодний спад потенціалу залежить тільки від матеріалу катода і роду газу. Катодний спад потенціалу при цьому пропорційний роботі виходу електронів із катода. Така залежність дає можливість виготовляти газорозрядні трубки з малою напругою запалювання розряду. Так, у неонових лампах, залізни електроди яких покриті шаром барію, напруга запалювання розряду близько 70 В. Такі лампи широко використовуються як індикаторні.

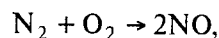
Оскільки речовина катода в тліючому розряді поступово переходить у пароподібний стан, то такий розряд широко використовується для катодного розпилювання металів. Якщо перед катодом

тліючого розряду розміщати різні предмети, то вони покриватимуться тонким шаром металу катода. Так виготовляють металеві дзеркала високої якості.

Тліючий розряд також широко використовується як джерело світла (лампи денного світла, рекламні газорозрядні трубки тощо).

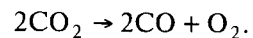
На відміну від газу катодної частини розряду газ позитивного стовпа характеризується високим ступенем просторової однорідності параметрів уздовж стовпа. Характерною особливістю позитивного стовпа є те, що відношення напруженості електричного поля до густини газу і середня енергія електронів встановлюються незалежно від сили струму, що проходить під час розряду, та від прикладеної до електродів напруги.

Розряд в атомарному газі значно відрізняється від розряду в молекулярному газі. Це пов'язано з наявністю у них коливальних і обертових ступенів вільності. Наявність цих додаткових ступенів вільності визначає основні властивості розряду в молекулярних газах і уможливує широке застосування розряду цього типу в різних лазерних, плазмохімічних та інших установках. Створення нерівноважного стану молекулярного газу за допомогою газового розряду дає змогу застосовувати його для прискорення хімічних реакцій. Провідна роль у дослідженнях подібного роду належить ученим Фізичного інституту (Москва), які працювали під керівництвом академіка М. Г. Басова (н. 1922 р). Наприклад, ними було вивчено проходження в нерівноважних умовах реакції окиснення азоту



який використовується для добування досить важливого компонента багатьох хіміко-технологічних процесів — азотної кислоти. У рівноважних умовах ця реакція може відбуватися тільки при нагріванні суміші азоту і кисню до температури понад 1000 °С, що потребує енергетичних затрат близько 20 еВ у розрахунку на одну утворену молекулу NO. При нерівноважному коливальному збудженні газу в умовах газового розряду затрати енергії зменшуються майже в сім разів. Газорозрядна технологія добування оксиду азоту впроваджується в хімічне виробництво.

Прикладом хімічного процесу, здійснення якого в нерівноважних умовах газового розряду може дати значний економічний ефект, є процес відновлення оксиду вуглецю із вуглекислого газу



Ця реакція досить важлива для розвитку водневої енергетики, оскільки оксид вуглецю може бути використаний при синтезі з води водню як палива, продукти згоряння якого зовсім не шкідливі для навколишнього середовища. У рівноважних умовах CO<sub>2</sub> активно

дисоціює при температурах газу близько 3—4 тис. градусів, і на добування однієї молекули CO потрібно затратити енергію понад 12 еВ. У газовому розряді енергетичні витрати у два рази менші. Технологія розкладання вуглекислого газу за допомогою газового розряду розроблялася на основі досліджень, виконаних в Інституті атомної енергії ім. І. В. Курчатова (Москва) під керівництвом академіка В. О. Лєгасова (н. 1936 р.).

### § 7.6. Катодне та анодне (каналове) випромінювання

Під час вивчення тліючого розряду встановлено, що з катода вилітає велика кількість електронів, які вибиваються позитивними іонами. Ці електрони прискорюються в області катодного спаду потенціалу.

Зі зменшенням тиску газу в газорозрядній трубці середня довжина вільного пробігу електронів збільшується і відповідно розширюється катодний темний простір. При тиску  $133 \cdot 10^{-2} - 133 \cdot 10^{-3}$  Па катодний темний простір заповнює майже всю трубку й електрони рухаються в трубці без зіткнень. Такі пучки вперше виявив у 1879 р. англійський фізик-хімік У. Крукс (1832—1919). Природа цього випромінювання, яке назвали *катодним*, довгий час залишалася нез'ясованою. Група німецьких фізиків на чолі з Генріхом Герцом стверджувала, що катодне випромінювання має таку саму хвильову природу, як і звичайне випромінювання, тільки хвиля в них є коротшою. Група англійських фізиків на чолі з У. Круксом висловила припущення, що катодне випромінювання — це потік матеріальних частинок, які рухаються з великою швидкістю. Це припущення дослідно довів у 1895 р. французький фізик Ж. Перрен (1870—1942). Встановлено, що катодне випромінювання є потоком електронів. Електронна природа катодного випромінювання підтверджується їхнім відхиленням в електричному полі від початкового напрямку до позитивно зарядженої пластини конденсатора. У перенесенні катодним випромінюванням негативного заряду можна також переконалися за допомогою електрометра, з'єданого з вмонтованим усередині розрядної трубки фарадеевим циліндром (дослід Перрена).

Електрони біля катода перебувають під дією перпендикулярного до катода сильного електричного поля, тому, пролетівши область катодного спаду потенціалу, вони рухаються далі в слабкому електричному полі практично за інерцією. Цим і пояснюється, що катодне випромінювання у перпендикулярному напрямі до поверхні катода поширюється прямолінійно незалежно від розміщення анода. Проникна здатність катодного випромінювання невелика. Ставлячи на шляху такого випромінювання тонкі металеві пластинки, можна

виявити його повну відсутність в області геометричної тіні пластинки. Шар повітря в кілька сантиметрів завтовшки майже непрозорий для електронів, що виникають при напрузі в кілька кіловольтів. Однак при напрузі в кілька десятків кіловольтів отримують катодне випромінювання, що має значну проникність. Уперше в 1893 р. німецький фізик Ф. Ленард (1862—1947) за допомогою розрядної трубки із спеціальним віконцем вивів електрони за межі трубки. Вікно було виготовлене з металевої решітки, прикритої тонкою (0,002 мм завтовшки) пластинкою з алюмінію. Досліди Ленарда поклали початок розвитку електронної фізики.

Катодне випромінювання може спричиняти флуоресценцію твердих тіл (екрани осцилографів, телевізорів і под.), діяти на фотопластинку тощо. Це випромінювання набуло великого науково-технічного значення після того, як з його допомогою було одержано рентгівське випромінювання. Отримання рентгівського випромінювання та його властивості розглядаються в курсах оптики й атомної фізики.

Поряд з катодним випромінюванням у випадку спеціальної будови розрядної трубки можна спостерігати *анодне випромінювання*, яке являє собою молекулярний пучок позитивних іонів газу, що рухаються з великою швидкістю. Якщо у плоскому катоді зробити отвори, то випромінювання спостерігатиметься у формі малосвітних пучків, що виходять з каналів катода. Тому це випромінювання часто називають *каналовим*. Так само, як і катодне випромінювання, воно зумовлює теплові та механічні ефекти, а також флуоресценцію скла та інших речовин і відхиляється в електричному полі.

Анодне випромінювання відкрив у 1886 р. Е. Гольдштейн, а його властивості вивчили Дж. Дж. Томсон і німецький фізик В. Він (1864—1928). Розрядні трубки, призначені для спостереження анодного випромінювання, були використані як вимірювальні прилади надзвичайної точності, за допомогою яких можна визначати масу окремих атомів. Продовжуючи роботи Дж. Томсона, англійський фізик Ф. Астон (1877—1945) у 1919 р. експериментально відкрив існування нуклонів, а також довів, що атомні маси майже всіх елементів виражаються цілими числами.

Через наявність процесів перезарядження в пучку анодного випромінювання є не тільки позитивні, а й негативні іони, а також швидкі частково збуджені нейтральні частинки. Такий пучок у магнітному полі поділяється на три пучки: позитивні іони відхиляються в один бік, негативні — у протилежний, нейтральні молекули і атоми не зазнають ніяких відхилень. При повторному пропусканні цих пучків крізь магнітне поле кожний з них знову розпадатиметься на три

пучки. Це означає, що процеси перезарядження відбуваються не тільки перед катодом, а й у закатоному просторі.

Існування катодного та анодного випромінювання є хорошим підтвердженням правильності уявлень про процеси, що відбуваються в тліючому розряді. Катодне випромінювання доводить існування інтенсивної вторинної електронної емісії з катода, а каналове показує, що катод справді перебуває під бомбардуванням позитивних іонів.

### § 7.7. Іскровий розряд

З поступовим збільшенням напруги між двома електродами, розміщеними в газі при нормальному тиску, виникає самостійний розряд, який називають *іскровим*. При цьому повітряний проміжок між електродами пронизується яскраво світним тонким каналом зигзагоподібної форми з розгалуженнями (рис. 7.7). Іскровий розряд у газах — це пробій газового діелектрика, який відбувається у разі досягнення певної напруженості електричного поля  $E_k$  (критична напруженість поля, або напруга пробою). Ця напруженість залежить від роду газу, його стану та від форми електродів. Для повітря за нормальних умов  $E_k \approx 3 \cdot 10^6$  В/м. Критичне значення напруженості майже лінійно залежить від тиску газу в широкому його інтервалі, тобто

$$\frac{E_k}{p} \approx \text{const.} \quad (7.22)$$

Однак після того як розрядний проміжок «пробито» іскровим каналом, опір цього проміжку стає малим і крізь канал проходить короткочасний імпульс струму великого значення, що зумовлює виділення великої кількості теплоти. При цьому температура газу в розрядному проміжку досягає  $10^4$  К. Миттєво нагрітий газ розширюється з утворенням циліндричних ударних хвиль. Це супроводжується звуковими ефектами (тріск або грім).

Досліди показують, що канали іскрового розряду починають зростати іноді від позитивного електрода, іноді від негативного, а іноді навіть від якоїсь точки між ними.

Напруженість поля біля електродів залежить від кривизни поверхні електрода. Тому мінімальні напруги, при яких для даної відстані між електродами починається іскровий розряд, неоднакові для електродів різної форми. Так, при напрузі  $10^5$  В у повітрі за нормальних умов іскровий розряд між вістрями відбувається у проміжку 220 мм, а між плоскими електродами — у проміжку 36,7 мм. Якщо зменшувати відстань між електродами при постійній напрузі, то напруженість



Рис. 7.7.

електричного поля в газовому проміжку буде зростати і при досягненні критичної напруженості  $E_k$  відбувається іскровий розряд. Чим більша відстань між електродами, тим більша напруга потрібна між ними, при якій вперше проскочить іскра. Така залежність розміру іскрового проміжку від напруги покладена в основу роботи високовольтного іскрового вольтметра.

Зупинимось на з'ясуванні механізму іскрового розряду. Спочатку вважали, що іскровий розряд зумовлений тими самими процесами, що і тліючий розряд, тобто об'ємною іонізацією молекул електронами і вторинною електронною емісією позитивних іонів. Однак, як показав дослід, ці процеси не можуть пояснити ряду особливостей утворення іскрового розряду. Так, згідно з наведеним механізмом розряду час для розвитку іскри має бути близько  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  с. Осцилографічні дослідження показують, що час розвитку іскрового розряду значно менший і становить  $10^{-7}$ — $10^{-8}$  с. Механізм розвитку іскрового розряду пояснюється стримерною теорією розряду, яку розробили у 1940 р. Д. Мік і Т. Люб. Ця теорія якісно пояснює основні особливості розряду, хоча в кількісному плані вона ще далека від завершення. Згідно з цією теорією виникненню яскраво світлого каналу іскри передують поява світних областей підвищеної провідності — *стримерів*. Їхнє зародження пояснюється виникненням електронних лавин біля катода. Під дією стримерів відбувається іонізація і збудження атомів та молекул газу. Світлові кванти, що випромінюються збудженими атомами та молекулами на шляху руху до анода, іонізують газ і створюють початки нових стримерів. Таким чином, причиною виникнення стримерів є не тільки утворення електронних лавин внаслідок ударної іонізації, а й іонізація газу випромінюванням, що виникає в самому розряді (фотоіонізація).

Після електронної лавини, що виникла біля катода внаслідок фотоіонізації, відбувається виникнення нових лавин. Ці лавини при своєму розвитку породжують інші лавини. Такий процес відбувається досить швидко. Поки перша лавина досягне розмірів  $AB$ , область підвищеної іонізації (стример) матиме розміри  $CD$  (рис 7.8: лавини умовно зображені заштрихованими конусами, а хвилястими лініями показано напрям поширення випромінювання від областей підвищеної іонізації).

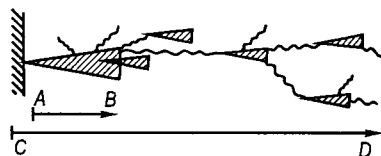


Рис. 7.8

У твердих і рідких діелектриках іскровий розряд є основною формою самостійної провідності і зв'язаний з руйнуванням самого діелектрика. У твердих діелектриках іскра залишає отвір, тому слово «пробій» відповідає своєму

змістові. Зазначимо, що теорія пробою в таких діелектриках менш розроблена, ніж для газів.

Поряд із стримерами, що поширюються від катода до анода (негативні стримери), існують також стримери, що поширюються від анода до катода (позитивні стримери).

## § 7.8. Блискавка. Кульова блискавка

*Блискавка* — це досить гігантський іскровий розряд атмосферної електрики між хмарами або між хмарою і Землею. Електричну природу блискавки вперше дослідно довели Б. Франклін, М. В. Ломоносов та Г. Ріхман.

Здебільшого блискавка як розряд відбувається між хмарами і Землею (90—95 %). У хмарах є і негативні, і позитивні заряди, розміщені в різних частинах хмари. Найчастіше негативні заряди розміщені на нижній частині хмари, відстань від якої до поверхні Землі 1—2 км. Позитивні заряди розміщуються на протилежній частині хмари, хоча можуть бути і значно складніші розподіли зарядів. У нижній частині хмари, де напруженість електричного поля досягає при певній концентрації зарядів критичного значення, починається іонізація, виникають електронні лавини, а потім — стримери, які являють собою розгалужені електропровідні канали. Вони зливаються один з одним і створюють початок яскравого термоіонізованого каналу з великою провідністю, який називають *лідером*.

Фотографування блискавки з часовою розгорткою показало, що утворення лідера відбувається стрибкоподібно — із зупинками на десятки мілісекунд. Після завершення розвитку лідера блискавки починається друга її стадія, яку називають зворотною або основною. На шляху, прокладеному лідером, в його каналі виникає яскраве світіння, яке супроводжується різким збільшенням сили струму, що поширюється від Землі до хмари. При цьому в каналі повітря дуже нагрівається і виникають ударні звукові хвилі — *грим*. Діаметр каналу східчастого лідера від 2 мм до 5 м. Канал оточений короною, діаметр якої 9—12 м. Лідер блискавки виносить негативні заряди хмари у напрямі до Землі, де вони нейтралізуються позитивними зарядами. Основна стадія блискавки розвивається також і всередині хмари. При цьому відбувається стікання її заряду в землю. Після завершення розвитку основної стадії світіння каналу його провідність поступово зменшується і канал розпадається. Цим і завершується цикл явищ, які характеризують блискавку.

У багатьох випадках слідом за описаними процесами по шляху утвореного в атмосфері каналу відбувається розвиток повторних блискавок. При цьому блискавка розвивається завдяки зарядам, розміщеним у більш високих шарах хмари. Лідери повторної і наступної блискавок поширюються неперервно із середньою швидкістю  $10^6$  м/с. За характером світіння їх називають *стрілкоподібними*. Кількість повторних блискавок може досягати кількох десятків. Сила струму в блискавці досить велика — від  $10^4$  до  $5 \cdot 10^5$  А, а напруга між хмарою і землею перед виникненням блискавки досягає  $10^8$ — $10^9$  В. Оскільки тривалість окремого розряду блискавки є дуже малою (близько  $10^{-6}$  с), то заряд, перенесений нею, невеликий і становить від кількох до 350 Кл.

Крім звичайних блискавок, спостерігаються, хоч і рідко, так звані *кульові блискавки*. Кульова блискавка — загадкове явище природи, про спостереження якого повідомляється протягом кількох століть. Значний прогрес у дослідженні цього явища досягнуто за останні 20—25 років. Хоча принципові закономірності її природи в основному зрозумілі, але не можна вважати, що проблема кульової блискавки розв'язана.

Статистичний аналіз спостережень явищ, пов'язаних з кульовою блискавкою, дає змогу висловити уявлення про її властивості. Вона являє собою світне утворення в повітрі здебільшого сферичної форми, діаметр якого близько 30 см, середній час життя — 10 с. Кульова блискавка спостерігається як зовні в атмосфері, так і в приміщеннях, рухається

як горизонтально, так і вертикально з характерною швидкістю від 1 до 10 м/с. Наприкінці свого існування вона може вибухнути або спокійно погаснути.

Інтенсивність світіння кульової блискавки в середньому еквівалентна світінню електричної лампи потужністю 100 Вт. Це світіння є нестационарним, може мати різний колір. Кульова блискавка буває оточена світінням, з неї можуть вилітати іскри.

Поява кульової блискавки звичайно збігається з грозовими явищами в атмосфері. Кульова блискавка має електричні властивості і часто є генератором радіочастотного випромінювання. Теплове випромінювання її, як правило, неінтенсивне, діапазон внутрішньої енергії — від 0,1 до  $10^3$  кДж, густина енергії — від 0,1 до  $10^3$  Дж/см<sup>3</sup>.

З літератури відомий єдиний випадок, коли вдалося визначити хімічний склад сліду кульової блискавки у повітрі. Хімічний аналіз показав підвищений вміст озону і двоокису азоту. Їхній максимальний вміст становив 1,3 г/м<sup>3</sup> для озону і 1,6 г/м<sup>3</sup> для двоокису азоту. Це в 50—100 разів більше, ніж у звичайному повітрі.

Дослідження кульової блискавки з метою з'ясування її природи проводяться протягом кількох століть. Однак складність і багатогранність цього явища не дають можливості повністю відтворити його в лабораторних умовах.

## § 7.9. Коронний розряд

Коронний розряд спостерігається при порівняно високих тисках газу (атмосферний тиск), що перебуває в досить неоднорідному електричному полі. Таке поле можна створити між двома електродами, поверхня одного з яких має значну кривизну (дріт, вістря). Наявність другого електрода не обов'язкова, оскільки його роль можуть виконувати заземлені тіла. Коли напруженість електричного поля біля електрода з більшою кривизною досягне  $3 \cdot 10^6$  В/м, навколо нього виникає світіння. Воно має вигляд оболонки, або корони, що оточує цей електрод. Корону, яка виникає навколо негативного електрода, називають *негативною*, а навколо позитивного електрода — *позитивною*. Механізм виникнення розряду в обох випадках різний.

Якщо корона є негативною, то позитивні іони, які утворюються електронними лавинами, прискорюються неоднорідним електричним полем біля катода і зумовлюють вторинну електронну емісію. Ці електрони породжують нові електронні лавини. Оскільки з віддаленням від дроту напруженість поля зменшується, то на деякій відстані від неї електронні лавини обриваються. Відстань, на яку поширюються електронні лавини, є товщиною корони. Вона завжди менша від відстані між електродами. При коронному розряді електронні лавини не пронизують цілком шар газу, тобто має місце неповний пробій газового проміжку. Електрони, які потрапляють у темну зону коронного розряду, приєднуються до нейтральних атомів газу, внаслідок чого виникають негативні іони. У разі чистих електропозитивних газів негативні іони не утворюються, тому носіями заряду в цій зоні будуть електрони. Дослідно встановлено, що додавання незначної кількості електронегативного газу до електропозитивного значно зменшує силу розрядного струму за однакових умов. У темній зоні розряд має несамостійний характер.

Якщо корона є позитивною, то електронні лавини виникають не внаслідок вторинної електронної емісії, а через об'ємну фотоіонізацію випромінюванням коронного шару біля анода. Позитивні іони в темній зоні корони рухаються до катода. Для виникнення коронного розряду в повітрі необхідно, щоб напруженість електричного поля на поверхні електрода була не меншою від початкової напруженості  $E$  поля корони, яка визначається емпірично формулою Піка

$$E = 31\delta \left( \frac{1 + 0,308}{\sqrt{\delta r_0}} \right) \text{ кВ/см,}$$

де  $\delta$  — густина газу, віднесена до його густини при атмосферному тиску і температурі 25 °С;  $r_0$  — радіус дроту циліндричної форми, на якому виникає корона.

Поряд із стаціонарним проходженням струму в коронному розряді можливі також переривисті явища. У негативній короні ці явища залежать від природи газу, його вологості, наявності в ньому пилу, від стану поверхонь електродів. При цьому в розряді спостерігаються регулярні імпульси струму. Вони являють собою ряд лавин, що супроводжуються фотоіонізацією в оточуючому об'ємі газу. В позитивній короні переривисті явища зумовлені наявністю імпульсів двох видів: лавинних і стримерних. Наявність переривистих явищ у коронному розряді є причиною виникнення значних радіоперешкод.

Із збільшенням напруги між електродами так звана темна зона коронного розряду зникає та виникає іскровий розряд. Коронний розряд займає проміжне положення між тліючим і іскровим розрядами. Він може виникати в природних умовах під дією атмосферного електричного поля на верхівках дерев, корабельних шогл і т.п. Це явище в старовину називалося вогнями св. Ельма і викликало забобонний жах.

Коронний розряд слід враховувати у техніці високих напруг, оскільки при цьому відбуваються втрати електричної енергії. Для запобігання виникненню корони на високовольтних лініях проводи не повинні мати дефектів у вигляді гострих виступів.

Коронний розряд використовують в електричних фільтрах, призначених для очищення промислових газів від твердих і рідких домішок (дим при виробництві сірчаної кислоти, загазованість цехів ливарного виробництва чорної та кольорової металургії тощо). Принцип дії електрофільтра можна пояснити так. У трубі вздовж вертикальної осі розміщують дріт, навколо якого виникає корона. Газ, який треба очистити, пропускають знизу вгору по трубі. Іони газового розряду, що рухаються по циліндричній трубі, осідають на частинках газу. Внаслідок цього частинки рухатимуться до стінок труби під дією електричного поля й осідатимуть. При періодичних ударах по трубі утворений осад відокремлюється і збирається у спеціальному забірнику. Отже, електрофільтри дають можливість не тільки запобігти забрудненню навколишнього середовища, а й отримувати дрібнодисперсні речовини, які можуть бути використані як наповнювачі в хімічній технології.

## § 7.10. Дуговий розряд

Якщо добути іскровий розряд від потужного джерела струму, а потім поступово зменшувати відстань між електродами, то переривистий розряд стає неперервним, тобто виникає новий вид розряду, який називають *дуговим*. При цьому сила струму різко зростає, а напруга на розрядному проміжку падає до кількох десятків вольтів.

Дуговий розряд можна утворити, минаючи іскровий розряд. Для цього електроди зближають до дотикання їх. У місця контакту виникає великий електричний опір. Внаслідок цього виділяється значна кількість теплоти і електроди розжарюються. Якщо тепер електроди розвести на певну відстань, то між ними виникає дуговий розряд. Саме так у 1802 р. В. В. Петров відкрив дуговий розряд.

Електричну дугу в газі при атмосферному тиску утворюють за допомогою спеціальних вугільних електродів, які виготовляють пресуванням порошкоподібного графіту і зв'язувальних речовин. Під час горіння дуги відстань між електродами становить близько 5 мм, сила струму — 10—20 А, а напруга між ними — 40—50 В. У процесі горіння дуги вугільний катод загострюється, а на аноді утворюється заглибина, яку називають *кратером дуги*. Його температура при атмосферному тиску досягає 4000 °С, а при тиску 20 атм — понад 7000 °С. Катод дуги має нижчу температуру, ніж анод, тому при атмосферному тиску його температура досягає 3500 °С. В електричній дузі з металевими електродами відбувається швидке випаровування металу, на що витрачається значна кількість теплоти. Тому температура такої дуги нижча, ніж дуги з вугільними електродами, і становить 2000 — 2500 °С.

Теорію дугового розряду розвинув у 1905 р. російський електротехнік В. Ф. Міткевич (1872—1951). Згідно з його теорією дуговий розряд підтримується головним чином і завдяки термоелектронній емісії з поверхні катода. Це добре підтверджується на досліді. При охолодженні катода внаслідок зменшення термоелектронної емісії дуга не утворюється або працює нестійко.

Поряд з дуговими розрядами, зумовленими термоелектронною емісією, існують дугові розряди, які зумовлені автоелектронною емісією електронів з холодних катодів. Думку про те, що у холодного катода дуговий розряд підтримується автоелектронною емісією з нього, вперше висловив І. Ленгмюр. Оскільки катодний спад потенціалу відбувається на відстані, близькій до довжини вільного пробігу електрона, біля катода виникає електричне поле, яке й зумовлює помітну автоелектронну (холодну) емісію.

Залежно від природи електронної емісії на катоді електричну дугу називають *термоелектронною* (температура катода кілька тисяч градусів) або *автоелектронною* чи *дугою з холодним катодом*. При зміні тиску газу або сили струму дуги виявлено перехід електричної дуги з гарячим катодом у дугу з холодним катодом і навпаки. Виявлені також випадки утворення електричної дуги за наявності термо- і автоелектронної емісії одночасно. Прикладом дугового розряду з холодним катодом є дугові розряди в ртутних лампах — балони з кварцу або із скла спеціальних сортів, з яких попередньо відкачано повітря. Електродами є стовпчики рідкої ртуті. Ртутна дуга — досить потужне джерело ультрафіолетового випромінювання. Тому такі лампи широко застосовуються в медицині, у наукових дослідженнях.

Експериментальні дослідження показали, що джерелом потужної емісії електронів у ртутних лампах є невеликі рухомі плями на катоді (катодні плями), які яскраво світяться. Густина струму в катодній лампі досягає  $10^{10}$ — $10^{11}$  А/м<sup>2</sup>. Катодна пляма може виникнути на поверхні не тільки ртутного, а й будь-якого іншого металевого електрода.

Дуговий розряд має досить широке практичне застосування. Цей розряд найпотужніший, тому в техніці використовують саме його теплову дію. Вперше електричну дугу використав для електрозварювання російський винахідник М. М. Бенардос (1842—1905) ще в 1882 р. Праці Інституту електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України є провідними у світовій науці з питань використання дугового розряду.

Першим практичним застосуванням дугового розряду була електрична свічка Яблочкова як прообраз ламп розжарювання і дугових ламп.

Високу температуру дуги використовують у дугових електричних печах, які відіграють важливу роль у сучасній електрометалургії. Дуговий розряд лежить в основі роботи газотронів, тиратронів та інших пристроїв.

Крім дугових розрядів наведених видів можливе існування дугового розряду у високому вакуумі, який називають *вакуумно-дуговим*. Струм між двома електродами при цьому проходить завдяки випаровуванню одного з них. Вакуумно-дуговий розряд покладено в основу дії вакуумних вимикачів і запобіжників. Розряд цього виду дав можливість створити вакуумно-плазмову технологію отримання тонких плівок та покриттів.

## § 7.11. Поняття про плазму

*Плазмой* називають частково або повністю іонізований газ, в якому густини позитивних і негативних зарядів практично однакові. Взагалі можна вважати, що плазма — це суміш вільних електронів, позитивних та негативних іонів і нейтральних атомів (або молекул). Від звичайних газів плазма відрізняється взаємодією як між окремими частинками, так і колективною взаємодією одночасно великої кількості частинок. Кулонівська взаємодія між зарядженими частинками плазми надає їй властивостей пружного середовища.

Плазма — найбільш поширений стан речовини у природі. Сонце і зорі можна розглядати як гігантські згустки гарячої плазми. Зовнішня поверхня земної атмосфери вкрита оболонкою плазми — іоносферою. За межами іоносфери в навколосемному просторі містяться так звані радіаційні пояси, які є своєрідними плазмовими утвореннями. На практиці плазму спостерігають під час газових розрядів (блискавка, іскра, дуга тощо).

Залежно від ступеня іонізації  $\alpha$  розрізняють слабо іонізовану плазму ( $\alpha$  становить частки процента), помірно іонізовану ( $\alpha$  — кілька процентів) і повністю іонізовану. Розрізняють низькотемпературну і високотемпературну плазми. Низькотемпературною прийнято вважати плазму з так званою іонною температурою  $T_i \leq 10^5$  К, а високотемпературною — плазму з  $T_i \approx 10^6 - 10^8$  К і більше.

Оскільки в космічному просторі плазма є найпоширенішим станом речовини, то багато наукових проблем астрофізики пов'язано з вивченням її фізичних властивостей. Фізика плазми — порівняно новий розділ науки, який досить швидко розвивається. Дослідження високотемпературної плазми мають велике значення для розробки основ термоядерної енергетики. Основні зусилля експериментальних досліджень спрямовані на розроблення методів отримання плазми з високими параметрами (висока температура і велика густина), тобто високотемпературної плазми, яка перебувала б у квазістаціонарному, або стійкому, стані.

Електричні сили, які зв'язують різнойменні заряди в плазмі, забезпечують її квазінейтральність, тобто приблизну рівність концентрації іонів і електронів. Всяке зміщення групи електронів відносно іонів спричиняє виникнення електричних полів, які намагатимуться компенсувати створене збурення. Ці поля зростають зі збільшенням концентрації частинок і у випадку порівняно густої плазми досягають досить великих значень.

Оцінимо напруженість електричного поля, що виникає у разі порушення нейтральності плазми. Для цього вважатимемо, що в деякому об'ємі відбулося повне розділення зарядів і всередині його залишились тільки заряди одного знака. Якщо лінійні розміри виділеної області  $x$ , а концентрація заряджених частинок у плазмі  $n_0$ , то на основі формули (1.80) можна записати

$$\frac{D}{x} \approx n_0 e, \quad (7.23)$$

де  $D = \epsilon_0 \epsilon E$  — електричне зміщення. Тоді

$$E \approx \frac{n_0 e x}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (7.24)$$



Різниця потенціалів між протилежними поверхнями виділеного об'єму

$$U \approx Ex \approx \frac{n_0 ex^2}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (7.25)$$

Так, для плазми, отриманої внаслідок повної іонізації водню за нормальної температури і тиску 133 Па,  $n_0 = 7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ . Повне порушення квазінейтральності в об'ємі діаметром близько 1 мм на основі формули (7.24) зумовлює виникнення електричного поля напруженістю близько  $10^{12} \text{ В/м}$ . З цих наближених результатів можна зробити висновок, що подібне розділення зарядів у плазмі нереальне.

Виявляється, що для певної концентрації і температури плазми існує характерний лінійний розмір  $\delta$ , який задовольняє такі умови: 1) якщо  $x \ll \delta$ , то в межах об'єму з лінійним розміром  $x$  розподіл зарядів відбувається без істотного впливу на рух частинок; 2) якщо  $x \gg \delta$ , то концентрації частинок протилежних знаків у виділеному об'ємі майже однакові.

Характерний розмір  $\delta$  можна оцінити так. В області з лінійним розміром  $\delta$  потенціальна енергія частинки при повному розділенні зарядів приблизно дорівнює енергії теплового руху  $kT$ , тобто

$$eU \approx kT, \text{ або } e \frac{ne\delta^2}{\epsilon_0 \epsilon} \approx kT.$$

Тоді

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon kT}{ne^2}} = C \left( \frac{T}{n} \right)^{1/2}, \quad (7.26)$$

де  $C$  — наближена стала;  $T$  — температура плазми.

Характерну довжину  $\delta$  вперше ввів П. Дебай при розгляді сильних електролітів. Це поняття перенесено у фізику плазми, його називають *дебаївським радіусом екранування* або *дебаївською довжиною*.

Основоположник вчення про плазму І. Ленгмюр, користуючись поняттям дебаївського радіуса, дав таке означення плазми: іонізований газ називається плазмою, якщо дебаївська довжина є малою порівняно з розмірами об'єму, який займає газ.

Якщо дебаївський радіус характеризує просторовий масштаб області декомпенсації, то час існування цих областей  $\tau = \delta / v_e$ , де  $v_e$  — швидкість найшвидших частинок (електронів). Якщо вважати, що  $m_e v_e^2 \approx kT$ , то

$$\tau \approx \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon m_e}{ne^2} \right)^{1/2}. \quad (7.27)$$

Величина  $1/\tau$  має розмірність частоти, яка збігається з власною частотою електростатичних коливань, що виникають у плазмі при зміщенні від рівноважного стану груп електронів. Цю частоту

$$\omega_0 \approx \left( \frac{ne^2}{\epsilon_0 \epsilon m_e} \right)^{1/2} \quad (7.28)$$

називають *плазмовою* або *ленгмюровою*.

Зробимо зауваження щодо введених параметрів концентрації і температури плазми. Взагалі концентрації електронів і іонів не повинні дорівнювати одна одній, оскільки в плазмі можуть бути як однозарядні, так і багатозарядні іони. Введена температура плазми має зміст тільки за умови, якщо середня кінетична енергія електронів та іонів є однаковою. У плазмі треба розрізняти щонайменше дві температури: електронну  $T_e$  та іонну  $T_i$  ( $T_e \neq T_i$ ). Таку плазму називають *неізотермічною* або *двотемпературною*. Внаслідок обміну енергіями між електронами та іонами встановлюється максвеллівський розподіл для всієї плазми, яка характеризується загальною температурою електронів та іонів (ізотермічна плазма). У плазмі, яку створюють у лабораторних умовах,  $T_e$  значно перевищує  $T_i$ . Це зумовлено великою відмінністю мас електронів та іонів.

Характер руху електронів та іонів у плазмі, якщо немає зовнішніх полів, визначається розсіюванням частинок у кулонівському полі. Тут розрізняють елементарні процеси розсіювання електронів на іонах, електронів на електронах та іонів на іонах. Кожний акт розсіювання, зумовлений пролітанням досліджуваної частинки біля розсіювального центра, змінює напрям траєкторії на деякий кут  $\theta$ , тобто зменшує її швидкість у початковому напрямі від  $v$  до  $v \cos \theta$ . Здебільшого розсіювання відбувається при великих відстанях (малі концентрації заряджених частинок у плазмі) і, як правило, супроводжується незначною зміною напрямку траєкторії. Тому ламаний характер траєкторії руху частинки, яким користувались у кінетичній теорії газів, тут не можна застосувати. У цьому разі вводять поняття про довжину вільного пробігу як відстань, на якій частинка втрачає початковий напрям швидкості. Теорію такого характеру розсіювання розробив Е. Резерфорд. Встановлено, що середня довжина вільного пробігу електронів при їх розсіюванні на іонах плазми визначається співвідношенням

$$\langle l_{ei} \rangle = 4,5 \cdot 10^5 \frac{T_e^2}{n} \frac{1}{L_k}, \quad (7.29)$$

де  $L_k$  — так званий *кулонівський логарифм*, який змінюється від 10 до 20. Здебільшого  $L_k = 15$ .

Крім  $\langle l_{ei} \rangle$ , процеси зіткнення електронів з іонами характеризують ефективним поперечним перерізом розсіювання  $\sigma_{ei}$ , середнім часом між двома зіткненнями  $\langle \tau_{ei} \rangle$  та частотою зіткнень  $\nu_{ei}$ :

$$\sigma_{ei} = \frac{1}{n_e \langle l_{ei} \rangle} \approx 3 \cdot 10^{-5} T_e^2; \quad \langle \tau_{ei} \rangle = \frac{\langle l_{ei} \rangle}{v_e} \approx \frac{3 \cdot 10^{-2} T_e^{3/2}}{n_e}; \quad \nu_{ei} = \frac{1}{\langle \tau_{ei} \rangle} \approx 20 \frac{n_e}{T_e^{3/2}}. \quad (7.30)$$

У плазмі серед різних видів взаємодій частинок найважливіше значення мають зіткнення між електронами та іонами. Вони визначають механізм проходження струму, дифузії тощо.

Однією з основних характеристик речовин є рівняння стану, тобто співвідношення між тиском, густиною і температурою. Для плазми з ізотропним розподілом швидкостей заряджених частинок рівняння стану має такий самий вигляд, що й для ідеального газу з двома компонентами, тобто

$$p = kn_e(T_e + T_i), \quad (7.31)$$

де  $p$  — тиск плазми, який дорівнює сумі електронного та іонного тисків.

Під дією електричного поля або градієнта тиску в плазмі виникають напрямлені потоки частинок, тобто в плазмі проходить електричний струм або відбувається дифузія. При пропусканні струму крізь плазму іони можна вважати нерухомими і струм створюється потоком електронів. Якщо струм постійний, то встановлюється рівновага між силою, з якою діє на електрони електричне поле, і силою гальмування, зумовленою зіткненнями між електронами та іонами. Остання дорівнює середньому значенню напрямленого імпульсу, втраченого електронами під час зіткнень з іонами. Електрон зазнає  $\nu_{ei}$  зіткнень за одиницю часу, і при кожному зіткненні його імпульс зменшується на значення  $m_e u$  ( $u$  — швидкість напрямленого руху електрона, зумовленого дією електричного поля напруженістю  $E$ ). Тоді умова рівності цих сил буде

$$eE = m_e \nu_{ei} u. \quad (7.32)$$

На основі цих міркувань можна дати оцінку *питомої електропровідності плазми*. Густина струму в плазмі на основі (7.32) можна записати так:

$$j = ne u = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}} E = \frac{ne^2 \langle \tau_{ei} \rangle}{m_e} E. \quad (7.33)$$

Співвідношення (7.33) виражає закон Ома для плазми, питома електропровідність якої

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau_{ei}}{m_e}. \quad (7.34)$$

Підставивши в (7.34)  $\tau_{ei}$  із (7.30), одержимо

$$\sigma \approx \frac{(3kT)^{3/2}}{\pi e^2 L_k \sqrt{m_e}}. \quad (7.35)$$

Формула (7.35) застосовна до повністю іонізованої плазми з однозарядними іонами (воднева плазма). При температурі  $T_e \approx 10^8$  К електропровідність водневої плазми має перевищувати більше ніж на порядок електропровідність міді при кімнатній температурі.

Своєрідні властивості проявляються у плазмі під дією електричного поля високої частоти  $\omega$ . Діелектрична проникність виражається при цьому формулою

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (7.36)$$

де  $\omega_0$  — ленгмюрова частота плазми (7.28). З формули (7.36) видно, що при  $\omega < \omega_0$  діелектрична проникність є від'ємною. З цього випливає, що електромагнітні хвилі з частотами  $\omega < \omega_0$  не проникають у плазму і повністю відбиваються від її поверхні.

Дифузійні процеси в плазмі певною мірою аналогічні процесам, що відбуваються у звичайних газах. Для кожної компоненти коефіцієнт дифузії визначається відомою формулою з кінетичної теорії газів, а саме:

$$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle v_T, \quad (7.37)$$

де  $\langle l \rangle$  — середня довжина вільного пробігу частинок даної компоненти плазми;  $v_T$  — середня швидкість їхнього теплового руху. Оскільки в плазмі має виконуватись умова квазінейтральності, то потоки електронів та іонів крізь будь-яку площу будуть однаковими. Оскільки коефіцієнт  $D_e > D_i$ , то при виникненні градієнта концентрації електронний потік спочатку буде більшим від потоку іонів. Це спричинить поляризацію плазми, і з'явиться поле, яке буде гальмувати електрони і прискорювати рух іонів. При цьому електронний потік зменшиться в багато разів, а потік іонів дещо збільшиться. Таке явище називають *амбіполярною дифузєю*.

Теплопровідність плазми зумовлена передаванням енергії у разі зіткнень між частинками з різною енергією теплового руху в області, де є градієнт температури. Основну роль у теплопередаванні відіграють зіткнення між електронами, оскільки вони відбуваються з великою

частотою. Коефіцієнт електронної теплопровідності в повністю іонізованій водневій плазмі

$$\lambda \approx 1,2 \cdot 10^{-11} T^{5/2} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \quad (7.38)$$

З формул (7.35) і (7.38) випливає, що для плазми має виконуватися закон Відемана — Франца. Теплопровідність повністю іонізованої плазми досить швидко зростає з підвищенням температури. Так, при  $T \approx 10^5 \text{ К}$  коефіцієнт  $\lambda$  водневої плазми перевищує коефіцієнт теплопровідності срібла при кімнатній температурі.

Зовсім інакше поводить себе плазма в магнітному полі, під дією якого її властивості докорінно змінюються. Так, за наявності магнітного поля можна створити замкнуті плазмові конфігурації, які займають обмежену частину простору у вакуумі. Це явно не властиве газам. У цих умовах плазма наближається за своїми властивостями до рідин. Тому вивченням взаємодії плазми з електромагнітним полем займається магнітна гідродинаміка, теоретичною основою якої є система рівнянь гідродинаміки разом з рівняннями Максвелла для електромагнітного поля.

Вчені вважають, що центральна проблема фізики плазми — проблема стійкості плазмових конфігурацій — може бути вирішена при вивченні плазми в магнітних полях. Ці питання є основними у фізиці плазми. Оскільки вони виходять за межі нашого курсу, то їх розгляд опускаємо. Зазначимо, що фундаментальні розробки цих питань здійснили радянські фізики Л. А. Арцимович (1909—1973), Р. З. Сагдєєв (н. 1932 р.), Б. Б. Кадомцев (н. 1928 р.) та інші.

Основний практичний інтерес фізики плазми пов'язаний з проблемою керованого термоядерного синтезу. Реакції термоядерного синтезу можливі тільки за умови, якщо речовина перебуває в стані високотемпературної плазми. Для реакції дейтерію з дейтерієм (D—D) температура має бути близько  $10^8 \text{ К}$ , а для дейтерію з тритієм (D—T) — близько  $10^7 \text{ К}$ . Крім таких високих температур, для самопідтримання термоядерної реакції необхідне виконання так званого критерію Лоуренса, який для реакції D—D  $n\tau > 10^{16} \text{ с}/\text{см}^3$ , а для реакції D—T  $n\tau > 10^{14} \text{ с}/\text{см}^3$  ( $n$  — концентрація іонів одного знака плазми;  $\tau$  — середній час утримання плазми).

Основною складністю здійснення керованого термоядерного синтезу є створення в лабораторних умовах фізичного об'єкта — високотемпературної і стійкої плазми. Річ у тім, що внаслідок далекодієвих кулонівських сил у плазмі довільно можуть виникати шуми, коливання, що спричиняють її нестійкість. Щоб одержати високотемпературну стійку плазму, виконують дослідні роботи за допомогою установок типу «Токамак».

Однією з важливих науково-технічних проблем, пов'язаних з використанням плазми, є розроблення систем, які безпосередньо пере-

творюють теплову енергію в електричну без проміжного елемента у вигляді машинного агрегата. Такі системи називають магнітогідродинамічними (МГД) генераторами, принцип роботи яких розглянуто в § 8.12.

## § 7.12. Нові способи збудження газового розряду

Для одержання несамостійного розряду можна використати довільні способи часткової іонізації газу. Поряд з електронними пучками та ультрафіолетовим випромінюванням це можна здійснити за допомогою потоків нейтронів,  $\gamma$ -квантів, протонів,  $\alpha$ -частинок тощо. Фізично дія різних швидких частинок на газ принципово не відрізняється від дії швидких електронів, при якій основний механізм, відповідальний за втрату енергії цих частинок у газі, пов'язаний з іонізацією атомів і молекул. Однак цим механізмом не вичерпуються всі можливості несамостійного розряду в газі. Так, в Інституті електродинаміки НАН України (Київ) завершено розроблення способу збудження розряду в парах лужного металу, оснований на використанні опромінювання парів резонансним випромінюванням, джерелом якого є плазма лужного металу тих самих атомів. Резонансним називають випромінювання, що виникає внаслідок переходу атома з найближчого збудженого стану в основний.

За певних умов частка енергії, що відводиться резонансним випромінюванням із газорозрядної плазми, може становити десятки процентів від повної енергії, введеної в розряд. Фотони резонансного випромінювання потрапляють у камеру, заповнену парами лужного металу. Поглинання цих фотонів атомами лужних металів зумовлює утворення резонансно збуджених атомів металу. Внаслідок зіткнень цих атомів один з одним утворюються електрони та іони.

Ще один із розрядів, збуджений за допомогою оптичного випромінювання, вивчається фізиками. Іонізація газу в цьому розряді відбувається внаслідок взаємодії потужного оптичного випромінювання з вільними електронами. Щоб така взаємодія була досить ефективною, джерело оптичного випромінювання повинно мати питомий потік у кілька кіловатів на квадратний сантиметр. Цей потік одержують за допомогою потужних газових лазерів. Тому його називають лазерним оптичним розрядом. Для створення розряду лазерний промінь фокусується в газі, тиск якого близький до атмосферного. В області фокусування променя лазера утворюється плазма, стан якої близький до термодинамічно рівноважного, а температура коливається в діапазоні 10—20 тис. градусів. Горіння розряду підтримується завдяки енергії випромінювання лазера, частина якої поглинається електронами плазми. Енергія з оптичного розряду відводиться випромінюванням і молекулярною теплопровідністю. Розмір області, заповненої лазерним оптичним розрядом, встановлюється автоматично залежно від тиску і сорту газу.

Зауважимо, що на відміну від інших розрядів лазерний оптичний розряд не спричиняє створення нерівноважного стану газу. Особливість такого розряду полягає у тому, що за його допомогою стає можливим створення плазми в будь-яких місцях простору, і це не зв'язано з різними пристроями і складними установками. Змінюючи орієнтацію й інтенсивність променя лазера, можна змінювати розташування і форму лазерного оптичного розряду, а пропускаючи газ крізь опромінюваний світлом об'єм, можна створювати неперервний потік плазми (оптичний плазмотрон). Нагрітий газ, отриманий в лазерному оптичному розряді, має підвищену хімічну активність та непогані оптичні властивості. Тому такий газ можна використовувати для ефективного здійснення хімічних реакцій, для оброблення матеріалів, а також як джерело рівноважного випромінювання.

Одним із досить перспективних способів отримання розрядів є так званий плазмово-пучковий розряд. Механізм колективної взаємодії електронного пучка з плазмою, який призводить до розвитку плазмово-пучкової нестійкості, відіграє важливу роль

у фізиці плазми. Внаслідок високої інтенсивності передавання енергії пучка плазмовими електронами при такій взаємодії можливе ефективне нагрівання плазми електронними пучками. Такий спосіб нагрівання плазми, запропонований радянськими фізиками Є. К. Завойським (1907—1976) і Л. І. Рудаковим, називають "турбулентним". Вважають, що цей спосіб буде одним із найперспективніших у здійсненні керованого термоядерного синтезу. Плазмово-пучковий розряд використовують для здійснення хімічних реакцій в нерівноважних умовах.

## Розділ 8. Магнітне поле

### § 8.1. Поняття про магнетизм

Магнітні явища тисячоліття тому були виявлені на природних матеріалах. Досвід засвідчував, що деякі залізні руди мають властивість притягувати до себе на близьких відстанях невеликі предмети (залізні ошурки, рудний порох тощо). Цю властивість руд було названо магнетизмом, а самі матеріали — природними магнітами. Пізніше було помічено, що є матеріали, які під впливом природних магнітів також намагнічуються і в окремих випадках зберігають досить довгий час набуті магнітні властивості. Таким способом почали одержувати постійні штучні магніти. З часом було встановлено наявність у магнітів двох полюсів (південного та північного залежно від орієнтації в полі земного магнетизму) і нейтральної смуги між полюсами, де магнітні властивості практично не проявляються. Досвід також засвідчував, що розділити полюси магніту, тобто одержати магніт з одним полюсом, неможливо.

Орієнтація в напрямі північ — південь намагніченого тіла, виготовленого у вигляді магнітної стрілки, закріпленої в точці рівноваги на нейтральній полосі, стала основою для побудови приладів (компасів), які широко застосовувались у мореплавстві, в походах і под. Це спонукало до подальшого вивчення властивостей магнітів.

Проходили віки, а природи магнетизму з'ясувати не вдавалося. Це продовжувалося доти, доки в ХІХ ст. експериментально не було виявлено, що: 1) рухомі електричні заряди створюють магнітне поле; 2) магнітне поле, у свою чергу, діє на рухомі електричні заряди. Ці факти вказували на існування істотних зв'язків між магнітними і електричними явищами.

Нерухомі точкові електричні заряди взаємодіють за законом Кулона. Ця взаємодія за теорією близькодії здійснюється крізь електричне поле, яке існує навколо нерухомих заряджених частинок. Разом з тим на основі закону Кулона не можна пояснити характеру взаємодії тих самих, але рухомих електричних зарядів. Суть полягає

в тому, що з початком руху зарядів виникає нова якість, вони набувають магнітних властивостей. Магнетизм — це особлива форма матеріальної взаємодії, яка виникає між рухомими електрично зарядженими частинками. Передача магнітної взаємодії на відстань здійснюється особливим матеріальним носієм — *магнітним полем*. Оскільки рух зарядів або їхній спокій є відносними, залежними від стану систем відліку, то і прояв електричної або магнітної взаємодії зарядів також є відносним. Інакше кажучи, характер поля того самого електричного заряду залежатиме від того, в якій системі відліку ми ведемо спостереження — в рухомій чи нерухомій відносно даного заряду. Різні властивості зарядів зумовлені тим, що електричне і магнітне поля є окремими проявами більш загального електромагнітного поля.

Між електричним і магнітним полями немає повної симетрії. Джерелами електричного поля є електричні заряди, а їх носіями — елементарні частинки (електрони, протони, мезони тощо). Аналогічних магнітних зарядів у природі не виявлено, хоча теоретично П. Дірак у 1931 р. обґрунтував можливість існування магнітних монополів. Єдиними матеріальними носіями магнітного поля, згідно із сучасними уявленнями, є рухомі електричні заряди. Магнітні властивості речовин пояснюються тим, що у масштабах атомів електрони і нуклони мають два типи струмів: орбітальні, пов'язані з переміщенням у просторі центрів ваги цих частинок, і спінові, пов'язані з внутрішніми ступенями вільності їхнього руху.

### § 8.2. Магнітне поле електричного струму. Індукція магнітного поля. Закон Ампера

У 1820 р. Х. Ерстед експериментально виявив дію постійного електричного струму в провіднику на магнітну стрілку (рис.8.1). У дослідах Ерстеда магнітна стрілка розміщувалась під або над провідником паралельно в напрямі північ — південь уздовж меридіана. Під час пропускання струму крізь провідник магнітна стрілка поверталася і намагалася установитися перпендикулярно до провідника. Зі зміною напрямку струму в провіднику на протилежний змінювався і напрям дії сили на магнітну стрілку (стрілка поверталася на  $180^\circ$ ). При віддаленні магнітної стрілки від провідника орієнтуюча дія зменшувалася. Якщо струм вимикався, то стрілка поверталася у вихідне положення.

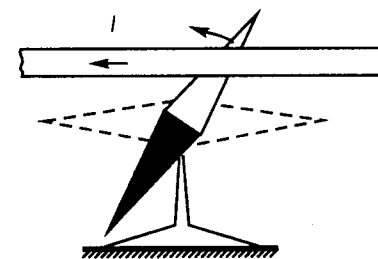


Рис. 8.1

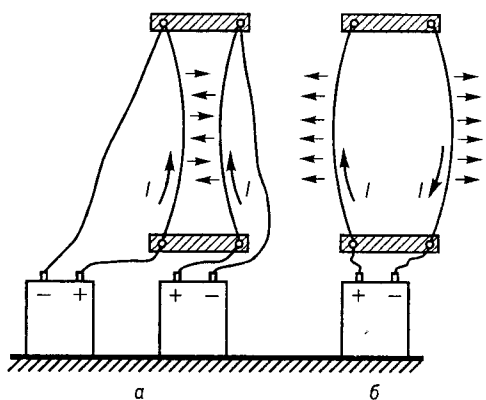


Рис. 8.2

Дослідами Ерстеда встановлено декілька фундаментальних відкриттів. По-перше, було з'ясовано, що в просторі навколо провідника зі струмом діють сили, подібні до тих, які діють поблизу природних і штучних магнітів. Електричні струми, тобто рухомі електричні заряди, взаємодіють з магнітною стрілкою за допомогою матеріального посередника — магнітного поля. По-друге, встановлено, що значення магнітного поля в різних точках простору навколо провідника зі струмом є різним. По-третє, показано, що магнітне поле має напрям у просторі, тобто є полем векторним.

Після відкриття Ерстеда почалися інтенсивні дослідження магнітних полів струмів. У 1820 р. А. Ампер встановив закон механічної (пондеромоторної) взаємодії двох елементів струмів, які містяться на певній відстані один від одного. Два паралельних провідники, по яких проходять струми однакового напрямку, притягуються один до одного (рис. 8.2, а). Зміна напрямку одного із струмів зумовлює протилежну дію — відштовхування провідників зі струмом (рис. 8.2, б). Ця «дія на відстані» не має нічого спільного з електростатичною взаємодією, оскільки поле рухомих електричних зарядів (електронів у провідниках) з високою точністю компенсується електричним полем нерухомих позитивних зарядів атомів провідників. Отже, в цих дослідах спостережувана поведінка провідників зі струмом визначається силами іншої природи. Сили, зумовлені рухомими електричними зарядами, називають *магнітними*.

Дія магнітного поля провідника зі струмом на магнітну стрілку (рис. 8.3, а) нічим не відрізняється від його дії на котушку, по якій проходить струм від батареї (рис. 8.3, б), або дії на рухомий пучок електронів в електронно-променевої трубці (рис. 8.3, в).

Останні досліди свідчать не тільки про те, що магнітне поле створюється рухомими електричними зарядами, а й про те, що магнітне поле, у свою чергу, діє лише на рухомі електричні заряди і цією дією інтегрально визначається взаємодія провідників зі струмом, провідника зі струмом і магнітної стрілки або взагалі магнітна взаємодія.

Електричний струм — це напрямлений рух електричних зарядів, тому навколо провідників, по яких рухаються ці заряди, виникає

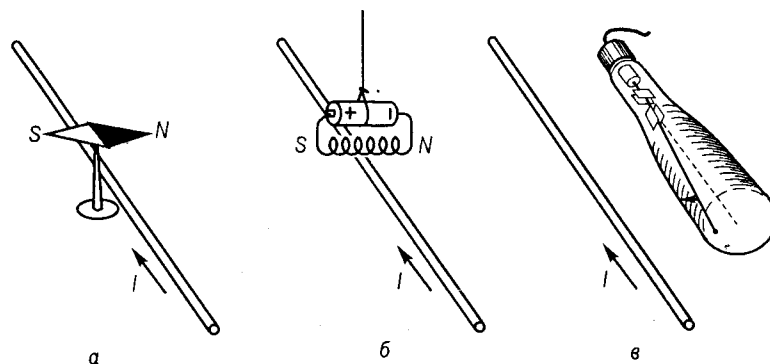


Рис. 8.3

магнітне поле, крізь яке і взаємодіють між собою провідники зі струмом. Отже, всередині провідників, по яких проходить постійний струм, і в просторі, що оточує їх, існують як стаціонарне електричне, так і стаціонарне, незмінне в часі, магнітне поле. Розділ магнетизму, що вивчає стаціонарні магнітні поля, називають *магнітостатикою*.

Основні принципи побудови теорії стаціонарних магнітних полів значною мірою подібні до принципів побудови електростатики. Якщо під час вивчення електричного поля користуються пробним зарядом, то під час вивчення магнітного — пробним елементом струму. *Елементом струму* називають вектор  $I d\vec{l}$ , який дорівнює добуткові сили струму в провіднику на вектор елемента провідника  $d\vec{l}$ , розміщений уздовж провідника в напрямі струму (у напрямі руху позитивних зарядів).

Для кількісної характеристики магнітного поля струму вводять фізичну величину, яку називають *індукцією магнітного поля*. Як індикатор магнітного поля можна використати маленьку магнітну стрілку, рамку зі струмом, елемент струму  $I d\vec{l}$  або просто рухомий електричний заряд. У макроскопічній електродинаміці найчастіше користуються ідеалізованою моделлю пробного лінійного елемента струму  $I d\vec{l}$ . Якщо в певну точку магнітного поля внести елемент провідника  $d\vec{l}$  зі струмом  $I$  (рис. 8.4), то з боку магнітного поля на нього подіє сила  $d\vec{F}$ . Дослідно встановлено, що для заданого магнітного поля у вакуумі модуль сили  $dF$  прямо пропорційний елементу струму  $I d\vec{l} \sin \alpha$  і залежить від його орієнтації відносно напрямку магнітного поля. За напрям магнітного поля беруть такий, щоб при орієнтуванні пробного елемента струму вздовж цього напрямку на пробний елемент магнітне поле не діяло.

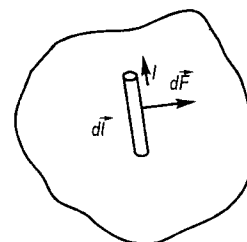


Рис. 8.4

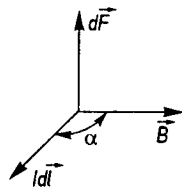


Рис. 8.5

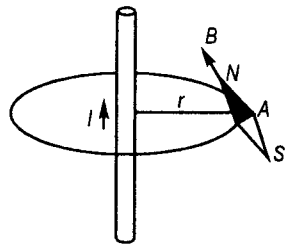


Рис. 8.6

Збільшення або зменшення елемента струму  $Idl \sin \alpha$  спричиняє відповідну зміну сили  $dF$ , а відношення  $dF/(Idl \sin \alpha)$  є величиною постійною для даної точки магнітного поля. Це відношення — однозначна кількісна характеристика магнітного поля в досліджуваній точці, в яку вміщено елемент струму  $Idl \sin \alpha$ . Тому природно величину, пропорційну зазначеному відношенню, взяти за характеристику магнітного поля в даній точці і назвати індукцією магнітного поля

$$B = k \frac{dF}{Idl \sin \alpha}, \quad (8.1)$$

де  $k$  — коефіцієнт пропорційності, значення і розмірність якого залежать від вибору системи одиниць (в СІ  $k = 1$ );  $\alpha$  — кут між напрямом пробного елемента струму в даній точці простору і напрямом магнітного поля. Для інших точок магнітного поля відношення (8.1) набуває інших значень, але це відношення для кожної точки заданого поля матиме цілком визначене значення. За кількісним значенням індукції  $\vec{B}$  порівнюють магнітні поля в різних точках. Індукція магнітного поля є силовою характеристикою. Чим більша сила діє на один і той самий елемент струму, тим більше числове значення має магнітне поле в досліджуваній точці. Якщо провідник зі струмом розмістити перпендикулярно до індукції  $\vec{B}$ , то  $\sin \alpha = 1$  і тоді індукція магнітного поля чисельно дорівнює силі, що діє на пробний елемент одиничної довжини, по якому проходить струм 1 А. Вектор  $\vec{B}$  напрямлений уздовж прямої, що збігається з напрямом магнітного поля, причому так, що вектори  $Id\vec{l}$ ,  $\vec{B}$  і  $d\vec{F}$  утворюють правогвинтову трійку векторів (рис. 8.5).

Оскільки магнітне поле струму діє на магнітну стрілку, орієнтуючи її в певному напрямі, то напрям орієнтації, наприклад північного полюса стрілки, можна обрати за напрям індукції магнітного поля в точці розміщення магнітної стрілки (зрозуміло, що стрілка при цьому має бути малих розмірів, вона відіграє роль пробного елемента в точці). За домовленістю так і роблять (рис. 8.6).

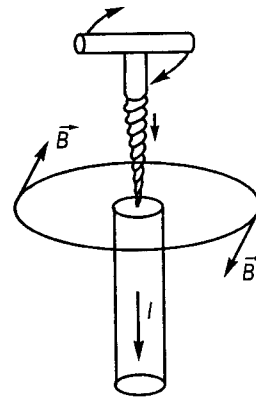


Рис. 8.7

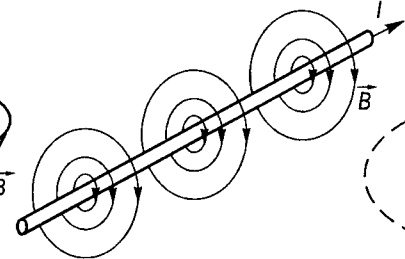


Рис. 8.8

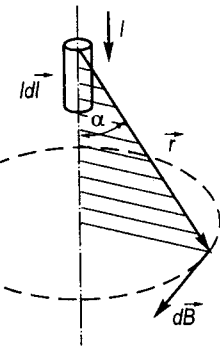


Рис. 8.9

Однак практично не завжди можна скористатися магнітною стрілкою (або рамкою зі струмом чи котушкою), особливо у разі складних полів або наявності речовини. Зручним є правило, що пов'язує напрям магнітного поля з напрямом струму, який створює це поле. Це правило називають правилом гвинта: якщо поступальний рух гвинта з правою нарізкою збігається з напрямом струму, то напрям магнітного поля збігається з напрямом руху кінця ручки гвинта (рис. 8.7). Досліди із залізними ошурками показують, що силові лінії магнітного поля навколо прямолінійного провідника зі струмом мають форму концентричних кіл (рис. 8.8), які лежать у площинах, перпендикулярних до струму в провіднику. Отже, індукція магнітного поля  $\vec{B}$  напрямлена по дотичній у кожній точці до відповідного концентричного кола (рис. 8.9).

Для графічного зображення магнітного поля користуються лініями магнітної індукції. Лініями магнітної індукції називають криві, дотичні до яких у кожній точці поля збігаються з напрямом вектора  $\vec{B}$  у цих точках. Через кожну точку поля можна провести лінію індукції. При цьому значення магнітного поля графічно зображається різною густиною силових ліній на одиницю площі. Якщо поле є однорідним, то й густина силових ліній буде скрізь однаковою. Лінії індукції магнітного поля завжди неперервні, вони не мають ні початку ні кінця. Такі векторні поля називають вихровими полями. Магнітне поле є полем вихровим, на відміну від потенціального електростатичного поля.

З формули (8.1) можна визначити силу  $d\vec{F}$ , яка діє на елемент струму  $Id\vec{l}$ , вміщений у точку магнітного поля з індукцією  $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \cdot \vec{B}], \quad (8.2)$$

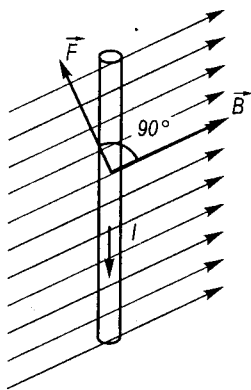


Рис. 8.10

або в скалярній формі  $dF = IdlB \sin \alpha$ , де  $\alpha$  — кут між пробним елементом струму  $Idl$  та напрямом індукції магнітного поля  $\vec{B}$  (див. рис. 8.5). Отже, сила  $d\vec{F}$  прямо пропорційна добутковій елементу струму  $Idl$ , індукції магнітного поля  $\vec{B}$  в точці, де вміщено  $Idl$ , і залежить від взаємної орієнтації елемента струму та напрямку магнітного поля. Це означення і формулу (8.2) називають законом Ампера, а  $d\vec{F}$  — силою Ампера для лінійного елемента струму.

Напрямок сили Ампера встановлюють за правилом векторного добутку (8.2). У деяких випадках для цього зручно користуватися правилом лівої руки: якщо ліву руку розмістити так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а чотири виправлені пальці збігалися з технічним напрямом струму в провіднику, то поставлений під прямим кутом великий палець вкаже напрям сили Ампера.

За одиницю індукції в СІ прийнято індукцію такого магнітного поля, в якому на провідник 1 м завдовжки зі струмом 1 А, розміщений перпендикулярно до вектора  $\vec{B}$ , діє сила 1 Н. На честь сербського фізика, винахідника у галузі електро- і радіотехніки Н. Тесли (1856—1943) цю одиницю названо теслою (Тл).

З формули (8.1) визначають розмірність одиниці індукції магнітного поля:

$$[B] = \frac{H}{A \cdot m} = \frac{H \cdot m}{A \cdot m^2} = \frac{Дж}{A \cdot m^2} = \frac{В \cdot с}{m^2} = \frac{Вб}{m^2} = 1 \text{ Тл.}$$

У задачах іноді подають числові значення індукції магнітного поля в системі одиниць Гаусса: 1 Тл =  $10^4$  Гс.

Сила Ампера  $\vec{F}$ , яка діє на провідник скінченної довжини, визначається інтегруванням виразу (8.2) по всій довжині провідника:

$$\vec{F} = \int I [d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

На відміну від кулонівських сил взаємодії зарядів, які завжди є центральними силами, сила Ампера напрямлена перпендикулярно до ліній індукції магнітного поля (рис. 8.10).

### § 8.3. Магнітна взаємодія струмів

Вивчаючи експериментально магнітну взаємодію провідників зі струмом, А. Ампер у 1820 р. встановив закон: сила дії  $d\vec{F}_{12}$  першого елемента струму  $I_1 d\vec{l}_1$  на другий  $I_2 d\vec{l}_2$  прямо пропорційна добутковій

елементів струмів, обернено пропорційна квадратів відстані між ними і залежить від взаємної орієнтації цих елементів:

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} [d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}]], \quad (8.3)$$

або в скалярній формі

$$dF_{12} = k \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{r_{12}^2}. \quad (8.4)$$

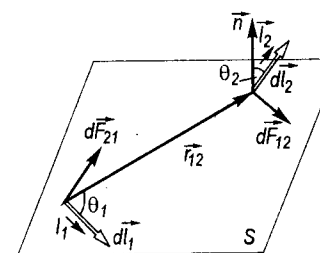


Рис. 8.11

Радіус-вектор  $\vec{r}_{12}$  вважають напрямленим від  $d\vec{l}_1$  до  $d\vec{l}_2$ ; елементам струмів приписують напрями, що збігаються з напрямками струмів у них  $I_1$  і  $I_2$  (рис. 8.11);  $\theta_1$  — кут між  $d\vec{l}_1$  і  $\vec{r}_{12}$ ;  $\theta_2$  — кут між  $d\vec{l}_2$  і вектором  $\vec{n}$ , перпендикулярним до площини  $S$ , в якій лежать вектори  $d\vec{l}_1$  і  $\vec{r}_{12}$ . Напрямок вектора  $\vec{n}$  визначають векторним добутком  $[d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}]$ . Коefіцієнт пропорційності  $k$  залежить від вибору системи одиниць (в СІ  $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ , де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/A}^2$  — магнітна стала). Силу  $d\vec{F}$  називають *пондеромоторною* (механічною силою немеханічного походження);  $d\vec{F}_{12}$  — це сила, з якою перший елемент струму  $I_1 d\vec{l}_1$  діє на другий  $I_2 d\vec{l}_2$ . Аналогічно можна знайти і силу  $d\vec{F}_{21}$ , з якою другий елемент струму  $I_2 d\vec{l}_2$  діє на перший  $I_1 d\vec{l}_1$ :

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{21}^3} [d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{21}]]. \quad (8.5)$$

Рівності (8.3) і (8.5) називають *загальним законом Ампера*. Закон Ампера дає змогу обчислювати сили взаємодії замкнених лінійних струмів скінченної довжини інтегруванням виразу (8.3) або (8.5).

Сили  $d\vec{F}_{12}$  і  $d\vec{F}_{21}$  у загальному випадку є не однаковими за абсолютним значенням і неколінеарні одна одній. Тому сили дії і протидії не завжди компенсуються, і, отже, взаємодія елементів струмів, взагалі кажучи, не задовольняє третьому закону Ньютона

$$d\vec{F}_{12} + d\vec{F}_{21} \neq 0. \quad (8.6)$$

В окремому випадку паралельних струмів сили взаємодії намагаються зблизити провідники, якщо струми в них паралельні (рис. 8.12, а), і віддалити один від одного, якщо струми антипара-

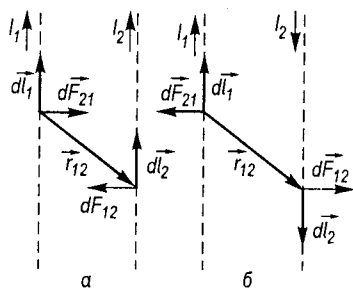


Рис. 8.12

лельні (рис. 8.12, б). Для постійних струмів не можна виділити окремий елемент струму, оскільки коло постійного струму є завжди замкненим. Експериментально визначають лише сили взаємодії замкнених контурів зі струмом. Для замкнених контурів лінійних струмів

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{[d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3}, \quad (8.7)$$

де  $L_1$  і  $L_2$  — замкнені контури, по яких проходять постійні струми  $I_1$  і  $I_2$ . Аналогічний вигляд має вираз і для сили  $\vec{F}_{21}$ . Для сил  $\vec{F}_{12}$  і  $\vec{F}_{21}$  взаємодії замкнених контурів зі струмами третій закон Ньютона справджується завжди

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0. \quad (8.8)$$

#### § 8.4. Закон Біо — Савара — Лапласа. Магнітне поле прямого, колового і соленоїдного струмів

Виходячи з формули (8.2), можна дати польове тлумачення взаємодії елементів струмів (8.3). Як і в електростатиці для зарядів, процес взаємодії елементів струму можна розглядати як такий, що складається з двох стадій. Елемент струму  $I_1 d\vec{l}_1$  створює в точці розміщення елемента струму  $I_2 d\vec{l}_2$  магнітне поле індукцією  $d\vec{B}_{12}$ . Внаслідок цього на елемент струму  $I_2 d\vec{l}_2$  в точці з магнітною індукцією  $d\vec{B}_{12}$  діє сила Ампера

$$d\vec{F}_{12} = [I_2 d\vec{l}_2 \cdot d\vec{B}_{12}]. \quad (8.9)$$

Порівнюючи (8.9) з (8.3), для  $d\vec{B}_{12}$  одержуємо

$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I_1 d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}. \quad (8.10)$$

Вираз (8.10) є математичним записом закону Біо — Савара — Лапласа. Цей закон — результат теоретичного узагальнення французьким астрономом, математиком і фізиком П. Лапласом експериментальних результатів досліджень, проведених французькими вченими Ж. Біо та Ф. Саваром у 1820 р.

У скалярній формі закон Біо — Савара — Лапласа записують так:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (8.11)$$

Елементарна індукція  $dB$  магнітного поля, створюваного пробним елементом струму в довільній точці простору, прямо пропорційна елементові струму  $Idl$ , обернено пропорційна квадратові відстані точки спостереження від елемента струму і залежить від кута  $\alpha$  між елементом  $Idl$  та напрямом радіуса  $r$  (див. рис. 8.9).

Закон Біо—Савара—Лапласа є одним із основних експериментальних законів електромагнітних явищ і, подібно до закону Кулона, лежить в основі класичної електродинаміки. Цей закон дає змогу розраховувати індукцію магнітних полів струмів. За принципом суперпозиції у провідниках скінченної довжини, по яких проходить струм, результуючу індукцію в довільній точці магнітного поля визначають як векторну суму елементарних значень індукції, створених окремими елементами провідника:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{B}_i. \quad (8.12)$$

Якщо ж напрями складових значень індукції  $\Delta \vec{B}_i$  збігаються, то векторну суму можна замінити алгебричною або інтегральною. Для замкненого кола зі струмом

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{[Id\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}, \quad (8.13)$$

де  $\vec{r}$  — радіус-вектор, проведений від довільного елемента струму  $Id\vec{l}$  у точку, в якій обчислюють індукцію магнітного поля  $\vec{B}$ . Інтегрування у формулі (8.13) виконують по замкненому контуру струму  $L$ .

Закони Ампера і Біо — Савара — Лапласа треба розглядати в сукупності. Разом вони визначають й індукцію в довільній точці магнітного поля, створюваного елементом струму, і силу, яка діє на елемент струму, внесений у певну точку магнітного поля:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}, \quad (8.14)$$

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (8.15)$$

Ці закони є слухними лише для лінійних струмів: закон Біо — Савара — Лапласа (8.14) — для струмів, поперечні розміри яких є досить малими порівняно з відстанню до розглядуваних точок



поля, а закон Ампера (8.15) — для пробних елементів струмів, у межах яких магнітне поле можна вважати однорідним.

Для узагальнення цих законів на випадок довільних об'ємних струмів роблять так: уявно розбивають струм у провіднику скінченного перерізу на сукупність нескінченно тонких трубок струму і застосовують до кожної елементарної трубки закони (8.14) і (8.15). Тоді сила струму в елементарній трубці

$$dI = j dS, \quad (8.16)$$

де  $j$  — густина струму;  $dS$  — площа поперечного перерізу трубки струму. Тоді

$$dI dl = j dS dl = j dV, \quad (8.17)$$

де  $dl$  — довжина елемента трубки струму;  $dV$  — його об'єм. Оскільки  $dl$  і  $j$  напрямлені вздовж елемента трубки струму, то

$$dI dl = \vec{j} dV. \quad (8.18)$$

Для постійного струму  $\vec{j}$  є величиною незмінною по всьому перерізу провідника і, отже, можна записати

$$I dl = \vec{j} dV. \quad (8.19)$$

Підставивши (8.19) у (8.14) і (8.15), одержимо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3} dV; \quad (8.20)$$

$$d\vec{F} = [\vec{j} \cdot \vec{B}] dV. \quad (8.21)$$

Це і є закони Біо — Савара — Лапласа й Ампера для об'ємних струмів. У такому вигляді ці закони застосовні для довільних точок постійних струмів як зовнішніх, так і внутрішніх щодо струму.

Покажемо на прикладах застосування законів Біо — Савара — Лапласа і Ампера для обчислення індукції магнітного поля провідників зі струмом і сили, що діє на провідник, розміщений у магнітному полі.

**Приклад 8.1.** Обчислити індукцію магнітного поля прямого провідника зі струмом  $I$  в точці  $M$ , розміщеній на відстані  $r_0$  від провідника (рис. 8.13).

**Розв'язання.** Щоб обчислити індукцію магнітного поля  $\vec{B}$  в точці  $M$  на відстані  $r_0$  від нескінченно довгого лінійного провідника зі струмом, поділимо його на нескінченно малі елементи  $I dl$  і обчислимо спочатку за формулою (8.14) індукцію  $d\vec{B}$ , створену елементом  $I dl$ :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}.$$

На основі формули (8.14) неважко переконатись, що для заданого напрямку струму силою  $I$  всі елементарні значення індукції магнітного поля в точці  $M$  напрямлені

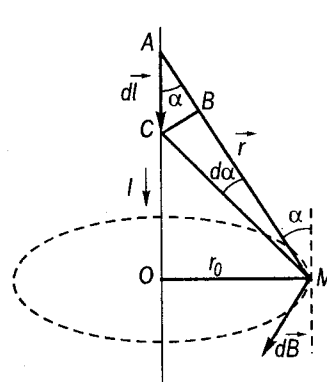


Рис. 8.13

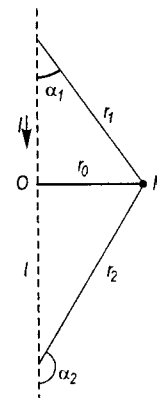


Рис. 8.14

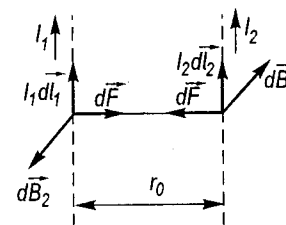


Рис. 8.15

в один бік по одній прямій перпендикулярно до площини рисунка до нас. Тому результуюча індукція магнітного поля всіх елементів струму в точці  $M$  визначиться так:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1)$$

Перейдемо до однієї змінної. З рис. 8.13 маємо:

$$r = \frac{r_0}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{r_0}{\sin \alpha} \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Пряму  $BC$  замінено елементом дуги радіуса  $r$ , яка спирається на нескінченно малий центральний кут  $d\alpha$  ( $BC = r d\alpha$ ).

Підставивши значення  $r$  і  $dl$  у вираз (1), одержимо

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha.$$

Після інтегрування маємо

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (2)$$

Для провідника скінченної довжини  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  показано на рис. 8.14. Для нескінченно довгого провідника зі струмом  $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ . За цієї умови

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (3)$$

**Приклад 8.2.** По двох нескінченно довгих паралельних провідниках, розміщених у вакуумі на відстані  $r_0$  один від одного, проходять струми  $I_1$  та  $I_2$  (рис. 8.15). Визначити силу взаємодії, яка припадає на довжину  $l$  кожного з цих провідників.

**Розв'язання.** За законом Ампера на другий провідник завдовжки  $l$  у магнітному полі  $B_1$  першого провідника зі струмом діє сила  $F = I_2 l B_1 \sin \alpha$ , а  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0}$ . Кут  $\alpha$  між напрямом струму  $I_2$  і напрямом магнітного поля  $B_1$  є прямим, тому  $\sin \alpha = 1$ . Тоді

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r_0}. \quad (8.22)$$

На основі (8.22) встановлено одиницю сили струму, яка є основою в СІ (1 А). Ампер — сила постійного струму, який, проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і дуже малого кругового перерізу, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створює силу взаємодії між ними, яка дорівнює  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютонів на кожний метр довжини.

З означення ампера і формули (8.22) знайдемо значення  $\mu_0$ :  $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = \mu_0 \frac{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}}{2\pi \cdot 1 \text{ м}}$ , звідки  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ Н}}{\text{ А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{ Гн}}{\text{ м}}$ .

Магнітною взаємодією струмів пояснюється явище пінч-ефекту, яке полягає у самотисканні напрямлено рухомої плазми внаслідок магнітної взаємодії паралельних потоків заряджених частинок. Пінч-ефект використовують для самоутримання і термоізоляції плазми. Важливою проблемою є течія холодної міді в обмотках надпотужних електромагнітів (наприклад, в установках для термоядерного синтезу типу «Токамак»), в яких магнітна взаємодія між окремими витками є настільки великою, що мідь не витримує і тече.

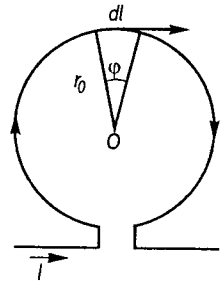


Рис. 8.16

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

Для довільного елемента  $dl$  ( $r = r_0 = \text{const}$ ,  $\alpha = \pi/2$  — кут між  $Idl$  і  $\vec{r}$ ) одержуємо

$$dl = r_0 d\varphi$$

Тоді

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2r_0}$$

Якщо коловий контур має  $N$  витків і котушка є плоскою, то

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_0} N \quad (8.23)$$

**Приклад 8.4.** Обчислити індукцію магнітного поля колового лінійного струму силою  $I$  і радіуса  $r_0$  у точці  $O'$ , віддаленій уздовж осі  $Oz$  від центра кола  $O$  на відстань  $h$  (рис. 8.17).

**Розв'язання.** За законом Біо — Савара — Лапласа елементарна індукція магнітного поля  $dB$  в точці  $O'$ , створювана елементом струму  $Idl$ , буде  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$ ,

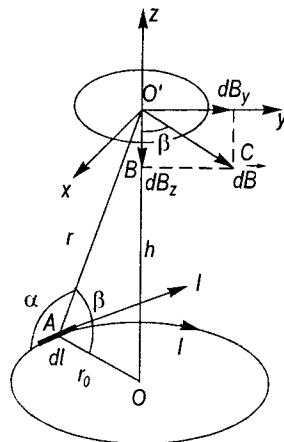


Рис. 8.17

де  $\alpha = \pi/2$ . Вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори  $Idl$  та  $\vec{r}$ , і нахилений до осі  $OO'$  під кутом  $\beta$ . Тому проєкція  $d\vec{B}$  на вісь  $Oz$   $dB_z = dB \cos \beta$ , а на вісь  $Oy$  —  $dB_y = dB \sin \beta$ .

Визначивши відповідні проєкції елементарних індукцій від інших елементів струму  $Idl$ , на які можна розбити увесь коловий струм, помітимо, що всі проєкції на осі  $Ox$  і  $Oy$  елементарних індукцій взаємно компенсуються і результуючі значення цих проєкцій дорівнюватимуть нулеві ( $B_x = B_y = 0$ ), а проєкції на вісь  $Oz$  будуть напрямлені вздовж осі  $Oz$  в один бік. Тому їх можна додавати алгебрично, тобто

$$B_z = \int dB \cos \beta$$

З подібності трикутників  $OAO'$  і  $O'BC$  випливає рівність кутів  $\angle OAO' = \angle BO'C$  (як кутів, сторони яких є взаємно перпендикулярними,  $d\vec{B} \perp \vec{r}$ ,  $O'B \perp OA$ ). З  $\triangle OAO'$

$$\cos \beta = \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h^2}}$$

Тоді

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0^2 + h^2} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h^2}} \int_0^{2\pi r_0} dl = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{3/2}}$$

Для плоскої котушки з  $N$  витками

$$B = \frac{\mu_0 I r_0^2 N}{2(r_0^2 + h^2)^{3/2}} \quad (8.24)$$

Якщо  $h = 0$  (у центрі колового струму), то  $B = \frac{\mu_0 IN}{2r_0}$ , що відповідає формулі (8.23).

**Приклад 8.5.** Обчислити індукцію магнітного поля на осі соленоїда, якщо кількість витків на одиницю його довжини  $n$ , а сила струму у витках  $I$  (рис. 8.18).

**Розв'язання.** Соленоїдом (від гр.  $\sigma\omega\lambda\eta\nu$  — трубка і  $\epsilon\iota\delta\zeta$  — вигляд) називають сукупність спіральньо намотаних на циліндричну поверхню витків ізоляваного провідника, по якому проходить електричний струм. Як правило, вважають, що провідник намотаний в один шар щільно, рівномірно і кількість витків обмотки на одиницю довжини циліндричної поверхні є величиною сталою і дорівнює  $n$ . Нехтуючи зазорами між витками при щільній упаковці їх, можна вважати, що  $n = N/L$ , де  $N$  — загальна кількість витків соленоїда, а  $L$  — його довжина. У такому разі соленоїд можна вважати сукупністю кілець зі струмом і тоді для обчислення індукції магнітного поля в довільній точці його осі можна скористатись формулою (8.24). Якщо довжина соленоїда  $L$  більше ніж у 10 разів перевищує діаметр його витків  $D$ , то такий соленоїд називають нормальним (нехтують крайовими ефектами). Особливістю такого соленоїда є те, що всередині його вздовж осі магнітне поле має однаковий напрям і однакове в усіх точках значення, тобто є однорідним. Розрахуємо індукцію магнітного поля, наприклад у точці  $O$  осі нормального соленоїда (див. рис. 8.18). Для цього виділимо спочатку вузьку (плоску) смугу витків соленоїда завтовшки  $dh$ , розмішену між проведен-

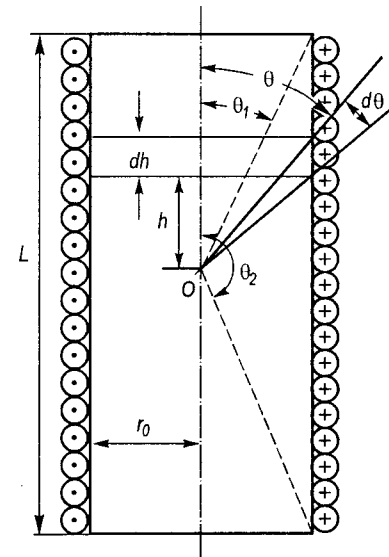


Рис. 8.18

ми з точки  $O$  радіусами  $r$ , які утворюють з віссю соленоїда кути  $\theta$  і  $\theta + d\theta$ . Довжина цієї смуги  $dh = \frac{r d\theta}{\sin \theta}$ . Кількість витків  $dN$ , що укладаються на виділеній смугі,

$$dN = ndh = n \frac{r d\theta}{\sin \theta}$$

Елементарна індукція магнітного поля  $dB$ , створювана в точці  $O$  витками  $dN$  провідника зі струмом силою  $I$ , за формулою (8.24) буде такою:

$$dB = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{3/2}} n \frac{r d\theta}{\sin \theta}$$

Оскільки  $(r_0^2 + h^2)^{3/2} = r^3$ , а  $r = \frac{r_0}{\sin \theta}$ , то

$$dB = \frac{\mu_0 I n}{2} \sin \theta d\theta. \quad (8.25)$$

Щоб знайти результуюче значення індукції магнітного поля в точці  $O$ , зінтегруємо формулу (8.25) у межах  $\theta_1$  і  $\theta_2$ :

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Для нескінченно довгого соленоїда  $\theta_2 = \pi$ ,  $\theta_1 = 0$ . Тоді  $B = \mu_0 I n$ . Для нормального соленоїда в точках поблизу середини осі його поле мало відрізняється від  $B = \mu_0 I n$ . Для довільної основи соленоїда (наприклад, у центрі верхньої основи  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\theta_2 = \pi$ )  $B = \mu_0 I n/2$ , тобто у два рази менша, ніж на осі всередині соленоїда.

### § 8.5. Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму

В електростатиці було встановлено, що робота при переміщенні одиничного пробного заряду в електричному полі нерухомого заряду не залежить від форми шляху і по довільному замкненому контуру дорівнює нулеві. Такі поля називають *потенціальними*. Математична умова потенціальності поля записувалась в інтегральній формі у вигляді рівності нулеві циркуляції вектора  $\vec{E}$  ( $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ ), або в дифе-

ренціальній формі ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ). Ця умова вказувала на те, що силові лінії електростатичного поля є незамкненими: початок вони беруть на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або прямують у нескінченність.

Як зазначалося, магнітних зарядів у природі не виявлено. Магнітні поля створюються рухомими електричними зарядами або струмами. Спостереження спектрів магнітних полів показують, що лінії індукції магнітного поля, наприклад прямолінійного провідника зі струмом, мають форму концентричних кіл, центри яких лежать на лінії струму (див. рис. 8.8). Обчислимо циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по довільному замкненому контуру  $L$  навколо провідника, по якому проходить струм силою  $I$  (рис. 8.19, а). Фактично ми маємо на меті обчислити роботу сили Ампера, яка діє на одиничний пробний еле-

мент провідника зі струмом  $I dl = 1$  при перенесенні його по замкненому контуру в магнітному полі:  $\oint_L I dl [\vec{B} d\vec{l}]$ . Оскільки  $I dl$  приймаємо

таким, що дорівнює одиниці, то циркуляція дорівнює  $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$ . Без обмеження загальності розгляду властивостей магнітного поля для спрощення розрахунків циркуляції вектора  $\vec{B}$  розглянемо найпростіший випадок магнітного поля нескінченного лінійного провідника зі струмом, а за контур інтегрування  $L$  оберемо концентричне коло радіуса  $r_0$  (рис. 8.19, б). Тоді

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \oint_L B \cos(\vec{B} d\vec{l}) dl. \quad (8.26)$$

Вектор  $\vec{B}$  за значенням є однаковим в усіх точках колового контуру і дотичним до елемента контуру  $d\vec{l}$ . Тому кут між  $\vec{B}$  і  $d\vec{l}$  дорівнює нулеві, а  $\cos(\vec{B} d\vec{l}) = 1$ . За формулою (3) прикладу 8.1  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$ . Підста-

вивши ці значення у формулу (8.26), одержимо

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \oint_L dl = \mu_0 I. \quad (8.27)$$

Рівність (8.27) є правильною також для контуру  $L$  довільної форми, який охоплює провідник зі струмом  $I$ . Якщо замкнений контур  $L'$  не охоплює провідник зі струмом  $I$ , то

$$\oint_{L'} \vec{B} d\vec{l} = 0. \quad (8.28)$$

Якщо маємо велику кількість провідників зі струмами і лише частина з них охоплюється контуром інтегрування (рис. 8.19, в), то циркуляція вектора  $\vec{B}$  визначається алгебричною сумою тільки тих сил струмів, які проходять по провідниках, що охоплюються контуром.

За принципом суперпозиції  $\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$ . Отже,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \left( \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \right) d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \oint_L \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_{\kappa=1}^n \mu_0 I_{\kappa} = \mu_0 I. \quad (8.29)$$

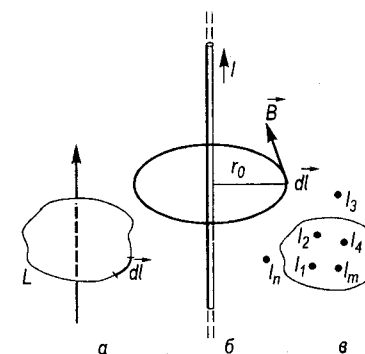


Рис. 8.19

де індексом «к» позначено ті сили струмів, які проходять по провідниках, що охоплюються контуром інтегрування. Струм  $I$  є сумою всіх струмів з урахуванням їхніх напрямів, які охоплюються замкненим контуром інтегрування. Закон, який виражається рівністю (8.27) або (8.29), називають *законом повного струму* або *теоремою про циркуляцію вектора індукції магнітного поля*. Його можна записати так:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (8.30)$$

Закон повного струму слушний для довільних струмів і для вакууму формулюється так: *циркуляція вектора індукції магнітного поля по постійних струмів по довільному замкнутому контуру дорівнює алгебричній сумі сил струмів, які охоплюються цим контуром, помноженій на магнітну сталу*. Отже, робота при перенесенні пробного одиничного елемента струму в магнітному полі в загальному випадку не дорівнює нулеві. Такі поля називають *непотенціальними* або *вихровими (соленоїдними)*. Лінії магнітної індукції поля не мають ні початку ні кінця, тобто вони завжди є замкненими або прямують у нескінченність. У цьому полягає одна з відмінностей статичного магнітного поля порівняно з електричним. Оскільки  $I = \int_S \vec{j}_n dS = \int_S \vec{j} dS$ , то рівність

(8.30) ще можна переписати так:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (8.31)$$

Рівняння (8.30) і (8.31) є інтегральною формою одного з основних рівнянь класичної магнітостатики (рівнянь Максвелла).

Застосуємо теорему Стокса до лівої частини рівності (8.31):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S}, \quad (8.32)$$

де  $S$  — довільна поверхня, що спирається на контур  $L$ . Прирівняємо праві частини рівностей (8.31) і (8.32):

$$\int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Оскільки поверхня інтегрування є довільною, то з рівності інтегралів можна перейти до рівності підінтегральних виразів

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (8.33)$$

Рівність (8.33) є *диференціальною формою закону повного струму* або *основним диференціальним рівнянням стаціонарного магнітного поля*. Щоб продемонструвати переваги застосування закону повного струму для обчислень магнітного поля, розглянемо такі приклади.

**Приклад 8.6.** Розрахувати індукцію магнітного поля на осі нормального соленоїда завдовжки  $L$  з кількістю витків  $N$  і силою струму у витках  $I$  (рис. 8.20).

Розв'язання. Оберемо замкнений контур інтегрування  $ABCA$  і запишемо вираз для циркуляції вектора  $\vec{B}$ :

$$\oint_{ABCA} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k = \mu_0 NI.$$

Циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру можна подати у вигляді двох доданків

$$\oint_{ABCA} \vec{B} d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} d\vec{l} + \int_{BCA} \vec{B} d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} d\vec{l},$$

оскільки магнітне поле соленоїда за його межами є значно меншим, ніж усередині, тобто  $\int_{AB} \vec{B} d\vec{l} \gg \int_{BCA} \vec{B} d\vec{l}$ ; крім того, усередині соленоїда  $|\vec{B}|_{AB}$  в усіх точках є однаковою  $|\vec{B}| = \text{const}$  (поле однорідне).

Отже,

$$\oint_{ABCA} \vec{B} d\vec{l} = \int_{AB} B_l dl = B \int_{AB} dl = \mu_0 NI, \quad \int_{AB} dl = L.$$

Звідси

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L} = \mu_0 nI.$$

**Приклад 8.7.** По центральній жилі радіуса  $r_1$  коаксіального кабелю проходить струм силою  $I$ , а повертається по зовнішній оболонці у вигляді циліндричної труби з радіусами  $r_2$  і  $r_3$  (рис. 8.21). Простір між  $r_1$  і  $r_2$  — діелектрик. Застосовуючи закон повного струму, обчислити індукцію магнітного поля в різних точках кабелю.

Розв'язання. 1. Обчислимо індукцію магнітного поля в довільній точці центральної жили на відстані  $r$  від центра:

$$\oint_L \vec{B} dl = \mu_0 \int_S \vec{j}_1 dS,$$

де  $j_1 = \frac{I}{\pi r_1^2}$ . Оберемо контур інтегрування — коло радіуса  $r$ .

Тоді для довільних точок при  $0 < r < r_1$

$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi r_1^2} \pi r^2, \quad \text{звідки } B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}.$$

2. Для точок при  $r_1 < r < r_2$  коловий контур радіуса  $r$  охоплює повний струм центральної жили. Отже,

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad \text{звідки } B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

3. Для точок при  $r_2 < r < r_3$  довільний коловий контур охоплює зустрічний струм, густина якого  $j_2 = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$ . Ре-

зультуюча сила струму, який охоплюється контуром, дорівнює

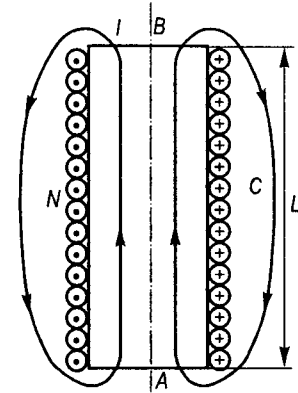


Рис. 8.20

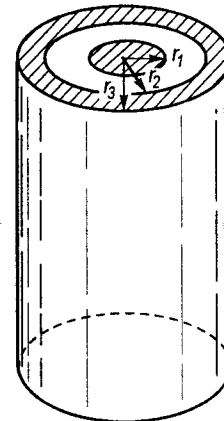


Рис. 8.21

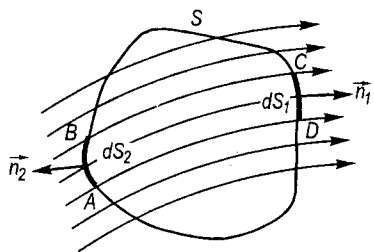


Рис. 8.22

алгебричній сумі сил струмів у центральній жилі  $I$  і сили струму в зовнішній оболонці  $I'$ . Оскільки

$$I' = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} \pi(r^2 - r_2^2),$$

то з урахуванням напрямів струмів маємо

$$B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0(I - I'), \text{ звідки}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right).$$

Поза коаксіальним кабелем  $\sum I_k = 0$ , отже,  $B = 0$ .

Доведемо, що потік вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  крізь довільну замкнену поверхню  $S$  дорівнює нулеві (рис. 8.22). Припустимо, що постійний струм проходить перпендикулярно до площини рисунка від нас. Тоді лінії індукції магнітного поля лежатимуть у площині рисунка і будуть напрямлені так, як показано стрілками на рис. 8.22. Виділимо нескінченно тонку циліндричну трубку  $ABCD$ , яка утворюється силовими лініями. Магнітний потік крізь поперечний переріз трубки буде однаковим на всій її довжині  $L$ . Ця трубка перетинатиме довільну замкнену поверхню парну кількість разів (наприклад, крізь площину  $dS_2$  силові лінії входять, а крізь  $dS_1$  виходять з об'єму, обмеженого  $S$ ). Отже, магнітні потоки крізь  $dS_2$  і  $dS_1$  є однаковими за значенням, але протилежними за знаком. Їхня сума дорівнює нулеві. Кожна з таких циліндричних трубок у сумі не робить ніякого внеску в результуючий магнітний потік крізь замкнену поверхню  $S$ . Отже, сумарний потік дорівнює нулеві. Тому

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (8.34)$$

За теоремою Гауса  $\int_S B_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV$ . Тому з рівності (8.34) випливає

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (8.35)$$

Рівняння (8.34) і (8.35) є відповідно інтегральною та диференціальною формами другого основного рівняння макроскопічної електродинаміки стаціонарних магнітних полів. Ці рівняння відображають той факт, що в природі немає джерел магнітного поля у вигляді магнітних зарядів, подібних до електричних, а силові лінії магнітного поля постійних струмів є замкненими і, отже, їх потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулеві.

Рівняння Максвелла для стаціонарного магнітного поля в інтегральній і диференціальній формах відповідно записуються так:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (8.36)$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (8.37)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

### § 8.6. Контур зі струмом у магнітному полі. Магнітний момент струму

За законом Ампера на елемент  $I d\vec{l}$  контуру зі струмом у магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  діє сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}], \text{ або } dF = IB dl \sin \alpha.$$

Результуюча сила, що діє на замкнений контур  $L$  зі струмом у постійному магнітному полі, виразиться інтегралом:

$$\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (8.38)$$

У разі прямого провідника зі струмом скінченної довжини  $l$  в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  діє сила  $\vec{F} = I[\vec{l} \cdot \vec{B}]$ , або

$$F = BIl \sin \alpha, \quad (8.39)$$

де  $\alpha$  — кут між напрямом провідника зі струмом і напрямом вектора  $\vec{B}$ .

Розглянемо окремі випадки розміщення довільного замкненого плоского контуру зі струмом у магнітному полі.

**Площина плоского контуру, паралельна однорідному магнітному полю** (рис. 8.23). Провівши паралельно лінії індукції  $\vec{B}$  досить густо,

розіб'ємо замкнений контур струму  $L$  на пари елементів струмів  $I dl_1$  та  $I dl_2$ . На них в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  діють сили Ампера  $d\vec{F}_1 = I[d\vec{l}_1 \cdot \vec{B}]$  і  $d\vec{F}_2 = I[d\vec{l}_2 \cdot \vec{B}]$ .

Напрямок цих сил визначають за правилом векторного добутку. Як видно з рисунка, ці сили є перпендикулярними до площини контуру і протилежно напрямленими. У скалярному вигляді

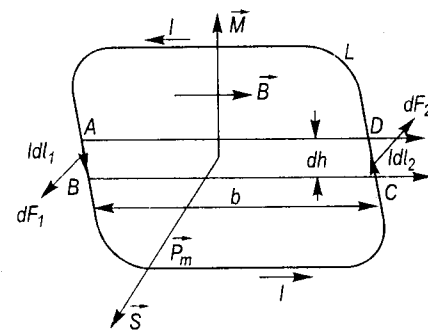


Рис. 8.23

$$dF_1 = I dl_1 B \sin \alpha_1 = IB dh, \quad dF_2 = I dl_2 B \sin \alpha_2 = IB dh,$$

де  $dl_1 \sin \alpha_1 = dh$  і  $dl_2 \sin \alpha_2 = dh$ . Тоді  $|dF_1| = |dF_2|$ . Сили  $d\vec{F}_1$  і  $d\vec{F}_2$  утворюють пару, дія якої характеризується обертальним моментом

$$dM = dFb = IBdhb = IBdS,$$

де  $b$  — плече пари сил;  $dS$  — площа чотирикутника  $ABCD$ .

Всі елементарні обертальні моменти  $dM$  мають однаковий напрям. Тому результуючий обертальний момент, який діє на замкнений плоский контур зі струмом в однорідному магнітному полі,

$$M = IBS, \quad (8.40)$$

де  $S$  — площа, яку охоплює контур зі струмом. Якщо ввести вектор площі контуру  $\vec{S}$ , який з напрямом струму утворює правогвинтову систему (вектор  $\vec{S}$  є перпендикулярним до площини рисунка і напрямленим до нас), то рівність (8.40) можна записати у векторному вигляді

$$\vec{M} = [I\vec{S} \cdot \vec{B}]. \quad (8.41)$$

Звідси видно, що вектор обертального моменту  $\vec{M}$  напрямлений перпендикулярно до  $\vec{S}$  і  $\vec{B}$  й утворює з ними правогвинтову трійку векторів, тобто лежить у площині рисунка і напрямлений вгору. Отже, на замкнений плоский контур зі струмом довільної форми в однорідному і паралельному до площини контуру магнітному полі діє пара сил, яка створює обертальний момент  $\vec{M}$ , значення якого прямо пропорційне добуткові сили струму на площу контуру  $S$  і на індукцію магнітного поля  $\vec{B}$ . Якщо контур — це рамка з  $N$  витків, то

$$\vec{M} = IN[\vec{S} \cdot \vec{B}]. \quad (8.42)$$

Введемо позначення  $\vec{p}_m = I\vec{S}$  і назвемо цей вектор *магнітним моментом струму*. Він вимірюється в ампер-метрах у квадраті. Як видно, напрям вектора  $\vec{p}_m$  збігається з напрямом вектора  $\vec{S}$ . Тоді формула (8.42) переписеться так:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}]N. \quad (8.43)$$

З формули (8.43) витікає, що при повороті площини контуру зі струмом відносно напрямку магнітного поля  $\vec{B}$  значення  $\vec{M}$  буде змінюватися від максимального, якщо  $\vec{p}_m \perp \vec{B}$ , до нуля, коли  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ . Під дією обертального моменту контур повертатиметься так, щоб вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  стали паралельними і однакою напрямленими. Таке положення відповідає стійкій рівновазі.

**Площина плоского контуру перпендикулярна до однорідного магнітного поля.** Якщо  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ , то площина контуру зі струмом перпендикулярна до ліній індукції  $\vec{B}$  (на рис. 8.24 точками позначено напрям  $\vec{B}$  до нас). У цьому разі сила Ампера, яка діє на кожний елемент контуру зі струмом, лежить у площині контуру і залежно від напрямів  $\vec{B}$  або  $I$  буде спрямована назовні або всередину, тобто контур зі струмом під дією цих сил або розтягуватиметься, або стискуватиметься, а обертальний момент дорівнюватиме нулеві.

**Плоский контур зі струмом у неоднорідному магнітному полі.** На плоский контур зі струмом у неоднорідному магнітному полі, крім обертальної дії та його деформації, діють додаткові сили, які зумовлюють переміщення контуру в бік збільшення або зменшення  $\vec{B}$  залежно від напрямів струму  $I$  та індукції поля  $\vec{B}$ . Розглянемо причини виникнення цих сил для випадку, зображеного на рис. 8.25. Припустимо, що  $\vec{B} = f(\vec{r})$ . Градієнт індукції магнітного поля напрямлений

в бік його зростання:  $\text{grad } B = \frac{\partial \vec{B}}{\partial r}$ . На довільний елемент струму  $I d\vec{l}$

діє сила  $d\vec{F}$ , напрям якої не збігається з площиною плоского витка, а залежить від кута  $\alpha$  між  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ . Розклавши  $d\vec{F}$  на складові  $d\vec{F}_t$  і  $d\vec{F}_n$ , помітимо, що крім деформації контуру під дією сил  $d\vec{F}_t$  виникають ще сили  $d\vec{F}_n$ , які на всі елементи струму  $I d\vec{l}$  контуру діють у тому самому напрямі й спричиняють його переміщення в бік збільшення  $\vec{B}$ . Зміна напрямів струму або  $\text{grad } \vec{B}$  зумовлює зміну дії сили, але такий стан контуру є нестійким. При незначному зміщенні контуру від положення рівноваги виникають моменти сил, що повертають його на  $180^\circ$ , і знову контур починає переміщатись у напрямі збільшення  $\vec{B}$ . Отже, при довільному розміщенні плоского контуру зі струмом у неоднорідному магнітному полі виникають сили, які повертають та переміщують контур у напрямі градієнта індукції магнітного поля.

Контури, або витки зі струмом, широко використовують у приладах

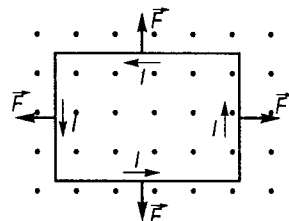


Рис. 8.24

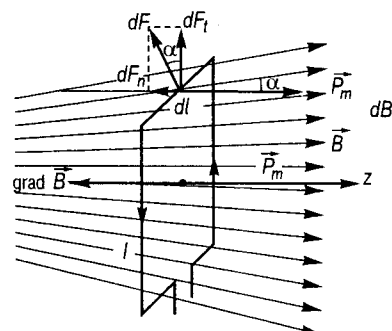


Рис. 8.25

для вимірювання значення  $\vec{B}$ . Якщо виміряти обертовий момент  $\vec{M}$ , то за формулою (8.43) можна визначити  $\vec{B}$ .

### § 8.7. Дія електричного і магнітного полів на рухомий заряд. Сила Лоренца

Експериментально досліджуючи дію магнітних полів на катодне й анодне випромінювання, ще в XIX ст. було виявлено два фундаментальних явища: магнітне поле діє на рухомі електричні заряди і рухомі електричні заряди створюють магнітне поле. Зауважимо, що на нерухомі заряди діє тільки електричне поле, а магнітне поле — ні. Отже, пробні нерухомі заряди дають можливість встановити наявність електричного поля, а рухомі заряди — магнітного.

Для спостереження дії магнітного поля на рухомі заряди розглянемо такий дослід. За допомогою електронно-променевої трубки в центрі екрана одержують світну точку  $O$ , яка виникає внаслідок бомбардувань флуоресціюючого шару  $ZnS$  розігнаним до великих швидкостей сфокусованим потоком електронів (рис. 8.26). Підносячи знизу до трубки північний полюс прямолінійного постійного магніту, виявляють, що світна точка зміститься праворуч (точка  $A$ ). Якщо переміщувати магніт по периметру кругового екрана, то й світна точка також переміщається, описуючи коло. При віддаленні магніту від трубки зміщення світної точки від центра екрана зменшується. Підносячи до екрана північний або південний полюс магніту та розміщуючи їх у різних точках, ми помічаємо, що електронний потік (світна точка) «відчуває» дію магнітного поля. Внаслідок таких і аналогічних дослідів було встановлено, що на рухомий заряд у магнітному полі діє сила  $\vec{F}_M$ , напрям якої є перпендикулярним до напрямку індукції магнітного поля  $\vec{B}$  і напрямку швидкості зарядів  $\vec{v}$ , а значення є пропорційним значенню рухомого заряду  $q$ , швидкості його руху  $\vec{v}$  й індукції магнітного поля  $\vec{B}$ :

$$\vec{F}_M = q[\vec{v} \cdot \vec{B}]. \quad (8.44)$$

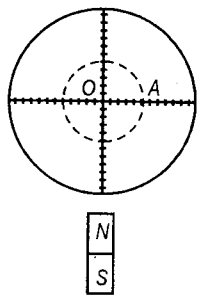


Рис. 8.26

В електричному полі напруженістю  $\vec{E}$  на заряд  $q$  незалежно від того, рухається він чи перебуває у стані спокою, діє сила  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ . Як показують досліди, електричне і магнітне поля діють незалежно. Тому в довільному електромагнітному полі або у разі сумісної дії електричного і магнітного полів результуюча сила  $\vec{F}_L = \vec{F}_e + \vec{F}_M$ , тобто

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + [\vec{v} \cdot \vec{B}]), \quad (8.45)$$

де силу  $\vec{F}_L$  називають *силою Лоренца*.

Раніше було встановлено, що на елемент провідника зі струмом у магнітному полі діє *сила Ампера*

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}], \quad \text{або} \quad d\vec{F} = [\vec{j} \cdot \vec{B}]dV. \quad (8.46)$$

Якщо взяти підковоподібний магніт (рис. 8.27), розмістити між його полюсами провідник і пропустити по ньому струм силою  $I$ , то провідник виштовхуватиметься із простору між полюсами або втягуватиметься залежно від напрямів струму або магнітного поля. Якщо змінити напрям струму або магнітного поля, то й напрям відхилення провідника зміниться на протилежний. Виникнення сили Ампера пояснюється дією магнітного поля на рухомі електричні заряди (у провідниках першого роду, наприклад, у металах, на електроні).

На кожний з рухомих зарядів, що створюють струм, у магнітному полі діє сила  $\vec{F}_M$  однакового напрямку, внаслідок чого магнітне поле відхиляє заряди в один бік, передаючи цю дію кристалічній ґратці провідника. Отже, можна стверджувати, що сила Ампера — це сумарний результат дії сил  $\vec{F}_M$  на кожен рухомий заряд провідника зі струмом у магнітному полі. Грунтуючись на цьому уявленні, розрахуємо  $\vec{F}_M$ , виходячи із закону Ампера (8.46). Візьмемо малий елемент провідника зі струмом  $\vec{j}dV$ . Якщо концентрація електронів у провіднику  $n$ , а їхній заряд  $e$ , то  $\vec{j} = en\vec{v}$ . Підставивши  $\vec{j}$  у (8.46), одержимо

$$d\vec{F} = en[\vec{v} \cdot \vec{B}]dV,$$

де  $ndV = N$  — загальна кількість електронів в елементі провідника. На окремий електрон діятиме сила

$$\vec{F}_M = \frac{d\vec{F}}{N} = e[\vec{v} \cdot \vec{B}], \quad (8.47)$$

що збігається з формулою (8.44). Це співвідношення є слухним для довільних рухомих зарядів не тільки в постійних, а й у змінних магнітних полях. Силу  $\vec{F}_M$  також часто називають *силою Лоренца*.

Формула (8.45) слухна для довільних значень швидкості заряджених частинок і є важливим співвідношенням макроскопічної електродинаміки, тому що дає змогу пов'язати рівняння електро-

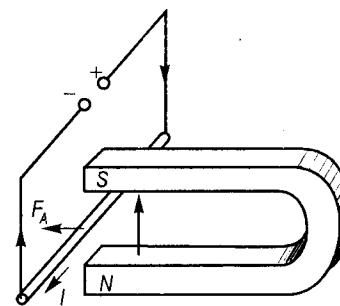


Рис. 8.27

магнітного поля з рівняннями руху заряджених частинок. Оскільки  $\vec{F}_M \sim [\vec{v} \cdot \vec{B}]$ , то її напрям є перпендикулярним до  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$  і, отже, ця сила не виконує роботи, а лише викривляє траєкторію руху зарядженої частинки, не змінюючи її енергії.

**Приклад 8.8.** Електрон зі швидкістю  $\vec{v}$  влітає в однорідне магнітне поле, індукція якого  $\vec{B}$ . Розрахувати параметри його руху для випадків, коли  $\vec{v} \perp \vec{B}$  і  $\vec{v}$  утворює з  $\vec{B}$  кут  $\alpha$ .

Розв'язання. 1. При  $\vec{v} \perp \vec{B}$  на рухомий електрон діє сила  $\vec{F}_M = e[\vec{v} \cdot \vec{B}]$ , внаслідок чого електрон набуває прискорення  $\vec{a} = \frac{e}{m} [\vec{v} \cdot \vec{B}]$ . Оскільки  $\vec{a} \perp \vec{B}$  і  $\vec{a} \perp \vec{v}$ , то прискорення електрона є доцентровим, а  $\vec{F}_M$  — відповідно доцентровою силою. Отже,  $\vec{F}_M$  лише викривляє траєкторію руху електрона, змушуючи його рухатися по колу, радіус якого можна визначити з умови

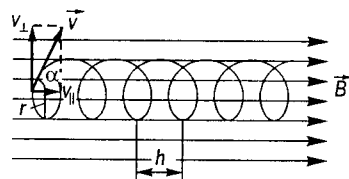


Рис. 8.28

$$\frac{v^2}{r} = \frac{e}{m} vB \sin \alpha.$$

Оскільки  $\sin \alpha = 1$ , то  $r = \frac{mv}{eB}$  ( $r$  називають *лар-морівським радіусом*). Взявши до уваги, що  $v = \omega r$ , можна обчислити так звані циклотронні частоту  $\omega = \frac{e}{m} B$  і період  $T = \frac{2\pi m}{eB}$ .

2. Швидкість  $\vec{v}$  утворює з  $\vec{B}$  кут  $\alpha$  (рис. 8.28). Під дією сили  $\vec{F}_M$  електрон рухатиметься по гвинтовій лінії зі швидкістю  $\vec{v}$ . При цьому його рух складається з рівномірного прямолінійного руху вздовж напрямку  $\vec{B}$  зі швидкістю  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  і рівномірного обертального руху в площині, перпендикулярній до  $\vec{B}$ , зі швидкістю  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Якщо  $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$ , то  $\vec{F}_M = 0$ , тобто на електрон, який рухається вздовж лінії індукції  $\vec{B}$ , магнітне поле не діє. Радіус гвинтової лінії

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \alpha}{eB}.$$

Крок гвинтової лінії руху електрона

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{eB}.$$

### § 8.8. Визначення питомого заряду електрона

Матеріальним носієм найменшої маси спокою і найменшого електричного заряду в природі є електрон. Його відкрив Дж. Дж. Томсон у 1897 р. Оскільки електрон є однією з елементарних частинок матерії, яка входить до складу атома, то є потреба мати найповнішу інформацію про його властивості. Однією з важливих характеристик електрона є питомий заряд, який дорівнює відношенню заряду електрона  $e$  до його маси  $m$ . Експериментальне визначення  $e/m$  належить до класичних дослідів фізики. Існує кілька методів. Всі вони базуються на дії електричного і магнітного полів на рухомий електрон.

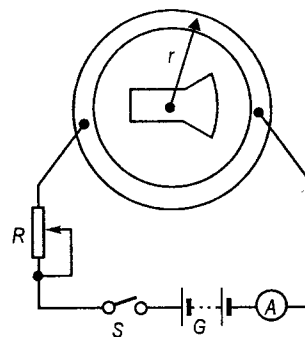


Рис. 8.29

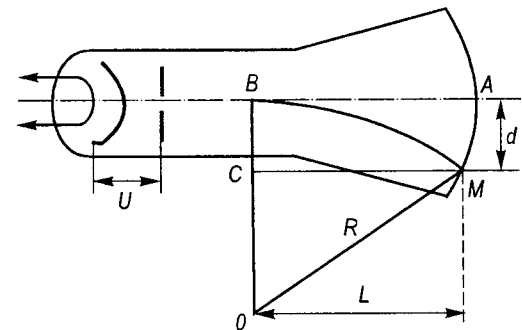


Рис. 8.30

**Рух електрона в однорідному магнітному полі.** Цей метод ґрунтується на використанні електронно-променевої трубки. На практиці беруть осцилограф, електронно-променева трубка в якому не має екранного захисту, і поміщають її в магнітне поле котушки з  $N$  витками. Схему установки для вимірювання питомого заряду електрона цим методом показано на рис. 8.29. Якщо магнітного поля немає, то електрони, що вилітають із розжареного катода трубки і розганяються під дією прискорювальної напруги  $U$  між катодом і анодом, рухаються прямолінійно і, потрапляючи в центр флуоресціюючого екрана, дають світну точку  $A$  (рис. 8.30). Швидкість електронів  $v$  визначають з умови  $\frac{mv^2}{2} = eU$ , звідки  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ . Під час проходження по витках котушки струму силою  $I$  в просторі, де розміщена електронно-променева трубка, виникає близьке до однорідного магнітне поле. На кожний рухомий в однорідному магнітному полі електрон діє сила Лоренца (8.47), яка викривляє траєкторію руху електронів і зміщує світну точку на відстань  $d$ . Оскільки сила Лоренца є доцентровою, то при  $\vec{v} \perp \vec{B}$  матимемо  $evB = \frac{mv^2}{R}$ , або

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{RB}, \quad (8.48)$$

де  $R$  — радіус кривизни траєкторії руху електронів. На осі колової котушки зі струмом силою  $I$  індукція магнітного поля

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2r},$$

де  $r$  — радіус витка. Із  $\triangle OMC$  обчислимо  $R^2 = L^2 + (R - d)^2$ , звідки  $R = \frac{d^2 + L^2}{2d}$ . Підставивши у (8.48) значення  $v$ ,  $R$ ,  $B$ , одержимо



$$\frac{e}{m} = \frac{32Ud^2r^2}{\mu_0^2 I^2 N^2 (d^2 - L^2)^2}$$

**Рух електрона в схрещених електричному і магнітному однорідних полях (метод Томсона).** Визначення питомого заряду електрона методом Томсона ґрунтується на компенсації дії однорідних електричного і магнітного полів на рухомий потік електронів в електронно-променевої трубки (рис. 8.31).

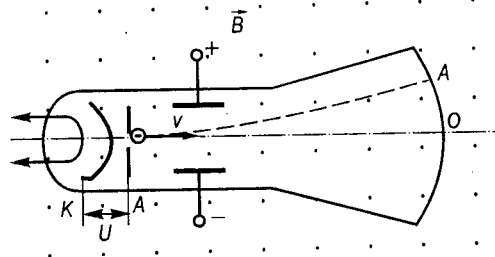


Рис. 8.31

Якщо магнітного поля немає, то електрони потрапляють на екран у точку  $O$ . В однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  на кожний електрон діє сила Лоренца  $\vec{F}_M$ , яка зміщує їх у точку  $A$ . Щоб повернути електронний пучок назад у точку  $O$ , на пластини конденсатора подають напругу  $U$  потрібної полярності й створюють однорідне електричне поле напруженістю  $\vec{E}$ , напрям якої перпендикулярний до напрямку магнітного поля з індукцією  $\vec{B}$ . Напругу  $U$  підбирають такою, щоб повністю компенсувати зміщення електронів у магнітному полі, тобто світну точку з положення  $A$  перемістити знову в точку  $O$ . За цієї умови  $|\vec{F}_M| = |\vec{F}_e|$ , або  $evB = eE$ . Звідси  $v = E/B$ . Робота прискорювальної напруги  $U_{пр}$  йде на збільшення кінетичної енергії руху електронів. Отже,

$$\frac{mv^2}{2} = eU_{пр}, \text{ або } v = \sqrt{\frac{2eU_{пр}}{m}}$$

Зрівнюючи праві частини виразів для  $v$ , одержимо

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eU_{пр}}{m}} \quad (8.49)$$

Оскільки для однорідного поля  $E = U/d$ , де  $U$  — різниця потенціалів між обкладками конденсатора, відстань між якими  $d$ , то з (8.49) маємо

$$\frac{e}{m} = \frac{U^2}{2U_{пр} B^2 d^2} \quad (8.50)$$

Всі параметри правої частини формули (8.50) легко визначаються експериментально.

**Метод магнетрона.** Для експериментального визначення питомого заряду методом магнетрона використовують електронні лампи спеціальної конструкції. Особливістю цих ламп є те, що катод і анод у них виготовлені у вигляді двох співвісних циліндричних поверхонь. Лампу (магнетрон) поміщають усередину нормального соленоїда так, щоб магнітне поле було напрямлене вздовж осі лампи (рис. 8.32).

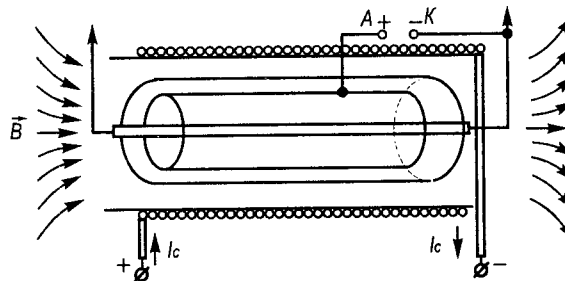


Рис. 8.32

Розглянемо характер руху електронів у лампі. Якщо струму в соленоїді немає ( $\vec{B} = 0$ ), то електрони рухаються від катода до анода в радіальному напрямі вздовж силових ліній електричного поля між катодом і анодом (рис. 8.33, а). При заданому значенні анодної напруги  $U_a$  між анодом і катодом установлюється анодний струм  $I_a = \text{const}$ . Пропустимо струм силою  $I_c$  у витках соленоїда і створимо, таким чином, однорідне магнітне поле вздовж катода. На рухомі електрони діятиме сила Лоренца  $\vec{F}_M$ , яка буде перпендикулярною до напрямку швидкості руху електронів. Траєкторія електронів викривлятиметься (рис. 8.33, б), але всі вони потраплятимуть на анод і, отже,  $I_a$  не змінюватиметься. З ростом  $I_c$  збільшуватиметься  $\vec{B}$  і кривизна траєкторії руху електронів також зростатиме. При певному, критичному значенні індукції поля  $\vec{B}_{кр}$  електрони почнуть рухатись по колах (рис. 8.33, в) і не потраплятимуть на анод. Сила анодного струму  $I_a$  різко спаде. Критичні значення сили струму соленоїда  $I_{кр}$ ,

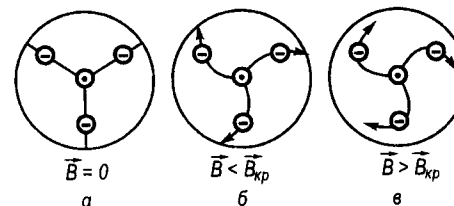


Рис. 8.33

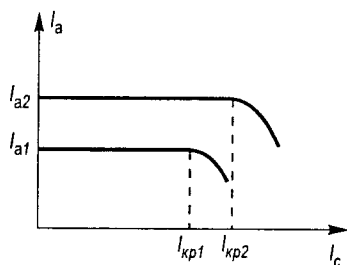


Рис. 8.34

при яких різко спадає сила анодного струму, визначають за так званими *скидовими характеристиками лампи*, під якими розуміють графіки залежності анодного струму  $I_a$  від струму в соленоїді  $I_c$  при заданих значеннях анодної напруги  $U_a$  (рис. 8.34). При цьому  $B_{кр} = \mu_0 I_{кр} n$ , де  $n = N/L = 1/d$  ( $d$  — діаметр дроту соленоїда).

Робочу формулу для визначення  $e/m$  виводять, виходячи з диференціального рівняння руху електрона у схрещених електричному і магнітному полях:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_M.$$

Розв'язок цього рівняння для  $e/m$  має вигляд

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{B_{кр}^2 R^2 (1 - r^2/R^2)},$$

де  $R$  і  $r$  — радіуси відповідно анода і катода.

Питомий заряд електрона за сучасними вимірюваннями становить  $1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Зауважимо лише, що цей метод називають методом магнетрона тому, що конфігурація електричного і магнітного полів, в яких рухаються електрони, нагадує конфігурацію схрещених полів у магнетронах — багаторезонаторних приладах для генерування електромагнітних коливань в області надвисоких частот.

### § 8.9. Ефект Холла та його застосування

Явище виникнення у твердих провідниках зі струмом, розміщених у магнітне поле, електричного поля в напрямі, перпендикулярному до напрямку струму й індукції магнітного поля, називають *ефектом Холла*. Це явище, яке відкрив у 1879 р. американський фізик Е. Холл (1855—1938) у тонких пластинах золота, належить до так званих поперечних гальваноманітних ефектів. Гальваноманітними називають сукупність явищ, пов'язаних з дією магнітного поля на електричні властивості твердих провідників, по яких проходить електричний струм. Якщо  $\vec{B} \perp \vec{j}$ , то явища називають поперечними гальваноманітними, а при  $\vec{B} \uparrow \vec{j}$  — поздовжніми. Основною причиною виникнення цих явищ є викривлення траєкторій рухомих зарядже-

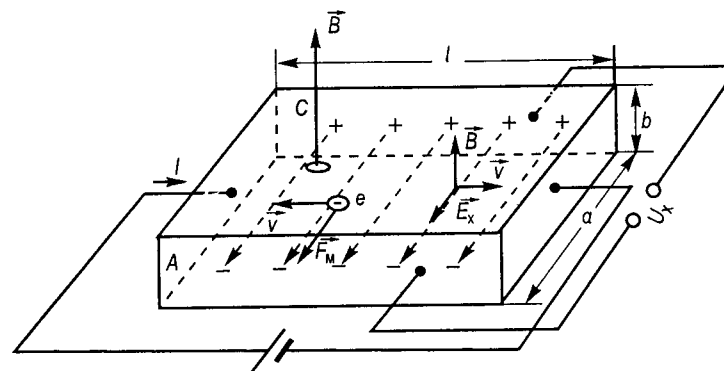


Рис. 8.35

них частинок (у твердих тілах електронів і дірок) в магнітному полі внаслідок дії на них сили Лоренца.

Механізм ефекту Холла розглянемо на такому прикладі. Візьмемо твердий провідник прямокутної форми з електронним типом провідності, пропустимо по ньому струм силою  $I$  і вмістимо в однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ , перпендикулярне до напрямку струму (рис. 8.35). На електрони, що рухаються зі швидкістю  $\vec{v}$ , у магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  діє сила Лоренца  $\vec{F}_M = e[\vec{v} \cdot \vec{B}]$ , яка відхиляє електрони до грані  $A$  провідника. Ця грань заряджається негативно. Протилежна грань провідника  $C$  заряджається позитивно внаслідок того, що від неї відходять електрони і там спостерігається нестача негативних зарядів. Між гранями  $A$  і  $C$  виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E}_x$ , яку називають *холлівською напруженістю*. З формули для магнітної складової сили Лоренца  $\vec{F}_M$  видно, що сила, яка діє на рухомі електрони, збільшується з ростом  $\vec{j}$  і  $\vec{B}$ . Природно припустити, що розділення зарядів збільшиться з ростом  $\vec{F}_M$ , а отже, і  $\vec{E}_x$  має бути прямо пропорційною  $\vec{j}$  та  $\vec{B}$ :

$$\vec{E}_x = R_x [\vec{j} \cdot \vec{B}], \quad (8.51)$$

або в скалярній формі  $E_x = R_x j B \sin \alpha$ , де  $\alpha$  — кут між  $\vec{j}$  і  $\vec{B}$ . Якщо  $\vec{B} \perp \vec{j}$ , то  $\sin \alpha = 1$  і напруженість електричного поля Холла  $\vec{E}_x$  є максимальною:

$$E_x = R_x j B. \quad (8.52)$$

Коефіцієнт  $R_x$  називають *сталю Холла*, яка є основною кількісною характеристикою ефекту Холла, неоднаковою для різних провідників і напівпровідників. Сталу  $R_x$  вважають позитивною, якщо

$\vec{j}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{E}_X$  становлять правою трійку векторів. Знак  $R_X$  збігається зі знаком носіїв заряду.

З'ясуємо, від яких параметрів залежить  $R_X$ . Для постійного струму  $I = \text{const}$  і заданого магнітного поля  $B = \text{const}$  рівновага в розподілі носіїв зарядів настає у разі, коли  $F_M = F_e$ , тобто  $e v B = e E_X$ . Звідси

$$E_X = v B = \frac{j B}{en}. \quad (8.53)$$

Тут взято до уваги, що  $v = \frac{j}{en}$ . Зрівнявши праві частини рівностей (8.53) і (8.52), одержимо

$$R_X = \frac{1}{en}. \quad (8.54)$$

Для металів  $n \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$  і  $R_X \sim 10^{-9} \text{ м}^3/\text{Кл}$ . Для напівпровідників  $R_X \sim 10 \text{ м}^3/\text{Кл}$ . Отже, і холлівська напруженість електричного поля в напівпровідниках у стільки ж разів більша, ніж у провідниках, тому спостерігати ефект Холла в напівпровідниках простіше, ніж у металах.

Вивчаючи ефект Холла, дослідно вимірюють не  $E_X$ , а холлівську різницю потенціалів  $U_X$ ; не густину струму  $j$ , а силу струму  $I$ . Тому формули для описання ефекту Холла можна подати в іншій формі.

Якщо виразити  $E_X = \frac{U_X}{a}$  і  $j = \frac{I}{ab}$  (див. рис. 8.35), то формула (8.52)

запишеться у вигляді  $\frac{U_X}{a} = R_X B \frac{I}{ab}$ , або  $U_X = R_X \frac{BI}{b}$ , де  $a$  і  $b$  — відпо-

відно ширина і товщина пластинки в напрямі магнітного поля. Параметри  $U_X$ ,  $I$ ,  $B$  і  $b$  вимірюють експериментально і розраховують сталу Холла

$$R_X = \frac{b U_X}{BI}. \quad (8.55)$$

Знаючи  $R_X$ , обчислюють концентрацію носіїв заряду у твердих провідниках

$$n = \frac{1}{e R_X}. \quad (8.56)$$

Сталу Холла можна пов'язати також з рухливістю носіїв заряду  $u$ . Оскільки за електронною теорією провідності  $u = \sigma/(ne)$ , то  $R_X \sigma = u$  ( $\sigma$  — питома електропровідність). З урахуванням (8.56) і того, що  $\sigma = l/(Rab)$ , де  $R$  — опір провідника, можна записати

$$u = \frac{U_X l}{BIRa}, \quad \text{або} \quad u = \frac{U_X l}{BUa}, \quad (8.57)$$

де  $U$  — різниця потенціалів, під дією якої проходить струм силою  $I$  в провіднику завдовжки  $l$ . Всі параметри у правій частині рівності (8.57) легко вимірюють експериментально і так обчислюють рухливість носіїв заряду. Отже, вивчаючи ефект Холла, експериментально визначають важливі мікроскопічні характеристики провідників: концентрацію, рухливість і знак носіїв заряду.

У напівпровідниках в електропровідності беруть участь одночасно електрони провідності та дірки. Сталу Холла для напівпровідників обчислюють через парціальні провідності електронів  $\sigma_e$  і дірок  $\sigma_d$  та їхні концентрації  $n_e$  і  $n_d$ : для слабких полів

$$R_X = \frac{1}{e} \frac{\sigma_e^2/n_e - \sigma_d^2/n_d}{(\sigma_e + \sigma_d)^2}, \quad (8.58)$$

а для сильних полів

$$R_X = \frac{1}{e} \frac{1}{n_e - n_d}. \quad (8.59)$$

Ефект Холла використовують також для вивчення енергетичних спектрів зарядів у металах і напівпровідниках, для контролю за якістю металів та напівпровідників, у вимірювальній та обчислювальній техніці, автоматиці та радіоелектроніці.

## § 8.10. Магнітні лінзи. Електронний мікроскоп

*Магнітні лінзи* — це різноманітні пристрої, які призначені для створення магнітних полів з певною симетрією і керування через них потоками заряджених частинок. Магнітні лінзи широко застосовуються в електронній та іонній оптиці, яка вивчає проблеми одержання зображень за допомогою електронних та іонних пучків, формування, фокусування і відхилення яких відбувається під дією електричних і магнітних полів. Зображення, одержувані за допомогою потоків електронів або іонів, візуалізують на люмінесцентних екранах або на фотоплівках. Оскільки електронні пучки застосовують частіше (легше їх одержувати і керувати ними), то виникла електронна оптика — галузь науки і техніки, зародження якої пов'язано зі створенням у 1897 р. німецьким фізиком К. Брауном (1850—1918) електронно-променевої трубки. Відхилення електронних пучків здійснюють як магнітним, так і електричним полями. Відповідні пристрої називають електростатичними або магнітними електронними лінзами. Робота всіх систем управління рухомими електронними пучками ґрунтується на дії сили Лоренца. Першу вісесиметричну магнітну лінзу побудував німецький фізик Х. Буш у 1926 р. Магнітна лінза у вигляді котушки зображена на рис. 8.36, де 1 — котушка; 2 — силові лінії магнітного поля; 3 — траєкторія електронного пучка. Штриховими лініями зображено контури електронного пучка, який виходить з точки А (предмет) і фокусується магнітною лінзою в точці В (зображення).

*Вісесиметричні магнітні лінзи* виготовляють у вигляді котушки з ізолюваного провідника, поміщеної в залізний контур з кільцевою щільною для підсилення і концентрації магнітного поля лінзи. Щоб створити магнітні лінзи з малою фокусною відстанню, намагаються максимально зменшити протяжність фокусуємого поля. Для цього використовують так звані полюсні наконечники (рис. 8.37, де 1 — котушка збудження;

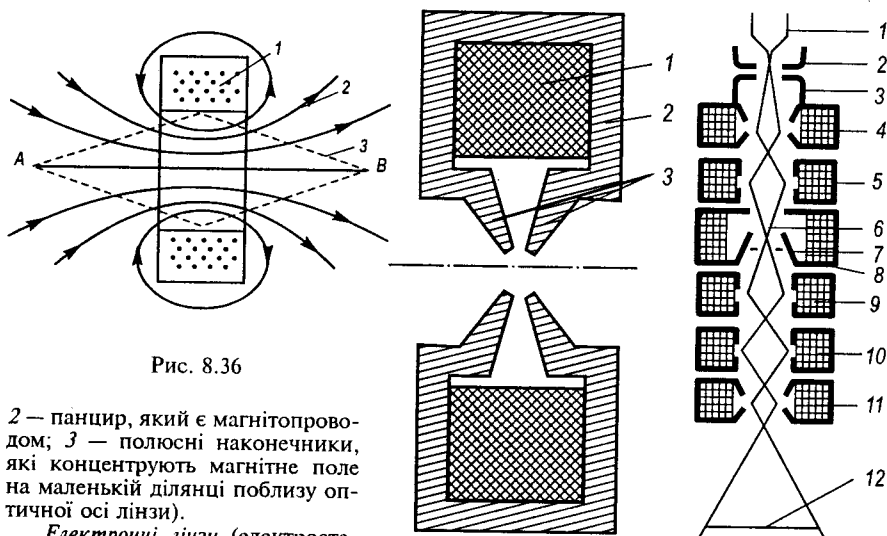


Рис. 8.36

2 — панцир, який є магнітопроводом; 3 — полюсні наконечники, які концентрують магнітне поле на маленькій ділянці поблизу оптичної осі лінзи).

Електронні лінзи (електростатичні і магнітні) широко використовують у різноманітних електронних приладах: електронних мікроскопах, електронних прискорювачах, бета-спектрометрах, а також у телебаченні та радіолокації.

Електронний мікроскоп — це прилад, призначений для спостереження і фотографування збільшених до  $10^6$  разів зображень об'єктів, в яких замість світлових променів використовують електронні пучки, прискорені в умовах глибокого вакууму до енергії 30—100 кеВ. Перші так звані *просвічувальні електронні мікроскопи* (ПЕМ) були сконструйовані на початку 30-х років ХХ ст., а в 40-х роках з'явилися *растрові електронні мікроскопи* (РЕМ), в основі яких лежить принцип одержання зображення об'єкта послідовним переміщенням тонкого електронного пучка по його поверхні (сканування). Тепер РЕМ досягли високої технічної досконалості і їх широко використовують у наукових дослідженнях. Просвічувальні електронні мікроскопи мають саму високу роздільну здатність (здатність приладу дати роздільне зображення дрібних, близько розташованих деталей об'єкта), яка становить  $(2-3) \cdot 10^{-10}$  м, що дає змогу фотографувати навіть окремі важкі атоми. Така висока роздільна здатність електронних мікроскопів досягається завдяки надзвичайно малій довжині хвилі (так званих хвиль де Бройля).

В оптичній системі ПЕМ, схему якої показано на рис. 8.38, створюють високий вакуум (до  $10^{-4}$  Па). Розжарений катод 1 є джерелом електронного пучка. Цей пучок фокусує циліндром 2 стискується в тонкий електронний шнур і прискорюється високоевольтним полем між катодом і анодом 3. Потім за допомогою короткофокусного 4 і довгофокусного 5 конденсорів електронний пучок фокусується додатково і направляється у вигляді електронної «плями» малих розмірів (1—20 мкм) на об'єкт 6. Під час проходження об'єкта частина електронів розсіюється і затримується апертурною діафрагмою 7. Ті електрони, які не розсіялись, проходять крізь отвір діафрагми і фокусуються об'єктивом 8 у предметній площині проміжних лінз 9 і 10, де формується перше збільшене зображення, а остання електронна лінза 11 фокусує зображення на флуоресцюючому екрані 12 електронно-променевої трубки. Замість екрана в цьому місці може бути розміщена фотоплівка, на якій фотографують збільшене зображення

Рис. 8.37

Рис. 8.38

об'єктів. Залежно від товщини просвічувальних об'єктів виготовляють ПЕМ з різною прискорювальною напругою (від 100 кВ до 1—3 МВ).

Растрові електронні мікроскопи (РЕМ) мають меншу роздільну здатність  $(50-200) \cdot 10^{-10}$  м. Однак вони характеризуються високою інформативністю. За допомогою РЕМ можна дослідити мікрорельєф, розподіл хімічного складу речовини на поверхні об'єкта, *p-n*-переходи, здійснювати структурний аналіз тощо. У сучасних електронних мікроскопах поєднують високу роздільну здатність ПЕМ з інформативністю РЕМ у так званих *просвічувальних растрових електронних мікроскопах* (ПРЕМ).

Підвищення роздільної здатності електронних мікроскопів до  $10^{-10}$  м і більше дає можливість реєструвати навіть легкі атоми, а отже, візуалізувати органічний світ на атомарному рівні. У сучасних електронних мікроскопах використовують криогенні електронні лінзи на основі надпровідників, а також ряд інших удосконалень, що дає змогу покращити якість зображення. Значне розширення можливостей електронних мікроскопів стало можливим завдяки їх спареній роботі з ЕОМ.

Останнім часом виготовлено *тунельний електронний мікроскоп*, в основі дії якого лежить чисто квантовий тунельний ефект. Він полягає в можливості подолання електронном потенціального бар'єра, висота якого більша від енергії частинки. За допомогою цього мікроскопа можна виділити надзвичайно тонкий пучок електронів порівняно малої потужності. Це дає змогу значно підвищити роздільну здатність (спостерігати окремі атоми і навіть електронну густину різних атомарних станів), а також проводити спостереження без спотворення об'єкта дослідження (атома, молекули) впливом потужного потоку електронів у звичайних електронних мікроскопах.

### § 8.11. Мас-спектрометр

*Мас-спектрометри* — це прилади, що призначені для розділення іонізованих молекул і атомів за їхніми масами. Принцип роботи їх ґрунтується на дії електричних і магнітних полів на пучки іонів, що рухаються у вакуумі. У мас-спектрометрах реєстрацію іонів проводять на основі залежності сили іонного струму від маси іонів. Існують прилади, в яких ця залежність фіксується на фотоплівці: записується спектр  $I(m)$ . Такі прилади називають *мас-спектрографами*. Структурну схему мас-спектрометра показано на рис. 8.39. Пристрій 1 призначений для попередньої підготовки досліджуваного зразка (очистки, нагрівання, перетворення в газоподібний стан). Прилад 2 є джерелом іонів, тобто в ньому речовина іонізується і формується іонний пучок. Іонний пучок потрапляє в мас-аналізатор 3, де під дією електричних і магнітних полів відбувається розділення іонів за масами, а точніше, за відношенням мас іонів до їхніх зарядів. Потім іони надходять у приймач іонів 4, в якому іонний струм перетворюється в електричний сигнал, підсилюється в електронному приладі 5 і подається на автоматично реєструючий пристрій 6, де записується мас-спектрограма  $I(m)$ , 8 — блок елек-

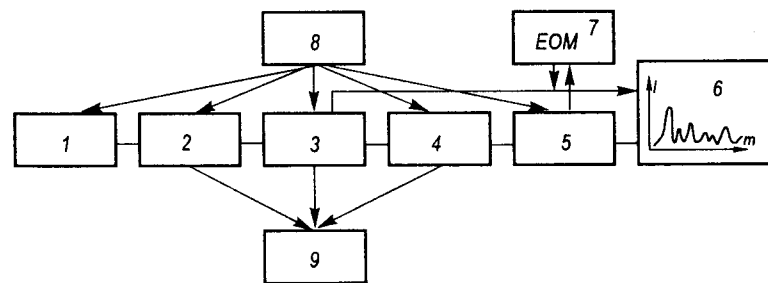


Рис. 8.39

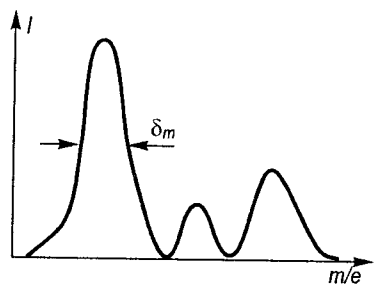


Рис. 8.40

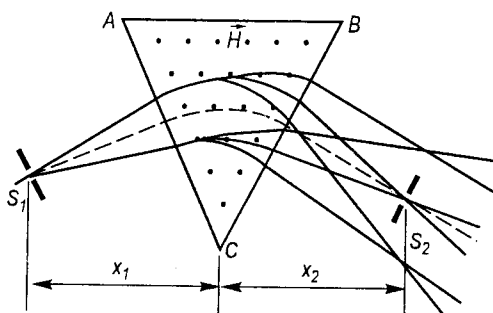


Рис. 8.41

тричного живлення, 9 — система створення і підтримання високого вакууму. В окремих мас-спектрометрах інформація про іонний струм і масу іонів надходить на ЕОМ 7.

Основною характеристикою мас-спектрометрів є їхня роздільна здатність  $R$  як відношення маси іона  $m$  до ширини спектрального піка  $\delta_m$  (в атомних одиницях маси):  $R = m/\delta_m$  (рис. 8.40). Роздільною здатністю іноді називають значення тієї найбільшої маси, при якій два піки з різницею мас, що дорівнює одиниці, розділяються до заданого рівня. Якщо  $R < 10^2$ , то мас-спектрометри мають низьку роздільну здатність, якщо  $R \sim 10^2-10^3$  — середню,  $R \sim 10^3-10^4$  — високу і  $R > 10^5$  — дуже високу роздільну здатність.

Чутливість мас-спектрометрів називають відношення сили струму, що створюється іонами даної маси досліджуваної речовини, до парціального тиску цієї речовини в іонному джерелі 2. Сучасні мас-спектрометри мають чутливість близько  $10^{-8}-10^{-5}$  А/Па. Відносною чутливістю називають ту мінімальну кількість речовини, яка ще може бути виявлена за допомогою мас-спектрометра. Її значення становить близько  $10^{-7}-10^{-3}$  %.

Мас-аналізатори поділяють на статичні і динамічні. Розділення іонів у статичних мас-аналізаторах (рис. 8.41) відбувається під дією постійних електричних і магнітних полів або таких, які практично не змінюють своїх силових характеристик за час пролітання іонів у приладі. Іони, які вилітають з отвору  $S_1$  з різними значеннями відношення  $m/e$ , пролітаючи область однорідного магнітного поля  $ABC$  (як у магнітній призмі), рухаються по різних траєкторіях і фіксуються в різних місцях, наприклад фотоплівки, або потрапляють у щілину іонного приймача  $S_2$ . У разі плавної зміни електричного або магнітного поля у щілину приймача іонів надходять іони з різним відношенням  $m/e$ . При безперервному записуванні одержимо графік  $I(m)$  з іонними піками — мас-спектр.

Для розділення іонів з різними відношеннями  $m/e$  в динамічних мас-аналізаторах використовують різний час прольоту іонами різної маси заданої відстані при дії на них імпульсних електричних полів. Існує багато типів динамічних мас-аналізаторів, наприклад часо-пролітні, радіочастотні, квадрупольні, магніторезонансні, циклотронно-резонансні та ін. У часо-пролітних динамічних мас-аналізаторах (рис. 8.42) розділення іонів за значенням  $m$  відбувається за умови, що іони різних мас набувають однакових енергій в імпульсному електричному полі напруженому  $U$ . Їхні швидкості, а отже, й інтервали часу пролітання різних за масою іонів тієї самої відстані будуть пропорційними  $\sqrt{m}$ , тобто  $t = L\sqrt{m/(2eU)}$ .

У мас-спектрометрах використовують різні способи іонізації атомів і молекул речовини: іонізація електронним ударом, фотоіонізація, іонізація іонним ударом, іонізація в сильному електричному полі, іскровий розряд, іонізація під дією різних видів випромінювань тощо.

Іонні струми при розділенні іонів за значеннями мас, звичайно, є дуже малими — близько  $10^{-9}-10^{-10}$  А. Тому для їхньої реєстрації в мас-спектрографах використовують підсилювачі, чутливість яких  $10^{-15}-10^{-16}$  А. Подальше підвищення чутливості досягається застосуванням електронних помножувачів, за допомогою яких її підвищують до  $10^{-18}-10^{-19}$  А.

Перші мас-спектрографи, виготовлені в Англії Дж. Дж. Томсоном у 1910 р. і Ф. Астоном у 1919 р., відіграли важливу роль у відкритті нуклідів і вивченні нуклідного складу елементів та в точному визначенні атомних мас. Мас-спектрометр і тепер є основним приладом для одержання достовірної інформації про маси ядер і атомів. Нуклідний склад елементів може бути визначений з відносною похибкою  $10^{-2}$  %, а маси ядер — з похибкою до  $10^{-4}-10^{-5}$  %. Висока чутливість і точність мас-спектрографів забезпечили їм широке використання в ядерній енергетиці, геології, геохімії для елементарного і структурного молекулярного аналізу та в ряді інших галузей науки і техніки.

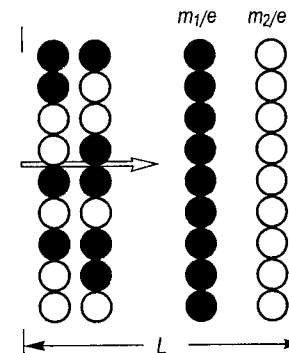


Рис. 8.42

## § 8.12. Прискорювачі заряджених частинок

У наукових дослідженнях з атомної і ядерної фізики та фізики елементарних частинок, у хімії, біофізиці, геофізиці, а також у ряді прикладних галузей (дефектоскопія, променева терапія тощо) застосовують заряджені частинки великих енергій. Для одержання таких частинок їх розганяють в електричних полях до швидкостей, близьких до світлових. Сучасні складні й потужні установки, які призначені для одержання заряджених частинок (електронів, протонів, атомних ядер, іонів тощо) великих енергій за допомогою прискорення їх в електричних полях, називають *прискорювачами*.

За способом одержання прискорювального поля розрізняють звичайні «класичні» прискорювачі, в яких прискорювальне електричне поле створюють за допомогою генераторів (різного типу радіотехнічних пристроїв), і прискорювачі, в яких прискорювальне поле створюють за допомогою інших заряджених частинок (метод релятивістських електронних пучків, плазмовий метод, метод електронних кілець). За типом заряджених частинок, які підлягають прискоренню, розрізняють протонні, електронні та іонні прискорювачі. За формою траєкторій, уздовж яких розганяють частинки, розрізняють лінійні і циклічні прискорювачі. Лінійні прискорювачі з електростатичними генераторами використовують і тепер. Завдяки їм вдається одержувати потоки прискорених заряджених частинок з енергією близько 1 МеВ. У 30—40-х роках ХХ ст. розробляють резонансні прискорювачі, прискорення заряджених частинок в яких здійснюють за допомогою високочастотних змінних електричних полів. Проходячи крізь прискорювальний проміжок багаторазово, заряджені частинки набувають високих енергій навіть у порівняно невисоких електричних полях. Схему лінійного резонансного прискорювача показано на рис. 8.43. Прискорення заряджених частинок.

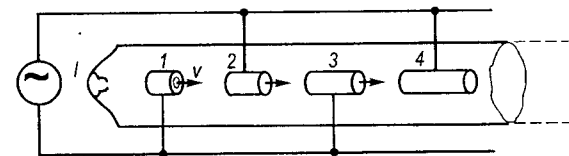


Рис. 8.43

які надходять з інжектора 1, відбувається у прискорювальних шлінах між циліндричними електродами 1—4, на які подається узгоджене з рухом частинок змінне електричне поле. Особливого поширення набули основані на цьому принципі не лінійні, а циклічні прискорювачі. У цих прискорювачах заряджені частинки рухаються не по прямій лінії, а по розбіжній спіралі або по колу. Циклічний рух частинок забезпечується дією на них однорідного магнітного поля. Ідею циклічного резонансного прискорювача запропонував американський фізик Е. Лоуренс (1901—1958). Він побудував перший циклотрон у 1932 р. Циклотрони дають змогу одержувати протони з енергією 10—20 МеВ. У 1940 р. американський фізик Д. Керст (н. 1911 р.) побудував циклічний прискорювач індукційного типу (бетатрон).

У 1944—1945 рр. радянський фізик В. І. Векслер (1907—1966) і незалежно від нього американський фізик Е. Макміллан (н. 1907 р.) відкрили так званий механізм автофазування, що дало можливість значно підвищити енергію і покращити характеристики прискорених пучків частинок у резонансних прискорювачах. За принципом автофазування розроблено ряд циклічних прискорювачів: фазотрон, синхротрон, синхрофазотрон, мікротрон. Були вдосконалені також і лінійні резонансні прискорювачі на основі ідеї знакозмінного фокусування, що дало змогу одержувати електрони з енергіями 20 ГеВ. У сучасних прискорювачах одержують протони з енергіями 500 ГеВ. Методи забезпечення стійкості руху частинок у перпендикулярному до траєкторії їх руху напрямі називають *фокусуванням*, а в напрямі траєкторії — *фазуванням*.

Паралельно з вдосконаленням класичних прискорювачів інтенсивно розробляються й колективні методи прискорення заряджених частинок, за якими велике майбутнє. Ідея колективних методів прискорення частинок також належить В. І. Векслеру (1956 р.). Суть цих методів полягає в тому, що утворений певним чином рухомий ущільнений згусток електронів захоплює своїм електричним полем позитивні частинки (протони, ядра, іони), надаючи їм енергії, більшої від енергії електронів. Співвідношення енергій при цьому визначається співвідношенням мас позитивних частинок і електронів. Для протонів, наприклад, це співвідношення дорівнює 1836.

У резонансних циклічних прискорювачах рух частинок по кругових орбітах відбувається внаслідок дії однорідного магнітного поля. З умови того, що доцентровою силою є сила Лоренца, тобто  $qvB = \frac{mv^2}{R}$ , радіус  $R$  орбіти можна пов'язати з індукцією магнітного поля  $B$  і енергією частинок  $\mathcal{E}$  співвідношенням

$$R = \frac{\mathcal{E} v}{c^2 q B}, \quad (8.60)$$

де  $\mathcal{E} = mc^2$  — повна релятивістська енергія частинки масою  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  (тут  $m_0$  — маса спокою;  $v$  — лінійна швидкість частинок на орбіті;  $q$  — заряд рухомої частинки).

Оскільки  $v = \omega R$ , то з (8.60) одержимо зв'язок між  $\mathcal{E}$ ,  $B$  і  $\omega$ :

$$\mathcal{E} = \frac{c^2 q B}{\omega},$$

де  $\omega$  — циклічна частота обертання частинки на орбіті.

Є прискорювачі з постійним і змінним магнітними полями. Згідно з цим і прискорювальне електричне поле може бути постійної або змінної частоти  $\omega_n$ . Щоб частинка увесь час прискорювалась,  $\omega_n$  мусить бути кратною  $\omega$ , тобто  $\omega_n = k\omega$ , де  $k$  — кратність частоти (ціле число). Звідси

$$\mathcal{E} = \frac{c^2 q B k}{\omega_n}. \quad (8.61)$$

Резонансні циклічні прискорювачі класифікують залежно від зміни в часі параметрів  $B$  або  $\omega_n$ . З ростом енергії частинки  $\mathcal{E}$ , щоб забезпечити її прискорення, потрібно або збільшити  $B$  магнітного поля (синхротрон), або зменшити  $\omega_n$  — частоту прискорювального електричного поля (фазотрон), або ж змінювати одночасно  $B$  і  $\omega_n$  (синхрофазотрон), або збільшувати кратність частоти  $k$  (мікротрон).

Для швидкостей  $v \ll c$  (нерелятивістські швидкості) маса частинок не залежить від  $v$  ( $m = \text{const}$ ). Тому при  $B = \text{const}$  частота обертання частинок в однорідному магнітному полі також залишається сталою ( $\omega = \text{const}$ ) і незалежною від  $v$ . Якщо підтримувати частоту прискорювального електричного поля  $\omega_n$  кратною частоті обертання частинок на орбіті  $\omega$ , то при сталій  $B$  може спостерігатись тривалий резонанс між  $\omega_n$  і  $\omega$  (циклотрон), що забезпечує необхідне прискорення частинок.

Синхрофазотрон є циклічним резонансним прискорювачем протонів та іонів, резонансне прискорення частинок в якому забезпечується зміною в часі як індукції магнітного поля  $B$ , так і прискорювальної частоти  $\omega_n$ . При цьому радіус орбіти не змінюється за умови

$$\omega_n = k \frac{c}{R} \frac{B}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{cqR}\right)^2 + B^2}},$$

де  $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$  — енергія спокою частинки. З ростом  $B$  і  $\omega_n$  також зростає, а при  $B \gg \mathcal{E}_0 / (cqR)$  наближається до максимального значення  $\omega_n = kc/R$ . Остання умова відповідає швидкості частинки, що дорівнює швидкості світла. Радіус орбіти руху важких частинок практично не змінюється. Отже, магнітна система є порівняно простою і має вигляд вузького кільця. З усіх прискорювачів синхрофазотрони дають можливість одержувати частинки дуже великих енергій. Найвідомішим є Серпухівський синхрофазотрон (76 ГеВ), проєктується ще потужніший синхрофазотрон, розрахований на одержання енергії протонів у кілька тисяч гігаелектрон-вольтів. У м. Батавія (США) з 1980 р. функціонує синхрофазотрон на 500 ГеВ, у Женеві (Швейцарія) — на 400 ГеВ.

Синхротрон є циклічним резонансним прискорювачем, в якому змінюється в часі лише індукція магнітного поля, а частота прискорювального електричного поля залишається незмінною ( $\omega_n = \text{const}$ ). Синхротрон використовують для прискорення релятивістських електронів ( $v \sim c$ ).

У синхротронах орбіта руху електронів наближається до колової і її радіус майже не змінюється. Це зумовлено тим, що релятивістська швидкість руху електронів змінюється мало. Велика швидкість руху електронів по колових орбітах з прискоренням зумовлює інтенсивне і потужне випромінювання ними електромагнітної енергії. При великих швидкостях електронів зростання їхньої енергії завдяки енергії прискорювального поля стає близьким до енергії випромінювання і подальше збільшення її стає неможливим. Через ці обмеження синхротрони можуть забезпечувати енергію електронів 5—10 ГеВ. Конструктивно синхротрони є близькими до синхрофазотронів.

Фазотрон — циклічний резонансний прискорювач, розрахований на одержання великих енергій важких частинок (протонів, ядер, іонів), в якому магнітне поле в часі змінюється, а резонансне прискорення частинок з ростом їхньої маси забезпечують зменшенням частоти прискорювального електричного поля  $\omega_n$ . Орбіта руху частинок є спіралеподібною. У центрі розміщують інжектор частинок (наприклад, газовий розряд). Конструкція магнітної системи має забезпечити рух частинок по спіралі. Отже, поле є неоднорідним і зменшується з віддаленням від центра. Це значно ускладнює конструкцію магнітної системи. На рис. 8.44 показано схему руху частинок у фазотронах і циклотронах (1 — джерело частинок; 2 — спіральна орбіта руху частинок; 3 — генератор прискорювального поля; 4 — прискорювальні електроди; 5 — пристрій для виводу прискорених частинок). Максимальна енергія протонів, яку можна одержати за допомогою фазотронів, 1 ГеВ.

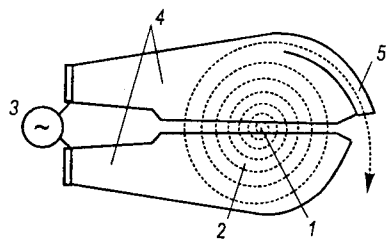


Рис. 8.44

Синхрофазотрони, синхротрони і фазотрони працюють в імпульсному режимі. Порція частинок захоплюється, розганяється до великих енергій і посилається на мішень. Потім установка повертається у вихідний стан і знову процес повторюється. Тривалість одного циклу прискорення від кількох секунд (у синхрофазотронах) до 0,01 с (у синхро- і фазотронах). Усі зазначені прискорювачі дають можливість одержувати частинки з релятивістськими швидкостями  $v \sim c$ .

**Циклотрон** — також циклічний резонансний прискорювач, однак у ньому не змінюється в часі ні магнітне поле з індукцією  $B$ , ні прискорювальна частота  $\omega_n$ . Магнітне поле, як і у фазотронах, зменшується зі збільшенням відстані від центра, а тому при  $\omega_n = \text{const}$  внаслідок руху важких частинок по спіралі вони прискорюються, оскільки за той самий час з віддаленням від центра вони проходять більші відстані. Такий механізм прискорення можливий лише для нерелятивістських частинок  $v \ll c$ , якщо їхня маса практично не залежить від швидкості. Це накладає обмеження на енергію частинок (для протонів близько 10–20 МеВ). Циклотрон працює в безперервному режимі, і внаслідок цього можна одержувати досить інтенсивні прискорені пучки важких частинок.

**Мікротрон** — циклічний резонансний прискорювач електронів, в якому при постійних у часі  $B$  і  $\omega_n$  прискорення електронів до релятивістських швидкостей здійснюють внаслідок зміни кратності частоти прискорювального поля  $k$  з кожним новим оборотом частинки. Магнітне поле в мікротронах є однорідним. Якщо забезпечити умову, щоб електрони перший оборот виконували за один період прискорювального поля ( $k = 1$ ), другий — за два ( $k = 2$ ) і т.д., то частинки весь час будуть попадати в ту саму фазу прискорювального електричного поля і завдяки цьому додатково прискорюватися. У мікротронах одержують енергію електронів близько 30 МеВ.

**Бетатрон** — циклічний індукційний прискорювач електронів. У ньому електрони утримуються на кільцевій орбіті магнітним полем з індукцією  $B_{\text{орб}}$ , а прискорення забезпечується вихровим електричним полем, яке, у свою чергу, індукується змінним магнітним полем з індукцією  $B$ .

Циклічні прискорювачі для одержання частинок високих енергій будують у вигляді багатоступінчастих систем: лінійний прискорювач подає частинки в малий синхрофазотрон, де вони прискорюються до певних проміжних енергій, а потім їх подають у великий синхрофазотрон, де вони одержують потрібну велику енергію.

Розвиток прискорювачів іде як шляхом збільшення енергії заряджених частинок, так і шляхом покращення параметрів пучків прискорених частинок: збільшення інтенсивності і протяжності в часі імпульсу, зменшення розходження його параметрів тощо.

### § 8.13. Магнітогідродинамічні генератори

**Магнітогідродинамічний генератор** (МГД-генератор) — це установка для безпосереднього перетворення теплової енергії в електричну. Принцип роботи ґрунтується на явищі електромагнітної індукції, тобто виникненні струму в провіднику, який, рухаючись, перетинає магнітні силові лінії, внаслідок чого різнойменно заряджені частинки розділяються, відхиляючись у протилежні боки.

Як рухомі в магнітному полі провідники використовують плазму або провідні рідини (електроліти і рідкі метали).

На можливість використання рухомих у магнітному полі провідних рідин для одержання електричних струмів вказував ще М. Фарадей у 1831 р. Основні принципи сучасних МГД-генераторів було закладено в першій чверті XX ст., а практична реалізація їх стала можливою лише в 50-х роках XX ст. зав-

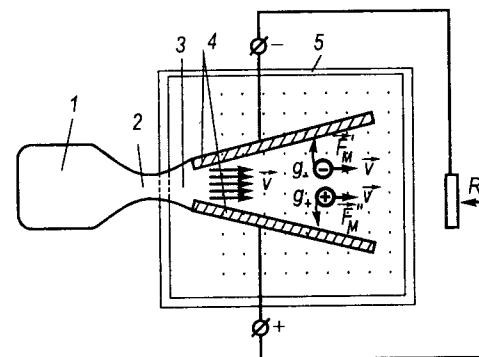


Рис. 8.45

дяки розвитку магнітної гідродинаміки і фізики плазми. МГД-генератор, схема якого показана на рис. 8.45, складається з камери 1, в якій генерується робоче тіло (тверде паливо переходить у газ й іонізується), нагрівається до температури 2500–3000 К і надходить у сопло 2, де низькотемпературна плазма розганяється до швидкостей 2000–2500 м/с; МГД-каналу 3, в якому рухається плазма або провідна рідина; електродів 4, на котрі попадають іонізовані частинки протилежних знаків і які замикаються на споживачі електричної енергії  $R_H$ ; магнітної системи 5. Розглянемо принцип роботи МГД-генератора. Розігнані до швидкостей  $v$  різнойменно заряджені частинки із сопла потрапляють в однорідне магнітне поле МГД-каналу. На кожному рухому заряджену частинку  $q$  в магнітному полі діє сила Лоренца: на негативно заряджену частинку  $\vec{F}'_M = q_- [\vec{v} \cdot \vec{B}]$ , а на позитивно заряджену  $\vec{F}'_M = q_+ [\vec{v} \cdot \vec{B}]$ . Якщо  $\vec{v}_+ = \vec{v}_- = \vec{v}$  і  $q_- = q_+$ , то  $\vec{F}'_M = -\vec{F}'_M$ . Отже, на позитивно і негативно заряджені частинки в механічному їх потоці в магнітному полі діють сили протилежних напрямів, що й призводить до їх розділення. Внаслідок цього верхній електрод одержує негативний заряд, а нижній — позитивний. Процес розділення зарядів є неперервним, тому, якщо з'єднати електроди із споживачами, то крізь їхні обмотки проходитиме електричний струм.

За типом робочого тіла МГД-генератори поділяють на плазмові і рідкометалеві. Вони можуть працювати у режимі відкритого або замкненого циклу. У першому випадку використані гази викидаються в атмосферу. У МГД-генераторах замкненого циклу робоче тіло за допомогою насосів повертається повторно в МГД-канал. Оскільки температура відпрацьованих газів на виході близько 500 К, то для підвищення ККД електричних станцій МГД-генератори

поєднують з паросиловими установками. Відпрацьовані гази МГД-генераторів надходять до теплообмінників, в яких одержують перегріту пару і подають її на парові турбіни, а турбіни приводять у дію електричні генератори. Між електродами МГД-генераторів виникають ЕРС до 500—600 В. Значення ЕРС визначають за формулою

$$\mathcal{E} = Blv,$$

де  $B$  — індукція магнітного поля;  $l$  — довжина МГД-каналу;  $v$  — швидкість плазми. Коефіцієнт корисної дії МГД-генераторів визначають за формулою

$$\eta = 1 - \frac{\Delta p}{B^2 l v \sigma},$$

де  $\Delta p$  — перепад тисків на вході і виході сопла;  $\sigma$  — питома електропровідність плазми. Потужність МГД-генераторів

$$N \sim \sigma v^2 B^2.$$

При значеннях індукції магнітних полів близько 3 Тл можна одержати ККД плазмових МГД-генераторів до 20 %, а потужність — близько  $10^3$  МВт з одиниці об'єму робочого тіла.

Відсутність рухомих деталей і висока температура робочого тіла дають змогу створити МГД-генератори з високим ККД і великими потужностями. Поєднання МГД-генераторів з ТЕЦ забезпечує підвищення ККД станцій на 10—15%. Уже створені МГД-генератори потужністю 10—20 МВт. Дослідження і розробки МГД-генераторів ведуться активно в усіх економічно розвинутих країнах.

#### § 8.14. Магнітне поле рухомого заряду. Відносний характер електричного і магнітного полів

За законом Біо — Савара — Лапласа елемент об'ємного струму  $\vec{j}dV$  на відстані  $\vec{r}$  від нього створює магнітне поле

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3} dV. \quad (8.62)$$

За електронною теорією  $\vec{j} = en\vec{v}$ , а  $ndV = N$  — кількість електронів в елементі провідника  $dV$ . Отже, у формулі (8.62) індукція поля  $d\vec{B}$  є наслідком накладання і векторного додавання магнітних полів  $N$  окремих рухомих електронів елемента струму  $\vec{j}dV$ . Якщо припустити, що середня швидкість руху електронів  $\vec{v}$  у провіднику є однаковою, то за принципом суперпозиції індукція магнітного поля на

відстані  $\vec{r}$ , створювана кожним електроном, що рухається рівномірно, визначиться так:

$$\vec{B}_e = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{r^3} [\vec{v} \cdot \vec{r}], \quad (8.63)$$

де  $\vec{r}$  — радіус-вектор, проведений від заряду  $e$  до точки спостереження. З формули (8.63) випливає, що елементарна індукція магнітного поля  $\vec{B}_e$  електрона, який рухається зі швидкістю  $\vec{v} = \text{const}$ , прямо пропорційна добуткові заряду  $e$  на його швидкість  $\vec{v}$ , обернено пропорційна квадратові відстані  $r$  від точки спостереження  $M$  до місця локалізації  $O$  заряду в даний момент часу і залежить від кута  $\alpha$  між напрямками  $\vec{v}$  і  $\vec{r}$  (рис. 8.46). Максимального значення  $\vec{B}_e$  в точці  $M$  набуває в той момент часу, коли електрон потрапляє в точку  $A$ . Кут між  $\vec{v}$  і  $\vec{r}$  стає таким, що дорівнює  $\pi/2$ :

$$B_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r_0^2}. \quad (8.64)$$

Рівність (8.63) є правильною для будь-якого точкового заряду, що рухається рівномірно. Тому загалом під  $e$  розумітимемо не заряд електрона, а певний заряд  $q$ .

Напруженість електричного поля  $\vec{E}$  нерухомого заряду  $q$  в тій самій точці спостереження визначають за формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (8.65)$$

З урахуванням (8.65) рівність (8.63) запишемо так:

$$\vec{B}_e = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \cdot \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{E}], \quad (8.66)$$

де  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ;  $c$  — електродинамічна стала, яка має розмірність швидкості і за значенням дорівнює швидкості світла у вакуумі  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

З рівності (8.66) видно, що рухомий електричний заряд ( $\vec{v} \neq 0$ ) має і електричну, і магнітну складові поля. Зв'язок величин  $\vec{B}_e$  і  $\vec{E}$  та їх напрямків також визначається рівністю (8.66). Коефіцієнт  $1/c^2$  свідчить про те, що прояв магнітного поля за однакових умов руху заряду значно слабший від електричного. Лінії індукції  $\vec{B}$ , як і для

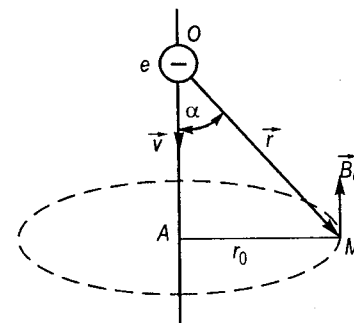


Рис. 8.46



струму, утворюють концентричні кола з центром на осі, уздовж якої рухається заряд. З формули (8.65) видно, що електричне поле нерухомого точкового заряду має сферичну симетрію: напруженість поля  $\vec{E}$  є однаковою за модулем в усіх точках сфери даного радіуса.

З ростом  $\vec{v}$  сферична симетрія електричного поля все більше порушується, і при релятивістських швидкостях  $v \rightarrow c$  напруженість електричного поля рухомого заряду є малою вздовж лінії руху заряду і великою в точках, перпендикулярних до лінії руху. Конфігурація поля заряду, що рухається рівномірно, не змінюється з часом, тобто це поле переміщається разом із зарядом. Розрахуємо сили взаємодії зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , які рухаються зі швидкостями  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$ . Взагалі ці сили мають електричну і магнітну складові. Електричну складову при малих швидкостях визначають за законом Кулона. Розглянемо лише магнітну складову. Рухомий заряд  $q_1$  у точці, де розміщено заряд  $q_2$ , створює магнітне поле з індукцією

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r_{12}^3} [\vec{v}_1 \cdot \vec{r}_{12}], \quad (8.67)$$

де  $\vec{r}_{12}$  — радіус-вектор, проведений з точки розміщення заряду  $q_1$  до точки, в якій у даний момент перебуває заряд  $q_2$ . На заряд  $q_2$  в магнітному полі  $\vec{B}_1$  діє сила Лоренца

$$\vec{F}_{12} = q_2 [\vec{v} \cdot \vec{B}_1] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} [\vec{v}_2 [\vec{v}_1 \cdot \vec{r}_{12}]]. \quad (8.68)$$

Аналогічно

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} [\vec{v}_1 [\vec{v}_2 \cdot \vec{r}_{21}]]. \quad (8.69)$$

Якщо  $\vec{v}_1 \uparrow \vec{v}_2$  мають однаковий напрям і перпендикулярні до вектора  $\vec{r}_{12}$ , то у разі однойменних зарядів між ними діятимуть сили притягання, а якщо заряди різнойменні, — відштовхування. При  $\vec{v}_1 \downarrow \vec{v}_2$  і тих самих інших умовах однойменні заряди будуть відштовхуватись, а різнойменні, навпаки, притягуватись. У розглядуваному випадку (рис. 8.47)

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v_1 v_2. \quad (8.70)$$

Зауважимо, що в загальному випадку сили взаємодії крізь магнітні поля не задовольняють рівності дії і протидії. Це видно, наприклад, з рис. 8.48. Тут  $\vec{F}_{12} \neq 0$ , тому що  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r_1^3} [\vec{v}_1 \cdot \vec{r}_1] \neq 0$ . Однак  $\vec{F}_{21} = 0$ ,

тому що  $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2}{r_2^3} [\vec{v}_2 \cdot \vec{r}_2] = 0$ .

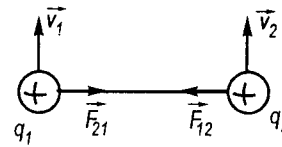


Рис. 8.47

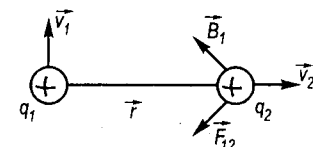


Рис. 8.48

Оскільки  $\vec{v}$  рухомого заряду — величина не інваріантна навіть відносно перетворень Галілея, тобто  $\vec{v}$  в різних інерціальних рухомих одна відносно одної системах відліку за значенням і напрямом є різною, то з рівності (8.63) видно, що й  $\vec{B}$  рухомого заряду також залежатиме від стану системи відліку, в якій ведеться дослідження поля. Якщо пов'язати систему відліку з рухомим зарядом ( $\vec{v} = 0$ ), то в ній спостерігатиметься лише електричне поле. В усякій іншій системі відліку, відносно якої заряд рухається, будуть спостерігатись електричне і магнітне поля. Експериментальне виявлення електричного або магнітного поля зарядів залежить від стану системи відліку, в якій ведеться спостереження. Тому прояв електричного і магнітного полів носить не абсолютний, а відносний характер. Причина полягає в нерозривній їх єдності. У природі існує матеріальне електромагнітне поле, а окремі його прояви у вигляді електричного або магнітного поля залежать від стану систем відліку, в яких ведеться їхнє вивчення.

### § 8.15. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі. Магнітний потік

На провідник  $l$  зі струмом  $I$ , вміщений в однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ , діє сила Ампера (рис. 8.49)

$$\vec{F} = I [\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (8.71)$$

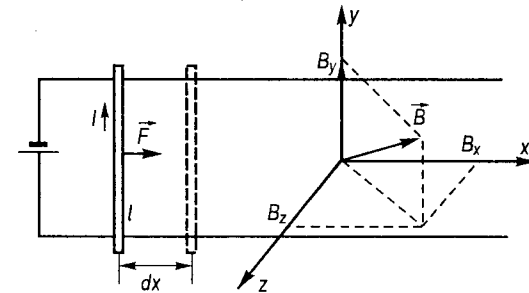


Рис. 8.49

Сила  $\vec{F}$ , переміщаючи провідник  $l$  на відстань  $dx$ , виконає елементарну роботу

$$dA = \vec{F}dx. \quad (8.72)$$

Прийmemo, що вектор  $\vec{B}$  довільно орієнтований у просторі. Розкладемо його на три складові  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  відповідно до напрямів орієнтації координатних осей. Складова індукції магнітного поля  $B_x$  створює силу Ампера, напрямлену перпендикулярно до переміщення  $dx$ , і роботи не виконує. Складова  $B_y$ , напрямлена паралельно  $l$ , тому кут  $\alpha = 0$  і  $\vec{F} = 0$ , а складова  $B_z$  не виявляє силової дії на провідник  $l$ . Складова  $B_z$  створює силу  $\vec{F}$ , напрямлену вздовж переміщення  $dx$ , і ця складова виконує роботу. Оскільки  $B_z$  перпендикулярна до площини, в якій переміщується провідник  $l$ , то її, звичайно, позначають  $B_n$ . Отже, роботу виконує сила, що зумовлена проекцією вектора  $\vec{B}$  на нормаль до площини поверхні, яку описує провідник при переміщенні в магнітному полі. Кут між  $B_x$  і  $l$  прямий, тому у формулі (8.71)  $\sin \alpha = 1$ . Оскільки  $\vec{F} \uparrow d\vec{x}$ , то  $\cos(\vec{F}d\vec{x}) = 1$ . За зазначених умов (8.72) переписеться так:

$$dA = I B_n dx = I B_n dS = I d\Phi,$$

де добуток  $B_n dS = d\Phi$  називають *магнітним потоком* або потоком вектора індукції крізь поверхню. У разі довільного переміщення провідника

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (8.73)$$

Отже, робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі прямо пропорційна добутковій силі струму на зміну магнітного потоку крізь площу поверхні, яку описує провідник, переміщаючись у магнітному полі. Якщо провідник переміщається в протилежному до дії сили Ампера напрямі, то роботу виконують зовнішні сили і знак виконаної роботи зміниться на протилежний.

Як зазначалося, елементарний магнітний потік  $d\Phi = B_n dS$ , де  $B_n$  — проекція вектора  $\vec{B}$  на нормаль до площини  $dS$  (рис. 8.50),  $B_n = B \cos \beta$ . Магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню  $S$  визначають за формулою

$$\Phi = \oint_S B_n dS. \quad (8.74)$$

В СІ магнітний потік вимірюють у *веберах*:

$$[\Phi] = [B][S] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2 = \text{В} \cdot \text{с} = 1 \text{ Вб}.$$

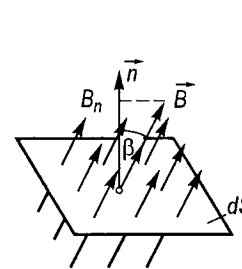


Рис. 8.50

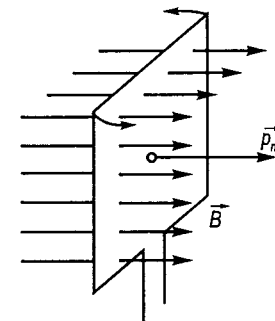


Рис. 8.51

Цю одиницю назвали в честь німецького фізика В. Вебера.

У системі Гаусса магнітний потік вимірюють у максвеллах (Мкс):  $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}$ .

**Приклад 8.9.** Прямокутна рамка площею  $S$ , по якій проходить струм силою  $I$ , обертається навколо осі в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ . Обчислити роботу одного оберту (рис. 8.51).

Розв'язання. Припустимо, що в початковий момент рамка розміщена так, що її площа перпендикулярна до лінії індукції  $\vec{B}$ . Тоді  $\Phi_1 = BS$ . При повертанні рамки на  $\pi/2$  лінії поля будуть ковзати вздовж площини рамки, не перетинаючи її. Отже,  $\Phi_2 = 0$ , а робота  $A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = -I\Phi_1 = -ISB = -p_m B$ , де  $p_m = IS$  — магнітний момент струму. При повертанні рамки на  $180^\circ$  початковий і кінцевий потоки вектора  $\vec{B}$  крізь площу рамки будуть однаковими. Проте якщо в початковий момент  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$  і, отже,  $\vec{B}_1 = \vec{B}$ , то наприкінці повороту  $p_m \uparrow \downarrow \vec{B}$  і  $\vec{B}_2 = -\vec{B}$ . Тому  $A = I(-BS - BS) = -2p_m B$ .

## Розділ 9. Постійне магнітне поле в речовині

### § 9.1. Магнетики та їх намагнічування. Вектор намагнічення і його зв'язок з густиною струмів намагнічення

На основі експериментальних досліджень і теоретичних узагальнень, наведених у розд. 8, можна зробити висновок, що єдиними джерелами магнітного поля у вакуумі є рухомі вільні електричні заряди або струми в провідниках. У речовині, крім цього, магнітне поле створюється рухомими електрично зарядженими частинками всередині самих атомів та молекул. Це підтверджує ідею Ампера, що магнетизм речовини можна пояснити наявністю мікроскопічних електричних струмів, рівномірно розподілених в усьому об'ємі речовини.

За напівкласичною теорією Резерфорда—Бора електрони в атомах обертаються по замкнених орбітах навколо позитивно заряджених ядер. Разом з тим електрони здійснюють обертальні рухи навколо власних осей, і з цими внутрішніми рухами пов'язаний певний механічний момент імпульсу, який називають *спіном електрона*. Спіновий момент мають також і ядра атомів. Орбітальні та спінові рухи заряджених частинок атомів утворюють мікроскопічні струми, які є джерелами магнітного поля речовини. За сучасною квантовою теорією поведінка заряджених частинок в атомах є складнішою, ніж описана вище. Однак важливо те, що ці частинки перебувають у безперервному русі і з цими рухами пов'язані механічний та магнітний моменти. За сучасними поглядами магнітні властивості речовини зумовлені трьома причинами: орбітальним магнітним моментом електронів, який виникає внаслідок їхніх рухів навколо ядер; магнітним моментом електронів, який перебуває у певному співвідношенні з їхнім власним механічним моментом — спіном; власним магнітним моментом атомних ядер. Рух атомних ядер через їхню велику масу значно повільніший від руху електронів. Отже, магнітні моменти атомних ядер є на кілька порядків меншими від орбітальних і спінових магнітних моментів електронів, тому часто при розгляді магнітних властивостей речовини ними нехтують. Магнітні моменти електронів і ядер за принципом суперпозиції полів додаються і так одержують результуючий магнітний момент атома або молекули.

Залежно від внутрішньої структури і характеру забудови електронних орбіт атомів може трапитися так, що в атомах або молекулах окремих речовин орбітальні та спінові магнітні моменти електронів взаємно компенсуються і тоді їхній сумарний магнітний момент практично дорівнює нулеві. Для інших речовин суперпозиція зазначених полів визначає магнітний момент кожного атома або молекули, який має цілком визначене значення.

У відсутності зовнішнього магнітного поля речовини, атоми яких не мають власних магнітних моментів, і речовини, атоми яких мають власні магнітні моменти, не створюють додаткового магнітного поля. У першому випадку це зрозуміло само собою, а у другому це відбувається внаслідок хаотичного теплового руху атомів або молекул. При цьому їхні магнітні моменти в кожний момент часу орієнтовані в просторі статистично рівномірно в усіх напрямках, тому збуджувані ними магнітні поля взаємно компенсуються.

Під час внесення довільної речовини у зовнішнє магнітне поле вона намагнічується. Для речовин, результуючі магнітні моменти атомів яких дорівнюють нулеві, у зовнішньому магнітному полі ці магнітні моменти наводяться і, отже, речовина в цілому намагнічується. При внесенні в зовнішнє магнітне поле речовин, атоми яких мають магнітні моменти, відбувається переважна орієнтація

цих моментів атомів у напрямі зовнішнього поля і, як наслідок, речовина також стає джерелом додаткового магнітного поля. Отже, речовини в зовнішньому магнітному полі змінюються так, що самі стають джерелами магнітного поля, їх називають *магнетиками*. При цьому в кожній точці простору, де є речовина, індукція магнітного поля дорівнює векторній сумі індукцій зовнішнього магнітного поля і магнітного поля магнетика. Набуття магнітних властивостей речовиною під дією зовнішнього магнітного поля називають *намагнічуванням магнетика*. Магнетики поділяють на три основних класи: діаманетики, парамагнетики і феромагнетики. Більшість речовин у зовнішньому полі намагнічуються слабо (діа- і парамагнетики). Сильні магнітні властивості мають тільки феромагнітні речовини (залізо, нікель, кобальт, їхні сплави). Значна кількість магнетиків після припинення дії зовнішнього магнітного поля втрачає намагнічення. Однак є речовини, в яких намагнічення залишається на довгий час, і тільки механічними діями або нагріванням їх можна розмагнітити. Такі намагнічені тіла називають *постійними магнітами*.

Магнітні поля, збуджувані орбітальним та спіновим рухом електронів і атомних ядер, є еквівалентними відповідним полям струмів, які проходять в атомах речовини. Ці струми називають *молекулярними* (рис. 9.1). Внаслідок хаотичного руху атомів значення і напрям молекулярних струмів безперервно і швидко змінюються в просторі і часі. Відповідних змін на відстанях атомних масштабів зазнають і збуджувані ними мікроскопічні поля. Методів вимірювання молекулярних струмів і мікроскопічних параметрів збуджуваних ними магнітних полів не існує. Тому для характеристики магнітних полів у магнетиках вводять макроскопічні параметри, які є усередненням відповідних мікроскопічних параметрів по фізично нескінченно малому об'єму. Основною силовою характеристикою магнітного поля в речовині, як і у вакуумі, є вектор індукції поля  $\vec{B}$ , який одержують усередненням індукції мікроскопічного магнітного поля по фізично нескінченно малому об'єму магнетика. Аналогічне усереднення здійснюють і для молекулярних струмів, результатом якого є так звані струми намагнічення, густину їх позначають  $\vec{j}_m$ . У магнетиках можуть бути розміщені також і провідники зі струмами провідності  $\vec{j}$ . Тому в загальному випадку поле з індукцією  $\vec{B}$  в магнетиках може збуджуватись струмами провідності  $\vec{j}$  і струмами намагнічення  $\vec{j}_m$ . Якщо  $\vec{j}$  і  $\vec{j}_m$  є відомими, то значення  $\vec{B}$  в магнетиках можна розрахувати за формулами, встановленими для вакууму в § 8.4:

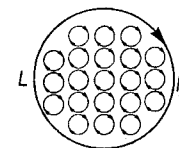


Рис. 9.1

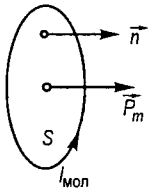


Рис. 9.2

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \text{ або } \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (9.1)$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(I + I_m), \text{ або } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_m), \quad (9.2)$$

де  $I_m$  — повний струм намагнічення частини магнетика, який охоплюється замкненим контуром  $L$  (див. рис. 9.1). Цей струм збуджує таке саме магнітне поле, як і молекулярні струми сукупно. Густина струму намагнічення безпосередньо експериментально також визначити не можна. Тому для характеристики намагніченості однорідного магнетика вводять новий параметр — *вектор намагніченості*  $\vec{J}$ , який чисельно дорівнює сумарному магнітному моменту одиниці об'єму намагніченої речовини:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{mi}, \text{ або } \vec{J} = n\vec{p}_m, \quad (9.3)$$

де  $\vec{p}_m = I_{\text{мол}} \cdot S\vec{n}$  (рис. 9.2) — середній магнітний момент молекулярних струмів однієї молекули;  $n$  — середня кількість молекул (атомів, іонів) в одиниці об'єму магнетика.

З формули (9.3) встановимо розмірність  $\vec{J}$ :

$$[J] = \frac{\text{А} \cdot \text{М}^2}{\text{М}^3} = \frac{\text{А}}{\text{М}}$$

В електростатиці аналогом вектора намагніченості є вектор поляризації  $\vec{P}$ .

Встановимо зв'язок між векторами намагніченості  $\vec{J}$  і об'ємною густиною струмів намагнічення  $\vec{j}_m$ . Для цього розглянемо малий замкнений контур  $L$ , що обмежує поверхню  $\Delta S$  намагніченого магнетика, і підрахуємо циркуляцію вектора намагніченості вздовж контуру  $L$  (рис. 9.3):

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = \oint_L \vec{J}_\tau dl, \quad (9.4)$$

де  $J_\tau$  — тангенціальна складова вектора намагніченості на контур  $L$ . На рис. 9.3  $dl$  — елемент контуру інтегрування;  $\delta I$  — сила струму, який обтікає елементарну площу  $\delta S$  на довжині контуру  $dl$  і перетинає поверхню  $\Delta S$  по нормалі.

Домножимо і поділимо праву частину (9.4) на  $\delta S$ . Врахувавши, що магнітний момент еле-

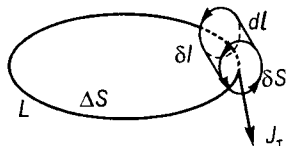


Рис. 9.3

мента об'єму  $dV$  намагніченого магнетика на основі (9.3)  $d\vec{p}_m = \vec{J}dV$ , одержимо

$$\oint_L \vec{J}_\tau dl = \oint_L \vec{J}_\tau \frac{d\delta S}{\delta S} = \oint_L \frac{\vec{J}_\tau dV}{\delta S} = \oint_L \frac{d\vec{p}_{m\tau}}{\delta S}. \quad (9.5)$$

З означення  $d\vec{p}_{m\tau} = \delta I \delta S$ . Тому

$$\oint_L \frac{d\vec{p}_{m\tau}}{\delta S} = \oint_L \frac{\delta I \delta S}{\delta S} = \oint_L \delta I = \Delta I_n, \quad (9.6)$$

де  $\Delta I_n$  — нормальна складова сили струму, яка перетинає елементарну площу  $\Delta S$ . Тоді рівність (9.4) з урахуванням (9.6) набуває такого вигляду:

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = \Delta I_n. \quad (9.7)$$

Скориставшись означенням ротора вектора, можна записати

$$\operatorname{rot}_n \vec{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{J} d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} = (j_m)_n, \quad (9.8)$$

де  $(j_m)_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S}$  — нормальна складова густини струмів намагнічення. Рівність (9.8) справджується для довільних за значенням та орієнтацією елементарних площ  $\Delta S$ . Тому від рівності нормальних складових векторів перейдемо до рівності самих векторів

$$\operatorname{rot} \vec{J} = \vec{j}_m. \quad (9.9)$$

Формула (9.9) встановлює зв'язок між вектором намагніченості  $\vec{J}$  і густиною струмів намагнічення  $\vec{j}_m$ . За цією формулою і визначеними експериментально значеннями  $\vec{J}$  розраховують  $\vec{j}_m$ .

## § 9.2. Магнітне поле в магнетиках. Вектор напруженості магнітного поля. Магнітна сприйнятливість і проникність магнетиків

Як зазначалося в § 9.1, магнітне поле в магнетиках можна описувати рівняннями для вакууму при врахуванні струмів намагнічення. Рівності (9.1) свідчать про те, що не тільки у вакуумі, а й у магнетиках магнітних зарядів немає, і, отже, потік вектора індукції магнітного поля крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулеві. Іншими словами, скільки силових ліній входить в об'єм  $V$ , обмежений по-

верхнею  $S$ , стільки ж і виходить, оскільки силові лінії магнітного поля струмів є замкненими. Тому рівності (9.1) для вакууму і магнетиків мають однаковий вигляд і є відповідно інтегральною і диференціальною формами одного з основних рівнянь стаціонарних магнітних полів.

Рівності (9.2) є відповідно інтегральною і диференціальною формами закону повного струму з врахуванням струмів намагнічення в магнетиках. З урахуванням (9.9) рівність (9.2) запишеться так:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \operatorname{rot} \vec{J}, \quad \text{або} \quad \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}.$$

Введемо вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (9.10)$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (9.11)$$

Вектор  $\vec{H}$  називають *напруженістю магнітного поля в магнетиках*. Напруженість не є чисто силовою характеристикою поля, оскільки включає в себе намагніченість речовини  $\vec{J}$ .

У рівність (9.11) густина струмів намагнічення не входить. Тому при визначенні поля вектора  $\vec{H}$  в однорідних ізотропних магнетиках, які заповнюють увесь простір, де існує магнітне поле при незмінній конфігурації струмів, немає потреби знати закон розподілу струмів намагнічення в середовищі, досить визначити густину струмів провідності, що практично не викликає утруднень. Поле вектора  $\vec{H}$  у зазначених магнетиках таке саме, як і у вакуумі, тобто  $\vec{H}$  визначає лише ту частину повного магнітного поля, яке збуджується струмами провідності. Отже, вектор  $\vec{H}$  магнітного поля в магнетиках відіграє таку саму роль, як і вектор індукції  $\vec{D}$  електричного поля в діелектриках, а вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$  аналогічний векторові напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Така нераціональність у термінології склалась історично, оскільки теорія магнетизму будувалась за аналогією з електростатикою і вважалось, що джерелами магнітного поля є магнітні заряди, а їх, як зазначалося, не виявлено. Рівняння

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (9.12)$$

є основними диференціальними рівняннями постійного магнітного поля в магнетиках. В інтегральній формі ці рівняння відповідно записуються так:

$$\oint_S B_n dS = 0, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S j_n dS. \quad (9.13)$$

Застосування рівнянь (9.12) або (9.13) для розв'язування конкретних задач можливе лише за умови, коли буде відомий характер залежності намагнічення магнетика від зовнішнього магнітного поля, тобто як залежить  $\vec{J}$  від  $\vec{H}$ . Взагалі ця залежність має складний характер. У макроскопічній електродинаміці її встановлюють експериментально. Як показують досліди, для багатьох ізотропних магнетиків (діа- і парамагнетиків) залежність  $\vec{J}$  від  $\vec{H}$  в слабких зовнішніх магнітних полях має лінійний характер

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (9.14)$$

де  $\chi$  — безрозмірний коефіцієнт, який характеризує здатність речовини намагнічуватись у зовнішньому магнітному полі, його називають *магнітною сприйнятливістю речовини*. Для вакууму  $\chi = 0$ , а для будь-якої речовини  $\chi \neq 0$ , тобто всі речовини здатні намагнічуватись і тому є магнетиками. Для лінійних магнетиків, тобто тих, для яких справджується рівність (9.14), коефіцієнт  $\chi$  мало відрізняється від нуля. При цьому для одних речовин (діамагнетиків)  $\chi < 0$  (тобто напрям  $\vec{J}$  протилежний  $\vec{H}$  і зовнішнє поле в діамагнетиках послаблюється), для інших (парамагнетиків)  $\chi > 0$  (напрямок  $\vec{J}$  збігається з  $\vec{H}$  і зовнішнє поле підсилюється). З рівності (9.14) видно, що  $\vec{J}$  має розмірність  $\vec{H}$ . Фізичний зміст  $\chi$  розкриємо, якщо прийемо  $H = 1$  А/м. Тоді  $\chi = |J|$ . Отже, магнітна сприйнятливість  $\chi$  чисельно дорівнює намагніченості  $J$  при напруженості зовнішнього поля, що дорівнює одиниці. З рівності (9.10) випливає:  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$ , тобто що магнітне поле в магнетиках складається із зовнішнього магнітного поля  $\mu_0 \vec{H}$  і магнітного поля намагніченого магнетика  $\mu_0 \vec{J}$ . З урахуванням (9.14) цю рівність можна переписати так:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H},$$

або

$$\vec{B} = \mu' \vec{H}, \quad (9.15)$$

де  $\mu' = \mu_0 (1 + \chi)$  має розмірність  $\mu_0$  і називається *абсолютною магнітною проникністю магнетика*. Відношення  $\mu'/\mu_0 = 1 + \chi = \mu$  називають *відносною магнітною проникністю магнетика* (величина  $\mu$  є безрозмірною). На відміну від діелектричної проникності  $\epsilon$ , яка для всіх діелектриків більша від одиниці, для магнетиків  $\mu$  може бути більшою і меншою від одиниці, оскільки  $\chi$  може бути додатною і від'ємною. Рівність (9.15) записують так:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (9.16)$$

Магнітна проникність  $\mu$  — макроскопічний параметр, який характеризує магнітні властивості різних магнетиків і для кожного однорідного магнетика є матеріальною константою. Магнітну проникність  $\mu$  визначають експериментально. За значенням  $\mu$  обчислюють  $\chi$ , за формулою (9.14) обчислюють  $\vec{J}$ , тоді за формулою (9.9) знаходять  $\vec{j}_m$ .

Для розв'язування задач з магнітостатики в магнетиках, крім рівнянь поля (9.12) або (9.13) і матеріального рівняння (9.16), потрібно ще знати поведінку векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  на межі поділу магнетиків з різною магнітною проникністю  $\mu$ , тобто граничні умови. Ці умови встановлюють так само, як і для векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  електростатичного поля. Для їхнього виведення виходять з рівнянь (9.12). Скориставшись рівнянням  $\text{div} \vec{B} = 0$  і методикою виведення граничної умови для нормальної складової вектора  $\vec{D}$  (див. § 1.20), одержимо

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (9.17)$$

Отже, на межі поділу двох магнетиків нормальні складові вектора індукції  $\vec{B}$  є неперервними і, таким чином, при переході межі поділу  $B_n$  не змінюється.

Граничну умову для тангенціальної складової вектора  $\vec{H}$  виведемо з рівняння  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ . Домножимо обидві частини цього рівняння на  $dS$ , зінтегруємо по  $S$  і до лівої частини застосуємо теорему Стокса. Тоді  $\int_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ , де  $S$  — поверхня, обмежена контуром  $ABCD$  (див. рис. 1.44). Аналогічно формулі (1.126) маємо

$$H_{2t} - H_{1t} = i_n, \quad (9.18)$$

де  $i_n$  — лінійна густина поверхневих струмів провідності. *Лінійною густиною поверхневих струмів* називають такий струм, який припадає на одиницю довжини відрізка, розміщеного перпендикулярно до напрямку струму на поверхні, по якій він проходить. Напрямок  $i$  збігається з напрямком поверхневого струму, за значенням дорівнює проекції  $i$  на перпендикуляр до одиничного відрізка. Якщо  $i_n = 0$ , то  $H_{2t} = H_{1t}$ .

На межі поділу двох магнетиків з різними значеннями магнітних проникностей  $\mu_1$  і  $\mu_2$  магнітні силові лінії мають заломлюватись. Дійсно, якщо взяти плоску межу поділу (рис. 9.4) і припустити, що поверхневі струми провідності відсутні ( $i_n = 0$ ), то на основі граничної умови (9.18) можна записати

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2.$$

Для нормальних складових вектора індукції  $\vec{B}$  на основі граничної умови (9.17) та рівності (9.16)

$$\mu_0 \mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_0 \mu_2 H_2 \cos \alpha_2.$$

З цих рівнянь знаходимо, що

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (9.19)$$

Переходячи з магнетика з меншою магнітною проникністю в магнетик з більшою магнітною проникністю ( $\mu_1 < \mu_2$ ), магнітні силові лінії, заломлюючись, віддаляються від нормалі до межі поділу магнетиків. Це означає, що магнітні силові лінії концентруються більше в магнетиках з більшою магнітною проникністю.

**Приклад 9.1.** По циліндричному провіднику радіуса  $a$  проходить постійний струм силою  $I$  (рис. 9.5). Магнітна проникність матеріалу провідника  $\mu$ , навколишнє середовище — повітря. Розрахувати в усіх точках характеристики магнітного поля: напруженість, індукцію, намагніченість.

**Розв'язання.** Для визначення напруженості магнітного поля в довільних точках провідника зі струмом і за його межами скористаємося законом повного струму в інтегральній формі (9.13):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S j_n dS,$$

де  $L$  — контур інтегрування, який для спрощення розрахунків обираємо у вигляді кола радіуса  $r$  з центром на осі циліндричного провідника;  $S$  — довільна поверхня, що опирається на контур  $L$  і крізь яку проходить струм;  $r$  — біжучий радіус.

В усіх точках контуру  $L$  напруженість  $H$  є однаковою за значенням, дотичною до  $L$  і її проекцію на  $L$  можна виносити з-під знака інтеграла. Тому для внутрішніх точок

$$\text{провідника } H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2, \text{ для зовнішніх — } H \cdot 2\pi r = I,$$

або

$$H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi a^2} r & \text{при } 0 < r < a, \\ \frac{I}{2\pi a} & \text{при } r = 0, \\ \frac{I}{2\pi r} & \text{при } r > 0. \end{cases}$$

Індукція магнітного поля на основі (9.16)

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi a^2} & \text{при } 0 < r < a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Намагніченість визначаємо за формулою (9.10):

$$J = \begin{cases} (\mu - 1) \frac{I r}{2\pi a^2} & \text{при } 0 < r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

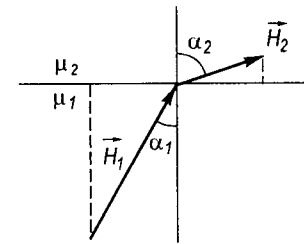


Рис. 9.4

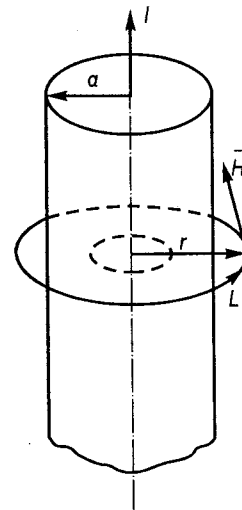


Рис. 9.5

### § 9.3. Магнітні властивості атомів

За моделлю атома Бора електрон, наприклад в атомі водню, обертається навколо ядра по коловій орбіті. *Орбітальний магнітний момент електрона*

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (9.20)$$

де  $I$  — середнє значення колового струму, створеного рухом електрона. Якщо частота обертання електрона  $\nu$  ( $T$  — період обертання), то

$$I = -e\nu = -\frac{e}{T},$$

де знак мінус вказує на від'ємний заряд електрона. Оскільки  $T = \frac{2\pi r}{v}$  і  $S = \pi r^2$ , то з формули (9.20) магнітний момент електрона

$$p_m = -\frac{evr}{2}. \quad (9.21)$$

Електрону, який обертається навколо ядра, притаманний також *механічний момент імпульсу*

$$L = mvr. \quad (9.22)$$

Відношення  $p_m$  до  $L$  називають *орбітальним магнітно-механічним відношенням для електрона*, а іноді *гіромагнітним відношенням*  $\Gamma$ . Для вищезгаданої моделі атома

$$\Gamma = \frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}. \quad (9.23)$$

За теорією Бора момент кількості руху  $L$  атома квантується, тобто може мати тільки дискретний ряд значень:

$$L = n\hbar, \quad (9.24)$$

де  $n$  — ціле число, яке може мати значення 1, 2, 3, ...;  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — зведена стала Планка.

За квантовою теорією орбітальний магнітний момент електрона також квантується за законом

$$p_m = -\frac{eh}{2m}n.$$

Найменше значення магнітного моменту електрон може мати при  $n = 1$ :

$$p_0 = -\frac{eh}{2m}. \quad (9.25)$$

Ця величина відіграє роль «атома» магнітного моменту електрона і називають її *магнетон Бора* ( $p_0 = \mu_B = 9,274\,078 \cdot 10^{-24}$  Дж · Тл<sup>-1</sup>).

Електрон також має *власний, або спіновий, момент імпульсу*. Проекція спіну на заданий напрям може набувати лише двох значень  $L = \pm \frac{\hbar}{2}$ . Спінові відповідає магнітний момент, значення якого дорівнює магнетону Бора. Отже, зі спіном пов'язане *гіромагнітне відношення*

$$\Gamma_s = \frac{p_0}{L} = -\frac{e}{m}, \quad (9.26)$$

яке у два рази більше від орбітального. Магнітні моменти довільного атома є векторною сумою орбітальних і спінових магнітних моментів електронів:  $\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}$ . Це також стосується механічних моментів атомів.

### § 9.4. Діамагнетики. Ларморівська прецесія. Незалежність діамагнітної сприйнятливості від температури

Речовини, в атомах яких орбітальні і спінові магнітні моменти електронів, якщо немає зовнішнього магнітного поля, є взаємно скомпенсованими, називають *діамагнетиками*. Отже, атоми діамагнетиків не мають власних магнітних моментів. Це має місце в атомах, іонах і молекулах з повністю заповненими електронними оболонками: в атомах інертних газів, в молекулах водню, азоту тощо. Магнітні моменти електронів повністю забудованих електронних оболонок взаємно компенсуються, оскільки на цих оболонках всі квантові стани зайняті і вздовж кожного напрямку встановлюється певна кількість пар електронів з протилежно зорієнтованими орбітальними і спіновими магнітними моментами.

Під час внесення діамагнетиків у зовнішнє магнітне поле в електронних оболонках атомів, за законом електромагнітної індукції, виникають індуквані колові струми. Ці струми створюють додаткові магнітні моменти атомів, напрямлені, за законом Ленца, проти напрямку зовнішнього магнітного поля (див. § 10.2). Властивість речовини намагнічуватись протилежно до зовнішнього магнітного поля називають *діамагнетизмом*. Діамагнетизм, або діамагнітний ефект, властивий всім речовинам, оскільки він пов'язаний з виникненням додаткових колових рухів електронів в атомах речовин і зміною їхньої частоти обертання під час внесення в зовнішнє поле.

Розглянемо це на прикладі найпростішого атома водню, в якому один електрон обертається навколо ядра по коловій орбіті радіуса  $r$

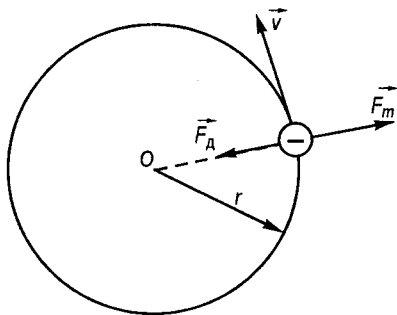


Рис. 9.6

з частотою  $\omega_0$  (рис. 9.6). Електрон притягується до ядра, за законом Кулона, із силою, яка відіграє роль доцентрової:

$$F_d = m\omega_0^2 r. \quad (9.27)$$

Оскільки сила електричної взаємодії електрона і ядра  $F_d$  є досить великою порівняно із зовнішніми діями, то з введенням цієї системи у зовнішнє магнітне поле радіус орбіти електрона практично не зміниться. Нехай вектор  $\vec{B}$  магнітного поля перпендикулярний до площини орбіти електрона. Тоді на рухомий електрон діятиме сила Лоренца, напрямлена вздовж радіуса орбіти до центра або від нього залежно від напрямів векторів кутової швидкості електрона й індукції поля:

$$F_m = |e|\omega r B, \quad (9.28)$$

де  $\omega$  — кутова швидкість руху електрона навколо ядра при накладанні зовнішнього магнітного поля. У магнітному полі на електроні діють дві сили:  $F_d$  і  $F_m$ . Тоді рух електрона визначатиметься дією сил:

$$m\omega^2 r = F_d \pm |e|\omega r B, \quad (9.29)$$

або з урахуванням (9.27)  $mr(\omega^2 - \omega_0^2) = \pm |e|\omega r B$ . Оскільки у звичайних магнітних полях  $\omega$  мало відрізняється від  $\omega_0$ , то  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega$ . Тоді з рівності (9.29) одержимо  $\Delta\omega = \pm \frac{|e|B}{2m}$ .

Отже, у магнітному полі на рух електронів накладається додаткове обертання з частотою

$$\omega_L = \frac{|e|B}{2m}, \quad (9.30)$$

яку називають *ларморівською*. У формулі (9.30) взято знак плюс, оскільки  $\vec{\omega}_L \uparrow \vec{B}$ . Якщо врахувати від'ємний знак заряду електрона, то формула (9.30) у векторній формі запишеться так:

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e\vec{B}}{2m}. \quad (9.31)$$

Розглянувши більш загальний випадок довільної орієнтації векторів кутової швидкості обертання електронів відносно вектора зов-

нішнього магнітного поля на основі теорії, яку вперше розвинув англійський фізик Дж. Лармор (1857—1942) у 1895 р., дійдемо висновку, що подібно до гіроскопа атом у магнітному полі здійснює прецесійний рух, названий *ларморівською прецесією*, частоту якої визначають за формулою (9.31). З цим рухом пов'язаний додатковий магнітний момент атомів, напрямлений проти зовнішнього поля, що є причиною діаманітного ефекту. Внаслідок цього речовина в цілому намагнічується проти зовнішнього поля з індукцією  $\vec{B}$ .

Розрахуємо магнітну сприйнятливість діаманетиків. Кожний електрон у магнітному полі здійснює ларморівську прецесію навколо напрямку магнітного поля. Припустимо, що  $H \uparrow z$ . Магнітний момент  $i$ -го електрона (рис. 9.7)

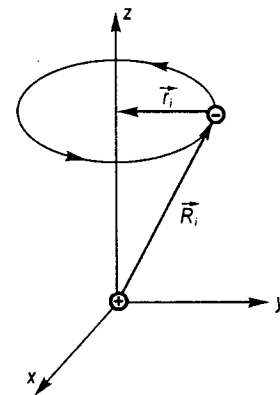


Рис. 9.7

$$p_{mi} = I_i S_i = \frac{e}{T} \pi r_i^2 = \frac{e r_i^2 \omega_L}{2}.$$

Вектор намагніченості з урахуванням формули (9.31)

$$J = \frac{\sum p_{mi}}{\Delta V} = -\frac{e^2}{4m} B n \langle \sum r_i^2 \rangle,$$

де  $n$  — концентрація атомів у речовині. З рис. 9.7 маємо

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

де  $R_i$  — відстань  $i$ -го електрона від ядра. Через рівноправність орієнтації атомів у просторі  $\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \frac{1}{3} R_i^2$ . Тому

$r_i^2 = \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle R_i^2 \rangle$  і, отже,  $\langle \sum r_i^2 \rangle = \frac{2}{3} k \langle R_i^2 \rangle$ , де  $k$  —

кількість електронів у атомі. Тоді  $J = -\frac{e^2}{6m} k n \langle R_i^2 \rangle > \mu_0 H$ . Порівнюючи з  $J = \chi_d H$ , одержуємо

$$\chi_d = -\frac{e^2}{6m} k n \langle R_i^2 \rangle > \mu_0. \quad (9.32)$$

Звідси видно, що магнітна сприйнятливість діаманетиків повністю визначається атомними характеристиками, які мало залежать від напруженості магнітного поля і температури. Незалежність  $\chi_d$  від



температури пояснюється тим, що енергія теплового руху при порівняно не дуже високих температурах є недостатньою, щоб змінити внутрішній стан атомів. Цей теоретичний висновок підтверджується експериментально. За абсолютним значенням  $\chi_d$  для діамagnetиків є малим — близько  $10^{-5} - 10^{-6}$ .

Діамagnetні матеріали вивчають експериментально за їхньою поведінкою в магнітному полі. З неоднорідного магнітного поля діамagnetики виштовхуються, а в однорідному полі діамagnetний стрижень орієнтується перпендикулярно до вектора індукції поля  $\vec{B}$ .

Крім інертних газів, до діелектриків належать вода, мідь, цинк, ртуть, свинець, срібло, золото і деякі інші елементи та багато органічних і неорганічних сполук.

### § 9.5. Парамагнетики. Механізм намагнічування

Речовини, частинки яких (атоми, молекули, іони) без наявності зовнішнього магнітного поля мають власний магнітний момент  $\vec{p}_m$ , називають *парамагнетиками*, а їхню властивість намагнічуватись у зовнішньому магнітному полі в напрямі, що збігається з напрямом цього поля, називають *парамагнетизмом*. Термін «парамагнетики» вперше ввів у 1845 р. М. Фарадей. Він поділив усі речовини (крім феромагнетиків) на діа- і парамагнітні.

Якщо немає зовнішнього магнітного поля, частинки парамагнітних речовин перебувають у невпорядкованому тепловому русі, а їхні магнітні моменти зорієнтовані в просторі рівномірно в усіх напрямках, причому орієнтація кожної частинки постійно змінюється. У цьому разі довільний елемент об'єму парамагнетика виявляється ненамагніченим через взаємну компенсацію магнітних полів окремих структурних одиниць речовини. У зовнішньому магнітному полі на елементарні носії магнітних моментів  $\vec{p}_m$  діє орієнтуюча сила, яка намагається зменшити кут між  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ . Тому при внесенні парамагнетика в магнітне поле, згідно із законом розподілу Больцмана, магнітні моменти окремих частинок набувають переважної орієнтації в напрямі індукції зовнішнього поля, і парамагнетик намагнічується. Напрямок індукції поля намагнічення магнетика збігається з індукцією зовнішнього поля і підсилює його. З ростом  $\vec{B}$  зовнішнього поля збільшується орієнтуюча дія на елементарні магнітні моменти і намагніченість парамагнетиків зростає за законом  $\vec{J} = \chi_{II} \vec{H}$ , де  $\chi_{II}$  — магнітна сприйнятливість одиниці об'єму парамагнетика (завжди  $\chi_{II} > 0$ ). Результуюча індукція магнітного поля в парамагнетиках виражається формулою

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi_{II}) \vec{H}. \quad (9.33)$$

У досить сильному зовнішньому полі всі магнітні моменти парамагнітних частинок набувають орієнтації по полю і настає магнітне насичення  $\vec{J} = n\vec{p}_m$ . З підвищенням температури  $T$  при заданому зовнішньому магнітному полі збільшується дезорієнтуючий тепловий рух частинок і магнітна сприйнятливість речовин зменшується. За класичною електронною теорією, яку вперше розробив П. Ланжевена, парамагнітна сприйнятливість визначається за формулою

$$\chi_{II} = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT} = \frac{C}{T}, \quad (9.34)$$

де  $C$  — стала Кюрі. Залежність  $\chi_{II} \sim \frac{1}{T}$  вперше експериментально встановив у 1896 р. П. Кюрі ще до розробки відповідної теорії. Цю залежність називають *законом Кюрі*.

Атомні магнітні моменти парамагнетиків мають порядок  $p_m \approx 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Тоді при кімнатних температурах  $\chi_{II} \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ , тобто приблизно на один-два порядки більші від магнітної сприйнятливості діамagnetиків. Тому в парамагнетиків слабкий діамagnetний ефект не проявляється і ним під час розрахунків нехтують.

Теорія Ланжевена стосується парамагнітних газів, для яких взаємодія між атомами є слабкою через велику відстань між ними. Для газів експериментальні результати добре узгоджуються з теорією. У твердих і рідких речовинах взаємодія між частинками є великою і це може призвести до істотного порушення сферичної симетрії електронних оболонок. Для температурної залежності  $\chi_{II}$  врахування цієї взаємодії приводить до *закона Кюрі—Вейсса*:

$$\chi_{II} = \frac{C'}{T - T_0}, \quad (9.35)$$

де  $C'$  — стала Кюрі;  $T_0$  — характерна для кожної речовини температура, яка визначається їхніми властивостями і може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулеві.

Особливістю парамагнетиків порівняно з феромагнетиками є те, що після припинення дії зовнішнього магнітного поля впорядкована орієнтація магнітних моментів частинок через їхній тепловий рух порушується і намагніченість зникає. Існування у частинок парамагнітних речовин магнітних моментів пов'язують з рухом електронів в оболонках атомів (орбітальний парамагнетизм), із спіновими моментами електронів (спіновий парамагнетизм) та з магнітними моментами ядер (ядерний парамагнетизм). Магнітні моменти частинок (атомів, молекул) визначаються в основному електронами.

Експериментально парамагнітні речовини визначають за їхньою поведінкою в зовнішньому магнітному полі: в неоднорідному полі

парамагнетики втягуються в область більш сильних полів, а в однорідному полі стрижні з парамагнітної речовини орієнтуються паралельно лініям індукції зовнішнього поля. До парамагнетиків належать магній, алюміній, кальцій, хром, марганець, кисень, літій, уран та ін.

### § 9.6. Електронний парамагнітний резонанс

Електронний парамагнітний резонанс (ЕПР) полягає в резонансному поглинанні електромагнітної енергії речовинами, до складу яких входять парамагнітні частинки. Явище ЕПР відкрив у 1944 р. радянський вчений Є. К. Завойський. Якійсь суті явища ЕПР у загальних рисах можна пояснити на основі класичних уявлень. При введенні речовини в зовнішнє магнітне поле в початковий момент його індукція в речовині наростає і внаслідок явища електромагнітної індукції виникає змінне електричне поле, що, у свою чергу, спричиняє виникнення магнітного поля, яке, діючи на магнітні моменти парамагнітних частинок, зміщує їх (ларморовська прецесія). Якщо після цього створити додаткове періодичне змінне магнітне поле, вектор індукції якого перпендикулярний до вектора індукції постійного поля, то внаслідок взаємодії магнітного моменту  $\vec{p}_m$  атома з індукцією змінного поля  $\vec{B}$  виникає момент сил  $\vec{M}$ , який намагається змінити кут між  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ . Поки частота змінного поля не збігається з частотою ларморовської прецесії, доти в середньому момент сил  $\vec{M}$  не змінює кут між  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ , оскільки деяку частину часу цей момент намагається збільшити кут, а решту часу зменшити, тому ефект дії  $\vec{M}$  взаємно компенсується. Якщо ж частота зміни додаткового поля збігається з  $\omega_L$ , то момент сил  $\vec{M}$  залежно від співвідношення фаз  $\omega_L$  і  $\vec{B}$  або протягом усього часу збільшує кут між  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ , або ж, навпаки, зменшує його. В обох випадках змінюється кут, отже, змінюється намагніченість. Зміна орієнтації магнітних моментів атомів зумовлює зміну їхньої енергії в постійному магнітному полі:  $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ . Ця зміна відбувається завдяки поглинанню енергії електромагнітної хвилі додаткового змінного поля. Отже, спостереження парамагнітного резонансу зводиться до вимірювання інтенсивності електромагнітної хвилі, яка проходить крізь магнетик з парамагнітними центрами, вміщений у постійне магнітне поле. У той момент, коли частота електромагнітної хвилі збігається з частотою ларморовської прецесії магнітних моментів парамагнітних частинок, настає різке послаблення інтенсивності падаючої хвилі. За цими спостереженнями судять про наявність парамагнітних центрів. Класичні уявлення в кристалічній ґратці. Дані ЕПР використовують для розрахунку магнітної сприйнятливості парамагнетиків. Методом ЕПР визначають локалізацію різних дефектів кристалічної ґратки. Цей метод є надійним сучасним методом дослідження властивостей речовин і широко застосовується в хімії, біології, матеріалознавстві.

Електронний парамагнітний резонанс належить до радіоспектроскопічних методів дослідження властивостей парамагнетиків в сантиметровому і міліметровому діапазонах довжин електромагнітних хвиль ( $\lambda \approx 30 - 2$  мм). За спектрами ЕПР визначають валентність парамагнітних іонів та їхнє положення в кристалічній ґратці. Дані ЕПР використовують для розрахунку магнітної сприйнятливості парамагнетиків. Методом ЕПР визначають локалізацію різних дефектів кристалічної ґратки. Цей метод є надійним сучасним методом дослідження властивостей речовин і широко застосовується в хімії, біології, матеріалознавстві.

### § 9.7. Ядерний магнітний резонанс

Ядерний магнітний резонанс (ЯМР) полягає у вибіркового поглинанні електромагнітної енергії речовиною, обумовленому ядерним парамагнетизмом. Метод ЯМР є одним із радіоспектроскопічних методів дослідження магнітних властивостей ядер,

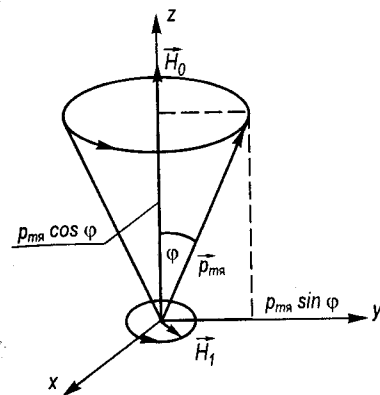


Рис. 9.8

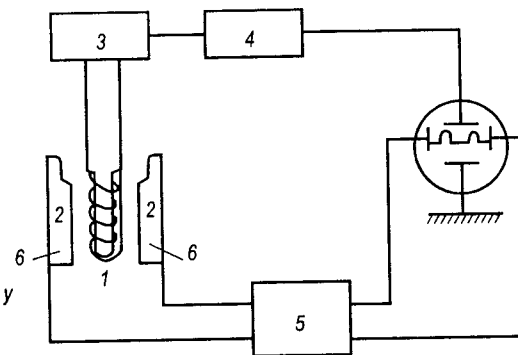


Рис. 9.9

коли на досліджуваній зразок діють двома взаємно перпендикулярними магнітними полями: сильним постійним полем  $\vec{H}_0$  і слабким радіочастотним ( $10^6 - 10^7$  Гц) полем  $\vec{H}_1$ .

Хоча ЯМР є чисто квантовим явищем, однак деякі з його особливостей можна зрозуміти на основі класичних уявлень. Як відомо, протони і нейтрони, з яких складаються ядра атомів, мають власний механічний момент — спин. Більшість атомних ядер також має некомпенсований повний власний механічний (спіновий) момент кількості руху  $\vec{L}$ . Спин ядра зумовлює дипольний магнітний момент ядра  $\vec{p}_{m\alpha}$ , причому  $\vec{p}_{m\alpha}$  і  $\vec{L}$  можна вважати паралельними, тому

$$\vec{p}_{m\alpha} = \Gamma \vec{L},$$

де  $\Gamma$  — гіромагнітне відношення.

Магнітний момент ядра  $\vec{p}_{m\alpha}$  приблизно в  $10^3$  разів менший від електронного магнітного моменту. В зовнішньому магнітному полі  $\vec{H}_0$  на магнітний момент ядра  $\vec{p}_{m\alpha}$  діє обертальний момент  $\vec{M} = [\vec{p}_{m\alpha} \cdot \vec{H}_0]$  і, як наслідок,  $\vec{p}_{m\alpha}$  виконує прецесійний рух навколо  $\vec{H}_0$  з частотою  $\omega_0$  при незмінному куті  $\phi$ . Прецесія  $\vec{p}_{m\alpha}$  створює змінний магнітний момент  $\vec{p}_{m\alpha} \sin \phi$ , який обертається в площині, перпендикулярній до  $\vec{H}_0$  (рис. 9.8). Радіочастотне поле  $\vec{H}_1$ , обертальне в тій самій площині з частотою  $\omega$ , взаємодіє з ядерним магнітним моментом  $\vec{p}_{m\alpha}$ . Ця взаємодія наростає з наближенням частоти  $\omega$  до  $\omega_0$  при однакових напрямках векторів  $\vec{p}_{m\alpha}$  і  $\vec{H}_1$ . При  $\omega = \omega_0$  настає резонанс, що супроводжується максимальним поглинанням електромагнітної енергії речовиною з некомпенсованим парамагнетизмом ядер і це фіксується на ЯМР-спектрах.

Спостерігають ЯМР за допомогою радіоспектроскопів (рис. 9.9). Зразок досліджуваної речовини поміщають як осереддя всередину котушки 1, яка за допомогою ВЧ-генератора 3 генерує магнітне поле  $\vec{H}_1$ , і цю систему розміщують між полюсами постійного магніту 2, що створює однорідне поле  $\vec{H}_0$  так, щоб  $\vec{H}_1$  і  $\vec{H}_0$  були взаємно перпендикулярними. При  $\omega = \omega_0$  настає резонансне поглинання, що фіксується як спад напруги на контурі, у схему якого ввімкнена котушка з досліджуванним зразком. Спад змінна напруга після підсилювача і детектора 4 подається на розгортку осцилографа. Магнітне поле  $\vec{H}_0$  модулюється за допомогою генератора 5 та котушки модуляційного поля 6 так, щоб воно змінювалось на кілька ерстедів з частотою від 50 Гц до 1 кГц.

З такою ж частотою здійснюється горизонтальна розгортка осцилографа. При цьому на екрані спостерігається двічі повторений сигнал поглинання. Спектр ЯМР записується автоматично.

Метод ЯМР для дослідження механічних, електричних і магнітних властивостей ядер атомів набув значного поширення у фізиці, хімії, біології, техніці. Застосовуючи цей метод, одержують відомості про будову молекул, властивості речовин у рідкому і кристалічному станах та поведінку речовин у живих організмах, з високою точністю визначають деякі фізичні константи, контролюють хід хімічних реакцій тощо.

### § 9.8. Феромагнетики. Магнітний гістерезис. Закон Кюрі — Вейса. Антиферомагнетики. Феримагнетики

Сильномагнітні властивості спостерігаються в речовинах у твердому стані. Вони складаються переважно з атомів із незабудованими внутрішніми електронними оболонками. Це, насамперед, феромагнітні матеріали: залізо, кобальт, нікель та їхні сплави. При низьких температурах феромагнітні властивості мають також чисті хімічні елементи родини лантанідів: гадоліній, тербій, диспрозій, гольмій, ербій і тулій. Атоми феромагнетиків мають некомпенсовані власні магнітні моменти, які завдяки внутрішнім взаємодіям можуть набувати певної впорядкованої просторової орієнтації, внаслідок чого речовина намагнічується. Речовини, які за певних умов мають самочинну (спонтанну) намагніченість, а магнітна сприйнятливість залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля та попередньої історії, називають *феромагнетиками*. Цей термін походить від латинської назви основного їх представника — заліза. Особливістю феромагнетиків є те, що вони можуть мати макроскопічну намагніченість без зовнішнього магнітного впливу. В цьому відношенні магнітні властивості феромагнетиків значною мірою подібні до електричних властивостей сегнетоелектриків. Тому й загальнотеоретичні уявлення про ці два класи речовин подібні. Проте необхідно мати на увазі, що феромагнітні властивості речовини почали вивчатися значно раніше сегнетоелектричних і теорія сегнетоелектриків розроблялася подібно до теорії феромагнетиків.

Магнітна сприйнятливість феромагнетиків  $\chi > 0$  і може досягати значень  $10^2$ — $10^5$ . Зовнішнє магнітне поле всередині феромагнетиків підсилюється в сотні і тисячі разів.

Дослідження феромагнетиків почалося з експериментальних робіт, які провів, починаючи з 1871 р., російський фізик О. Г. Столетов (1839—1896). Ідеї про механізм намагнічування феромагнетиків висловлював ще в 1892 р. російський фізик Б. Л. Розінг (1869—1933), однак першу напівфеноменологічну кількісну теорію розробив французький фізик П. Вейс (1865—1940) у 1907 р. Явище гістерезису відкрив у 1880 р. німецький вчений Е. Варбург (1846—1931).

Розглянемо основні властивості феромагнетиків та механізм намагнічування їх на основі феноменологічних уявлень. Як зазначало-

ся, намагнічування діамагнетиків полягає у виникненні мікроскопічних індукційних струмів і відповідно додаткових магнітних моментів частинок речовини, напрямлених проти зовнішнього магнітного поля. У парамагнетиках хаотично орієнтовані власні магнітні моменти частинок речовини у зовнішньому магнітному полі набувають переважної орієнтації в напрямі поля. Значно складніший механізм намагнічування феромагнетиків. За гіпотезою Вейса, яка пізніше підтвердилася експериментально, внаслідок наявності внутрішнього молекулярного поля в стані повного розмагнічення феромагнетики розпадаються на велику кількість малих, розмірами від тисячних до десятих часток міліметра, мікроскопічних областей спонтанного намагнічення (доменів, або областей Вейса), кожна з яких намагнічена до насичення. Магнітний момент домену в середньому в  $10^{15}$  разів більший від магнітного моменту атома. Якщо немає зовнішнього магнітного поля, то магнітні моменти різних доменів напрямлені в просторі хаотично. Тому феромагнетик в цілому ненамагнічений. Розпад феромагнетика на домени енергетично вигідний. Наявність доменів підтверджується експериментально за допомогою магнітних порошоків, які після нанесення на поліровану поверхню феромагнетика осідають переважно на межах доменів, окреслюючи їхні розміри і форму.

Намагнічення феромагнетиків у зовнішньому полі спричиняється переорієнтацією векторів намагнічення доменів у напрямі прикладеного поля, яке включає зміщення, обертання і парапроцес. Зміщення визначається зміною меж між доменами. Ті домени, напрям орієнтації магнітного моменту яких близький до напрямку зовнішнього магнітного поля, починають збільшуватись за рахунок доменів, енергетично менш вигідних. При такому зміщенні домени можуть змінювати розміри, форму і власну енергію. Перешкоджають процесу зміщення дислокації, дефекти кристалічної ґратки, домішки, макротріщини тощо. Процес обертання полягає в повороті вектора намагнічення  $\vec{J}$  окремих доменів у напрямі поля. Фактором протидії таким поворотам може бути магнітна анізотропія феромагнетика, тобто залежність магнітних властивостей кристалів від напрямку намагнічення. Спочатку магнітні моменти доменів напрямлені вздовж осей легкого намагнічення, які взагалі можуть не збігатися з напрямом зовнішнього поля. Поворот намагніченості доменів пов'язаний із затратою енергії зовнішнього поля. Парапроцес (або справжнє намагнічування) полягає у збільшенні абсолютного значення спонтанної намагніченості  $\vec{J}_s$  феромагнетиків під дією зовнішнього магнітного поля напруженістю  $\vec{H}$ . Парапроцес настає при  $\vec{H} > \vec{H}_s$  і зумовлений орієнтацією в полі напруженістю  $\vec{H}$  елементарних носіїв магнетизму (спінових і орбітальних магнітних мо-

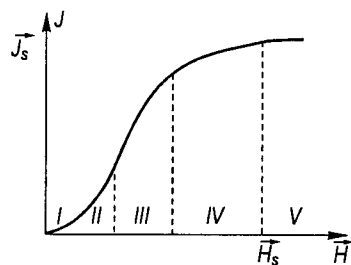


Рис. 9.10

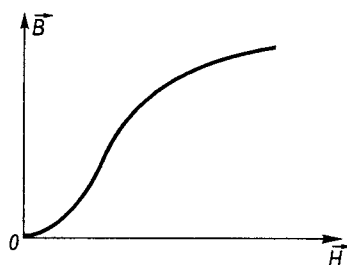


Рис. 9.11

ментів атомів або іонів), які залишилися незорієнтованими в напрямі зовнішнього магнітного поля внаслідок дії теплового руху. Парапроцес є завершальним у намагнічуванні феромагнетиків, під час якого зі збільшенням напруженості  $\vec{H}$  намагнічення  $\vec{J}$ , прямує до абсолютного насичення  $\vec{J}_0$ , тобто до намагнічення, яке мав би феромагнетик при абсолютному нулі температури, коли всі носії магнетизму повністю зорієнтовані. Загалом парапроцес робить малий внесок у намагнічування феромагнетиків.

У разі внесення ненамагніченого феромагнетика в наростаюче зовнішнє магнітне поле  $\vec{H}$  його вектор намагнічення  $\vec{J}$  змінюється нелінійно (рис. 9.10). Криву  $\vec{J}(\vec{H})$  називають *кривою першого намагнічення*. На ній можна виділити п'ять ділянок. Ділянка I — це область оборотного намагнічення, для якої  $\vec{J} = \chi\vec{H}$ . Вона зумовлена пружним зміщенням меж доменів. Ділянка II спричиняється оборотним і необоротним зміщеннями меж доменів. Для неї спостерігається квадратична залежність  $\vec{J}(\vec{H})$ . Ділянка III є наслідком необоротного зміщення меж доменів і тут спостерігається швидкий ріст  $\vec{J}(\vec{H})$ , що відповідає найбільшій магнітній проникності феромагнетика. В області IV відбувається перехід до насичення намагнічення. Ця область зумовлена переважно обертанням магнітних моментів доменів. В області V спостерігається дуже слабке наростання кривої  $\vec{J}(\vec{H})$ , її називають областю парапроцесу. Отже, намагнічення феромагнетиків не збільшується безмежно зі збільшенням напруженості магнітного поля, а має межу, яку називають *намагніченістю насичення*. Існування такої межі свідчить про те, що намагніченість феромагнетиків, як і парамагнетиків, пов'язана з переорієнтацією магнітних моментів структурних одиниць речовини.

Аналогічно до кривої намагнічення  $\vec{J}(\vec{H})$  одержують криву  $\vec{B}(\vec{H})$ . Оскільки  $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J}$ , то крива  $\vec{B}(\vec{H})$  не досягає насичення (вна-

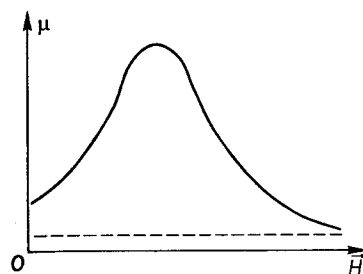


Рис. 9.12

слідок внеску першого доданка). Графік залежності  $\vec{B}(\vec{H})$  називають також кривою намагнічення (рис. 9.11).

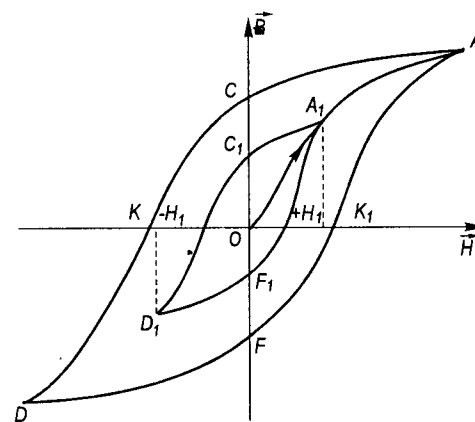


Рис. 9.13

Як видно з рис. 9.10 і 9.11, намагніченість  $\vec{J}$  та індукція  $\vec{B}$  мають нелінійний характер залежності від напруженості поля  $\vec{H}$ . Тому для феромагнетиків магнітна сприйнятливість  $\chi$  і магнітна проникність  $\mu$  не є сталими величинами, а залежать від  $\vec{H}$  (рис. 9.12). Криві намагнічення феромагнетиків залежать не тільки від фізичних властивостей матеріалів і зовнішніх умов, а й від послідовності проходження різних магнітних станів, тобто від попередньої історії намагнічення зразків. Це явище називають *магнітним гістерезисом*. Розрізняють криві першого намагнічення, криві циклічного перемагнічення (залежності  $\vec{J}(\vec{H})$  або  $\vec{B}(\vec{H})$ ), які одержують при багаторазовому проходженні певного інтервалу значень  $\vec{H}$  у прямому і зворотному напрямках — статичні петлі гістерезису) та основні криві як геометричне місце вершин симетричних петель перемагнічення. За кривими перемагнічення визначають основні характеристики феромагнетиків: намагніченість, магнітну проникність, залишкову намагніченість.

Розглянемо магнітний гістерезис на прикладі перемагнічення в періодичному магнітному полі спочатку ненамагніченого феромагнітного зразка. Поступово збільшуючи напруженість зовнішнього магнітного поля  $\vec{H}$  до певного значення  $H_1$ , одержуємо криву намагнічення  $\vec{B}(\vec{H})$  (рис. 9.13, лінія  $OA_1$ ). Внаслідок зміни  $\vec{H}$  від  $+H_1$  до  $-H_1$  крива намагнічення, як показують досліди, не збігається з кривою  $A_1O$ , а відстає і проходить по лінії  $A_1C_1D_1$ . Якщо відбувається наступна зміна від  $-H_1$  до  $+H_1$ , то крива намагнічення пройде вздовж лінії  $D_1F_1A_1$ . Замкнену криву  $A_1C_1D_1F_1A_1$  називають *петлею гістерезису*. Якщо початкову криву намагнічення продовжити до насичення (точка A), то при перемагніченні одержимо

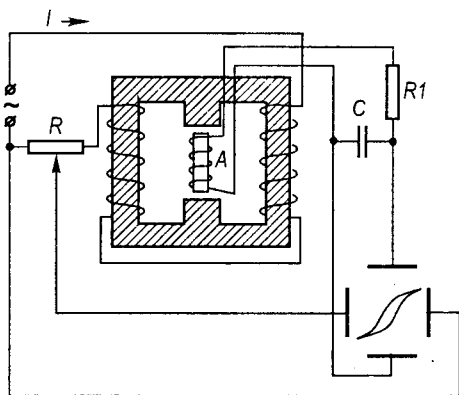


Рис. 9.14

напряг намагнічення на протилежний, змінивши напрям зовнішнього поля  $\vec{H}$ . Напруженість, яка відповідає точці  $K$  і зумовлює повне розмагнічення феромагнетика, називають затримуючою або *коерцитивною силою феромагнетика*  $\vec{H}_c$ .

Форма петлі гістерезису, залишкова намагніченість і коерцитивна сила — основні характеристики феромагнітних матеріалів, які є різними для різних феромагнетиків. За цими характеристиками феромагнетики поділяють на магнітном'які з великою магнітною проникністю і малою коерцитивною силою та магнітотверді з відносно великою магнітною проникністю і великою коерцитивною силою. Магнітном'які феромагнетики використовують у радіо- і електротехніці (різні осердя електромагнітів, трансформаторів тощо), магнітотверді — для виготовлення постійних магнітів. Площа петлі гістерезису пропорційна енергії, яка розсіюється у феромагнетику за один цикл його перемагнічення.

Петлю магнітного гістерезису отримують на екрані осцилографа за допомогою установки, подібної до тієї, яку використовували для одержання петлі діелектричного гістерезису сегнетоелектриків із заміною конденсаторів котушками. Схему такої установки показано на рис. 9.14. Котушку  $A$  з досліджуваним зразком поміщають у змінне магнітне поле електромагніту. Крізь витки електромагніту пропускають змінний електричний струм  $I$ . Напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  пропорційна силі струму в обмотках електромагніту. Тому й напруга, яку знімають з опору  $R$ , також пропорційна  $\vec{H}$ . Цю напругу подають на горизонтально відхиляючі обкладки осцилографа. У контурі  $A$ , за законом електромагнітної індукції, виникає ЕРС,

граничну петлю гістерезису  $ACKDFK_1A$ . Із цієї петлі видно, що після одержання кривої першого намагнічення  $OA$  зменшення напруженості зовнішнього магнітного поля  $\vec{H}$  до нуля не спричиняє зменшення індукції  $\vec{B}$  до нуля, яка зображується відрізком  $OC$  і характеризує залишкову намагніченість  $\vec{J}_s$ . Феромагнетик у цьому стані є постійним магнітом.

Щоб ліквідувати залишкову намагніченість, треба змінити

пропорційна  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . На конденсаторі  $C$

виникає напруга, пропорційна  $\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$ , яку подають на вертикально відхиляючі обкладки осцилографа. При проходженні по обмотках електромагніту змінного струму на екрані осцилографа виникає петля гістерезису, за якою вимірюють і розраховують основні характеристики феромагнетиків.

Важливою характеристикою феромагнетиків є наявність для кожного з них своєї критичної температури, при якій відбувається фазовий перехід другого роду, внаслідок чого феромагнетик перетворюється в парамагнетик або навпаки, залежно від того, в якому напрямі йде процес зміни температури. Цю властивість феромагнетиків вперше вивчив експериментально П. Кюрі. Тому температуру їх фазового переходу називають температурою або точкою Кюрі  $T_K$ . Феромагнітні властивості можуть зберігатися лише при  $T < T_K$ . З підвищенням температури спонтанне намагнічення зменшується і при  $T = T_K$  зовсім зникає. Залежність магнітної сприйнятливості феромагнетиків від температури  $T$  речовин у феромагнітному стані ( $T < T_K$ ) наближено описують законом Кюрі:

$$\chi = C(T_K - T)^{\gamma}, \quad (9.36)$$

де  $\gamma \neq 1$  і набуває різних значень у різних температурних інтервалах.

Намагніченість насичення  $\vec{J}_s$  має найбільше значення при  $T = 0$  К і монотонно зменшується до нуля при температурі, що дорівнює температурі Кюрі (рис. 9.15). При  $T > T_K$  речовина з феромагнітного стану переходить у парамагнітний і її магнітну сприйнятливості при цьому описують законом Кюрі—Вейса:

$$\chi = \frac{C'}{T - T_K},$$

де  $C'$  — константа, значення якої залежить від роду речовини. Температура Кюрі для заліза — 1042 К, кобальту — 1394 К, нікелю — 631 К.

*Антиферомагнетизмом* називають магнітовпорядкований стан речовини, характерний тим, що спінові магнітні моменти сусідніх частинок речовини зорієнтовані назустріч один одному. Тому намагніченість у межах доменів і речовини в цілому взаємно компенсується. Макроскопічно речовина виявляється ненамагніченою. Такі речовини називають *антиферомагнетиками*. Явище антиферомагнетизму

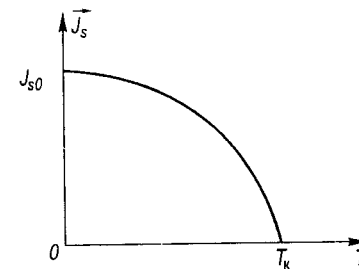


Рис. 9.15

має квантову природу. Однак у найпростішому випадку, коли немає зовнішнього намагнічувального поля, можна уявити, що електронні спіни атомів утворюють ніби дві просторові магнітні підґратки з протилежною орієнтацією спінів. Якщо спонтанне намагнічення обох підґраток є однаковим за значенням, то магнітний момент кожного домена дорівнює нулеві. Такий стан називають *антиферомагнітним*, а речовину — *скомпенсованим антиферомагнетиком*. У зовнішньому полі вони намагнічуються подібно до парамагнетиків слабо. Явище антиферомагнетизму теоретично передбачив французький фізик Л. Неель (н. 1904 р.) у 1932 р. і незалежно від нього радянський фізик Л. Д. Ландау в 1933 р. Антиферомагнітний стан речовини руйнується при температурі, вищій від певної критичної, характерної для кожної речовини, і речовина з антиферомагнітного стану переходить у парамагнітний. Цю температуру називають *точкою Нееля*. До антиферомагнетиків належать деякі сполуки марганцю (MnO, MnS, MnF<sub>2</sub>), заліза (FeF<sub>2</sub>, FeCl<sub>2</sub>, FeO), хрому (CrSb, CrO<sub>3</sub>) тощо.

При неоднаковій спонтанній намагніченості підґраток речовини (підґратки складаються з неоднакових видів магнітних іонів) настає неповна компенсація магнітних моментів у межах кожного домену і, отже, спостерігається результуюча спонтанна намагніченість. Такі речовини називають *нескомпенсованими антиферомагнетиками* або *феримагнетиками*. За зовнішніми ознаками магнітні властивості цих речовин майже не відрізняються від магнітних властивостей феромагнетиків. Однак іншою є температурна залежність магнітної сприйнятливості, і вони, як правило, мають низьку температуру фазового переходу (точку Кюрі). Якщо феримагнетики мають ще й напівпровідникові властивості, то їх називають *феритами*.

Феримагнетизм є найбільш загальним випадком магнітовпорядкованого стану речовини. У цьому разі феромагнетизм можна розглядати як окремий випадок феримагнетизму, коли в речовині є лише одна підґратка. У свою чергу, антиферомагнетизм можна вважати окремим випадком феримагнетизму, коли всі підґратки складаються з однакових сортів магнітних іонів, тому їхня спонтанна намагніченість взаємно компенсується і  $\vec{J}_s = 0$ .

До феримагнетиків належать MgO, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, NiO·Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, MnO·Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, CuO·Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> та ін. Вони широко застосовуються в радіотехніці (магнітні схеми, осердя тощо), в обчислювальній техніці (магнітні комірки пам'яті).

Підсумовуючи, зазначимо, що феромагнетики характеризуються переважно кристалічною будовою, великим додатним значенням магнітної сприйнятливості (магнітної проникності), нелінійною її залежністю від напруженості зовнішнього магнітного поля та температури, здатністю намагнічуватись до насичення при звичайних температурах у порівняно слабких полях, гістерезисом, залежністю маг-

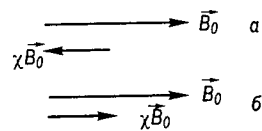


Рис. 9.16

нітних властивостей від попереднього магнітного стану (попередньої магнітної історії), точкою Кюрі, тобто температурою, вище від якої речовина втрачає феромагнітні властивості. Основною силовою характеристикою магнітного поля в речовинах, так само як і у вакуумі, є вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$ . Магнітних зарядів як джерел поля не існує: магнітне поле створюється постійними магнітами та рухомими електричними зарядами (електричними струмами). Магнітне поле є соленоїдним (вихровим), його лінії індукції завжди замкнені. Як і електричне поле, магнітне підлягає принципу суперпозиції. Індукція магнітного поля в речовині складається з двох компонент:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0,$$

де  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$  — індукція зовнішнього магнітного поля у вакуумі;  $\chi \vec{B}_0$  — індукція власного магнітного поля речовини. Для діамгнетиків ці поля напрямлені протилежно (рис. 9.16, а), а для пара- і феромагнетиків — збігаються за напрямом (рис. 9.16, б). У речовині індукція магнітного поля змінюється в  $\mu$  разів порівняно з індукцією того самого поля у вакуумі: у діамгнетиках ( $\mu \leq 1$ ) послаблюється, в парамагнетиках ( $\mu \geq 1$ ) підсилюється, у феромагнетиках ( $\mu \gg 1$ ) значно підсилюється.

Кривими намагнічення  $\vec{J}(\vec{H})$  для діа- (1) і парамагнетиків (2) є прямі лінії, для феромагнетиків (3) ця крива має складний нелінійний характер (рис. 9.17).

### § 9.9. Магнітомеханічні (гіромагнітні) явища. Дослід Барнетта. Досліди Ейнштейна і де Гааза

До магнітомеханічних, або гіромагнітних, належать явища, зумовлені взаємозв'язком магнітних і механічних моментів мікрочастинок — носіїв магнетизму. Довільна мікрочастинка (електрон, протон, атомне ядро, молекула, іон), яка має механічний момент кількості руху, має також і певний магнітний момент. Магнітний момент орбітального руху електрона зв'язаний з його моментом імпульсу гіромагнітним відношенням (9.23). У свою чергу, власний

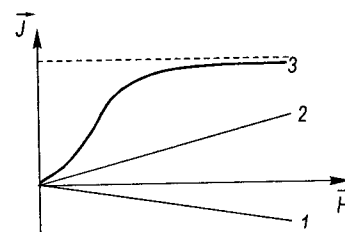


Рис. 9.17

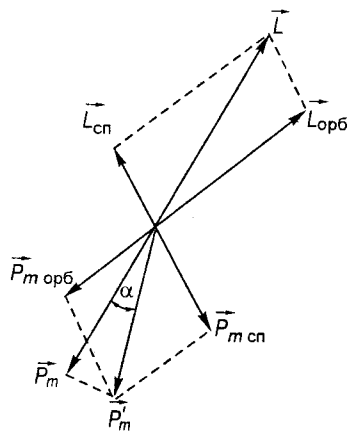


Рис. 9.18

для орбітального і спінового рухів електронів є різними, то сумарний магнітний момент  $\vec{p}_m$  структурної частинки речовини є неколінеарним з відповідним сумарним механічним моментом  $\vec{L}$  цієї частинки (рис. 9.18). Між ними існує певний кут  $\alpha$ . За законом збереження механічний момент імпульсу ізольованої системи не змінюється. Тому, наприклад, в ізольованому атомі напрям  $\vec{L}$  зберігає свою орієнтацію в просторі, а магнітний момент  $\vec{p}_m$  виконує прецесійний рух з великою кутовою швидкістю навколо напрямку механічного моменту. У взаємодії магнітного моменту  $\vec{p}_m$  із зовнішнім магнітним полем ефективну роль відіграє не  $\vec{p}_m$ , а його складова  $\vec{p}_m$  у напрямі повного механічного моменту атома  $\vec{L}$ . Співвідношення між магнітним і механічним моментами довільних мікрочастинок речовини матиме вигляд

$$\vec{p}_m = \gamma \frac{e\vec{L}}{2m}, \quad (9.37)$$

де  $\gamma$  — множник Ланде, який дорівнює одиниці для орбітального і двом для спінового рухів електрона, а для атома  $1 \leq \gamma \leq 2$ . Збільшення внаслідок зовнішніх впливів сумарного механічного моменту кількості руху мікрочастинок, які складають фізичне тіло, зумовлює виникнення в ньому додаткового магнітного моменту, або, що те саме, додаткового намагнічення. І навпаки, при намагнічуванні зразка він набуває додаткового механічного моменту, що проявляється в його макроскопічній поведінці.

Збільшення магнітного моменту (намагнічення) у феромагнітних зразках при їх обертанні, якщо магнітного поля немає, впер-

ше виявив у 1909 р. американський фізик С. Барнетт (1873—1956). Це явище називають *ефектом Барнетта* або *механомагнітним явищем*. Суть його така. Атоми магнетика являють собою своєрідні гіроскопи, які мають властивість зберігати напрям своїх осей обертання в просторі. Тому й проєкції магнітних моментів атомів на напрям їхніх механічних моментів також зберігаються незмінними. Під час обертання магнетика як цілого магнітні моменти атомів здійснюватимуть прецесійний рух у кристалічній ґратці відносно осі обертання з частотою обертання магнетика. Така впорядкована прецесія атомів відносно осі обертання магнетика зумовлює його додаткове намагнічення. Зауважимо, що при обертанні магнетика в ньому виникає лише діамагнітна намагніченість, значення якої є досить малим і потрібен точний експеримент для її виявлення. За допомогою ефекту Барнетта визначають магнітомеханічне (гіромагнітне) відношення — відношення магнітного моменту електронів до їхнього механічного моменту

$$\Gamma = \frac{p_m}{L} = \gamma \frac{e}{2m}, \quad \text{або} \quad \gamma = \Gamma \frac{2m}{e}.$$

Обернений ефект виникнення механічного моменту феромагнетика при його намагнічуванні в зовнішньому магнітному полі називають *магнітомеханічним явищем*. Це явище в 1915 р. вперше дослідили експериментально і пояснили теоретично А. Ейнштейн і нідерландський фізик В. де Гааз (1878—1960). Суть досліду така. Тіло циліндричної форми із пара- або феромагнітної речовини міститься всередині котушки зі струмом. При цьому тіло намагнічується (рис. 9.19). Співвідношення (9.37) показує, що намагнічування феро- або парамагнітного циліндричного тіла вздовж його осі супроводжується не тільки тим, що магнітні моменти атомів орієнтуються в напрямі дії зовнішнього магнітного поля вздовж осі, а й тим, що атоми, а разом з ними і тіло в цілому набувають відповідного механічного моменту. Механічний момент тіла складається із суми механічних моментів атомів і механічного моменту циліндра як цілого. До намагнічування повний механічний момент тіла дорівнює нулеві.

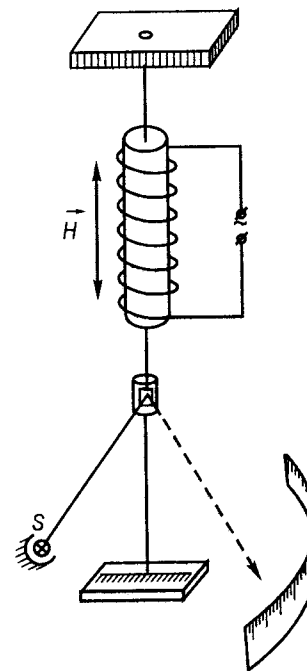


Рис. 9.19

Для ізольованої системи повний механічний момент кількості руху зберігається. При намагнічуванні повороти магнітних моментів атомів зумовлюють виникнення у них додаткових механічних моментів. Звідси випливає, що кристалічна гратка магнетика при намагнічуванні має одержати механічний момент, що дорівнює сумарному механічному моменту атомів, але протилежного напрямку. Отже, якщо до намагнічування тіло перебувало у стані спокою, то внаслідок намагнічування воно має повернутися на певний кут. Ефект повороту є дуже малим. Для його підсилення А. Ейнштейн і В. де Гааз скористались явищем резонансу. Вони помістили тіло у котушку, по якій проходив змінний струм, а на стрижні закріпили дзеркальце, світловий промінь від якого спрямовували на шкалу. Частота струму змінювалася так, щоб амплітуда відхилень світлового променя була максимальною. За цієї умови частота струму  $\omega$  збігалася з власною частотою крутильних коливань циліндричного тіла  $\omega_0$ . Для гіромагнітного відношення розрахунки магнітомеханічного явища дали таку формулу:

$$\Gamma = \frac{JV\omega}{\theta^2 D}, \text{ або } \gamma = \frac{2mJV\omega}{e\theta^2 D},$$

де  $J$  — намагнічення тіла;  $V$  — його об'єм;  $\omega$  — циклічна частота коливань тіла;  $\theta$  — кут повороту;  $D$  — модуль кручення дроту;  $e$  і  $m$  — заряд і маса електрона.

Як видно, у цій рівності всі параметри відомі або можуть бути визначені експериментально і, отже, можна розрахувати  $\gamma$ . Для феромагнетиків експериментально було отримано  $\gamma = 2$ . Це значення виявилось у два рази більшим, ніж у випадку, коли б магнітні властивості феромагнетиків визначались орбітальним рухом електронів. Ці результати були одержані ще до відкриття спіну електрона і тому не могли бути пояснені. Після відкриття спіну стало зрозумілим, що феромагнетизм зумовлений наявністю спінових, а не орбітальних магнітних моментів електронів. Для інших магнетиків значення  $\gamma$  коливались між 1 і 2, тобто їхні магнітні властивості визначались як орбітальним, так і спіновим рухом електронів, внесок яких для різних матеріалів є різним. Знак гіромагнітного відношення в усіх випадках свідчив про те, що магнітні властивості всіх магнетиків визначаються рухом електронів.

### § 9.10. Елементарна теорія феромагнетизму

Як зазначалося, першу напівфеноменологічну кількісну теорію феромагнетизму розробив П. Вейс. Він виходив із того, що атоми феромагнетиків, як і парамагнетиків, мають магнітні моменти, які

взаємодіють між собою із силою, що залежить від кута між напрямками їхніх моментів. Ці сили намагаються зорієнтувати магнітні моменти атомів у певному напрямі, завдяки чому феромагнетик намагнічується. За теорією Вейса сили взаємодії між магнітними моментами атомів зводяться до певного ефективного магнітного поля, яке складається з макроскопічного поля в речовині з індукцією  $\vec{B}$  та молекулярного поля. На основі таких уявлень феромагнетик має бути спонтанно намагніченим навіть тоді, коли зовнішнього магнітного поля немає, оскільки паралельна орієнтація магнітних моментів енергетично вигідна через взаємодію між атомами. Справді, якщо в певний момент часу всі магнітні моменти атомів орієнтовані хаотично, але внаслідок флуктуацій випадково магнітні моменти двох атомів набудуть паралельної орієнтації в певному напрямі, то з'являється локальний надлишок вейсівського молекулярного поля, яке змушує магнітні моменти інших атомів прийняти таку саму орієнтацію. Через наявність магнітної анізотропії кристалів спонтанне намагнічення відбувається в напрямі осей легкого намагнічення. Змінити переважаючу орієнтацію магнітні диполі самостійно не можуть, оскільки їм при цьому потрібно було б пройти ряд менш енергетично вигідних станів. Протидіє такій орієнтації тепловий рух. Однак при температурі, нижчій від точки Кюрі, енергії теплового руху недостатньо для руйнування спонтанного намагнічення. У точці Кюрі відбувається фазовий перехід, і феромагнетик переходить з упорядкованого стану в неупорядкований. Отже, теорія Вейса формально пояснює спонтанну намагніченість, існування температури Кюрі, закон Кюрі — Вейса.

Молекулярне поле Вейса, здавалося, зумовлене специфічною взаємодією магнітних моментів атомів за аналогією з електричною взаємодією моментів діелектриків. Однак розрахунки показали, що магнітні поля, необхідні для спонтанної намагніченості феромагнетиків, у  $10^3$ — $10^4$  разів більші від полів, які можуть створити зорієнтовані магнітні моменти атомів цих речовин. Отже, поле Вейса не можна звести до магнітної взаємодії елементарних магнітних моментів. Цей висновок був підтверджений прямими дослідженнями, які в 1927 р. провів радянський фізик Я. Г. Дорфман (1898—1974). Між полюсами сильного магніту розміщували нікельову фольгу близько 20 мкм завтовшки. Крізь фольгу пропускали пучок швидких електронів ( $\beta$ -випромінювання від радіоактивних елементів). Після проходження крізь фольгу слід пучка електронів реєструвався на фотоплівці. Цей слід під дією магнітного поля зміщувався. За розрахунками, це зміщення пучка мало становити близько 10 мм, якщо припустити, що молекулярне поле Вейса має магнітну природу і зміщення зумовлене дією ефективного поля, яке складається із зовнішнього і молекулярного полів. Експеримент, однак, зафіксував зміщення близько



0,3 мм, що забезпечувалось дією лише зовнішнього магнітного поля. Це протиріччя поставило питання про фізичну природу молекулярних сил Вейса та природу намагнічування феромагнетиків.

Природу магнітного поля Вейса пояснили у 1928 р. радянський фізик Я. І. Френкель і німецький фізик В. Гейзенберг (1901—1976) на основі квантової механіки. З'ясуємо суть цих питань, не вдаючись до викладу самої теорії. Якщо розглянути рух електронів на основі квантової теорії, а їхню взаємодію за законом Кулона, то результат буде таким самим, як і при описанні руху електронів на основі класичної механіки. Виявилось, що для характеристики взаємодії електронів крім сил Кулона потрібно ввести ще деякі додаткові сили, які називають *обмінними*. Обмінні сили короткодіючі (діють на відстанях атомних розмірів), і є силами електричного, а не магнітного походження. Справді, енергія електростатичної взаємодії елементарних зарядів є достатньою для самочинного намагнічування. Однак класична фізика не могла пояснити, як електростатичне поле може впливати на магнітні властивості речовини. Це питання було вирішене на основі квантової фізики. Електрони різних атомів є тотожними, тобто атоми можуть обмінюватись ними без змін. Енергію обміну електронами називають обмінною. При певних забудовах електронних оболонок атомів або структурах кристалічних ґраток обмінні сили намагаються встановити спіни електронів сусідніх атомів паралельно між собою, що й стає причиною спонтанного намагнічення феромагнетиків. Обмінна взаємодія може бути замінена еквівалентним молекулярним полем Вейса. Отже, теорія Вейса на основі поняття обмінних сил набуває фізичного обґрунтування.

Теорія молекулярного поля добре узгоджується з дослідами при високих температурах ( $T \sim T_K$ ). У разі низьких температур описання властивостей феромагнетиків можливе лише на основі квантово-механічної теорії спінових хвиль. Слід зазначити, що в теорії феромагнетизму ще багато незавершеного і вона продовжує розвиватись. Зв'язок феромагнетизму з багатьма немагнітними властивостями речовини дає можливість за даними вимірювання магнітних властивостей одержувати інформацію про різні тонкі специфічні особливості електронної структури кристалів. Тому феромагнетизм інтенсивно досліджується на електронному і ядерному рівнях з використанням сучасних точних методів дослідження.

### § 9.11. Нові магнітні матеріали

*Магнітними* називають матеріали, які використовують у різних галузях техніки з урахуванням їхніх магнітних властивостей. Виділяють дві основні групи магнітних матеріалів: магнітном'які і магнітотверді. Іноді виділяють третю групу матеріалів спеціального призначення. Особливістю магнітном'яких матеріалів є їхня властивість

намагнічуватися до насичення навіть у слабких магнітних полях (висока магнітна проникність) і малі втрати на перемагнічування. Магнітотверді матеріали, навпаки, намагнічуються до насичення в порівняно сильних магнітних полях (мають невеликі значення магнітної проникності) і потребують значних витрат енергії на перемагнічування. Значення цієї енергії зростає з ростом залишкової намагніченості  $J_s$  і коерцитивної сили  $H_c$  матеріалу.

Намагнічування матеріалів обох груп відбувається аналогічно, однак кількісні співвідношення процесів зміщення меж доменів і обертання є різними. Процес зміщення меж доменів потребує значно менших витрат енергії, ніж процес обертання. Тому в магнітном'яких матеріалах процес намагнічення відбувається переважно внаслідок зміщення меж доменів, а в магнітотвердих — завдяки обертанню магнітних моментів доменів. Ця закономірність не завжди виконується однозначно. Кожний з цих процесів наявний при намагніченні будь-яких феромагнетиків.

Маючи петлі гістерезису для обох груп матеріалів, можна зробити висновок, що індукція насичення і залишкова індукція для них майже однакові, але значна відмінність існує у значеннях коерцитивних сил. Для промислових магнітном'яких матеріалів найменша  $H_c \approx 0,4$  А/м, а для магнітотвердих найбільша  $H_c \approx 800$  кА/м, тобто магнітном'які феромагнітні матеріали мають вузьку петлю гістерезису, а магнітотверді — широку. Умовно вважають, що матеріал є магнітном'яким, якщо  $H_c < 800$  А/м, і магнітотвердим, якщо  $H_c > 4$  кА/м.

До магнітних матеріалів спеціального призначення належать матеріали з прямокутною петлею гістерезису. Складні петлі гістерезису одержують практично для будь-яких феромагнітних матеріалів завдяки спеціальним видам обробки: механічній, термомеханічній, термохімічній та ін. Композиційні матеріали також дають можливість формувати ту чи іншу петлю гістерезису.

**Магнітном'які матеріали.** Ці матеріали класифікують за їхнім основним хімічним складом і поділяють на різні групи.

*Технічно чисте залізо* (низьковуглецева електротехнічна сталь). Воно легко обробляється, має хороші магнітні властивості. Недоліком є малий питомий опір, що обмежує застосування його в постійних магнітних полях і робить недоцільним використання в змінних магнітних полях внаслідок великих струмів Фуко. Технічно чисте залізо використовують переважно як матеріал для створення різноманітних феромагнітних сплавів.

*Електротехнічні (кременисті) сталі* являють собою твердий розчин силіцію в залізі. Ці матеріали мають великий питомий опір і високі магнітні властивості. Недоліком їх є висока твердість і крихкість. Електротехнічні сталі широко застосовують для виготовлення магнітопроводів, електричних машин, трансформаторів, дроселів та інших пристроїв, призначених для роботи в змінних полях із частотою 400—500 Гц в області малих, середніх і сильних магнітних полів.

*Пермалой* — це сплави заліза і нікелю або заліза з нікелем і кобальтом. Їх часто додатково легують молібденом, хромом та іншими елементами. Перевагою їх є висока магнітна проникність у слабких полях і малі значення коерцитивної сили, тому вони мають велику чутливість магнітних властивостей до механічних напруг, малі значення індукції насичення. Пермалой використовують як магнітні елементи вимірвальних, автоматичних і радіотехнічних пристроїв, що працюють у слабких постійних і змінних полях з частотою до десятків кілогерц.

*Магнітном'які ферити* — це тверді розчини оксидів металів, які мають феромагнітні властивості з коерцитивною силою, що не перевищує 4 кА/м. Найбільш широко застосовують марганцево-цинкові (низькочастотні) і нікель-цинкові (високочастотні) ферити. Питомий опір феритів у  $10^6$ — $10^{13}$  разів більший від питомого опору металевих феромагнітних матеріалів. Тому їх можна використовувати в області звукових і радіочастот з малими втратами енергії на перемагнічення. Недоліком їх є порівняно малі значення магнітної проникності, низькі значення індукції насичення, залежність магнітних властивостей від температури, крихкість і твердість.

**Магнітодіелектрики** — це суцільні матеріали, в яких роздроблені частинки феромагнітного матеріалу ізолювані одна від одної плівками з немагнітного матеріалу, що одночасно скріплюють феромагнітні частинки. Магнітодіелектрики мають великий питомий опір, завдяки чому їх використовують у високочастотних полях. Порівняно з феритами вони мають стабільніші магнітні характеристики, але менші значення магнітної проникності.

**Аморфні матеріали** є магнітними матеріалами з особливою атомною структурою, яка має ближній порядок. Електромагнітні властивості їх кращі, ніж у електротехнічних сталей, і наближаються до властивостей пермалоїв. Аморфні матеріали мають високу корозійну стійкість, твердість при збереженні пластичності. Було отримано полімерні магнітні матеріали, які можуть бути перспективними при використанні їх у змінних високочастотних полях.

Загальні вимоги до магнітних матеріалів такі: матеріал має легко намагнічуватися і розмагнічуватися (за цими параметрами кращими є пермалої), мати велику індукцію насичення, тобто забезпечувати проходження максимального магнітного потоку крізь переріз магнітопроводу (кращими за цими параметрами є сплав заліза з кобальтом, технічно чисте залізо й електротехнічна сталь).

Магнітні матеріали мають забезпечувати малі втрати енергії. Їх використовують для виготовлення осердь трансформаторів, індуктивних котушок, фільтрів, контурів, магнітних антен, статорів і роторів високочастотних електричних двигунів, відхиляючих систем телевізійної апаратури тощо.

**Магнітнотверді матеріали.** Ці матеріали класифікують за способом їх добування.

**Литі магнітнотверді матеріали** виготовляють на основі сплавів Fe — Ni — Al і Fe — Ni — Al — Co. Ці сплави мають хороші магнітні властивості, але погані механічні (висока твердість і крихкість). Велика коерцитивна сила їх пояснюється механізмом дисперсійного тверднення сплавів. Ці матеріали становлять 80 % усіх магнітнотвердих матеріалів, що використовуються в народному господарстві.

**Порошкові магнітнотверді матеріали** одержують пресуванням магнітних порошоків при високих тисках з наступною термообробкою. Матеріали цієї групи ще поділяють на металокерамічні, металопластичні, оксидні і мікропорошкові. Металокерамічні матеріали добувають з металевих порошоків пресуванням і спіканням їх при високих температурах без зв'язуючого полімерного матеріалу. Ці матеріали мають дещо гірші магнітні властивості, але більший електричний опір, меншу густину, вони є дешевшими. Серед оксидних магнітних матеріалів найпоширенішими є ті, які виготовляють на основі фериту кобальту. Оксидні матеріали мають велику коерцитивну силу, великий питомий опір, дешеві, що дає можливість застосовувати їх у високочастотних пристроях. Недоліком їх є залежність магнітних властивостей від температури. Магнітні мікропорошкові матеріали в основному виготовляють із заліза або заліза і кобальту. Великі значення коерцитивної сили для цих матеріалів пояснюються особливостями намагнічення однодомених частинок. Ці матеріали мають обмежене використання.

**Інші магнітнотверді матеріали.** До цієї групи належать мартенситні сталі, сплави з особливо великою коерцитивною силою на основі благородних металів, пластичні магніти, магнітні стрічки для звукозапису, сплави на основі рідкісноземельних елементів. Магнітнотверді матеріали застосовують переважно для виготовлення постійних магнітів шляхом короточасного введення їх у сильне постійне магнітне поле. Після зняття зовнішнього поля завдяки наявності залишкової намагніченості магнітнотвердий матеріал стає постійним магнітом.

Магнітний потік, який створюють постійні магніти, змінюється з часом внаслідок дії різних зовнішніх впливів: магнітних полів, механічних ударів, температури, радіації, зміни магнітного опору тощо.

Розрізняють структурну і магнітну нестабільність. Структурну нестабільність пов'язують зі зміною кристалічної будови, фазовими перетвореннями, зміною внутрішніх напруг і т. ін. Параметри, які змінилися через структурне старіння, можуть бути відновлені лише повторною термічною обробкою матеріалу. Магнітна неста-

більність зумовлена зміною магнітної (доменної) структури матеріалів внаслідок переходу в термодинамічно рівноважний стан. Магнітна нестабільність при змінах зовнішніх умов може бути оборотною і необоротною. Оборотною нестабільність відновлюють повторним намагніченням матеріалу, необоротну — термічною обробкою і повторним намагніченням.

**Магнітні матеріали спеціального призначення.** До них належать *магнітні матеріали з прямокутною петлею гістерезису* (ППГ). Вони широко застосовуються в пристроях автоматики, обчислювальної техніки, в приладах телеграфного зв'язку, в імпульсних системах радіозв'язку. Петлю гістерезису з ідеальною прямокутністю характеризують коефіцієнтом прямокутності  $\alpha$ , що дорівнює 1. Матеріали, що застосовуються на практиці, мають  $\alpha = 0,85 - 0,96$ . Осердя, виготовлені з матеріалу з ідеальною прямокутністю, мають два стійких рівноважних магнітних стани, які відповідають позитивному і негативному значенням залишкового намагнічення. Тому їх використовують як магнітні елементи для збереження і перероблення інформації. Магнітні матеріали з ППГ поділяють на три групи: ферити; текстуровані магнітні сплави у вигляді стрічок, товщина яких від 0,5 мм до мікрометрової товщини; тонкі феромагнітні плівки.

Широкого застосування набули ферити для пристроїв НВЧ (НВЧ включають частоти від сотень мегагерц до тисяч гігагерц, тобто для довжин хвиль від метрів до міліметрів). Транспортування електромагнітної енергії таких частот здійснюють за допомогою хвилеводів, а також коаксіальних і стрічкових ліній передач. Хвилеводами є пустотілі труби круглого або прямокутного поперечного перерізу. Металеві магнітні матеріали на НВЧ не використовують через великі втрати енергії електромагнітних хвиль. Ферити мають великий опір (у мільйони разів більший від опору металів), тому втрати енергії в них зменшуються. Однак при проходженні електромагнітних хвиль крізь ферити ці хвилі активно взаємодіють з рухомими електронами речовини, внаслідок чого змінюється структура самого поля і швидкість його поширення та виникають інші ефекти. Використовуючи залежність властивостей феритів від напрямку поширення хвиль, з них виготовляють вентилялі, перемикачі, пристрої для повертання фаз тощо. Широкого застосування набули ітрієві, літєві, магнієві, нікелеві ферохроміти. Застосовують також інші магнітні матеріали, наприклад термомагнітні матеріали, для яких характерна велика залежність магнітних властивостей від температури (частіше в інтервалі від  $-60$  до  $+60$  °С). Їх використовують для виготовлення магнітних шунтів або магнітних додаткових опорів. Магнітострикційні матеріали застосовують в генераторах звукових і ультразвукових коливань.

**Матеріали із складною петлею гістерезису** широко застосовуються в елементах пам'яті, логічних схемах, перетворювачах електричних величин, в автоматичній тощо. Їх одержують як композиційні магнітні структури.

Останнім часом виникла велика потреба в магнітних матеріалах для мікроелектроніки. Це переважно *матеріали із сильною одновісною магнітною анізотропією*. Нові магнітні матеріали потрібні для магнітооптичних пристроїв, які працюють в діапазонах оптичних хвиль, а також для термомагнітного запису інформації за допомогою променів лазера. Під напрямленою дією променя лазера в магнітних матеріалах відбуваються локальні зміни. Це забезпечує запис і збереження інформації, яка у разі потреби може бути відтворена. Розвиток різних галузей техніки ставить все нові вимоги до магнітних матеріалів, виготовлення яких ґрунтується на знаннях природи і механізмів намагнічення.

## § 9.12. Магнітні кола. Магніторухізна сила. Закони магнітного кола

**Магнітні кола** — це послідовність магнетиків, крізь які проходить магнітний потік. Уявлення про магнітні кола і їхні закони є простим і зручним способом розв'язання багатьох практичних завдань при

розрахунках постійних магнітів, електромагнітів, реле, магнітних підсилювачів, електровимірювальних та інших приладів. Розрізняють замкнені магнітні кола, магнітний потік в яких практично повністю проходить у феромагнетиках, і магнітні кола, в які входять діамантики (наприклад, повітряні зазори). Якщо магнітний потік у колах збуджується постійними магнітами, то такі кола називають *поляризованими*. Магнітні кола, магнітний потік в яких збуджується струмами в обмотках, що охоплюють все магнітне коло або його частину, називають *нейтральними*. Залежно від характеру струму в обмотках розрізняють магнітні кола з постійним, змінним та імпульсним магнітними потоками.

*Магніторушійна сила* характеризує магнітну дію електричного струму. Цю величину вводять за аналогією з електричним полем постійного струму в провідниках, для якого циркуляція вектора напруженості дорівнює електрорушійній силі джерела струму:  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mathcal{E}$ .

За законом повного струму  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^N I_k$ .

У магнітних колах циркуляція вектора напруженості магнітного поля по замкнутому контуру  $L$ , який охоплює струми, що створюють це магнітне поле, називають *магніторушійною силою* (МРС) і позначають  $\mathcal{E}_M$ , тобто

$$\mathcal{E}_M = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_l dl = \sum_{k=1}^N I_k,$$

де  $H_l$  — проекція  $\vec{H}$  на напрям елемента контуру  $dl$ ;  $N$  — кількість провідників (або витків) зі струмом, які охоплюються контуром  $L$ . Якщо магнітне поле створюється котушкою із загальною кількістю витків  $N$ , по яких проходить постійний струм силою  $I$ , то  $\mathcal{E}_M = IN$ . В СІ магніторушійну силу вимірюють в амперах (або ампер-витках), в системі Гаусса — у гільбертах (Гб):  $1 \text{ Гб} = 0,8 \text{ А}$ .

Для однорідного поля всередині нормального соленоїда

$$H = I_n = \frac{IN}{L} = \frac{\mathcal{E}_M}{L}$$

подібно до напруженості однорідного поля між обкладками плоского конденсатора  $E = \frac{\mathcal{E}_e}{d}$ , де  $\mathcal{E}_e$  — ЕРС джерела струму, приєднаного до обкладок конденсатора.

Між електричними і магнітними колами існує формальна аналогія. Тому до магнітних кіл можна застосувати весь математичний

апарат, розроблений для електричних кіл. Наприклад, для магнітних кіл аналогом закону Ома є формула

$$\mathcal{E}_M = \Phi \cdot R_M, \quad (9.38)$$

де  $\Phi$  — магнітний потік;  $R_M$  — магнітний опір. Як видно з (9.38), магнітний потік  $\Phi$  у магнітних колах є аналогом сили струму  $I$  в електричних колах. Для складних магнітних кіл застосовують правила Кірхгофа, які записуються так:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad (9.39)$$

та

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i R_{Mi} = \sum_{k=1}^m E_{Mk}. \quad (9.40)$$

Елементи магнітних кіл, як і електричних, можуть з'єднуватися послідовно або паралельно.

Закони магнітних кіл використовують для розрахунків магнітних параметрів аналогічно до розрахунків параметрів електричних кіл постійного струму. Маючи на увазі формальну аналогію між магнітними і електричними колами, слід завжди пам'ятати про їхню різну фізичну суть.

**Приклад 9.2.** Розрахувати основні магнітні характеристики двох послідовно з'єднаних магнетиків.

**Розв'язання.** За магнетик візьмемо залізне осердя у вигляді тороїду  $l$  і послідовно з'єднаного повітряного зазора між його торцями  $2$  (рис. 9.20). Припустимо, що тороїд має  $N$  витків, по яких проходить струм силою  $I$ . Магніторушійна сила  $\mathcal{E}_M = IN$ . Магнітний потік, який створює МРС в обох послідовно з'єднаних магнетиках, буде однаковим:  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ . Вважаючи, що обмотка тороїда є нормальним соленоїдом, запишемо

$$H = \frac{IN}{L},$$

де  $L = l_1 + l_2$  — довжина середньої лінії тороїду. Тоді  $IN = Hl_1 + Hl_2$ , де  $H$  — напруженість магнітного поля, яка є однаковою в обох магнетиках і визначається лише струмами провідності.

Індукція магнітного поля в різних магнетиках буде різною:  $B_1 = \mu_0 \mu_1 H$  і  $B_2 = \mu_0 \mu_2 H$ . Крім того, індукція зв'язана з магнітним потоком:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} \quad \text{і} \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}.$$

З урахуванням останніх співвідношень формула для МРС переписеться так:

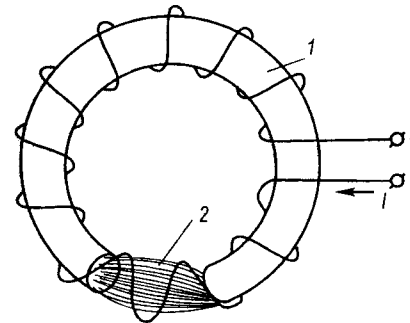


Рис. 9.20

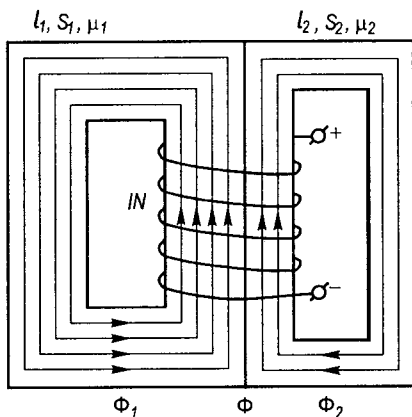


Рис. 9.21

Цей вираз аналогічний закону Ома для повного електричного кола.

Порівнявши формулу для магнітного опору  $R_M = \frac{l}{\mu_0 \mu S}$  з формулою для електричного

опору  $R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}$ , можна дійти висновку, що магнітна абсолютна проникність  $\mu' = \mu_0 \mu$  у магнітному колі відіграє роль питомої провідності  $\sigma$  в електричному колі, її називають *питомою магнітопровідністю*  $\sigma_M = \mu_0 \mu$ .

Зауважимо, що на відміну від  $R$  магнітний опір магнетика взагалі не є постійною величиною.

У випадку неоднорідного магнітного кола, яке складається з ряду послідовно з'єднаних ділянок, результуючий магнітний опір дорівнює сумі опорів окремих ділянок:

$$R_M = R_{M1} + R_{M2} + \dots + R_{Mn}$$

За значенням магнітного потоку обчислюють індукцію магнітного поля в кожному з послідовно з'єднаних магнетиків. Для  $B_1$ , наприклад, можна записати

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{\mu_0 I N}{l_1 + \frac{S_1}{S_2} l_2}$$

**Приклад 9.3.** Обчислити магнітний потік на ділянці магнітного кола з двох паралельно з'єднаних магнетиків.

**Розв'язання.** Якщо в магнітному колі є ділянка з двох паралельно з'єднаних магнетиків (рис. 9.21), де магнітні потоки створюються однією і тією самою МРС  $\Phi_M = IN$ , то результуючий магнітний потік  $\Phi$  є сумою двох паралельних потоків  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$ :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Для кожного магнетика можна записати

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_M}{R_{M1}} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \frac{\Phi_M}{R_{M2}}$$

$$IN = \frac{\Phi_1 l_1}{\mu_0 \mu_1 S_1} + \frac{\Phi_2 l_2}{\mu_0 \mu_2 S_2}$$

Оскільки  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ , то для двох послідовно з'єднаних магнетиків одержимо формулу Гопкінсона

$$\Phi = \frac{IN}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_2 S_2}}$$

Для однорідної ділянки магнітного кола величину  $R_M = \frac{l}{\mu_0 \mu S}$  за аналогією до електричного кола називають *магнітним опором магнетика*. Тоді

$$\Phi = \frac{\Phi_M}{R_{M1} + R_{M2}}$$

$$\Phi = \Phi_M \left( \frac{1}{R_{M1}} + \frac{1}{R_{M2}} \right),$$

або

$$\Phi = IN \left( \frac{\mu_0 \mu_1 S_1}{l_1} + \frac{\mu_0 \mu_2 S_2}{l_2} \right).$$

За останньою формулою обчислюють магнітний потік у паралельній гілці магнітного кола.

Загальний магнітний опір  $R_M$  при паралельному з'єднанні магнетиків визначається за формулою

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{R_{M1}} + \frac{1}{R_{M2}} + \dots + \frac{1}{R_{Mn}}$$

### § 9.13. Електромагніти та їх застосування

Пристрої, які здатні створювати власні магнітні поля, називають *магнітами*. Магніти можуть бути природними і штучними. Природним джерелом магнітного поля є, наприклад, Земля, деякі залізні руди. Однак широкого застосування набули штучні магніти: електромагніти і постійні магніти.

В *електромагнітах* магнітне поле створюють за допомогою обмотки, у витках якої проходить електричний струм. Для підсилення магнітного поля і концентрації його потоку в певних напрямках застосовують магнітопровід, який виготовляють з магнітнотвердого матеріалу. Перший електромагніт побудував у 1825 р. англійський електротехнік У. Стерджен (1783—1850). Значно вдосконалив електромагніти американський фізик Дж. Генрі. Радянський фізик П. Л. Капіца (1894—1984) розробив метод одержання сильних магнітних полів, який широко використовують і тепер.

За порівняно короткий час електромагніти набули такого поширення, що важко назвати галузь техніки, де б вони не застосовувались у тому чи іншому вигляді. Вони є в побутових приладах (електробритви, магнітофони, телевізори), у пристроях техніки зв'язку (телефон, телеграф, радіо), в електричних машинах (електрогенератори і електродвигуни), у пристроях промислової автоматики (пускатчі, перемикачі, реле і т. ін.), у медичній апаратурі для діагностики та лікування. У різних галузях народного господарства широко використовують електромагнітні сепаратори, за допомогою яких розділяють механічні суміші (збагачують руди, очищають сипкі матеріали від магнітних предметів тощо). Надпотужні електромагніти використовують у прискорювачах елементарних частинок, в установках для термоядерного синтезу типу «Токамак», в електронних мікроскопах, у приладах ядерного магнітного резонансу (ЯМР), у наукових лабораторіях для дослідження властивостей речовини в сильних полях.

Маса електромагнітів коливається від часток грама до сотень і тисяч тонн, а електроенергія, яку вони споживають, — від міліватів до десятків тисяч кіловатів.

Особливо широко застосовуються електромагніти в електромагнітних механізмах, робочі органи в яких за допомогою електромагнітів виконують поступальні рухи, повороти на певний кут або створюють гальмуючі сили. До таких належать тягові електромагніти, електромагнітні замки, муфти зчеплення і гальмування; електромагніти, які приводять у дію контактні пристрої в реле, контакторах, пускахачах, автоматичних вимикачах; підймальні електромагніти та ін. У деяких пристроях разом з електромагнітами або замість них використовують постійні магніти (магнітні плити металорізальних верстатів, гальмові пристрої, магнітні замки тощо).

*Постійні магніти* — це тверді тіла певної форми та розмірів, виготовлені з магнітотвердих матеріалів, здатні після намагнічення практично необмежений час підтримувати магнітне поле. Сучасні нові магнітні матеріали мають високі магнітні ха-

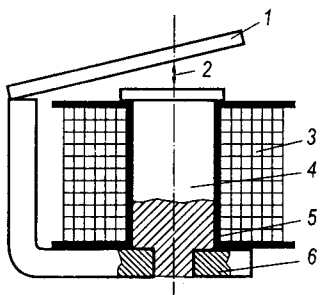


Рис. 9.22

рактики, і виготовлені на їхній основі постійні магніти можуть створювати досить сильні магнітні поля. Такі магніти використовують в електрогенераторах і електродвигунах, у вимірвальній і регульовальній апаратурі, у репродукторах і мікрофонах, у магнітних лінзах, призмах тощо.

Електромагніти надзвичайно різноманітні за розмірами, формою та за своїми характеристиками.

За способом створення магнітного потоку електромагніти поділяють на електромагніти постійного струму нейтральні, електромагніти постійного струму поляризовані і електромагніти змінного струму. Поляризовані електромагніти постійного струму мають два незалежних магнітних потоки: поляризувальний і робочий. Поляризу-

вальний магнітний потік створюють за допомогою постійних магнітів (іноді електромагнітів), а робочий — за допомогою керувальної обмотки. На дію поляризованих електромагнітів впливають значення і напрям робочого магнітного потоку, який або підсилюється, або послаблюється поляризаційним потоком залежно від напрямку струму в керувальній обмотці.

За способом увімкнення обмотки збудження магнітного поля в електричне коло розрізняють електромагніти з послідовними і паралельними обмотками. Обмотки електромагнітів можуть працювати в довгочасному, переривистому і короткочасному режимах. По швидкості дії електромагніти поділяють на швидкодіючі, нормальні і сповільненої дії.

Залежно від функцій, які виконують електромагніти, вони можуть мати різноманітні конструктивні особливості. Однак основні частини їх мають однакове призначення. Основні частини електромагнітів зображено на рис. 9.22: 1 — якір (рухома частина); 2 — робочий проміжок якоря; 3 — котушка з намагнічувальною обмоткою; 4 — нерухома частина магнітопровода з феромагнітного матеріалу; 5 — каркас котушки; 6 — паразитний проміжок. Залежно від розміщення якоря розрізняють електромагніти із зовнішнім притягувальним якорем, електромагніти із втягувальним якорем і електромагніти із зовнішнім поперечно рухомих якорем (якір набуває обертового руху). Розрахунки електромагнітів роблять на основі законів магнітних кіл, подібних до тих, які описано в попередньому параграфі.

## Розділ 10. Електромагнітна індукція

### § 10.1. Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея

У попередніх розділах вивчалися властивості статичних, незмінних у часі електричних і магнітних полів. Переходячи в область динамічних електромагнітних явищ, ми зустрічаємося з цілим рядом якісно нових властивостей полів і їхніх закономірностей. В основі електродинаміки змінних полів лежить фундаментальний закон електромагнітної індукції, відкритий дослідно у 1831 р. видатним англійським вченим М. Фарадеєм. Спрощено суть цього закону полягає у виникненні струму в довільному замкненому провідному контурі при зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур.

Відкриття зв'язку між електрикою і магнетизмом стало визначною подією в історії розвитку електромагнетизму, оскільки ці явища раніше вважались абсолютно взаємозалежними. Спочатку Х. Ерстед у 1820 р. відкрив, що навколо провідників зі струмом виникає магнітне поле, а трохи пізніше, у цьому ж році, А. Ампер встановив, що на провідники зі струмом у магнітному полі діє пондеромоторна сила. Результати цих досліджень стали основою припущення, що й електричне поле можна одержати за рахунок магнітного. Для перевірки цієї гіпотези були проведені різноманітні експерименти. Один із них полягав у спробі виявити струм у замкненому провіднику, розміщеному біля іншого провідника, по якому проходив постійний електричний струм. Ці дослідження при всій старанності їх проведення дали негативний результат. Лише М. Фарадей у 1831 р. звернув увагу на те, що електричні ефекти виникають тільки під час зміни магнітного поля. Якщо в одному провіднику змінювати електричний струм, то в сусідньому також виникає струм. Аналогічний результат одержують тоді, коли біля замкненого провідника переміщують магніт. Електричний струм в обох випадках наводиться (індукується) змінним магнітним полем. Такий струм називають *індукційним*, а явище виникнення струму в замкненому провіднику під дією змінного магнітного поля — *явищем електромагнітної індукції*.

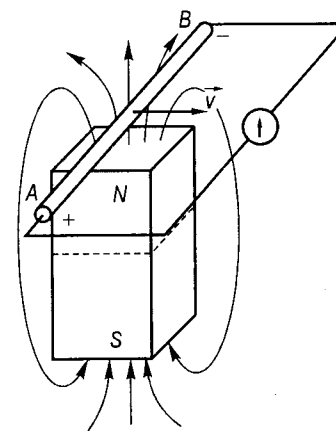


Рис. 10.1

Розглянемо кілька дослідів, які зумовили відкриття явища електромагнітної індукції і дали можливість всебічно вивчити його особливості. Розмістимо провідник  $AB$  завдовжки  $l$  у полі постійного магніту і до його кінців  $A$  і  $B$  приєднаємо чутливий гальванометр (рис. 10.1). Якщо провідник і магніт перебувають у відносному спокої, то стрілка гальванометра не відхилиться, вказуючи, що струму в замкненому провідному контурі немає. Як тільки провідник  $AB$  у полі постійного магніту починають переміщати, то в колі з'являється індукційний струм і стрілка гальванометра відхилиться. При цьому напрям відхилення стрілки гальванометра, а отже, і напрям струму залежать від напрямку переміщення провідника  $AB$  у магнітному полі. Яка причина виникнення індукційного струму? У провіднику  $AB$  є позитивні іони кристалічної ґратки і вільні електрони. Під час руху провідника в магнітному полі зі швидкістю  $v$  разом з ним переміщуються і заряди. На ці заряди вздовж провідника  $l$  діє сила

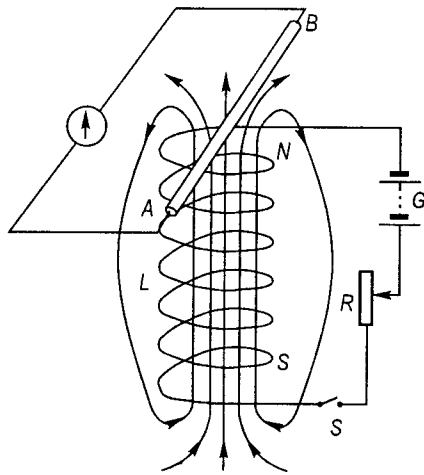


Рис. 10.2

Лоренца  $\vec{F}_M = e[\vec{v} \cdot \vec{B}]$ . Позитивні заряди зв'язані з кристалічною ґраткою і переміщатися не можуть, а вільні електрони, при вказаному на рис. 10.1 напрямі швидкості, будуть зміщатися до кінця провідника  $B$  і заряджатимуть його негативно. При цьому кінець провідника  $A$  збіднюється електронами і заряджається позитивно. Сила Лоренца  $\vec{F}_M$  в цьому досліді відіграє роль сторонньої сили. Всередині провідника  $AB$  виникає електричне поле, напруженість якого обчислюють з умови рівності сил, що діють на кожний електрон у стані динамічної рівноваги  $e\vec{E} = -\vec{F}_M$ . Звідси

$$\vec{E} = -\frac{\vec{F}_M}{e} = -[\vec{v} \cdot \vec{B}]. \quad (10.1)$$

На кінцях провідника  $AB$  створюється різниця потенціалів, яка є причиною виникнення струму в замкненому провідному контурі, що замикає кінці провідника  $AB$ . Отже, у розглянутому прикладі механізм виникнення індукційного електричного струму в замкненому провідному контурі пояснюється на основі дії сили Лоренца на рухомі в магнітному полі електричні заряди.

Припустимо, що в цьому ж досліді провідник залишають нерухомим, а переміщують у протилежному до  $\vec{v}$  напрямі постійний магніт. При цьому в системі координат, зв'язаній із провідником  $AB$ , заряди провідника не рухаються і на них у магнітному полі сила Лоренца не діє. Однак струм у замкненому провідному контурі виникає, що фіксують по відхиленню стрілки гальванометра. Отже, рух магніту під провідником спричиняє той самий ефект, що й рух провідника над магнітом, але фізична причина ефекту інша. Це і є те нове явище, яке відкрив М. Фарадей. Щоб це явище стало більш зрозумілим, розглянемо ще один дослід, в якому магнітне поле постійного магніту замінили магнітним полем котушки  $L$  зі струмом (рис. 10.2). Характер магнітного поля в обох дослідях є однаковим. Однак у цьому разі магнітне поле можна змінювати, регулюючи струм реостатом  $R$ , а також можна створювати або зводити до нуля магнітне поле за допомогою вимикача  $S$ . Рухаючи провідник  $AB$  у магнітному полі котушки або котушку зі струмом відносно провідника  $AB$ , одер-

жимо ті самі результати, що й у попередньому досліді. Розмістимо провідник  $AB$  і котушку  $L$  нерухомо і будемо вмикати або вимикати струм вимикачем. У момент вмикання або вимикання струму стрілка гальванометра відхилитиметься, вказуючи на виникнення в замкненому провідному контурі з гальванометром короткочасних імпульсів струму. Через деякий час після вмикання струму в котушці  $L$  стрілка гальванометра повертається в нульове положення, струм зникає. З цього можна зробити висновок, що індукційний струм у замкненому провідному контурі виникає лише в момент зміни магнітного поля, яке пронизує контур. У цьому можна перекопатися, якщо змінювати струм у котушці  $L$ .

Отже, відкриття М. Фарадея полягало в тому, що індукційний струм у замкненому контурі може виникнути під час руху провідного контуру в полі магніту, під час руху магніту відносно замкненого провідного контуру і під час зміни струму в котушці, яка створює магнітне поле. Все це зводиться до одного загального правила: *індукційний струм у замкненому провідному контурі виникає кожного разу при зміні магнітного потоку, який пронизує провідний контур*. Щоб електричні заряди (електрони в провіднику) прийшли в напрямлений рух, на них має діяти електрична стороння сила, спричинена  $\vec{E}_{ст}$ , яка виникає там, де змінюється магнітне поле. Експериментальні спостереження М. Фарадея сприяли відкриттю нового за ко-ну у про зв'язок електричного і магнітного полів: *у тих областях, де змінюється магнітне поле, виникає електричне поле*. Саме це електричне поле спричиняє напрямлений рух електронів у провідному контурі, тобто зумовлює виникнення електрорушійної сили при всякій зміні магнітного потоку.

## § 10.2. Електрорушійна сила індукції. Закон електромагнітної індукції Фарадея і правило Ленца

Визначимо електрорушійну силу індукції  $\mathcal{E}_i$ . За означенням електрорушійна сила дорівнює роботі сторонніх сил при переміщенні одиничного пробного електричного заряду ( $q = 1$ ) по замкненому контуру. Якщо за замкнений контур  $L$  взяти контур довільного провідника в змінному магнітному полі, то можна записати

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l}, \quad (10.2)$$

де  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля, яке виникає при всякій зміні магнітного поля, що перетинає витки замкненого провідного контуру;  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$  — циркуляція вектора  $\vec{E}$  вздовж провідного контуру,

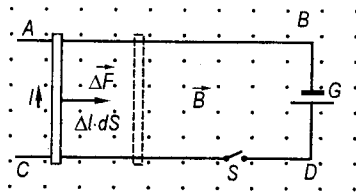


Рис. 10.3

яка дорівнює електрорушійній силі індукції. На основі (10.1) перепишемо (10.2) так:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \oint_L [\vec{v} \cdot \vec{B}] d\vec{l}. \quad (10.3)$$

У випадку, коли провідник  $l$  перемістився на малу відстань  $dx$ , у межах якої можна вважати  $\vec{B} = \text{const}$ , з врахуванням того, що  $v = \frac{dx}{dt}$  при  $\sin(\vec{v} \cdot \vec{B}) = 1$  і  $\cos([\vec{v} \cdot \vec{B}] d\vec{l}) = 1$ , одержимо

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} (Blx) = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.4)$$

де  $d(Blx)$  — зміна магнітного потоку, який пронизує замкнений провідний контур при переміщенні провідника  $l$  на відстань  $dx$ .

Вираз (10.4) називають *законом електромагнітної індукції Фарадея*. У СІ коефіцієнт при  $\frac{d\Phi}{dt}$  дорівнює одиниці, а в системі Гаусса цей коефіцієнт  $k = \frac{1}{c}$ . Знак мінус у правій частині рівності (10.4) визначає

напрямок індукційного струму відповідно до правила Ленца (с. 350).

Формулу для обчислення ЕРС індукції (10.4) можна також встановити на основі закону збереження енергії. Вперше такі розрахунки зробив Г. Гельмгольц. Припустимо, що в однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$  вміщено провідний контур  $ABDC$ , який складається з рухомої частини  $\Delta l$ , опір якої  $R$ , і нерухомих провідників  $AB$  і  $CD$ , по яких вільно може переміщатись провідник  $\Delta l$  (рис. 10.3). Якщо замкнути ключ  $S$  на джерело струму з ЕРС  $\mathcal{E}$ , то в колі проходитиме струм силою

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

На елемент струму  $I\Delta l$  діє сила Ампера  $\Delta F = I B \Delta l$ , яка за час  $dt$  при переміщенні на  $dx$  виконає роботу

$$dA = \Delta F dx = I B \Delta l dx = I d\Phi.$$

При цьому в провідному контурі за час  $dt$  виділиться кількість теплоти

$$dQ = I^2 (R + r) dt.$$

За цей же час  $dt$  джерело ЕРС  $\mathcal{E}$  витратить енергію

$$dU = I \mathcal{E} dt.$$

На основі закону збереження енергії  $dU = dA + dQ$ , або  $I \mathcal{E} dt = I d\Phi + I^2 (R + r) dt$ . Звідси

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R + r}. \quad (10.5)$$

Чисельник формули (10.5) становить повну ЕРС, яка складається з двох доданків: ЕРС джерела  $\mathcal{E}$  і  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , який також має розмірність ЕРС і дорівнює

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.6)$$

На основі означення магнітного потоку  $\Phi = \int_S B_n dS$  і формули (10.2)

вираз (10.6) можна записати в найбільш загальному вигляді, якого надав цій рівності вперше Дж. Максвелл:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS, \quad (10.7)$$

де  $L$  — довільний замкнений контур;  $S$  — довільна поверхня, яка спирається на контур  $L$ .

Закон, який описується співвідношенням (10.7), називають *основним законом електромагнітної індукції Фарадея*: при всякій зміні в часі потоку магнітного поля в точках простору, де є така зміна, збуджується вихрове електричне поле, циркуляція напруженості  $\vec{E}$  якого по довільному замкнутому контуру  $L$  дорівнює швидкості зміни потоку магнітної індукції крізь довільну поверхню  $S$ , яка спирається на контур  $L$ . Електричне поле  $\vec{E}$ , що виникає під дією змінного магнітного поля, відрізняється від електростатичного поля. Справді, з (10.7) видно, що  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$  в загальному випадку не дорівнює

нулеві. Таке електричне поле називають *вихровим*, на противагу потенціальному електростатичному полю нерухомих зарядів, для якого завжди  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ .

Узагальнення закону електромагнітної індукції Дж. Максвеллом полягало в тому, що він надав йому характеру універсального закону природи, вказавши на те, що вихрове електричне поле виникає скрізь, де є змінне в часі магнітне поле, незалежно від того, чи є в цій області провідний контур. Провідний контур у дослідах Фарадея відіграє роль індикатора для виявлення вихрового електричного поля, у той час як саме вихрове поле може існувати в діелектрику або

у вакуумі без наявності провідника і спричиняти в цих середовищах відповідні зміни: поляризацію діелектрика, прискорення або сповільнення електричних зарядів, появу електричного струму в незамкненому провіднику тощо.

Рівність (10.7) є інтегральною формою запису закону електромагнітної індукції. Запишемо цей закон у диференціальній формі. Для цього до лівої частини рівності (10.7) застосуємо теорему Стокса

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{E} dS.$$

Тоді

$$\int_S \operatorname{rot}_n \vec{E} dS = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS.$$

Оскільки контур інтегрування  $L$  і поверхня  $S$ , що на нього спирається, обираються довільно, то можна записати

$$\operatorname{rot}_n \vec{E} = -\frac{dB_n}{dt}.$$

Напрямок проектування на нормаль  $n$  також має бути довільним. Тому від рівності проєкцій перейдемо до рівності векторів

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Загалом  $\vec{B}$  є функцією координат і часу. Тому зміну за часом  $\frac{d\vec{B}}{dt}$

правильніше буде записати як частинну похідну  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (10.8)$$

Рівняння (10.8) є диференціальною формою запису закону електромагнітної індукції Фарадея. Воно описує закон виникнення вихрового електричного поля в певній точці внаслідок зміни індукції магнітного поля в тій самій точці.

Досліди Фарадея свідчили про те, що напрям індукційного струму в замкненому провідному контурі залежить від характеру зміни магнітного потоку. Найбільш загальне правило для визначення напрямку індукційного струму запропонував у 1833 р. Е. Ленц: індукційний струм у замкненому провідному контурі має такий напрям, що створюване ним власне магнітне поле протидіє зміні магнітного поля, яке збуджує індукційний струм. На рис. 10.4 показана

напрямок індукційного струму в контурі, коли магнітний потік, що його пронизує, наростає. При спаданні магнітного потоку напрям індукційного струму зміниться на протилежний.

В окремому випадку рух прямого провідника перпендикулярно до ліній індукції зовнішнього магнітного поля напрям індукційного струму зручно визначати за правилом правої руки: якщо праву руку розмістити так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а відставлений під прямим кутом великий палець збігався з напрямом переміщення провідника, то чотири випрямлені пальці вкажуть напрям індукційного струму в провіднику.

Електромагнітна індукція лежить в основі роботи генераторів, трансформаторів, коливального контуру, електромагнітів тощо.

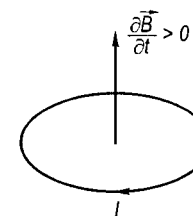


Рис. 10.4

### § 10.3. Вихрові струми. Скін-ефект

У масивних провідниках зі зміною магнітного потоку, що їх пронизує, індукуються замкнені електричні струми, які називають вихровими або струмами Фуко. Фізична природа цих струмів така сама, як і довільних індукційних струмів. Вихрові струми виникають або під час руху масивних провідників у магнітному полі, або при розміщенні

їх у змінних магнітних полях. Ці струми замикаються безпосередньо в об'ємі провідника у вигляді вихороподібних замкнених ліній. За правилом Ленца вихрові струми напрямлені так, що їхнє магнітне поле протидіє зміні потоку магнітної індукції, який спричинив виникнення вихрових струмів. Це можна спостерігати, наприклад, під час руху магніту над провідною поверхнею. При цьому вихрові струми створюють гальмівну силу, пропорційну швидкості руху, подібно до механічних в'язких сил. Наочно продемонструвати дію вихрових струмів можна за допомогою маятника (рис. 10.5) із товстого листового алюмінію. Поки обмотки електромагніту не з'єднані з джерелом струму, доти магнітного поля між його полюсами немає, і маятник може вільно коливатись досить довгий час. Якщо увімкнути струм, то між полюсами електромагніту виникає магнітне поле, яке під час руху маятника індуктує в його об'ємі вихрові струми, що спричиняє, за правилом Ленца, виникнення гальмівних сил, і коливання маятника швидко затухають. Якщо суцільний маятник замінити

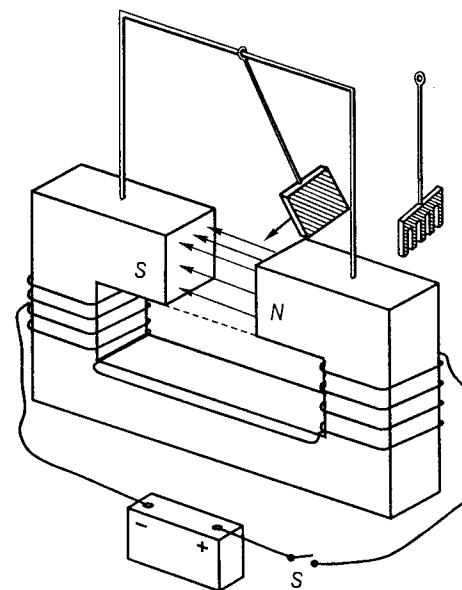


Рис. 10.5



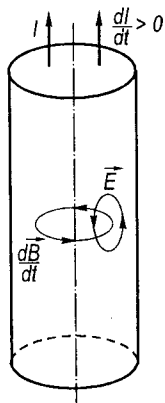


Рис. 10.6

гребінчастим, то ефект вихрових струмів зменшується і такий маятник буде коливатись значно довший час.

Струми Фуко в одних випадках відіграють корисну роль, в інших — шкідливу. Відповідно в першому випадку їх намагаються збільшити, у другому — зменшити. Корисну роль відіграють вихрові струми в роторах асинхронних електричних двигунів, оскільки в основі їхнього принципу роботи лежить явище виникнення струмів Фуко. Використовуючи змінні магнітні поля, можна зумовити появу значних вихрових струмів і за допомогою їх нагрівати або й плавити метали. В окремих випадках цей спосіб зручніший порівняно з іншими. Разом з тим в осердях електромагнітів, трансформаторів, інших електротехнічних пристроїв виникнення значних вихрових струмів є шкідливим, оскільки призводить до їхнього перегрівання, втрати електричної енергії. У цих випадках намагаються зменшити вихрові струми переважно способом набору осердь з окремих тонких пластинок магнітного матеріалу, ізолюваних одна від одної діелектриком.

Одним із проявів електромагнітної індукції є явище скін-ефекту. Постійний струм в однорідному провіднику розподіляється рівномірно по площі поперечного перерізу. Під час проходження по провіднику змінного струму в його об'ємі виникають вихрові струми,

що спричиняє підсилення струму біля поверхні провідника і послаблення вздовж центральної осі. Явище концентрації змінного струму в поверхневому шарі провідника називають *скін-ефектом* (від англ. skin — шкіра, оболонка). Розглянемо механізм виникнення скін-ефекту. Візьмемо циліндричний провідник зі струмом (рис. 10.6). Усередині провідника і навколо нього виникає магнітне поле, лінії індукції якого являють собою замкнені кола з центрами на осі провідника. Зі збільшенням струму  $\frac{dI}{dt} > 0$  наростає з часом й індукція магнітного поля  $\vec{B}$ . За законом електромагнітної індукції (10.8) зміна в часі магнітного поля зумовлює виникнення вихрового електричного поля, силові лінії напруженості якого є замкненими і лежать у площині, перпендикулярній до площини ліній магнітного поля. Біля поверхні провідника напрям напруженості вихрового електричного поля збігається з напрямом напруженості електричного поля струму, а біля осі ці вектори направлені протилежно. Внаслідок цього густина струму біля поверхні провідника збільшується, а вздовж осі — зменшується. Виникає скін-ефект.

Як показує теорія скін-ефекту, товщина шару провідника, в якому концентрується змінний струм, значною мірою залежить від частоти струму. При досить високих частотах струму (близько  $10^5$ — $10^7$  Гц) ця товщина, наприклад для мідного провідника, становить  $2 \cdot 10^{-2}$ — $2 \cdot 10^{-3}$  см. Це означає, що високочастотний струм в не дуже тонких провідниках проходить практично в невеликій частині поперечного перерізу біля поверхні провідника. Внаслідок цього збільшується ефективний опір провідника змінному струмові. Для промислових частот (50 Гц) скін-ефект не має істотного значення, але для радіочастот ( $10^8$ — $10^9$  Гц) він стає досить помітним. Тому в радіотехніці використовують спеціальні провідники (ліцендрат), які складаються з багатьох тонких провідників, ізолюваних між собою. Оскільки у внутрішніх частинах провідників в електричних колах з високочастотним струмом майже не проходить, то їх часто виготовляють у вигляді трубок з тонкими стінками або ж наносять на провідник з довільного матеріалу тонкий шар металу з високою провідністю (золото, срібло).

#### § 10.4. Явище самоіндукції. Індуктивність

За законом Фарадея (10.6) електрорушійна сила індукції виникає при будь-яких змінах у часі магнітного потоку  $\Phi$  крізь поверхню, яка охоплюється провідним контуром. Навколо провідника зі струмом

завжди виникає магнітне поле, яке створює певний потік крізь власний контур провідника. При зміні струму в провіднику змінюється потік магнітної індукції. Тому в провідному замкненому контурі, в якому змінюється струм, виникає додатковий, індукційний струм. Явище виникнення індукційного струму в провіднику внаслідок зміни магнітного потоку, зумовленої зміною струму в цьому ж провіднику, називають *самоіндукцією*. Явище самоіндукції є окремим випадком загального явища електромагнітної індукції. За правилом Ленца струм самоіндукції завжди напрямлений так, що протидіє змінам сили струму, який викликає самоіндукцію. Іншими словами, якщо струм у провіднику наростає, то струм самоіндукції напрямлений проти нього і протидіє цьому наростанню; якщо ж струм спадає, то напрям струму самоіндукції збігається з напрямом основного струму і протидіє його спаданню. Оскільки довільний провідник має самоіндукцію, то струм у кожному з них має інерцію щодо своєї зміни. Самоіндукція протидіє змінам струму в провідниках.

Індукція магнітного поля струму відповідно до закону Біо—Савара—Лапласа прямо пропорційна першому степеню сили струму. Тому й потік магнітної індукції  $\Phi$  крізь певну фіксовану поверхню буде також пропорційним силі струму, тобто

$$\Phi = LI, \quad (10.9)$$

де  $L$  — коефіцієнт пропорційності, який не залежить від сили струму й індукції магнітного поля, а є однозначною характеристикою провідного контуру, його називають *індуктивністю* контуру. Індуктивність залежить від форми і розмірів контуру, а також від магнітних властивостей навколишнього середовища.

Закон електромагнітної індукції Фарадея для явища самоіндукції з урахуванням (10.9) запишеться так:

$$\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (10.10)$$

Одиницю вимірювання  $L$  в СІ визначають із формули (10.10)

$$L = -\frac{\mathcal{E}_{ci} dt}{dI}; [L] = 1 \frac{В \cdot с}{А} = 1 \text{ Гн.}$$

Цю одиницю називають *генрі* на честь американського фізика Дж. Генрі.

Якщо у формулі (10.10) взяти  $\frac{dI}{dt} = 1 \frac{А}{с}$ , то  $L$  чисельно дорівнює

$\mathcal{E}_{ci}$ . За одиницю індуктивності 1 Гн взято індуктивність такого провідника, в якому при зміні струму силою 1 А за 1 с виникає ЕРС самоіндукції 1 В. У системі одиниць Гаусса індуктивність вимірюють у сантиметрах: 1 Гн =  $10^9$  см.

**Приклад 10.1.** Обчислити індуктивність нормального соленоїда завдовжки  $l$ , з площею перерізу  $S$  і кількістю витків  $N$ .

Розв'язання. За законом Фарадея

$$\mathcal{E}_{ci} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

де  $\Phi$  — повний потік крізь усі витки (потокочеплення).

Для нормального соленоїда потік індукції магнітного поля крізь поверхню площею  $S$ , яку охоплює один виток, у вакуумі

$$\Phi_1 = BS = \mu_0 I \frac{N}{l} S.$$

Повний потік крізь усі  $N$  витків

$$\Phi = \Phi_1 N = \mu_0 I \frac{N^2}{l} S.$$

Тоді

$$\mathcal{E}_{ci} = -\mu_0 \frac{N^2}{l} S \frac{dI}{dt}. \quad (2)$$

Порівнюючи (2) з (10.10), одержуємо

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad (3)$$

Оскільки  $Sl = V$ , то формулу (3) можна записати так:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V = \mu_0 n^2 V.$$

Якщо навколишнє середовище не є феромагнітним і контур не деформується, то  $L = \text{const}$ . Інерційність зміни струмів в електричних колах внаслідок явища самоіндукції особливо проявляється у виникненні так званих екстраструмів розмикання і замикання. Індуктивність контуру є мірою його інерції щодо зміни струму.

**Приклад 10.2.** Встановити закон зміни сили струму  $I(t)$  в електричному колі, що складається із джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E}_0$ , активного опору  $R$  і котушки з індуктивністю  $L$ , з'єднаних послідовно, при вимиканні струму (рис. 10.7).

Розв'язання. Вимкнемо джерело з ЕРС  $\mathcal{E}_0$  перемиканням ключа  $S$  із контакту  $a$  на контакт  $b$ . На основі другого правила Кірхгофа можна записати

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0,$$

або

$$\frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} dt. \quad (1)$$

Зінтегрувавши (1), одержимо

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (2)$$

де  $I_0$  — стала інтегрування, яка дорівнює початковому значенню сили струму  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ . Тоді

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3)$$

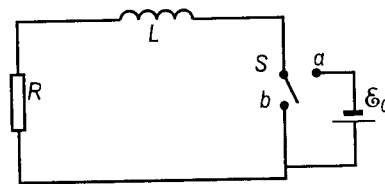


Рис. 10.7

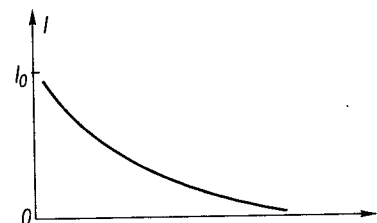


Рис. 10.8

Отже, при вимиканні джерела сила струму в електричному колі спадає за експоненціальним законом тим повільніше, чим більшою є індуктивність  $L$  і меншим активний опір  $R$ . При  $R=0$   $I = I_0 = \text{const}$ . Таке явище спостерігають у надпровідниках, коли струм не змінюється і циркулює в замкненому контурі як завгодно довго. Графічно закон зміни сили струму  $I(t)$  показано на рис. 10.8.

Певну затримку спадання струму після вимикання джерела пояснюють на основі явища самоіндукції. Справді, після вимкнення джерела з ЕРС  $\mathcal{E}_0$  у замкненому колі з послідовно з'єднаних  $R$  і  $L$  сила електричного струму починає спадати. Це спричиняє відповідне зменшення індукції магнітного поля навколо котушки з індуктивністю  $L$ . Спадає з часом і магнітний потік, що пронизує витки котушки. Внаслідок цього у витках котушки виникає струм самоіндукції, напрямлений за правилом Ленца так, щоб протидіяти змінам струму в колі. Струм самоіндукції, який виникає при розмиканні електричного кола, називають *екстраструмом розмикання*. При великих  $L$  екстраструми розмикання можуть значно перевищувати струми в колі від джерела. Часто це стає причиною яскравого спалаху лампочок і плавлення запобіжників при розмиканні електричних кіл споживачів. Великі струми самоіндукції при швидкому вимкненні спричиняють пробій повітряного проміжку між контактами вимикачів і появу дугового розряду, що призводить до плавлення контактів. Для гасіння дуги в коло вмикають конденсатори.

**Приклад 10.3.** Встановити закон зміни сили струму  $I(t)$  в електричному колі, що складається з послідовно з'єднаних активного опору  $R$  та індуктивності  $L$ , при вимиканні джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E}_0$  (див. рис. 10.7).

Розв'язання. Якщо перекинути вимикач  $S$  з контакту  $b$  на контакт  $a$ , то сила струму в електричному колі зростатиме. Диференціальне рівняння, складене на основі правила Кірхгофа, для даного випадку матиме вигляд

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0. \quad (1)$$

Рівняння (1) є неоднорідним диференціальним рівнянням, розв'язок якого складається з частинного розв'язку

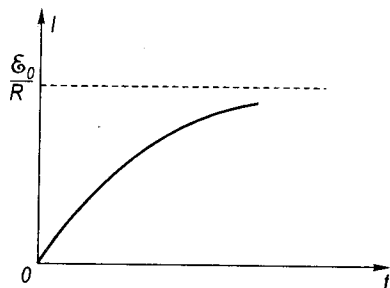


Рис. 10.9

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (3), який було знайдено у прикладі 10.2,

$$I_3 = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Розв'язок диференціального рівняння (1) матиме вигляд

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t} \quad (2)$$

Сталу інтегрування  $C$  визначимо з початкових умов. При  $t = 0$   $I(0) = 0$  і  $C = -\frac{\varepsilon_0}{R}$ .

Підставивши  $C$  у формулу (2), одержимо

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (3)$$

Отже, при вмиканні джерела з ЕРС  $\varepsilon_0$  зростання сили струму в колі відбуватиметься не миттєво, а поступово, за законом (3). Графічну залежність  $I = I(t)$  показано на рис. 10.9.

Причиною зазначеної закономірності зміни  $I(t)$  є явище самоіндукції. При вмиканні джерела струму крізь котушку індуктивності проходить наростаючий струм. Внаслідок цього збільшуються індукція магнітного поля і його потік крізь витки котушки. Тому у витках котушки виникає струм самоіндукції, направлений за правилом Ленца проти зростаючого основного струму, що й спричиняє інерційність зростання останнього. Чим більша  $L$  і менший  $R$ , тим повільніше зростатиме  $I$ , наближаючись асимптотично до значення  $\varepsilon_0/R$ . Струм самоіндукції, який виникає при вмиканні джерел струму в електричне коло з індуктивністю  $L$ , називають *екстраструмом замикання*.

Наведемо формули для розрахунків індуктивності деяких простих систем.

1. Індуктивність соленоїда, довжина якого  $l$ , площа перерізу  $S$  та кількість витків  $N$ , у середовищі з магнітною проникністю  $\mu$ :

$$L = k \mu_0 \mu N^2 \frac{S}{l},$$

де  $k \approx 1$  при  $l \geq 10d$  ( $d$  — діаметр витків соленоїда).

Якщо  $l \leq d$ , то коефіцієнт  $k < 1$  і визначається дослідно (при  $l = 0,1d$   $k = 0,2$ ; при  $l = d$   $k = 0,6$ ).

2. Індуктивність довгого коаксіального кабеля, що має довжину  $l$  та радіуси зовнішнього  $b$  і внутрішнього  $a$  циліндрів:

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} l \ln \frac{b}{a}$$

3. Індуктивність довгої двопровідної лінії, довжина якої  $l$ , відстань між осями проводів  $d$  та радіус перерізу проводів  $a$  ( $a \ll d$ ):

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} l \ln \frac{d}{a}$$

### § 10.5. Явище взаємної індукції

Якщо розмістити провідні контури чи котушки зі струмами так, що магнітні потоки кожної з них хоча б частково перетинають витки сусідніх, то між ними виникає взаємна індукція. При цьому ЕРС у кожному контурі виникає не тільки внаслідок зміни потоку індукції магнітного поля, створюваного струмом цього самого контуру (явище самоіндукції), а й завдяки зміні потоку індукції магнітного поля, створюваного струмами сусідніх контурів (явище взаємної індукції). У таких випадках кажуть, що контури мають індуктивний зв'язок. Явище взаємної індукції полягає в наведенні ЕРС індукції в провідниках, які містяться поблизу інших провідників, струми яких змінюються з часом.

Розглянемо дві індуктивно зв'язані котушки зі струмами силою  $I_1$  і  $I_2$ , які мають відповідно  $N_1$  і  $N_2$  витків і коефіцієнти індуктивності  $L_{11}$  і  $L_{22}$  (рис. 10.10). Повний потік, що охоплюється витками першої котушки,

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (10.11)$$

де  $\Phi_{11}$  — магнітний потік крізь першу котушку, створюваний струмом силою  $I_1$ ;  $\Phi_{12}$  — та частина магнітного потоку, створювана струмом силою  $I_2$ , яка охоплюється витками першої котушки.

Аналогічно повний потік, що пронизує витки другої котушки,

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (10.12)$$

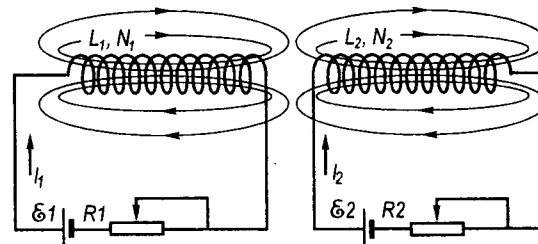


Рис. 10.10

Магнітні потоки кожної котушки пропорційні силам струмів у них

$$\Phi_{11} = L_{11}I_1; \quad \Phi_{22} = L_{22}I_2.$$

Та частина магнітного потоку  $\Phi_{12}$ , яка охоплюється витками першої котушки, створюється завдяки магнітному полю струму силою  $I_2$  у другій котушці. Тому ця частина потоку пропорційна силі струму  $I_2$ , тобто  $\Phi_{12} = L_{12}I_2$ , де  $L_{12}$  — коефіцієнт взаємної індукції першої котушки. Аналогічно для другої котушки  $\Phi_{21} = L_{21}I_1$ . Тоді рівності (10.11) і (10.12) перепишемо так:

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2; \quad \Phi_2 = L_{22}I_2 + L_{21}I_1.$$

Відповідно ЕРС індукції, що виникають у котушках, будуть

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i1} &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}\right); \\ \mathcal{E}_{i2} &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\left(L_{22}\frac{dI_2}{dt} + L_{21}\frac{dI_1}{dt}\right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

На основі теореми взаємності, яка встановлює перехресний зв'язок між двома джерелами струму і створюваними ними полями в місцях розміщення джерел для тієї самої замкнутої лінійної системи у неферомагнітних середовищах, можна стверджувати рівність коефіцієнтів взаємної індукції для довільних двох контурів

$$L_{12} = L_{21}. \quad (10.14)$$

Доведемо це для випадку двох індуктивно зв'язаних контурів, по яких проходять струми силою  $I_1$  та  $I_2$ . Припустимо, що контур, в якому протікає струм силою  $I_1$ , нерухомий, а контур, в якому протікає струм силою  $I_2$ , переміщається з нескінченності в задане положення. При цьому магнітний потік крізь другий контур, створюваний струмом у першому контурі, змінюватиметься від нуля до  $\Phi_{12}$ , а робота з його переміщення

$$A_1 = I_1\Phi_{12} = L_{12}I_1I_2.$$

Якщо другий контур буде нерухомим, а перший переміщатиметься з нескінченності в задане положення, то відповідно буде виконана робота

$$A_2 = I_2\Phi_{21} = L_{21}I_1I_2.$$

У кожному з наведених випадків робота є мірою взаємної енергії контурів зі струмами і її значення не залежить від того, який з контурів переміщався. Отже,  $A_1 = A_2$ , звідси  $L_{12} = L_{21}$ .

Коефіцієнти взаємної індукції є мірою магнітного зв'язку між контурами і залежать від геометричної форми, розмірів і взаємного розміщення контурів зі струмом, а також від магнітних властивостей середовища, де розміщені контури. В СІ коефіцієнти взаємної індукції, як і самої індукції, вимірюють у генрі. Розрахунки коефіцієнтів взаємної індукції є досить складними. Найпростіше це можна здійснити для тороїду, що має дві одношарові котушки, які щільно прилягають одна до одної. У цьому разі коефіцієнт взаємної індукції можна визначити за формулою

$$L_{12} = \mu_0\mu \frac{N_1N_2}{l} S,$$

де  $N_1$  і  $N_2$  — відповідно кількість витків першої і другої котушок.

### § 10.6. Енергія магнітного поля струму. Енергія і густина енергії магнітного поля

Електричний струм у провідниках одержують завдяки енергії сторонніх джерел ЕРС. При проходженні в замкнутому провідному контурі постійного струму його енергія витрачається на виділення джоулевого тепла і на живлення споживачів, а магнітне поле навколо провідника не змінюється. Зі зміною струму змінюються магнітне поле і його потік індукції крізь поверхню, що охоплюється провідним контуром. Внаслідок цього в провіднику виникає ЕРС індукції, напрямлена за правилом Ленца завжди так, що протидіє змінам струму і магнітного потоку. При вмиканні джерела сторонніх ЕРС сила струму зростає від нуля до  $I$ . Відповідно змінюється магнітний потік і в контурі виникає ЕРС індукції, дія якої протилежна дії ЕРС джерела.

Щоб сила струму зростала, необхідно ЕРС індукції компенсувати енергією сторонніх ЕРС. Отже, у процесі зростання сили струму джерело сторонніх ЕРС виконує роботу проти ЕРС індукції. Ця робота йде на створення магнітного поля, енергія якого дорівнює роботі сторонніх ЕРС. За час  $dt$  при силі струму  $I$  буде виконана робота

$$dA = -\mathcal{E}_{ci} Idt = \frac{d\Phi}{dt} Idt = Id\Phi.$$

Зі зміною потоку  $d\Phi$  пов'язана зміна енергії магнітного поля

$$dW_M = Id\Phi.$$

Оскільки  $d\Phi = LdI$ , то

$$dW_M = ILdI. \quad (10.15)$$

Інтегруючи (10.15) в межах від нуля до  $I$ , одержуємо

$$W_M = \frac{1}{2} LI^2. \quad (10.16)$$

Формула (10.16) визначає енергію магнітного поля замкненого провідного контуру зі струмом  $I$  та індуктивністю  $L$ .

Свідченням наявності енергії магнітного поля є виникнення екстраструмів розмикання. У цьому явищі ми маємо справу з перетворенням енергії магнітного поля провідника з індуктивністю  $L$  в енергію струму самоіндукції. Оскільки  $L$  залежить від магнітних властивостей середовища, де локалізоване магнітне поле, то й енергія магнітного поля також залежить як від сили і розподілу струмів, так і від властивостей навколишнього середовища. Енергія магнітного поля розподілена в усьому просторі, де локалізоване поле, і формула (10.16) визначає повну енергію магнітного поля струму. Однак часто важливо знати енергетичні характеристики в окремих областях чи навіть точках заданого магнітного поля. Для цього треба формулу для обчислення енергії виразити через вектори поля, які є локальними характеристиками його в кожній точці. Для спрощення розглянемо окремих випадок магнітного поля нормального соленоїда зі струмом, розміщеного у вакуумі. Індуктивність соленоїда  $L = \mu_0 n^2 V$ . Рівність (10.16) переписується так:

$$W_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 V.$$

Всередині соленоїда магнітне поле є однорідним, і його індукція  $B = \mu_0 In$ . Тоді

$$W_M = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 V. \quad (10.17)$$

Якщо врахувати, що  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , де  $\vec{H}$  — вектор напруженості магнітного поля, то формула (10.17) матиме такий вигляд:

$$W_M = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} V. \quad (10.18)$$

Енергія магнітного поля розподілена в просторі навколо провідника з об'ємною густиною

$$w = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (10.19)$$

Отже, об'ємна густина енергії магнітного поля в околі кожної точки простору визначається значеннями векторів поля в цій точці.

## Розділ 11. Квазістаціонарний струм

### § 11.1. Отримання змінної ЕРС

Однією з важливих галузей застосування явища електромагнітної індукції є робота електричних генераторів, в яких механічна енергія перетворюється в електричну. Принцип дії генератора можна пояснити на такому прикладі. Провідник у вигляді прямокутної рамки  $I$  (рис. 11.1) обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega$  в однорідному магнітному полі, створеному полюсами магніту або електромагніту 2. Нехай у початковий момент часу нормаль  $\vec{n}$  до площини рамки утворює кут  $\varphi_0$  з напрямком вектора індукції магнітного поля  $\vec{B}$ . Потік вектора  $\vec{B}$  крізь площу рамки  $S$

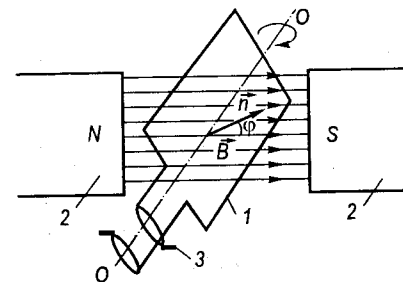


Рис. 11.1

$$\Phi = BS \cos \varphi = \Phi_0 \cos \varphi, \quad (11.1)$$

де  $\Phi_0 = BS$  — максимальний потік при  $\varphi = 0$ .

Під час рівномірного обертання рамки зі швидкістю  $\omega$  (кут  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ ) магнітний потік  $\Phi$  змінюється за гармонічним законом і у витках рамки виникає ЕРС ( $\mathcal{E}_i$ ), яка змінюється з частотою обертання рамки:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (11.2)$$

Якщо рамка складається з  $N$  витків, то амплітудне значення ЕРС буде в  $N$  разів більшим, тобто  $N\mathcal{E}_0$ .

У разі замикання провідної рамки на зовнішнє коло опором  $R$ , в якому немає індуктивності, у ньому під дією  $\mathcal{E}_i$  виникає змінний електричний струм тієї самої частоти:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t + \varphi_0) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де  $I_0$  — амплітудне значення сили змінного струму.

Змінним струмом називають такий струм, який періодично змінюється за значенням і напрямом. Зазначимо, що характер зміни сили струму з часом у загальному випадку може бути різним. Найпростішим є гармонічний, або синусоїдний, закон зміни. Будь-який

інший змінний струм на основі теореми Фур'є можна розкласти на сукупність багатьох синусоїдних струмів різної частоти.

У генераторах знімають струм з рухомих у магнітному полі провідників за допомогою колектора  $\mathcal{Z}$ . У найпростішому випадку колектором є два ізольованих одне від одного кільця, до яких притиснуті щітки з провідного матеріалу. При великій силі струму такий спосіб його зняття з рухомих провідників через іскріння і виникнення електричної дуги є складним завданням. Тому часто в потужних генераторах замість руху провідників у магнітному полі здійснюють рух джерел магнітного поля відносно нерухомих провідників. За всіх інших однакових умов в обох випадках виникають однакові ЕРС. Однак фізична суть явищ, що зумовлюють виникнення ЕРС, в обох випадках є різною. Якщо провідник рухається в магнітному полі, причиною виникнення ЕРС є дія сили Лоренца на рухомі в магнітному полі вільні електрони провідника. Внаслідок дії цієї сили електрони переміщуються до одного з кінців провідника і виникає різниця потенціалів, яка, у свою чергу, є причиною появи струму в замкненому електричному колі. У разі обертання магнітної системи одержують змінне магнітне поле. У провідниках, вміщених у це поле, на основі явища електромагнітної індукції виникає змінне електричне поле, яке й спричиняє напрямлений рух вільних зарядів у провідниках, тобто електричний струм.

Перші електричні генератори будувалися з постійними магнітами. Проте вже в 1866 р. було використано електромагніт. Сучасний генератор складається з двох котушок, одна з яких вміщена в пазах нерухомого осердя з магнітного матеріалу (статора), а друга — у пазах рухомого осердя (ротора). Одна з цих обмоток призначена для створення магнітного поля, а друга є робочою, у ній індукуються змінна ЕРС. У країнах СНД і Європи застосовують промислові струми з частотою 50 Гц, у США і Японії стандартом є 60 Гц.

### § 11.2. Квазістаціонарний струм. Діючі значення сили струму і напруги. Середнє значення сили змінного струму

Змінні електричні струми створюють у навколишньому середовищі змінні електромагнітні поля, які поширюються у просторі із скінченною швидкістю. Однак для технічних струмів, які змінюються з часом досить повільно і проходять в електричних системах порівняно невеликих розмірів, їхні електромагнітні поля проходять ці відстані практично миттєво. Отже, для таких струмів і їхніх електричних систем з достатньою точністю можна вважати, що електромагнітне поле поширюється миттєво. У провідниках також нехтують струмами зміщення (§ 13.4) і враховують лише струми провідності.

Струми, які задовольняють цим умовам, називають *квазістаціонарними*. Квазістаціонарні струми становлять окремий випадок квазістаціонарних процесів.

*Квазістаціонарні процеси* — це процеси, що відбуваються у будь-якій обмеженій системі, швидкість поширення яких у цій системі є настільки великою, що за час поширення процесу в межах системи стан її не встигає помітно змінитися. Внаслідок цього при розгляді процесу можна нехтувати часом його поширення в межах системи. Тому у випадку квазістаціонарного процесу стан у різних точках системи в будь-який момент часу описується функціями, аргументом яких є той самий момент часу. Так, якщо в якій-небудь ділянці замкнутого електричного кола діє змінна зовнішня електрорушійна сила, а час поширення електромагнітного поля до найвіддаленіших точок кола є настільки малим, що значення ЕРС не встигає скільки-небудь помітно змінитися за цей час, то зміну напруг і струмів у колі можна розглядати як квазістаціонарний процес. Для електричних кіл, які задовольняють умовам квазістаціонарності, справедливі закони Ома і правила Кірхгофа.

Умову квазістаціонарності змінного струму можна записати ще так. Якщо відстань між найвіддаленішими точками електричного кола  $l$ , а швидкість поширення електромагнітного поля вздовж кола (лінії)  $v$ , то найбільший час, потрібний для поширення поля в колі,  $\tau = l/v$ . Тоді умова квазістаціонарності має вигляд  $\tau \ll T$ , де  $T$  — період коливань, що відбуваються в колі, або  $l \ll \lambda$ , де  $\lambda = vT$  — довжина електромагнітної хвилі, що відповідає періодові  $T$ . Нерівність  $l \ll \lambda$  є критерієм нехтування скінченності швидкості поширення електромагнітних полів.

При проходженні електричного струму в колі він виявляє теплову, магнітну, механічну та інші дії. У кожному випадку ця дія залежить від сили струму. У разі проходження постійного струму кількість теплоти, що виділяється у провіднику, пропорційна квадратові сили струму. Для змінного струму, абсолютне значення якого змінюється від нуля до амплітудного значення, необхідно знайти деякий еквівалент постійного струму, який виявляв би таку саму дію, як і змінний струм. Такий еквівалент встановлюють за тепловою дією. Під час проходження постійного струму в провіднику опором  $R$  за час  $t$  виділяється кількість теплоти  $Q = I^2 R t$ . Силу змінного струму, при проходженні якого крізь резистор того самого опору протягом часу  $t$  виділяється така сама кількість теплоти  $Q$ , називають *діючою* або *ефективною*.

Знайдемо співвідношення між ефективним і амплітудним значеннями сили змінного струму. Для цього визначимо кількість теплоти, яку виділяють окремо ефективний і змінний струми за час  $t$ , що дорівнює періодові змінного струму  $T$ .

При проходженні ефективного струму, що дорівнює постійному, виділяється така кількість теплоти:

$$dQ = I_{\text{еф}}^2 R dt,$$

$$Q = \int_0^T I_{\text{еф}}^2 R dt = I_{\text{еф}}^2 RT. \quad (11.3)$$

Аналогічно для змінного струму при  $\varphi_0 = 0$

$$Q = \int_0^T I^2 R dt = \int_0^T \frac{1}{\omega} I_0^2 R \sin^2 \omega t d(\omega t) =$$

$$= \int_0^T I_0^2 R \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2} I_0^2 RT, \quad (11.4)$$

де інтеграл від другої складової суми дорівнює нулеві.

Порівнюючи рівності (11.3) з (11.4), одержуємо

$$I_{\text{еф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0. \quad (11.5)$$

Отже, діюче значення сили змінного струму є меншим від амплітудного в  $\sqrt{2}$  разів. Аналогічне співвідношення має місце для діючого й амплітудного значень напруги змінного струму

$$U_{\text{еф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (11.6)$$

Зазначимо, що амперметри і вольтметри, призначені для вимірювань у колах змінного струму, градуують на ефективні значення сили струму і напруги. Для одержання миттєвих значень цих параметрів користуються осцилографом.

Крім  $I_{\text{еф}}$  і  $U_{\text{еф}}$  змінний струм характеризують середніми значеннями цих величин за півперіод. За означенням

$$I_c = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2 I_0}{\omega T} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} I_0 = 0,637 I_0. \quad (11.7)$$

З рівностей (11.5) і (11.7) видно, що середнє значення сили струму є меншим від його діючого значення. Середнє значення визначає дію випрямленого нефільтрованого струму. Вимірювальні прилади магнітоелектричної системи разом з наявними в них напівпровідниковими випрямлячами показують середні значення сили змінного

струму. Однак їхні шкали градуують у діючих значеннях синусоїдного струму. Змінний струм характеризують його середнім значенням у випадку несинусоїдного характеру зміни.

Внаслідок скін-ефекту опір провідника змінному струмові може виявлятися більшим, ніж постійному. Тому треба розрізнати омичний опір ( $R_0 = \rho l/S$ , де  $\rho$  — питомий опір,  $l$  — довжина,  $S$  — площа поперечного перерізу провідника) і активний опір  $R_a$  ( $R_a \geq R_0$ ). Для технічних струмів з частотою 50 Гц відмінність між  $R_a$  і  $R_0$  є незначною і можна вважати  $R_a = R_0$ .

### § 11.3. Векторні діаграми

Під час дослідження коливальних процесів часто виникає необхідність визначити характер результуючого коливання при додаванні складових коливань різних амплітуд, частот, зсувів фаз між ними тощо. Розв'язання таких задач може бути здійснене за допомогою тригонометричних формул. Однак його можна значно спростити, використавши метод векторних діаграм або метод комплексних амплітуд.

Методом векторних діаграм це роблять так. На площині обирають умовний напрям або опорну лінію, наприклад вісь абсцис  $Ox$  (рис. 11.2). Амплітуду довільної періодично змінної величини умовно позначають вектором  $\vec{R}$  у відповідному масштабі одиниць і проводять його під кутом  $\varphi_0$  до осі  $Ox$ . Значення  $\varphi_0$  відповідає початковій фазі змінної величини. Періодична зміна, наприклад сили струму чи напруги з циклічною частотою  $\omega$ , може бути передана обертанням вектора  $\vec{R}$  навколо точки  $O$  проти руху стрілки годинника з кутовою швидкістю  $\omega$ . При цьому проекція точки  $M$  на опорну вісь здійснює гармонічне коливання відносно точки  $O$  в межах між точками  $A$  і  $B$ , які відповідають амплітуді відповідної величини. Проекція вектора  $\vec{R}$  на вісь абсцис  $ON = R \cos(\omega t + \varphi_0)$ , а на вісь ординат —  $NM = R \sin(\omega t + \varphi_0)$ . На одній діаграмі можуть зображатися вектори різних періодично змінних величин. Положення цих векторів відносно опорної осі змінюватиметься з часом, але кут між ними при  $\omega = \text{const}$  залишатиметься незмінним і дорівнюватиме зсувові фаз між цими величинами. Проекція величин у вигляді векторів на діаграмі відповідає миттєвому значенню цих величин і фаз у даний момент часу. Метод векторних діаграм є порівняно простим і наочно дає можливість визначити амплітуду і фази результуючих коливань.

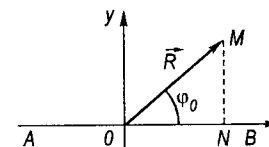


Рис. 11.2

**§ 11.4. Опір, індуктивність і ємність у колі змінного струму.  
Закон Ома для змінного струму**

Розглянемо ділянку електричного кола, в якому проходить змінний струм. У загальному випадку довільна ділянка кола має омичний опір, індуктивність і ємність. Тому таку ділянку кола зображають як сукупність послідовно з'єднаних резистора з омичним опо-

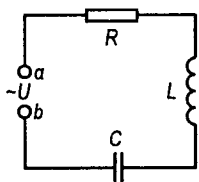


Рис. 11.3

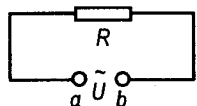


Рис. 11.4

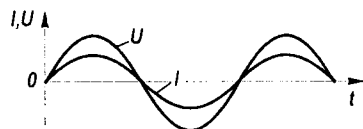


Рис. 11.5

ром  $R$ , котушки індуктивністю  $L$  і конденсатора ємністю  $C$  (рис. 11.3). Однак може бути послідовне з'єднання всіх трьох відокремлених елементів кола. Тоді вважають, що омичний опір притаманний тільки резисторові, індуктивність — котушці, ємність — конденсаторові. Встановимо залежність сили змінного струму  $I$  від параметрів ділянки кола  $R$ ,  $L$ ,  $C$  та визначимо зсув фаз між змінами сили струму в колі та напругою, прикладеною до цієї ділянки. Розглянемо спочатку окремі випадки, коли в колі змінного струму є тільки резистор, індуктивність або ємність.

Нехай коло складається тільки з резистора опором  $R$ , до кінців якого  $a$  і  $b$  (рис. 11.4) прикладено напругу

$$U = U_0 \sin \omega t. \quad (11.8)$$

За законом Ома

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t, \quad (11.9)$$

звідки

$$I_0 = \frac{U_0}{R}, \quad (11.10)$$

де  $I_0$  — амплітудне значення сили змінного струму. З формул (11.8) і (11.9) видно, що напруга і струм змінюються в однакових фазах, тобто зсув фаз між струмом і напругою дорівнює нулеві. Напруга і струм одночасно досягають максимальних і мінімальних значень (рис. 11.5). На векторній діаграмі, якщо за опорну вісь взяти вісь струмів, вектор, що зображає амплітуду коливань напруги, збігається з віссю сил струмів (рис. 11.6).

Розглянемо другий випадок, коли електричне коло має тільки котушку індуктивністю  $L$ , а омичним опором її та ємністю нехтуємо.

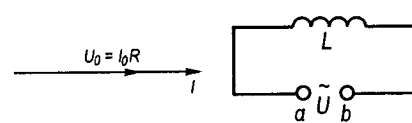


Рис. 11.6

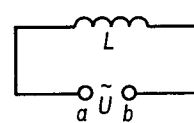


Рис. 11.7

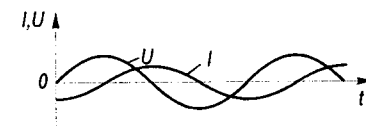


Рис. 11.8

Нехай різниця потенціалів між точками  $a$  і  $b$  (рис. 11.7) також змінюється за законом (11.8). Напруга  $U$  зумовлює виникнення змінного струму  $I$ , який, у свою чергу, спричиняє виникнення ЕРС самоіндукції. Вона визначається за формулою (10.10). Закон Ома для ділянки кола з діючою ЕРС запишеться так:

$$U = IR - \mathcal{E}_{ci}. \quad (11.11)$$

При  $R = 0$  рівняння (11.11) з урахуванням (10.10) і (11.8) набуває вигляду

$$U_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt}. \quad (11.12)$$

Звідси

$$I = \frac{U_0}{L\omega} \int \sin \omega t d(\omega t) = -\frac{U_0}{L\omega} \cos \omega t = \frac{U_0}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.13)$$

або

$$I = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.14)$$

де

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}. \quad (11.15)$$

З формул (11.8) і (11.14) випливає, що коливання струму в котушці відстають за фазою від коливань напруги на  $\pi/2$ . Якщо протягом часу від  $t = 0$  до  $t = T/4$  напруга зростає від 0 до  $U_0$ , то сила струму зазнає зміни від  $-I_0$  до нуля (рис. 11.8). Порівнявши формули (11.15) і (11.10), можна зробити висновок, що роль опором в цьому випадку відіграє величина

$$R_L = \omega L, \quad (11.16)$$

яку називають *індуктивним опором*.

Зсув фаз між струмом і напругою  $\pi/2$  фізично пояснюється тим, що, якщо омичного опором немає, то прикладена напруга дорівнює ЕРС самоіндукції з протилежним знаком. Електрорушійна сила самоіндукції пропорційна не миттєвому значенню сили струму, а швидкості її



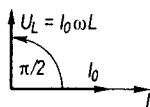


Рис. 11.9

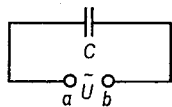


Рис. 11.10

зміни. Оскільки максимальна швидкість зміни струму відбувається не в момент максимумів сили струму, а в момент, коли сила струму проходить через нульові значення, тому максимумами напруги відповідають моментам часу, коли сила струму набуває нульових значень. На векторній діаграмі, де за опорну вісь знову беремо вісь струмів, вектор амплітуди напруги буде повернутий відносно осі струмів у додатному напрямі (проти руху стрілки годинника) на кут  $\pi/2$  (рис. 11.9).

Розглянемо електричне коло, яке має тільки конденсатор ємністю  $C$ . Омичним опором і індуктивністю кола нехтуємо. На відміну від електричного кола постійного струму коло змінного струму буде замкненим і тоді, коли в ньому ввімкнено конденсатор. При змінній різниці потенціалів конденсатор періодично перезаряджається і струм провідності у підвідних провідниках замикається струмом зміщення у конденсаторі. Нехай напруга, що прикладена до точок  $a$  і  $b$  (рис. 11.10), змінюється періодично за законом (11.8). Миттєве значення заряду на пластинах конденсатора

$$q = CU = CU_0 \sin \omega t. \quad (11.17)$$

Тоді сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} = CU_0 \omega \cos \omega t = I_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (11.18)$$

де

$$I_0 = U_0 \omega C. \quad (11.19)$$

З формул (11.8) і (11.18) випливає, що у разі чисто ємнісного електричного кола коливання напруги на конденсаторі на чверть періоду відстають від коливань струму, тобто зсув фаз між  $U$  і  $I$  становить  $\pi/2$ . На рис. 11.11 зображено графіки зміни сили струму і напруги з часом, а на рис. 11.12 — векторну діаграму для цього випадку. Відставання коливань напруги від коливань сили струму фізично пояснюється тим, що напруга на конденсаторі в будь-який момент часу визначається зарядом конденсатора. У початковий момент часу конденсатор не заряджений і  $U_C = 0$ . Незначна за значенням зовнішня напруга  $U$  зумовлює рух зарядів до пластин конденсатора, створюючи струм. Із зростанням заряду конденсатора напруга  $U_C$  на його обкладках зростає, протидіючи подальшому заряджанню конденсатора. Внаслідок цього сила струму в колі зменшується, хоч зовнішня

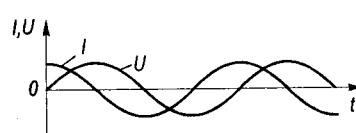


Рис. 11.11

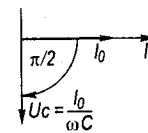


Рис. 11.12

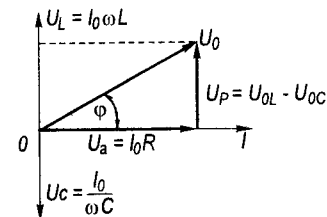


Рис. 11.13

напруга  $U$  зростає. Тому в початковий момент часу сила струму має максимальне значення. Коли  $U$  досягне максимуму, конденсатор зарядиться і сила струму стає рівною нулеві.

Порівнявши формули (11.19) і (11.10), можна записати, що

$$R_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (11.20)$$

де  $R_C$  — ємнісний опір.

Розглянемо загальний випадок, коли коло складається з резистора опором  $R$ , котушки індуктивністю  $L$  і конденсатора ємністю  $C$ , з'єднаних послідовно (див. рис. 11.3). Нехай напруга, прикладена до точок  $a$  і  $b$ , змінюється за синусоїдним законом (11.8). У колі виникає змінний струм тієї самої частоти

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (11.21)$$

Амплітудне значення сили струму  $I_0$  і зсув фаз між струмом та напругою  $\varphi$ , очевидно, визначаються параметрами кола  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Для визначення  $I_0$  і  $\varphi$  скористаємося методом векторних діаграм. За опорну вісь оберемо вісь струмів (рис. 11.13), оскільки з'єднання елементів кола є послідовним і струм в усіх ділянках кола однаковий. Змінний струм зумовлює на резисторі  $R$  спад напруги  $U_R$ , амплітуда якої дорівнює  $I_0 R$ , а значення  $U$  і  $R$  змінюються в однакових фазах. Тому на осі струмів відкладаємо вектор, що відповідає в певному масштабі значенню  $U_a = I_0 R$ . Напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на  $\pi/2$ , тому вектор  $U_L = I_0 \omega L$  буде повернутий відносно осі струму на кут  $\pi/2$  проти руху стрілки годинника. Вектор  $U_C = I_0 / (\omega C)$ , що відповідає амплітуді спаду напруги на конденсаторі, відносно осі струмів буде повернутий на кут  $\pi/2$  за рухом стрілки годинника. Результируючий спад напруги в колі  $U$  дорівнює векторній сумі спадів напруг  $U_a, U_L, U_C$ . Тому векторна сума амплітудних значень  $U_a, U_L, U_C$  має дорівнювати амплітудному значенню  $U$ , тобто значенню  $U_0$ . Цей вектор з віссю струмів утворює кут  $\varphi$ . З рис. 11.13 маємо

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}; \quad (11.22)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \quad (11.23)$$

Величину  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$ , де  $R$  — активна складова опору  $Z$ , а  $\omega L - 1/(\omega C)$  — відповідно реактивна складова опору, називають *імпедансом*. Він відіграє роль повного опору кола змінного струму. Значення  $Z$  не є сталим, воно залежить від частоти струму.

Співвідношення (11.22) називають *законом Ома для змінного струму*. Зауважимо, що ця формула є справедливою для амплітудних або ефективних значень струму і напруги, але не для їхніх миттєвих значень. Формули (11.22) і (11.23) справедливі також для повного кола, в якому діє змінна ЕРС. Тоді під  $R$ ,  $L$  і  $C$  розуміють їхні значення для всього кола і замість  $U_0$  вводять амплітудне значення ЕРС  $\mathcal{E}_0$ . Рівняння (11.22) дає можливість розв'язувати всі задачі, які стосуються змінних струмів у колах з активним опором, індуктивністю і ємністю аналогічно закону Ома для постійних струмів. Розгалужені кола змінного струму розраховують на основі правил Кірхгофа, які узагальнюються на випадок змінного струму так:

для довільного простого замкненого контуру

$$\sum_{i=1}^n (\pm) I_i Z_i = \sum_{k=1}^m (\pm) \mathcal{E}_k;$$

для кожного вузла

$$\sum_{i=1}^n (\pm) I_i = 0.$$

Проаналізуємо залежність амплітудного значення сили струму  $I_0$  та зсуву фаз  $\varphi$  від циклічної частоти  $\omega$ . З формули (11.22) випливає, що при  $\omega = 0$  значення  $1/(\omega C) = \infty$  і  $I_0 = 0$ . Зі збільшенням  $\omega$  значення  $(\omega L - 1/(\omega C))^2$  спочатку зменшується, а  $I_0$  збільшується. При певному значенні циклічної частоти  $\omega = \omega_0$  ( $\omega_0$  — резонансна частота) вираз  $(\omega L - 1/(\omega C))^2 = 0$  і

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.24)$$

У цьому разі реактивний опір дорівнює нулеві,  $Z = R$  і значення  $I_0$  досягає максимуму. При  $\omega > \omega_0$  реактивний опір  $(\omega L - 1/(\omega C))^2$  зростає, а значення  $I_0$  зменшується. На рис. 11.14 показано залежність  $I_0 = f(\omega)$  для трьох різних значень активного опору  $R$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). З формули (11.24) період змінного струму  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  (формула Томсона).

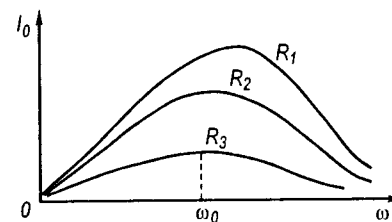


Рис. 11.14

Проаналізуємо залежність зсуву фаз між коливаннями напруги і струму. З формули (11.23) видно, що для малих частот при  $\omega L \ll 1/(\omega C)$   $\operatorname{tg} \varphi$  набуває великих, але від'ємних числових значень, тобто  $\varphi \approx -\pi/2$ . Зі збільшенням  $\omega$  зсув фаз  $\varphi$  зменшується і при  $\omega = \omega_0$  значення  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ , тобто  $\varphi = 0$ . З подальшим збільшенням  $\omega$  значення  $\omega L - 1/(\omega C)$  збільшується і відповідно зростає зсув фаз від 0 до  $\pi/2$ . Залежність зсуву фаз  $\varphi$  від частоти для трьох різних значень активного опору ( $R_1 < R_2$  і  $R = 0$ ) показано на рис. 11.15. Отже, залежно від  $R$ ,  $L$  і  $C$  зсув фаз  $\varphi$  може набувати значень від  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ .

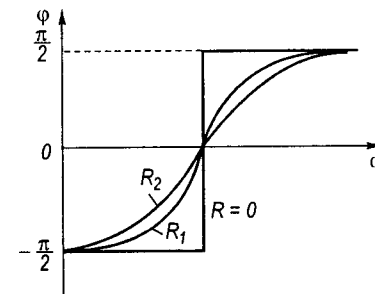


Рис. 11.15

## § 11.5. Резонанс напруг

За умови  $\omega L = 1/(\omega C)$  зсув фаз між напругою і струмом дорівнює нулеві і тоді  $U_0 = IR$ , тобто вплив індуктивності і ємності в колі взаємно компенсуються, сила струму різко зростає. Таке явище називають *резонансом напруг*. Залежно від значення активного опору електричний струм може бути досить великим. Циклічна частота, при якій настає резонанс напруг, визначається ємністю  $C$  та індуктивністю  $L$  кола (формула 11.24). Оскільки  $\omega$  є частотою коливань напруги  $U$  зовнішнього джерела струму (див. формулу 11.8), то умовою резонансу напруг є рівність  $\omega = \omega_0$ , тобто збіг частоти  $\omega_0$  власних коливань електричного кола з частотою  $\omega$  вимушених коливань зовнішнього джерела.

Характерними ознаками резонансу напруг є такі: повний опір електричного кола є мінімальним і дорівнює активному опоріві; амплітудне значення сили струму є максимальним  $I_0 = U_0/R$ ; амплітудне значення напруги на активному опорі дорівнює амплітуді прикладеної зовнішньої напруги  $U_{0R} = I_0 R = U_0$ ; напруга і струм перебувають в однакових фазах; енергія зовнішнього джерела струму передається тільки активному опоріві; корисна потужність джерела змінного струму є максимальною.

### § 11.6. Резонанс струмів

Розглянемо випадок паралельного з'єднання конденсатора ємністю  $C$  і котушки індуктивністю  $L$  у колі змінного струму (рис. 11.16). Котушка  $L$  має омичний опір, тому на рис. 11.16 зображено послідовно з'єднаний з нею резистор опором  $R$ . До точок  $a$  і  $b$  прикладено змінну напругу

$$U = U_0 \sin \omega t. \quad (11.25)$$

Встановимо закон зміни сили повного струму в зазначеному електричному колі. Сили струмів в окремих гілках

$$I_C = U_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2), \quad (11.26)$$

$$I_L = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi_L), \quad (11.27)$$

де  $\varphi_L$  визначають на основі (11.23)

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \omega L/R. \quad (11.28)$$

Фазові співвідношення струмів і напруг можна графічно подати за допомогою векторної діаграми (рис. 11.17), в якій за опорну вісь взято вісь напруги. Це зручно тим, що напруга на обох гілках є однаковою. Миттєве значення сили струму в нерозгалуженій частині кола можна записати так:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (11.29)$$

Якщо сили струмів у паралельних гілках  $I_C$  і  $I_L$ , то повна сила струму

$$I = I_L + I_C. \quad (11.30)$$

Повний опір паралельного з'єднання

$$Z = U_0/I_0. \quad (11.31)$$

Силу струму  $I_0$  можна подати сумою двох сил струмів: активного

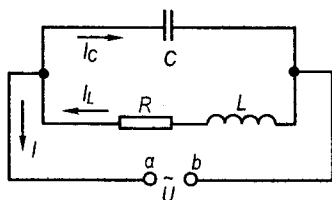


Рис. 11.16

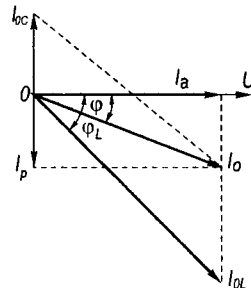


Рис. 11.17

$I_a = I_0 \cos \varphi$  і реактивного  $I_p = I_0 \sin \varphi$ . З векторної діаграми маємо

$$I_0 \cos \varphi = I_{0L} \cos \varphi_L;$$

$$I_0 \sin \varphi = I_{0L} \sin \varphi_L - I_{0C}.$$

Визначаючи  $\cos \varphi_L$  і  $\sin \varphi_L$  через  $\operatorname{tg} \varphi_L$  і враховуючи (11.28), одержуємо

$$I_0 \cos \varphi = U_0 \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}; \quad (11.32)$$

$$I_0 \sin \varphi = U_0 \left( \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right). \quad (11.33)$$

При  $R = 0$  активного струму немає, а реактивний

$$I_0 \sin \varphi = U_0 \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right). \quad (11.34)$$

Реактивний струм досягає найменшого значення, яке дорівнює нулеві, коли права частина формули (11.34) рівна нулеві, тобто за умови

$$\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0.$$

Явище встановлення мінімального значення сили змінного струму в нерозгалуженій частині кола при паралельному з'єднанні елементів кола називають *резонансом струмів*. Опір паралельної гілки кола при резонансі струмів має найбільше значення, а при  $R = 0$  стає нескінченно великим.

Якщо активний опір відмінний від нуля, то з (11.33) реактивний струм дорівнює нулеві за умови, коли

$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C = 0, \text{ або } \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}.$$

При цьому активний струм  $I_a = I_0 \cos \varphi$

$$I_a = I_0 \cos \varphi = U_0 \frac{CR}{L} = \frac{U_0}{L/(CR)}. \quad (11.35)$$

Звідси випливає, що опір паралельного з'єднання при резонансі

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{CR}. \quad (11.36)$$

При резонансі струмів у кожній гілці паралельного з'єднання  $L$  і  $C$  можуть виникати струми великої сили. Оскільки між цими стру-

мами існує різниця фаз, то векторна сума струмів у нерозгалуженій частині кола має мале значення, яке є найменшим при резонансі. Якщо  $R = 0$ , то фази коливань струмів  $I_L$  і  $I_C$  є протилежними, їхня сума дорівнює нулеві і в нерозгалуженій частині кола струму немає. Заряд всередині контуру з  $L$  і  $C$  елементами проходить від ємності до індуктивності і навпаки, тобто в цій частині контуру відбувається коливання сили струму. В резонансі знаходяться струми в ємності та індуктивності. Вони компенсують один одного. Тому сам резонанс називають резонансом струмів.

Те, що при резонансі сили струмів в обох гілках контуру можна зробити набагато більшими від сили струму в підвідних провідниках, використовують в індукційних печах для нагрівання металів вихровими струмами, а також у радіотехніці.

### § 11.7. Робота і потужність змінного струму

Постійний електричний струм силою  $I$  при напрузі  $U$  має потужність  $IU$ . Миттєве і середнє значення потужності для постійного струму є однаковими. Інша картина має місце в колах змінного струму. В загальному випадку в колі змінного струму між коливаннями сили струму і напруги існує зсув фаз, який визначається параметрами кола. Нехай напруга на кінцях ділянки кола і сила струму в ньому відповідно дорівнюють

$$U = U_0 \sin \omega t;$$

$$I = I_0 \sin (\omega t + \varphi).$$

Тоді миттєве значення потужності змінного струму

$$P(t) = IU = I_0 U_0 \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi). \quad (11.37)$$

Внаслідок зсуву фаз між струмом і напругою знаки напруги і струму в певні моменти часу можуть бути різними. Можливі й нульові значення сили струму або напруги в окремі моменти часу. Тому миттєві значення потужності можуть бути додатними, від'ємними і мати нульові значення.

Розглянемо спочатку випадок, коли в колі є лише активний опір. Зсув фаз  $\varphi = 0$  і вираз (11.37) набуває вигляду

$$P(t) = I_0 U_0 \sin^2 \omega t. \quad (11.38)$$

Зміну з часом напруги  $U$ , сили струму  $I$  та миттєвої потужності  $P$  показано на рис. 11.18. З рис. 11.18, а видно, що залежність  $P(t)$  має пульсуючий характер з частотою  $2\omega$ .

Практичний інтерес має середнє значення потужності за певний проміжок часу. Оскільки процеси зміни сили струму і напруги мають

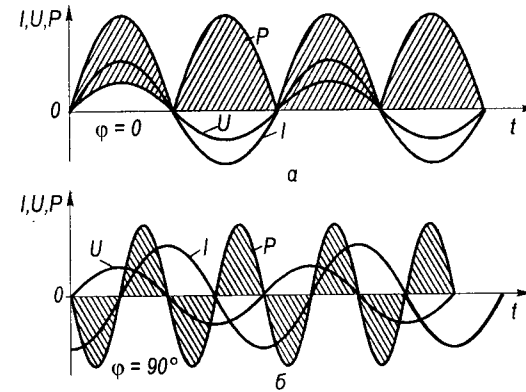


Рис. 11.18

періодичний характер, то для визначення середнього значення потужності знайдемо роботу, яка виконується струмом за час, що дорівнює одному періодові, тобто  $t = T$ :

$$A = \int_0^T I_0 U_0 \sin^2 (\omega t) dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 T. \quad (11.39)$$

Звідси середнє значення потужності за час  $T$

$$P = \frac{1}{2} I_0 U_0. \quad (11.40)$$

Через ефективні значення сили струму і напруги формула (11.40) набуває вигляду

$$P = I_{\text{ef}} U_{\text{ef}}. \quad (11.41)$$

Розглянемо загальний випадок, коли в колі змінного струму крім активного є реактивний опір, тобто між коливаннями сили струму і напруги є зсув фаз. Напругу  $U$  розкладемо на дві складові: активну  $U_a$  і реактивну  $U_p$ :

$$U_a = U_0 \cos \varphi \sin \omega t;$$

$$U_p = U_0 \sin \varphi \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Зсув фаз між коливаннями реактивної напруги і силою струму становить  $\pi/2$  (див. рис. 11.13). Середня потужність, зумовлена активною і реактивною складовими напруги, за час в один період відповідно дорівнюватиме:

$$P_a = \frac{1}{T} I_0 U_0 \cos \varphi \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi;$$

$$P_p = \frac{1}{T} I_0 U_0 \sin \varphi \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = 0.$$

Отже, середня потужність змінного струму визначається лише активною складовою напруги, тобто

$$P = P_a = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi. \quad (11.42)$$

Ця формула відрізняється від (11.41) наявністю множника  $\cos \varphi$ , який називають *коефіцієнтом потужності* змінного струму. З формули (11.42) випливає, що потужність у колі змінного струму залежить не тільки від сили струму і напруги, а й від кута зсуву фаз між струмом і напругою.

Залежність потужності від часу для  $\varphi = \pi/2$  (рис. 11.18, б) має місце за умови, що  $R = 0$ . Тоді середня потужність за період дорівнює нулеві, тобто на індуктивності  $L$  і ємності  $C$  струм ніякої роботи не виконує. За першу чверть періоду енергія передається від генератора у зовнішнє коло і накопичується в котушках індуктивності і ємностях у вигляді магнітної та електричної енергій поля. За другу чверть періоду така сама енергія передається із зовнішнього кола до генератора. У колі завжди існує деякий активний опір підвідних провідників, котушок і на їхнє нагрівання витрачається електрична енергія (частина енергії витрачається на гістерезис в осерді котушки, на струми Фуко, на нагрівання діелектриків в конденсаторах). Тому  $R$  називають активним елементом кола (активним опором), а  $C$  і  $L$  — реактивним опором.

Збільшення коефіцієнта потужності при використанні змінного струму на підприємствах є важливим засобом економії електричної енергії. Найменше допустиме значення  $\cos \varphi$  дорівнює 0,85. Якщо споживачі змінного струму мають індуктивний опір, то для зменшення реактивного опору і підвищення  $\cos \varphi$  вмикають паралельно ємнісний опір, причому підбирають його таким, щоб  $R_C \approx R_L$ . Тоді  $\varphi \rightarrow 0$  і  $\cos \varphi \rightarrow 1$ . Другий спосіб полягає в тому, що паралельно до навантаження під'єднують генератор змінного струму, так званий *синхронний компенсатор*. Він виробляє струм, зсунутий за фазою на необхідний кут відносно струму, що надходить від електростанції до споживача.

У промислових мережах не завжди вдається досягнути необхідного збільшення коефіцієнта потужності. Це особливо важко зробити в досить протяжних лініях передач, які мають значну індуктивність провідів. Ємність провідів відносно землі також може призвести до значного зсуву фаз. Особливо помітний зсув фаз дають незавантажені до розрахованої потужності трансформатори і двигуни змінного струму.

## § 11.8. Передавання електричної енергії. Трансформатори

Головною технічною перевагою змінного струму порівняно з постійним є те, що напругу і силу змінного струму можна змінювати без істотних втрат потужності. Прилади, за допомогою яких перетворюється напруга змінного струму, називають *трансформаторами*.

Сучасні генератори виробляють змінні струми при напругах 2,2; 6,6; 11; 13,2; 15 і 20 кВ та силі струму понад 10 кА.

Електрична енергія вигідно відрізняється від усіх інших видів енергії тим, що її можна порівняно легко трансформувати на великі відстані по проводах. При передаванні електричної енергії від джерела до споживача в лініях електропередач проходить струм. Відбуваються втрати електричної енергії у провідниках на виділення джоулевого тепла, яке пропорційне квадратові сили струму і опорів лінії. Ці втрати можна зробити мінімальними зменшенням опору провідів або сили струму в лінії електропередач. Зменшення опору можна досягти збільшенням поперечного перерізу провідів. Це призвело б до значних витрат металу, громіздкості ліній електропередач. Економічно вигідним є зниження сили струму за допомогою трансформаторів. З винайденням трансформатора з'явилася можливість передавати великі потужності струму на значні відстані з порівняно малими втратами енергії. Перший трансформатор сконструював російський електротехнік П. М. Яблочков (1847—1894) у 1876 р., а в 1882 р. І. П. Усагін (1855—1919) удосконалив трансформатор, замінивши розімкнутий магнітопровід замкнутим. Технічний трансформатор складається з двох (або кількох) ізольованих обмоток провідника, намотаних на спільне замкнуте феромагнітне осердя (рис. 11.19). Кінці первинної обмотки (вхід трансформатора) приєднують до джерела змінного струму, а кінці вторинної обмотки (вихід) — до споживачів електричної енергії. Дія трансформатора ґрунтується на явищі електромагнітної індукції.

Розглянемо спочатку процеси, що відбуваються в ненавантаженому трансформаторі (вторинна обмотка розімкнута). Вважатимемо, що первинна обмотка має  $n_1$  витків.

Змінна входна напруга  $U_1$  зумовлює виникнення змінного струму, який, у свою чергу, створює в осерді трансформатора періодично змінний магнітний потік  $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$ . У реальних трансформаторах магнітний потік, що створюється струмом первинної котушки, не повністю пронизує вторинну котушку. Якщо розсіюванням магнітного потоку можна знехтувати, то потік крізь обидві

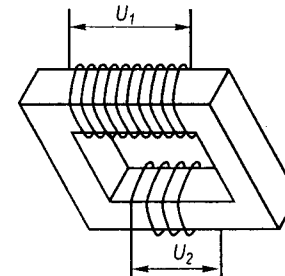


Рис. 11.19

обмотки буде однаковим. У первинній обмотці зі зміною магнітного потоку виникає ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{dt} = -n_1 \Phi_0 \omega \cos \omega t = n_1 \Phi_0 \omega \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.43)$$

У вторинній обмотці, яка має  $n_2$  витків, виникає ЕРС індукції

$$\mathcal{E}_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} = n_2 \Phi_0 \omega \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.44)$$

На основі закону Ома визначаємо напруги відповідно на вході і виході трансформатора

$$U_1 = I_1 R_1 - \mathcal{E}_1 = I_1 R_1 + n_1 \frac{d\Phi}{dt}; \quad (11.45)$$

$$U_2 = I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + n_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (11.46)$$

де  $I_1$  і  $I_2$  — сили струму в первинній і вторинній обмотках;  $R_1$  і  $R_2$  — опори цих обмоток. Якщо трансформатор ненавантажений, то  $I_2 = 0$ . Первинна обмотка має великий реактивний опір, тому в ній проходить незначний електричний струм. При цьому  $I_1 R_1 \ll \mathcal{E}_1$ . Тоді з рівностей (11.45) і (11.46) маємо

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} = k. \quad (11.47)$$

Відношення (11.47) називають *коефіцієнтом трансформації*. Якщо  $k > 1$ , то трансформатор підвищує напругу і його називають підвищувальним, а при  $k < 1$  трансформатор є знижувальним. Векторну діаграму ненавантаженого трансформатора показано на рис. 11.20.

Якщо замкнути вторинну обмотку опором  $R_2$ , то в ній виникає струм силою  $I_2$ , який створює магнітний потік  $\Phi_2$ . Оскільки коло індуктивне, то зміна сили струму  $I_2$  відстає за фазою на кут  $\varphi_2$  від зміни  $\mathcal{E}_2$  (рис. 11.21). Виникнення магнітного потоку  $\Phi_2$  спричиняє

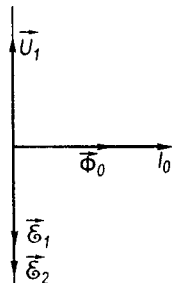


Рис. 11.20

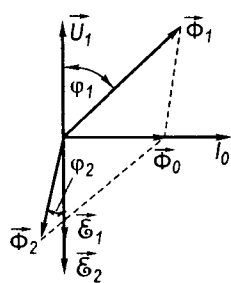


Рис. 11.21

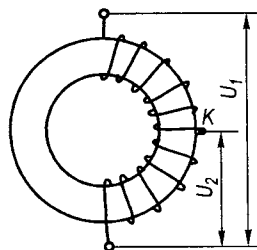


Рис. 11.22

зміну сили струму в первинній обмотці. Це зумовлює створення в ній нового магнітного потоку  $\Phi_1$ . Оскільки ЕРС самоіндукції у первинній обмотці має компенсувати зовнішню напругу  $U_1$ , тому векторна сума потоків  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  має дорівнювати потокові  $\Phi_0$ , тобто  $\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2$ . З діаграми видно, що потік  $\Phi_1$  перевищує початковий потік  $\Phi_0$ , а отже, і сила струму в первинній обмотці  $I_1$  при навантаженому трансформаторі є більшою від сили струму  $I_0$  ненавантаженого трансформатора. Якщо вважати, що потужності в первинній і вторинній обмотках є однаковими і  $\cos \varphi = 1$ , то

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (11.48)$$

Трансформатори за призначенням поділяють на кілька типів: силові, які застосовують при передаванні і розподіленні електроенергії для живлення силового та освітлювального навантаження; вимірювальні — для живлення електровимірювальних приладів; спеціальні, до яких належать зварювальні й випробувальні трансформатори, а також трансформатори для рентгенівських апаратів.

У лабораторних практикумах широкого застосування набули *автотрансформатори* (ЛАТР). Це трансформатори, в яких наявною є лише одна обмотка. Роль вторинної обмотки тут відіграє частина первинної обмотки або, навпаки, частина вторинної обмотки відіграє роль первинної. Це залежить від того, чи є такий автотрансформатор підвищувальним, чи знижувальним. Фізичний принцип роботи аналогічний наведеним вище. На рис. 11.22 зображено схему автотрансформатора. Один із контактів  $K$  автотрансформатора часто виготовляють рухомим, що дає змогу плавно змінювати вихідну напругу.

## § 11.9. Трифазний струм

Розглянутий у попередніх параграфах змінний струм називають однофазним. Багатофазним колом змінного струму називають сукупність кількох однофазних кіл, в яких діють електрорушійні сили однакової частоти, зсунуті за фазою одна відносно одної. Найширшого застосування набула система трифазного змінного струму. Основною перевагою трифазного струму порівняно з однофазним є те, що його передавання здійснюється з меншими витратами енергії і матеріалів на проводи. Крім того, трифазна система дає можливість створювати обертове магнітне поле, що використовується у двигунах трифазного струму, які мають значні технічні і техніко-економічні переваги над однофазними двигунами.

Трифазний струм добувають за допомогою генератора змінного струму, будову якого схематично показано на рис. 11.23. Статор генератора має три однакові обмотки  $A - X$ ,  $B - Y$ ,  $C - Z$ , які зміщені одна віднос-

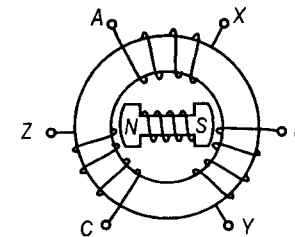


Рис. 11.23

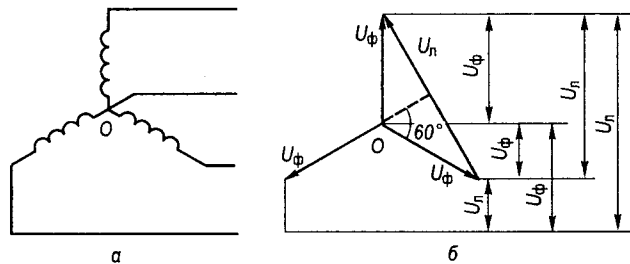


Рис. 11.24

но одної на  $120^\circ$ . Під час обертання ротора, виготовленого у вигляді електромагніту  $NS$ , в обмотках статора індуються однакові за абсолютним значенням електропршійні сили, зсув фаз між якими дорівнює  $2/3 \pi$  (або одній третій періоду). Вважаючи початкову фазу ЕРС однієї з обмоток, наприклад  $A - X$ , такою, що дорівнює нулеві, вирази для миттєвих значень напруг можна записати так:

$$\begin{aligned}
 U_{A-X} &= U_0 \sin \omega t; \\
 U_{B-Y} &= U_0 \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi \right); \\
 U_{C-Z} &= U_0 \sin \left( \omega t - \frac{4}{3} \pi \right) = U_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right).
 \end{aligned}
 \tag{11.49}$$

Якщо кожна з обмоток генератора використовуватиметься окремо, то генератор трифазного струму становитиме сукупність трьох окремих генераторів однофазного струму. При з'єднанні обмоток генератора певним чином у трифазного струму виявляються специфічні властивості, які є досить важливими для його технічного застосування. Кінці обмоток генератора трифазного струму і споживачів з'єднують *зіркою* або *трикутником*, причому спосіб з'єднання обмоток генератора не вирішує наперед спосіб з'єднання споживачів.

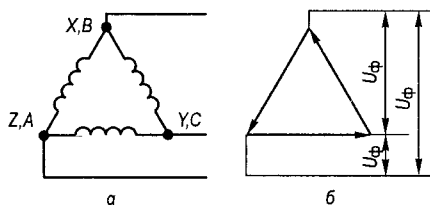


Рис. 11.25

напругою  $U_\phi$ , а між двома фазовими проводами — *лінійною*  $U_\lambda$ . З векторної діаграми (рис. 11.24, б) легко встановити зв'язок між амплітудними значеннями фазової і лінійної напруг, а саме:

$$U_{\text{лн}} = 2U_{0\phi} \sin 60^\circ = \sqrt{3}U_{0\phi}.
 \tag{11.50}$$

Якщо до кожної з обмоток приєднати однакові навантаження  $R$ , то сумарна сила струму, що проходить крізь нульовий провід, дорівнюватиме нулеві:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{R}(U_1 + U_2 + U_3) = 0.
 \tag{11.51}$$

З'єднання обмоток генератора зіркою дає можливість передавати електричну енергію, використовуючи чотири проводи замість шести.

У випадку з'єднання трикутником замикають кінці  $X$  і  $B$ ,  $Y$  і  $C$ ,  $Z$  і  $A$  між собою (рис. 11.25, а). Векторну діаграму зображено на рис. 11.25, б. При такому з'єднанні фазова і лінійна напруги однакові між собою, тобто  $U_{0\phi} = U_{0\lambda}$ . Якщо обмотки генератора з'єднані трикутником, то без навантаження струму в обмотках немає. Для потужних генераторів обмотки з'єднують зіркою, оскільки у разі порушення симетрії ЕРС в обмотках, з'єднаних трикутником, навіть без навантаження, виникають струми і це зумовлює нагрівання обмоток генератора.

## § 11.10. Метод комплексних амплітуд

У фізиці, особливо в електротехніці, крім методу векторних діаграм широкого застосування набув так званий *метод комплексних амплітуд*.

Обґрунтуванням введення комплексного представлення гармонічних коливань можуть бути такі міркування. Якщо напруга змінюється за синусоїдним законом, то струм у конденсаторі змінюється за косинусоїдним законом, тобто струм і напруга описуються різними функціями часу. Бажано задавати гармонічні коливання такими функціями часу, які б не змінювали свого вигляду при їхньому диференціюванні або інтегруванні. Функції дійсної змінної задовольнити цю вимогу не можуть. Виявляється, що поставлена умова може бути виконана, якщо гармонічні коливання подати за допомогою функцій комплексної змінної.

Перш ніж перейти до подання коливань за допомогою комплексних функцій, нагадаємо деякі властивості комплексних чисел. Комплексне число  $Z$  має дійсну  $R$  і уявну  $X$  частини:

$$\dot{Z} = R + iX,
 \tag{11.52}$$

де  $R = \text{Re } \dot{Z}$  — дійсна частина числа  $\dot{Z}$ ;  $X = \text{Im } \dot{Z}$  — уявна частина числа  $\dot{Z}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

Модулем комплексного числа  $\dot{Z}$  називають величину

$$Z = |\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}.
 \tag{11.53}$$

Фазою комплексного числа  $\dot{Z}$  називають величину  $\varphi$ , яка визначається співвідношенням

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.
 \tag{11.54}$$

Комплексне число можна подати показниковою функцією, яка за формулою Ейлера має вигляд

$$\exp(i\varphi) = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.
 \tag{11.55}$$

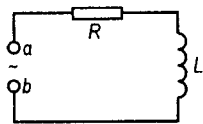


Рис. 11.26

Дійсною частиною  $\operatorname{Re} \exp(i\varphi)$  є тригонометрична функція  $\cos \varphi$ . Положення точки на площині можна однозначно задати комплексним числом  $\dot{Z} = X + iY$ . Якщо точка  $M$  рухається по колу з циклічною частотою  $\omega$ , то  $X = a \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $Y = a \sin(\omega t + \varphi_0)$ . За формулою Ейлера (11.55) величину  $\dot{Z}$  можна записати у вигляді  $\dot{Z} = a e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ . Дійсна частина цього виразу  $\operatorname{Re} \dot{Z} = a \cos(\omega t + \varphi_0) = X$  виражає гармонічне коливання величини  $X$ .

Комплексні вирази самі по собі не відповідають ніяким фізичним величинам. Фізичні величини завжди є дійсними, і тільки з міркувань зручності вони іноді подаються дійсними частинами комплексних виразів.

Проведемо аналіз одного з найпростіших електричних кіл за допомогою функції комплексної змінної. Нехай коло складається з послідовно з'єднаних резистора опором  $R$  і котушки індуктивністю  $L$  (рис. 11.26), а клеми  $a$  і  $b$  перебувають під напругою  $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$ . Треба знайти силу струму. На основі другого правила Кірхгофа

$$U_L + U_R = U. \quad (11.56)$$

Врахувавши, що  $U_L = L \frac{dI}{dt}$  і  $U_R = IR$ , вираз (11.56) можна записати так:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U_0 \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (11.57)$$

Розв'язком цього рівняння буде періодична функція  $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$ . Тоді рівняння (11.57) запишемо так:

$$X_L I_0 \sin(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}) + RI_0 \sin(\omega t + \varphi_2) = U_0 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (11.58)$$

де  $X_L = \omega L$ . Невідомими у цьому рівнянні є  $I_0$  і  $\varphi_2$ . З метою спрощення розв'язання цього рівняння заміavimo його алгебричним рівнянням для комплексних величин. Для цього в (11.58) всі синусоїдні функції виразимо через комплексні показникові функції:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}, \quad (11.59)$$

де  $\alpha$  — аргумент синусоїдної функції.

З урахуванням (11.59) рівняння (11.58) набуває вигляду

$$\begin{aligned} X_L I_0 e^{i(\varphi_2 + \frac{\pi}{2} + \omega t)} + RI_0 e^{i(\omega t + \varphi_2)} - U_0 e^{i(\omega t + \varphi_1)} &= \\ = X_L I_0 e^{-i(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2})} + RI_0 e^{-i(\omega t + \varphi_2)} - U_0 e^{-i(\omega t + \varphi_1)}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Враховуючи те, що показники степеня в лівій і правій частинах рівності (11.60) мають протилежні знаки, приходимо до висновку, що кожна з цих частин дорівнює нулеві. Тоді

$$X_L I_0 e^{i(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2})} + RI_0 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_1)}. \quad (11.61)$$

Поділимо рівняння (11.61) на  $e^{i\omega t}$  і замість  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  на основі (11.59) підставимо  $i$ . Тоді одержимо

$$iX_L I_0 e^{i\varphi_2} + RI_0 e^{i\varphi_2} = U_0 e^{i\varphi_1}. \quad (11.62)$$

Звідси

$$I_0 e^{i\varphi_2} = \frac{U_0 e^{i\varphi_1}}{R + iX_L}. \quad (11.63)$$

З рівняння (11.63) маємо

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}; \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R}. \quad (11.64)$$

Описаний метод розв'язування рівняння стану електричного кола для миттєвих значень параметрів можна застосувати до будь-якого лінійного електричного кола із синусоїдними струмами. Для спрощення аналізу стану електричного кола проміжні дії переходу від рівнянь для миттєвих значень до рівнянь у комплексній формі опускають. З цією метою вводять поняття комплексних амплітуд синусоїдних струмів і напруг, а також комплексних електричних опорів.

Комплексні функції  $I_0 e^{i\varphi_2}$  та  $U_0 e^{i\varphi_1}$ , що входять у рівняння (11.62), називають комплексними амплітудами синусоїдних струму і напруги і позначають

$$\dot{I} = I_0 e^{i\varphi_2}; \quad \dot{U} = U_0 e^{i\varphi_1}. \quad (11.65)$$

Комплексні числа, як уже зазначалося, можна подати як у показниковій, так і в алгебричній формах. Співвідношення між цими формами запису можна встановити за допомогою векторної діаграми на комплексній площині в системі координат з осями  $+1$  та  $+i$ , якими позначено додатні дійсна і уявна півосі (рис. 11.27). Так, комплексну



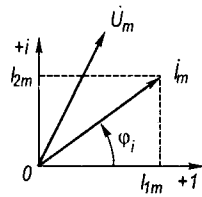


Рис. 11.27

амплітуду синусоїдного струму  $\dot{I}_m = I_m e^{i\varphi_2}$  за допомогою рис. 11.27 можна подати так:

$$\dot{I}_m = I_m e^{i\varphi_i} = I_{1m} + I_{2m}.$$

Перший і другий закони Кірхгофа в комплексній формі мають вигляд

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n I_k e^{i\varphi_k}; \quad (11.66)$$

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n U_k e^{i\varphi_k}. \quad (11.67)$$

Рівняння зв'язку між струмами і напругами у комплексній формі записують так:

для резистора

$$\dot{U}_R = R \dot{I} e^{i\varphi_i} = R \dot{I}; \quad (11.68)$$

для ємнісного елемента

$$\dot{U}_C = \frac{1}{\omega C} I e^{i(\varphi_i - \pi/2)} = -i X_C \dot{I}; \quad (11.69)$$

для індуктивного елемента

$$\dot{U}_L = \omega L I e^{i(\varphi_i + \pi/2)} = i X_L \dot{I}. \quad (11.70)$$

Рівняння (11.68) — (11.70) можна подати в узагальненому вигляді

$$|\dot{U}| = |\dot{Z}| |\dot{I}|. \quad (11.71)$$

Це рівняння за формою збігається із законом Ома і його називають *законом Ома в комплексній формі*, а коефіцієнт  $\dot{Z}$  називають *комплексним електричним опором* або *імпедансом*.

Комплексний електричний опір залежить від характеру елемента ділянки:

$$\dot{Z} = \begin{cases} R & \text{для резисторного елемента,} \\ -iR_C & \text{для ємнісного елемента,} \\ iR_L & \text{для індуктивного елемента.} \end{cases}$$

Комплексний електричний опір  $\dot{Z}$  можна подати в показниковій або алгебричній формі

$$\dot{Z} = Z e^{i\varphi} = R + iX, \quad (11.72)$$

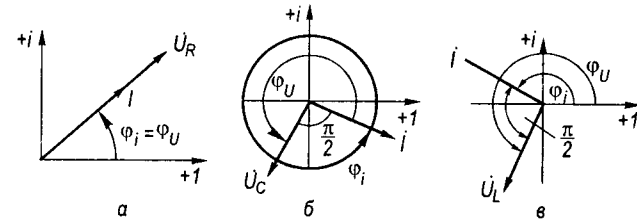


Рис. 11.28

де  $Z$  — модуль комплексного електричного опору;  $\varphi$  — його аргумент;  $R$  — дійсна частина  $\dot{Z}$ ;  $X$  — уявна частина  $\dot{Z}$ . Якщо  $\dot{Z} = Z = R$ , то  $\varphi = 0$ ; для ємнісного елемента  $Z = X_C$ ,  $\varphi = -\pi/2$ ; для індуктивного —  $Z = X_L$ ,  $\varphi = \pi/2$ .

Із закону Ома в комплексній формі випливає, що модуль комплексного електричного опору  $Z$  задає співвідношення між модулями комплексних напруги і струму, а аргумент  $\varphi$  — між аргументами  $\varphi_U$  і  $\varphi_i$ :

$$U = ZI; \quad \varphi_U = \varphi_i + \varphi. \quad (11.73)$$

Ці співвідношення ілюструються векторними діаграмами (рис. 11.28). При будь-якому заданому аргументі комплексного струму вектори комплексних струму і напруги на резисторному елементі збігаються за напрямками (рис. 11.28, а). Комплексна напруга на ємнісному елементі має аргумент  $\varphi_U = \varphi_i - \pi/2$ , тобто менша на  $\pi/2$  від аргументу струму (рис. 11.28, б). Вектор напруги на ємнісному елементі відстає від вектора струму на кут  $\pi/2$ . Аналогічно ортогональні вектори комплексних струму і напруги на індуктивному елементі і комплексна напруга мають аргумент  $\varphi_U = \varphi_i + \pi/2$ . Вектор напруги на індуктивному елементі випереджає вектор струму на кут  $\pi/2$  (рис. 11.28, в).

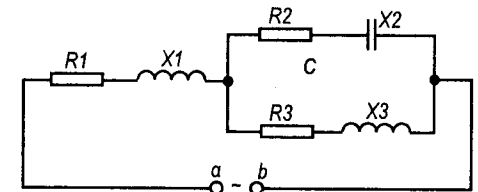


Рис. 11.29

Вектор напруги на індуктивному елементі і комплексна напруга мають аргумент  $\varphi_U = \varphi_i + \pi/2$ . Вектор напруги на індуктивному елементі випереджає вектор струму на кут  $\pi/2$  (рис. 11.28, в).

**Приклад 11.1.** Напруга на клеммах  $a$  і  $b$   $U = 220$  В. Відповідно параметри схеми  $R1 = 2$ ;  $R2 = 10$ ;  $R3 = 5$ ;  $X1 = 3$ ;  $X2 = 3$ ;  $X3 = 10$  (рис. 11.29). Визначити дійсне значення сили струму в нерозгалуженій частині кола.

Розв'язання. Комплексні опори окремих ділянок на основі виразу (11.72) запишемо так:

$$Z_1 = R_1 + iX_1 = 2 + i3;$$

$$Z_2 = R_2 + iX_2 = 10 - i3;$$

$$Z_3 = R_3 + iX_3 = 5 + i10.$$

Комплексний опір всієї ділянки кола

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 2 + 3i + \frac{(10 - 3i)(5 + 10i)}{15 + 7i} =$$

$$= 2 + 3i + \frac{(10 - 3i)(5 + 10i)(15 - 7i)}{(15 + 7i)(15 - 7i)} = 8,5 + 5,6i.$$

На основі співвідношення (11.71)

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{8,5 + 5,6i} = \frac{220(8,5 - 5,6i)}{(8,5 + 5,6i)(8,5 - 5,6i)} = 18 - 12i.$$

Дійсне значення сили струму (його модуль)

$$I = \sqrt{18^2 + 12^2} = 26,1 \text{ (А)}.$$

## Розділ 12. Електричні коливання

### § 12.1. Коливальний контур. Власні електричні коливання

Систему, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю  $C$ , котушки індуктивністю  $L$  і провідника з омичним опором  $R$ , в якій можуть збуджуватись електричні коливання, називають *коливальним контуром* (рис. 12.1). Під *електричними коливаннями контуру* розуміють періодичні або близькі до періодичних зміни заряду конденсатора і струму в котушці індуктивності. Із зарядом конденсатора і струмом котушки пов'язані відповідно електрична і магнітна енергії. Тому періодичним змінам заряду і струму відповідають аналогічні зміни енергії, тобто виникають електромагнітні коливання.

Розглянемо спочатку ідеалізований коливальний контур із зосередженими параметрами  $L$  і  $C$  при  $R = 0$ . Параметри  $L$  і  $C$  можна вважати зосередженими, якщо ємність витків котушки є значно меншою від ємності конденсатора, а індуктивність з'єднувальних провідників і конденсатора — значно меншою від індуктивності котушки. Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  від стороннього джерела на обкладках конденсатора зосереджено заряд  $q = q_0$  (рис. 12.1, а). Напряга між обкладками  $U = q_0/C$  і відповідна електрична енергія  $W_e = q_0^2/2C$ . Якщо обкладки зарядженого конденсатора з'єднати провідниками з котушкою  $L$ , то в колі виникне розрядний струм, який не відразу набуває максимального значення. Причиною цього є струм самоіндукції, що виникає в котушці  $L$ , і за правилом Ленца напрямлений проти наростаючого розрядного струму. Через час  $t = \frac{1}{4}T$

конденсатор розряджається ( $q = 0$ ), а сила струму в котушці  $L$  стає максимальною ( $I = I_0$ ). У цей момент енергія електричного поля конденсатора повністю перетворюється в енергію магнітного поля

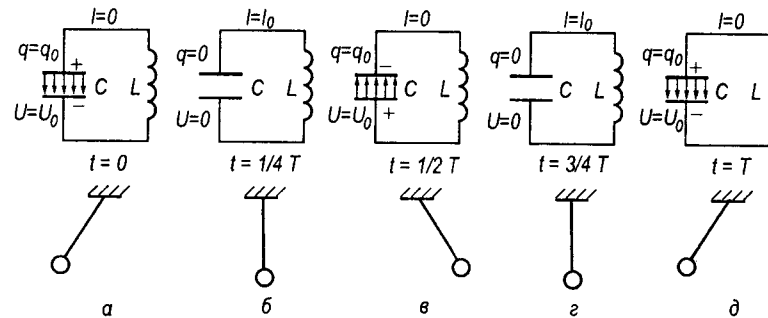


Рис. 12.1

катушки  $W_m = \frac{1}{2} LI_0^2$ , а сила струму самоіндукції дорівнює нулеві

(рис. 12.1, б). У наступний момент струм у колі контуру при тому самому напрямі починає спадати за значенням. Знову виникає струм самоіндукції, який тепер за правилом Ленца має той самий напрям, що й розрядний струм у котушці. Це спричиняє деяку затримку в часі спадання сили струму і перезарядження конденсатора. У момент  $t = \frac{1}{2}T$  сила струму в колі дорівнює нулеві, магнітне поле ко-

тушки повністю (при  $R = 0$ ) перетворюється в електричне поле конденсатора (рис. 12.1, в), напруженість якого має протилежний напрям порівняно з початковим станом при  $t = 0$ . Далі конденсатор знову розряджається. Виникає розрядний струм протилежного напрямку. Процеси в коливальному контурі повторюються (рис. 12.1, г, д) у зворотному напрямі. Через  $t = T$  коливальний контур повертається у вихідний стан при  $R = 0$  без будь-яких змін у контурі та навколишньому середовищі. Час, протягом якого в коливальному контурі відбувається один повний цикл змін і контур повертається в початковий стан, називають *періодом електричного коливання*. Процес періодичного перетворення енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки при  $R = 0$  може тривати як завгодно довго. Такі коливання, які відбуваються внаслідок процесів у самому коливальному контурі без зовнішніх впливів і втрат енергії, називають *власними електричними коливаннями*. Вони є незатухаючими.

Можна провести формальну аналогію між електричними коливаннями у коливальному контурі й механічними коливаннями маятника (див. рис. 12.1), поставивши у відповідність потенціальній енергії маятника електричну енергію конденсатора, а кінетичній — магнітну енергію котушки.

Заряд конденсатора і струм у котушці коливального контуру постійно змінюються за значенням і напрямом. Вважатимемо, що в момент

часу  $t$  заряд на обкладках конденсатора  $q$ , напруга на ньому  $U_C = q/C$ , а струм у колі змінюється зі швидкістю  $\frac{dI}{dt}$ . У котушці  $L$  виникає ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{dI}{dt}$ .

Для випадку, коли  $R = 0$ , друге правило Кірхгофа матиме вигляд

$$U_C + IR = \mathcal{E}_{ci}. \quad (12.1)$$

Оскільки  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , а  $\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{dI}{dt}$ , то рівняння (12.1) переписується у такій формі:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (12.2)$$

Якщо  $R = 0$ , то

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (12.3)$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (12.4)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  називають *циклічною частотою власних коливань системи*.

Рівняння (12.4) є диференціальним рівнянням вільних електричних коливань. Всяку систему (електричну, механічну тощо), вільні коливання якої описуються рівнянням (12.4), називають *гармонічним осцилятором*. Розв'язком цього рівняння, як відомо з вчення про механічні коливання, є функція

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (12.5)$$

де  $q_0$  — амплітуда;  $\omega_0 t + \varphi$  — фаза коливань ( $\varphi$  — початкова фаза).

Сталі інтегрування  $q_0$  і  $\varphi$  визначають з початкових умов. Так, для  $t = 0$   $q = q_0$  і  $\varphi = 0$ . Величину  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  називають *періодом власних коливань*, а кількість коливань за одиницю часу  $\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$  — *частотою*. Значення  $\omega_0$ ,  $T_0$ , і  $\nu_0$  залежать лише від властивостей коливальної системи, а  $q_0$  і  $\varphi$  визначаються початковими умовами.

Для електричних коливань  $\omega_0^2 = 1/(LC)$  і, отже,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (12.6)$$

Рівність (12.6) називають *формулою Томсона*. Для коливального контуру цю формулу можна одержати також з умови резонансу струмів у контурі, при якій

$$R_L = R_C, \text{ або } \omega_0 L = 1/(\omega_0 C).$$

Силу струму в коливальному контурі обчислюють диференціюванням рівності (12.5):

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Енергії електричного і магнітного полів коливального контуру визначаються так:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{q_0^2}{4C} + \frac{q_0^2}{4C} \cos 2(\omega_0 t + \varphi);$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{q_0^2}{4C} - \frac{q_0^2}{4C} \cos 2(\omega_0 t + \varphi).$$

Середні значення  $\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle = \frac{q_0^2}{4C}$ .

Гармонічні коливання у контурі відбуваються між  $\langle W_e \rangle$  і  $\langle W_m \rangle$  з коловою частотою  $2\omega_0$ . Електрична енергія неперервно переходить у магнітну і навпаки. Тоді, коли електрична енергія є максимальною, магнітна дорівнює нулеві і навпаки, а сумарна енергія в будь-який момент часу не змінюється (зберігається):

$$W = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle = \frac{q_0^2}{2C}.$$

## § 12.2. Затухаючі коливання

Розглянемо тепер реальний коливальний контур, омичний опір якого не дорівнює нулеві. Електричні коливання в ньому описуються рівнянням (12.2), яке переписемо в такій формі:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (12.7)$$

де  $2\beta = \frac{R}{L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Для розв'язання рівняння (12.7) введемо нову змінну  $x$ , яка зв'язана з  $q$  співвідношенням

$$q = x e^{-\beta t}. \quad (12.8)$$

Підставивши в рівняння (12.7)  $q$ ,  $\frac{dq}{dt}$  і  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , отримані з (12.8), одержимо рівняння відносно змінної  $x$  у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)x = 0. \quad (12.9)$$

Рівняння (12.9) є аналогічним рівнянню незатухаючих вільних коливань (12.4). Однак коефіцієнт  $\omega_0^2 - \beta^2$  у рівнянні (12.9), на відміну від рівняння (12.4), може набувати як додатних, так і від'ємних значень. Тому треба розрізнити три таких випадки.

Перший випадок, якщо  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ . Ввівши позначення

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \quad (12.10)$$

одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (12.11)$$

З рівняння (12.11) випливає, що параметр  $x$  здійснює незатухаючі гармонічні коливання з циклічною частотою  $\omega$ :

$$x = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (12.12)$$

Підставивши (12.12) у (12.8), матимемо

$$q = a e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (12.13)$$

де  $a e^{-\beta t} = A$  — амплітуда затухаючих коливань.

Сталі інтегрування  $a$  і  $\varphi$  визначають з початкових умов. Якщо в початковий момент ( $t = 0$ )  $q = 0$ , а  $\frac{dq}{dt} = I_0$  (відома константа), то з (12.13) одержуємо  $\cos \varphi = 0$ , тобто  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Тоді  $q = \pm a e^{-\beta t} \sin \omega t$ . Опускаючи подвійний знак, маємо  $q = a e^{-\beta t} \sin \omega t$ . Звідси

$$\frac{dq}{dt} = a e^{-\beta t} (\omega \cos \omega t - \beta \sin \omega t) \quad (12.14)$$

і для  $t = 0$  з рівності (12.14)  $a\omega = I_0$ . Тоді

$$q = \frac{I_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Якщо припустити, що в початковий момент ( $t = 0$ )  $q = q_0$ , то при  $\varphi = 0$  з рівності (12.13) одержуємо  $a = q_0$ . Тоді

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (12.15)$$

Розв'язок (12.15) являє собою *затухаюче коливання*. Величина  $q_0 e^{-\beta t}$  виражає амплітуду коливань, яка спадає з часом за експоненціальним законом. Крива  $q = q(t)$  (рис. 12.2) — неперіодична, хоча значення  $q$  періодично стає рівним нулеві й нескінченну кількість разів досягає максимуму і мінімуму. В такому розумінні процеси, що описуються рівністю (12.15), вважають *коливальними*. Час, протягом якого заряд досягає двох максимумів, називають *періодом затухаючих коливань*. З виразу (12.10)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}}. \quad (12.16)$$

Оскільки затухаючі коливання не є періодичним процесом у повному його розумінні, тому термін «період» затухаючих коливань у даному разі не зовсім вдалий.

Порівнюючи (12.6) з (12.16), приходимо до висновку, що період у власних незатухаючих коливань є меншим від періоду затухаючих коливань. Час, протягом якого амплітуда коливань  $a e^{-\beta t}$  зменшується в  $e$  разів, називають *часом затухання*:

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (12.17)$$

За час  $\tau$  відбудеться  $n$  коливань

$$n = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}. \quad (12.18)$$

Затухаючі коливання характеризують *логарифмічним декрементом затухання*, який визначається як логарифм відношення амплітудних значень змінюваної величини, розділених у часі в один період,

$$\delta = \ln \frac{a e^{-\beta t}}{a e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (12.19)$$

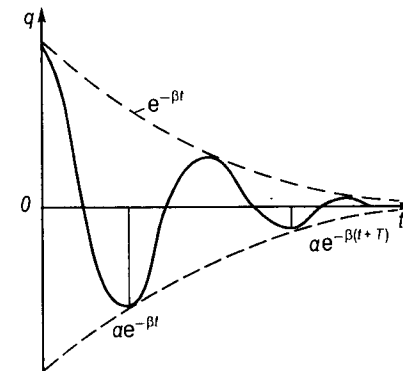


Рис. 12.2

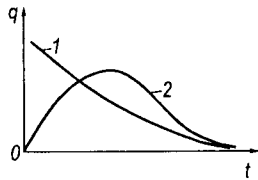


Рис. 12.3

У радіотехніці замість логарифмічного декремента затухання коливальний контур характеризують *добротністю*

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi n. \quad (12.20)$$

Другий випадок, якщо  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$ . У цьому разі період  $T$  стає нескінченним. Рівняння (12.9) переходить у рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Його інтегрування дає  $x = a + bt$ , де  $a$  і  $b$  — сталі інтегрування. Тоді

$$q = (a + bt)e^{-\beta t}. \quad (12.21)$$

Звідси видно, що для будь-яких значень сталих  $a$  і  $b$  значення  $q$  асимптотично прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Коливаний за цієї умови не відбувається і процес називають *аперіодичним*. На рис. 12.3 показано графіки залежності  $q(t)$  згідно з рівністю (12.21) для випадків 1 ( $a \neq 0, b = 0$ ) і 2 ( $a = 0, b \neq 0$ ). Сталі інтегрування  $a$  і  $b$  визначають з початкових умов.

У третьому випадку, якщо  $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ , розв'язком рівняння (12.9) є

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}.$$

Тоді на основі (12.8)

$$q = C_1 e^{-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}. \quad (12.22)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  також визначають з початкових умов. У разі зміни електричного заряду за таким самим законом змінюватиметься напруга на конденсаторі. Для спостереження затухаючих коливань найзручніше вхід осцилографа приєднати до обкладок конденсатора коливального контуру.

### § 12.3. Вимушені електричні коливання

Електричний опір реального коливального контуру не дорівнює нулеві, тому вільні електричні коливання в контурі поступово затухають. Щоб одержати незатухаючі коливання, треба ззовні підводити в коливальний контур енергію, яка компенсує втрати на виділення тепла та на випромінювання електромагнітних хвиль. При цьому виникають *вимушені електричні коливання*. Для їх реалізації потрібна

періодична дія на коливальний контур. Це можна здійснити, якщо ввімкнути послідовно з елементами контуру змінну ЕРС.

Розглянемо вимушені електричні коливання у контурі під дією ЕРС, яка змінюється за законом

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

На основі другого правила Кірхгофа можна записати

$$U_C + IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{ci}, \quad (12.23)$$

де  $U_C = \frac{q}{C}$  — напруга на обкладках конденсатора;  $IR$  — спад напруги на активному опорі;  $\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{dI}{dt}$  — ЕРС самоіндукції. Врахувавши,

що  $I = \frac{dq}{dt}$ , а  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$ , рівняння (12.23) можна переписати так:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t. \quad (12.24)$$

Рівняння (12.24) називають *диференціальним рівнянням вимушених коливань*, яке є неоднорідним рівнянням другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння складається із суми розв'язків відповідного однорідного рівняння (12.7) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (12.24). Розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння є затухаючі коливання, тому через порівняно короткий час після початку коливань впливом цього доданка на загальний розв'язок рівняння (12.24) можна нехтувати. Частинний розв'язок рівняння (12.24) шукатимемо у вигляді

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (12.25)$$

де  $q_m$  — амплітуда усталених коливань;  $\varphi$  — зсув фаз між змінами заряду і зовнішньої ЕРС.

Значення  $q_m$  і  $\varphi$  потрібно визначити. Для цього з (12.25) знайдемо

$$\frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Підставивши  $q$ ,  $\frac{dq}{dt}$  і  $\frac{d^2 q}{dt^2}$  у рівняння (12.24), одержимо:

$$\begin{aligned} & -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta q_m \omega \sin(\omega t + \varphi) + \\ & + q_m \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Розкладемо синус і косинус суми за відомими тригонометричними формулами і запишемо рівняння (12.26) так:

$$q_m [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega \sin \varphi] \cos \omega t - q_m [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta\omega \cos \varphi] \sin \omega t = \frac{\xi_0}{L} \cos \omega t. \quad (12.27)$$

Рівняння (12.27) задовольнятимуть усі значення  $t$  за умови, що коефіцієнти біля виразів  $\sin \omega t$  і  $\cos \omega t$  у лівій і правій частинах його є однаковими. Звідси маємо

$$\begin{cases} q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega q_m \sin \varphi = \frac{\xi_0}{L}, \\ q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta\omega q_m \cos \varphi = 0. \end{cases} \quad (12.28)$$

Піднесемо до квадрата рівняння (12.28) і додамо їх. Одержимо

$$q_m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = \frac{\xi_0^2}{L^2},$$

звідки

$$q_m = \frac{\xi_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (12.29)$$

З другого рівняння системи (12.28) визначимо

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12.30)$$

Підставивши у формули (12.29) і (12.30)  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , одержимо

$$q_m = \frac{\xi_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}, \quad (12.31)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L - 1/(\omega C)}. \quad (12.32)$$

Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (12.24) має вигляд

$$q = \frac{\xi_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos \left( \omega t + \arctg \left( -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right). \quad (12.33)$$

Отже, вимушене коливання є гармонічним, амплітуда і фаза якого визначаються формулами (12.29) і (12.30). Характерною особливістю розв'язку (12.33) є те, що він не залежить від початкових умов. З формул (12.29) і (12.30) видно, що амплітуда вимушених коливань, які встановилися, та зсув фаз між зміщеннями і зміною зовнішньої ЕРС

залежать від різниці квадратів частот, а також від коефіцієнта затування коливального контуру. Амплітуда зміни заряду вимушених коливань залежить також від амплітуди змінної ЕРС  $\xi_0$ . Якщо поділити заряд  $q$  на ємність конденсатора, то одержимо закон зміни (коливань) напруги на конденсаторі

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \varphi) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi),$$

де

$$U_{mC} = \frac{q_m}{C} = \frac{\xi_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \quad (12.34)$$

Диференціюючи за часом рівність (12.25), одержуємо закон зміни струму в коливальному контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cos \left( \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right).$$

Амплітуда сили струму виражається формулою

$$I_m = \omega q_m = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \quad (12.35)$$

Формула (12.35) збігається з (11.22).

Резонансна частота для заряду  $q$  і напруги на конденсаторі  $U_C$  визначається так:

$$\omega_q = \omega_U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Амплітуда сили струму матиме максимальне значення за умови  $\omega L - 1/(\omega C) = 0$ , тобто під час резонансу. Криві, які відображають залежність амплітуди вимушених коливань сили струму  $I_m$  від циклічної частоти зміни зовнішньої ЕРС (рис. 12.4), називають *резонансними*. Однією з характеристик резонансної кривої є значення амплітуди у максимумі. Другою важливою характеристикою є ширина резонансної кривої, під якою розуміють різницю циклічних частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , для яких енергія коливань у два рази менша від енергії для частоти, при якій амплітуда змінної величини досягає максимуму. Ширина резонансної кривої зв'язана з

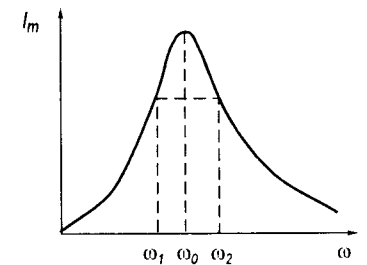


Рис. 12.4

добротністю коливального контуру  $Q$  співвідношенням (див. приклад 12.1):

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (12.36)$$

Коливання будуть найінтенсивнішими при частоті  $\omega = \omega_0$ . Явище збудження інтенсивних електричних коливань під дією зовнішньої змінної ЕРС з частотою, яка дорівнює або є близькою до власної частоти коливального контуру, називають *резонансом*. Уся техніка радіоприймання ґрунтується на явищі резонансу. Щоб радіоприймач селективно (вибірково) реагував на електромагнітні хвилі, які випромінюють радіостанції, треба досягти збігання частоти власних коливань коливального контуру радіоприймача з частотою електромагнітних хвиль, які випромінює дана радіостанція. Чутливість радіоприймача зв'язана з добротністю його коливального контуру. Чим більшою є добротність контуру, тим вищою буде чутливість приймача. Оскільки добротність коливального контуру зв'язана з шириною резонансної кривої, то на основі (12.36) можна зробити висновок, що чутливість радіоприймача і ширина резонансної кривої обернено пропорційні. Під шириною резонансної кривої  $\Delta\omega$  треба розуміти смугу частот, які здатний приймати радіоприймач. З метою уникнення частотних спотворень  $\Delta\omega$  не може бути меншою ніж 9 кГц. Це означає, що при великій чутливості радіоприймач здатний приймати тільки досить вузьку смугу частот. Чим вищою є чутливість радіоприймача, тим менше перешкоджатимуть прийманню інші радіостанції, які працюють на близьких частотах.

**Приклад 12.1.** Визначити ширину резонансної кривої, тобто різницю частот, для яких енергія коливань є у два рази меншою від енергії для частоти, при якій амплітуда змінної величини досягає максимуму.

Розв'язання. Оскільки енергія коливань пропорційна квадратові сили струму, то за ширину резонансної кривої можна взяти різницю частот  $\Delta\omega$ , для яких  $I_m^2$  становить 0,5 від резонансного значення  $I_{m\text{рез}}^2$ , тобто  $I_m \approx 0,7I_{m\text{рез}}$  (див. рис. 12.4).

З формули (12.35) квадрат амплітуди сили струму

$$I_m^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}. \quad (1)$$

При резонансі

$$I_{m\text{рез}}^2 = \mathcal{E}_0^2/R^2. \quad (2)$$

З формул (1) і (2) випливає, що  $I_m^2 = 0,5I_{m\text{рез}}^2$  тоді, коли

$$R^2 = (\omega L - 1/(\omega C))^2. \quad (3)$$

Рівність (3) перепишемо у вигляді

$$\frac{\omega^4}{(1/(LC))^2} - 2\frac{\omega^2}{1/(LC)} - R^2\frac{C}{L}\frac{\omega^2}{1/(LC)} + 1 = 0. \quad (4)$$

Оскільки  $R^2\frac{C}{L} = \frac{1}{Q^2}$ , а  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , то рівняння (4) запишемо так:

$$\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - \left(2 + \frac{1}{Q^2}\right)\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 = 0. \quad (5)$$

Розв'язавши рівняння (5) відносно  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ , одержимо

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q}\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}. \quad (6)$$

Для коливальних контурів, добротність в яких є великою, значеннями  $1/Q^2$  можна нехтувати порівняно з 1. Тоді

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \pm \frac{1}{Q} \approx \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)^2.$$

Звідси маємо

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}.$$

Значення частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідно дорівнюють

$$\omega_1 = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right), \quad \omega_2 = \omega_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right). \quad (7)$$

З формул (7) визначаємо ширину резонансної кривої

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (8)$$

Зауважимо, що формула (8) добре виконується для великих  $Q$ , тобто чим більшою є добротність контуру, тим вузькою буде ширина резонансної кривої.

## § 12.4. Автоколивальні системи. Тріод і транзистор у колах генераторів незатухаючих коливань

Як уже зазначалося, створені в реальному коливальному контурі електричні коливання є затухаючими і через деякий проміжок часу зовсім припиняються. Для отримання незатухаючих коливань користуються *автоколивальними системами*, в яких незатухаючі коливання виникають під впливом процесів, що відбуваються всередині цієї системи. Для їхнього підтримання немає необхідності зовнішніх впливів на коливальний контур. У цьому відношенні автоколивання істотно відрізняються від вимушених коливань під дією змінної ЕРС, які розглянуто у попередньому параграфі. Там було показано, що

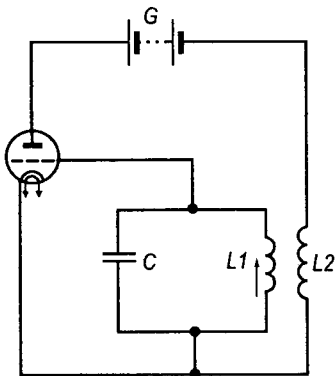


Рис. 12.5

частота, амплітуда і початкова фаза коливань залежать від частоти, амплітуди і початкової фази зовнішньої ЕРС. Особливістю автоколювань є те, що їхня амплітуда і частота повністю визначаються властивостями коливальної системи. До складу автоколивальних систем входить джерело струму, завдяки енергії якого підтримуються незатухаючі коливання. Це джерело струму періодично вмикається самою системою і вводить у неї певну енергію, яка компенсує втрати на виділення тепла та електромагнітне випромінювання. Однією з найпростіших електричних автоколивальних систем є лампові генератори із зворотним зв'язком. Схему такого генератора зображено на рис. 12.5. У коло сітки ввімкнено коливальний контур, в якому збуджуються автоколювання. У коло анода ввімкнено котушку  $L_2$ , індуктивно зв'язану з котушкою коливального контуру  $L_1$  (її називають котушкою зворотного зв'язку). За наявності такої котушки струм у коливальному контурі може індукційно впливати на струм в анодному колі і навпаки. При вмиканні батареї або під впливом яких-небудь випадкових причин у коливальному контурі виникають коливання і між обкладками конденсатора виникає змінна напруга. Така сама напруга виникає між сіткою і катодом лампи, оскільки вони приєднані до обкладок конденсатора. Внаслідок цього у колі анода виникає змінний струм. Силу анодного струму  $I_a$  можна подати у вигляді функціональної залежності від сіткової  $U_c$  і анодної  $U_a$  напруг. Оскільки сітка розміщена ближче до катода, то зміна потенціалу сітки значно сильніше впливає на зміну анодного струму, ніж така сама зміна потенціалу анода. Нехтуючи впливом анодної напруги на анодний струм, можна записати

$$\frac{dI_a}{dt} = \left( \frac{dI_a}{dU_c} \right)_{U_a} \frac{dU_c}{dt} = S \frac{dU_c}{dt}, \quad (12.37)$$

де  $S$  — крутизна сіткової характеристики. Зі зміною анодного струму в котушці  $L_1$  внаслідок взаємоіндукції у котушці  $L_2$  виникає ЕРС індукції

$$\mathcal{E} = -L_{12} \frac{dI_a}{dt} = -L_{12} S \frac{dU_c}{dt}, \quad (12.38)$$

де  $L_{12}$  — коефіцієнт взаємної індукції між котушками  $L_1$  і  $L_2$ .

Сутність процесів, що відбуваються в генераторі, полягає в тому, що коливальний контур впливає на анодне коло лампи, яке, в свою чергу, діє на контур. Такий спосіб одержання коливань називають *зворотним зв'язком*.

Як зазначалося, напруга на сітці дорівнює напрузі на конденсаторі, тобто  $U_c = q/C$  ( $q$  — заряд пластин конденсатора). Тоді

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C}, \quad (12.39)$$

де  $I$  — сила струму в коливальному контурі. Враховуючи (12.39), співвідношення (12.38) переписуємо так:

$$\mathcal{E} = -\frac{L_{12} S}{C} I. \quad (12.40)$$

Звідси видно, що коли  $L_{12} < 0$ , то  $\mathcal{E}$  і  $I$  мають однакові знаки, тобто коливання в контурі наростають, відбувається самозбудження коливань. Якщо ж  $L_{12} > 0$ , то під дією електрорушійної сили індукції  $\mathcal{E}$  коливання в контурі припиняються. Знак  $L_{12}$  можна змінити зміною кінців котушки  $L_2$ , якими вона вмикається в анодне коло, або поворотом її відносно котушки  $L_1$  на  $180^\circ$ . За наявності електрорушійної сили взаємоіндукції  $\mathcal{E}$  диференціальне рівняння коливань у коливальному контурі матиме вигляд

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = -\frac{L_{12} S}{C} \frac{dq}{dt}, \quad (12.41)$$

де  $L$  — індуктивність котушки  $L_1$ . З введенням позначень

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\beta = \frac{R}{L} + \frac{L_{12} S}{LC} \quad (12.42)$$

рівняння (12.41) набуває вигляду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (12.43)$$

Якщо триелектродна лампа працює на прямолінійній ділянці сіткової характеристики, то можна вважати, що значення  $S$  і  $\beta$  будуть сталими. За такої умови рівняння (12.43) формально описує вільні коливання в контурі:

$$q = q_0 e^{-\beta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (12.44)$$

де  $A$  і  $B$  — сталі, а  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ . Коливання (12.44) будуть затухаючими, коли  $\beta > 0$ , а якщо  $\beta < 0$ , то коливання наростатимуть, тобто відбуватиметься самозбудження коливань. Умову самозбудження (генерування) коливань на основі (12.42) з урахуванням критичного випадку ( $\beta = 0$ ) можна записати так:

$$\frac{L_{12}}{L} \geq \frac{RC}{LS}, \quad (12.45)$$

де  $\frac{RC}{L} = \frac{1}{R_C}$  ( $R_C$  — еквівалентний опір контуру);  $\frac{L_{12}}{L} = k$  — коефіцієнт зворотного зв'язку. Зауважимо, що повна теорія автоко-



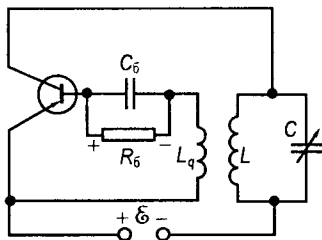


Рис. 12.6

ливань є значно складнішою, вона ґрунтується на нелінійних диференціальних рівняннях. Саме тому, припустивши, що рівняння (12.43) є лінійним, з розв'язку (12.44) випливає можливість наростання амплітуди коливань до нескінченності при  $\beta < 0$ , що нереально.

Крім генераторів, на електронних лампах широко використовують напівпровідникові генератори електричних коливань на транзисторах, наприклад генератори з індуктивним зворотним зв'язком, в яких запірне зміщення на базі створюється завдяки падінню напруги на опорі  $R_6$  від постійної складової струму бази. Схема такого генератора зображена на рис. 12.6. Напруга збудження передається на базу через конденсатор  $C_6$ , який виконує також функції згладжування пульсацій напруги зміщення. Напівпровідникові генератори електричних коливань через відсутність катодів розжарення споживають меншу потужність. Вони є більш довговічними та надійнішими в роботі. Однак напівпровідникові прилади мають і ряд недоліків (зміна їхніх властивостей при зміні температури та ряд інших). Тому, якщо розміри і маса приладів не є визначальними, в техніці часто віддають перевагу схемам на вакуумних електронних приладах.

Якщо добротність коливальної системи є великою, тобто втрати енергії в ній порівняно малі, то для підтримання автоколивання у коливальну систему за період подається енергія, значення якої є значно меншим від повної енергії коливальної системи. Надходження енергії в систему за таких умов майже не змінює характеру процесів порівняно з тими, які відбуваються в коливальній системі без надання енергії. При цьому період і форма автоколивань будуть досить близькими до періоду і форми власних коливань коливальної системи. Якщо коливальна система має малу добротність, то для підтримання автоколивань у систему за період подається більш значна енергія порівняно з енергією системи. Це може істотно змінити характер коливальних процесів і форма автоколивань може відрізнитися від гармонічних.

### § 12.5. Релаксаційні коливання

Якщо за період автоколивань розсіюється вся нагромаджена в системі енергія, то автоколивання дуже відрізняються від гармонічних. Такі автоколивання називають *релаксаційними*, а системи, що їх утворюють, — *релаксаційними генераторами*.

На рис. 12.7 зображено схему релаксаційного генератора, в якому паралельно конденсаторові ввімкнено неонову лампу. Конденсатор  $C$  заряджається від джерела струму  $G$  з ЕРС  $\mathcal{E}$  через досить великий опір. Якби неонові лампи не було, то напруга на обкладках конденсатора  $U_C$  зростала б з часом і асимптотично прямувала б до ЕРС

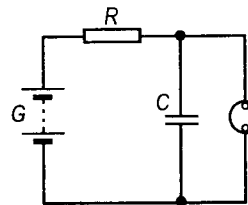


Рис. 12.7

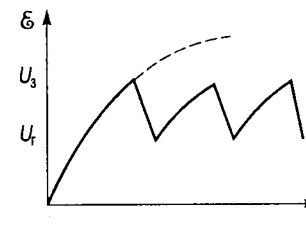


Рис. 12.8

джерела  $\mathcal{E}$ . За наявності неонові лампи, коли напруга  $U_C$  досягає напруги запалювання газового розряду  $U_3$ , в лампі виникає газовий розряд. Опір неонові лампи при цьому практично зменшується до нуля, і конденсатор досить швидко розряджається через лампу. Якщо напруга  $U_C$  зменшується до значення напруги гасіння розряду  $U_1$ , то розряд у лампі припиняється. З цього моменту конденсатор знову заряджається, поки його напруга не досягне напруги запалювання газового розряду. Знову відбувається розрядження конденсатора. Зазначені процеси періодично повторюються. Період зміни напруги конденсатора визначається рівністю

$$T = \tau \ln \frac{E - U_3}{E - U_1},$$

де  $\tau = RC$  — час заспокоювання контуру, або *час релаксації*. З цієї причини розглянуті коливання називають релаксаційними. Зміну напруги з часом на обкладках конденсатора релаксаційного генератора показано на рис. 12.8. Коливання напруги зображаються пилкоподібною кривою, вони дуже відрізняються від синусоїдних, тобто від гармонічних коливань. Виявляється, що відповідним вибором конденсаторів і опорів разом з електронними лампами можна отримати практично гармонічні та інші релаксаційні коливання. Такі релаксаційні генератори називають *RC-генераторами*. За їхньою допомогою отримують релаксаційні коливання напруги або струму будь-якої форми імпульсів, які застосовують у вимірвальній техніці, телемеханіці, автоматичній та в інших галузях електроніки.

## Розділ 13. Електромагнітне поле

### § 13.1. Вихрове електричне поле

Джерелами електричного поля можуть бути або електричні заряди, або змінні в часі магнітні поля. У першому випадку поле електричних зарядів описується узагальненим законом Кулона  $\text{div } \vec{E} = \rho / (\epsilon_0 \epsilon)$ . Це поле є потенціальним, й інтеграл по довільному замкненому контуру  $L$  дорівнює нулеві  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ . Силкові лінії елек-

тричних полів є незамкненими: вони виходять з позитивних зарядів і входять у негативні або простягаються в нескінченність. З цієї причини електростатичне поле не може забезпечити неперервний рух електричних зарядів уздовж замкнених провідників, тобто створити

електричний струм. Щоб виник й існував тривалий час електричний струм у замкненому електричному колі, потрібна наявність сторонніх сил. Тоді  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mathcal{E}$ . Електричне поле напруженістю  $\vec{E}$ , яке при цьому виникає в провіднику і зумовлює постійне напрямлене переміщення електричних зарядів уздовж замкненого електричного кола, докорінно відрізняється від електростатичного поля. Лінії напруженості  $\vec{E}$  цього поля є замкненими вздовж провідного контуру, тому циркуляція вектора  $\vec{E}$  не дорівнює нулеві  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ . Такі поля називають *вихровими*.

Електричні поля, які збуджуються змінними в часі магнітними полями, також є вихровими і для них циркуляція вектора напруженості  $\vec{E}$  по довільному замкненому контуру  $L$  не дорівнює нулеві, як в електростатичних полях, а дорівнює швидкості зміни магнітного потоку, який пронизує довільну поверхню, що спирається на контур інтегрування,

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS.$$

Такі *вихрові електричні поля* зумовлюють неперервний рух електричних зарядів уздовж замкнених провідників, вміщених у це поле, тобто можуть спричинювати виникнення індукційних струмів, що вперше і спостерігалось в дослідах Фарадея.

За уявленнями Дж. Максвелла, всяке змінне в часі магнітне поле збуджує в оточуючому просторі вихрове електричне поле. Існує істотна відмінність тлумачення електромагнітної індукції М. Фарадеєм і Дж. Максвеллом. Якщо М. Фарадей уявляв електромагнітну індукцію як збудження електричного струму в замкненому провіднику під дією змінного магнітного поля, то, на думку Дж. Максвелла, суть явища електромагнітної індукції зводиться до виникнення вихрового електричного поля скрізь, де є змінне магнітне поле, і, отже, для прояву явища електромагнітної індукції наявність провідників є не обов'язковою. Виникнення індукційного струму в замкненому провідному контурі — це лише один із проявів виникнення вихрового електричного поля під дією змінного в часі магнітного поля. Вихрове поле напруженістю  $\vec{E}$  може спричинювати й інші дії, наприклад, поляризувати діелектрик, викликати пробій діелектрика між обкладками конденсатора, прискорювати або гальмувати заряджені частинки тощо. Вихрове електричне поле, що виникає при зміні магнітного поля, може збуджувати електричний струм у незамкненому електричному колі, наприклад у колі з повітряним плоским конденсатором.

Отже, вихрове електричне поле виникає скрізь, де є змінне магнітне поле, силові лінії його є замкненими і воно здатне індукувати електричні струми. Закон електромагнітної індукції в узагальненому Дж. Максвеллом вигляді записується так:  $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ . Такий запис закону свідчить про те, що скрізь, де є змінне магнітне поле  $\partial \vec{B} / \partial t$ , виникає вихрове електричне поле.

### § 13.2. Досліди Роуланда та Ейхенвальда

Електричні струми провідності створюють магнітні поля. Про це було відомо ще з дослідів Х. Ерстеда. Однак узагальнений висновок Дж. Максвелла, що магнітне поле створює всякий рухомий заряд, у тому числі й рухомі макроскопічні заряджені електрикою тіла, не був очевидним. Електричні струми, які створюються рухомими макроскопічними зарядженими тілами (наелектризованими провідниками або діелектриками), називають *конвекційними*. Доведення повної аналогії щодо створення магнітного поля конвекційними струмами і струмами провідності мало принципове значення для обґрунтування єдності електричних і магнітних явищ.

Перші досліди з виявлення магнітного поля рухомих наелектризованих тіл провів у 1878 р. американський фізик Г. Роуланд (1848—1901). Ці досліди в 1901—1904 рр. з більшою точністю виконав російський фізик О. О. Ейхенвальд (1863—1944). Суть дослідів Роуланда та Ейхенвальда зводилася до вимірювання напруженості магнітного поля, яке збуджувалось зарядженим диском при його обертанні. Складність полягала в тому, що магнітне поле, яке виникало під час проведення цих дослідів, було приблизно в  $10^5$  разів меншим від магнітного поля Землі. Отже, потрібно було провести надзвичайно точні вимірювання параметрів цих полів. Досліди Роуланда й Ейхенвальда дали позитивний результат. Цими дослідями було доведено, що конвекційні струми створюють такі самі магнітні поля, як і еквівалентні їм струми провідності. Це були перші досліди, які ще за десять років до відкриття електромагнітних хвиль дали незалежне експериментальне підтвердження окремих висновків теорії електромагнітного поля Максвелла.

До створення Дж. Максвеллом єдиної теорії електромагнітного поля вчення про електрику, магнетизм і світло існували окремо, хоча й були відомі фундаментальні експериментальні відкриття Х. Ерстеда, А. Ампера та М. Фарадея. В теорії Максвелла електричні, магнітні і світлові явища є окремими проявами єдиної матеріальної сутності — електромагнітного поля.

### § 13.3. Електромагнітне поле

*Електромагнітне поле* є формою матерії, через яку здійснюється взаємодія між електрично зарядженими частинками. Поняття поля (електричного та магнітного) ввів М. Фарадей у 1830 р. Концепція поля стала відродженням теорії близькодії, засновником якої був французький вчений Р. Декарт (1596—1650) ще в першій половині XVII ст. У 60-х роках XIX ст. англійський фізик-теоретик Дж. Максвелл розвинув ідеї Фарадея про електромагнітне поле, розкрив його природу і сформулював основні закони. Згідно з цими уявленнями заряджені частинки або струми створюють в усіх точках оточуючого їх простору особливий стан — поле, яке діє на всяку іншу заряджену частинку або струм, вміщені в довільну точку цього простору. Отже, поле заряджених електричних частинок або струмів зосереджене в усіх точках простору, що їх оточує. У кожній такій точці електромагнітне поле характеризується енергією, імпульсом тощо.

Електромагнітне поле може існувати і вільно, незалежно від джерел, які його створили, у вигляді електромагнітних хвиль. У 1865 р. Дж. Максвелл теоретично показав, що електромагнітні коливання за своєю внутрішньою природою мають властивість поширюватись у просторі зі швидкістю світла. Цей теоретичний висновок було підтверджено у 1888 р. дослідями німецького фізика Г. Герца, що відіграло вирішальну роль в утвердженні єдиної природи електричних, магнітних і світлових явищ.

Електромагнітне поле у вакуумі характеризується векторами напруженості електричного поля  $\vec{E}$  й індукції магнітного поля  $\vec{B}$ . Цими векторами визначаються сили, які діють з боку електромагнітного поля на рухомі й нерухомі електрично заряджені частинки. У середовищі електромагнітне поле характеризують двома додатковими параметрами: вектором індукції (зміщення) електричного поля  $\vec{D}$  і вектором напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ .

Електромагнітне поле в будь-якому середовищі описується в макроскопічній електродинаміці системою рівнянь Максвелла, які дають можливість визначити силові характеристики поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  залежно від розподілу зарядів і струмів. Вихрове електричне поле збуджується змінним магнітним полем, а вихрове магнітне поле — змінним у часі електричним полем. Якщо в певній точці простору виникає змінне електричне поле, то в сусідніх точках виникає змінне магнітне поле, яке, у свою чергу, зумовлює появу в сусідніх точках змінного електричного поля і т. д. Періодичні зміни електричного і магнітного полів становлять електромагнітне поле як форму матерії, через яку здійснюється електромагнітна взаємодія між матеріальними електрично зарядженими частинками. Оскільки до складу речовинного матеріального світу входять позитивні і негативні електричні заряди

як структурні елементи атомів, то й електромагнітна взаємодія як між окремими електричними зарядами, так і їхніми сукупностями (рухомими або нерухомими) є невід'ємною властивістю матерії і, отже, фундаментальною взаємодією поряд із сильною, слабкою та гравітаційною взаємодіями, які проявляються в природі. Електромагнітна взаємодія є далекодіючою і може спричиняти як притягання, так і відштовхування між зарядженими тілами або струмами. До електромагнітної взаємодії зводиться більшість макроскопічних явищ: сили пружності, тертя, поверхневий натяг. Електромагнітною взаємодією визначаються агрегатний стан речовини, хімічні перетворення, електричні, магнітні й оптичні явища, іонізація, різноманітні атомні процеси тощо.

Явища, які визначаються порівняно слабкими і повільно змінними електромагнітними полями, описуються законами класичної електродинаміки за допомогою системи рівнянь Максвелла. Для сильних і швидкозмінних полів визначальними є квантові ефекти, що описуються законами квантової електродинаміки.

### § 13.4. Струм зміщення. Система рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формах

Дамо загальну характеристику теорії Максвелла. Вона розроблена способом послідовного теоретичного і математичного узагальнень основних експериментальних законів електричних і магнітних явищ: закону Кулона, узагальненого на основі теореми Гауса, закону повного струму та закону електромагнітної індукції. Теорія Максвелла є феноменологічною, тобто такою, яка електричні і магнітні явища не пов'язує із структурою речовини і заряду. В ній не розкривається внутрішній механізм явищ взаємодії поля і речовини. Вплив середовища характеризується макроскопічними параметрами: діелектричною  $\epsilon$  і магнітною  $\mu$ , проникностями та питомою електропровідністю  $\sigma$ . Теорія Максвелла розглядає поля, що створюються макроскопічними зарядами та струмами, рівномірно розподіленими в об'ємах, що є значно більшими від характерних об'ємів атомів і молекул речовини, на відстанях від джерел значно більших за атомні розміри. Зміни полів розглядаються в часових інтервалах, значно більших від характерних часових інтервалів атомних процесів (наприклад, періоду обертання електронів на орбітах навколо ядер). Теорія Максвелла розглядає макрополя, які є наслідком усереднення по фізично нескінченно малих об'ємах й інтервалах часу мікрополів. Ця теорія є теорією близькодії на протигагу помилковим поглядам, які сформувалися на основі емпіричних законів електрики і магнетизму, що допускали миттєве поширення у просторі електричних

сигналів на будь-яку відстань без участі проміжного середовища (концепція далекодії). Концепція далекодії базувалася на ньютонівських уявленнях про характер сил всесвітнього тяжіння. Пізніше Дж. Максвелл розвинув ідеї М. Фарадея, за якими електромагнітні явища є проявом фізичних процесів у проміжному середовищі, що заповнює простір між зарядженими тілами або струмами. За Дж. Максвеллом, електромагнітна взаємодія передається від однієї точки простору до іншої матеріальним агентом — електромагнітним полем — зі скінченною швидкістю, яка у вакуумі дорівнює швидкості світла  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. У теорії Максвелла розкривається електромагнітна природа світла і, отже, електричні, магнітні та світлові явища розглядаються в єдності і зведені до однакової їхньої природи.

Принципово важливою особливістю електричних і магнітних полів є наявність тісного взаємозв'язку між ними. Ще М. Фарадей експериментально виявив, що зміна в часі магнітного поля спричиняє виникнення вихрового електричного поля (явище електромагнітної індукції), а Дж. Максвелл теоретично довів, що зміна в часі електричного поля має спричинити виникнення вихрового магнітного поля. Теоретичний висновок Максвелла пізніше, у 1888 р., було підтверджено дослідями Герца.

Закон електромагнітної індукції в інтегральній формі записують так:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS. \quad (13.1)$$

Зв'язок між зміною магнітного поля  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  і напруженістю  $\vec{E}$  вихрового електричного поля (або електрорушійною силою  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mathcal{E}$ )

схематично показано на рис. 13.1. Напрямок ліній  $\vec{E}$  відповідає правилу Ленца. Цю закономірність відображає також і знак мінус у формулі (13.1). Гіпотеза Максвелла полягала в тому, що існує аналогічне до (13.1) співвідношення між зміною в часі електричного поля і вихровим магнітним полем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n dS. \quad (13.2)$$

Зі зміною в часі індукції (зміщення) електричного поля  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  виникає магніторушійна сила  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \mathcal{E}_M$ . Це й було теоретично передбачено Дж. Максвеллом.

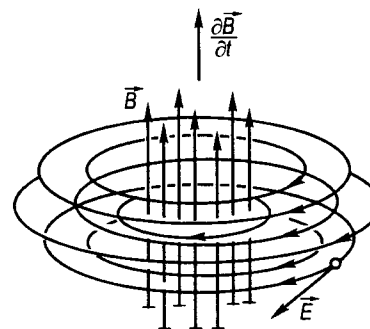


Рис. 13.1

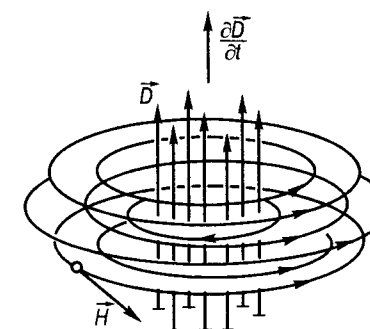


Рис. 13.2

Зв'язок між зміною індукції електричного поля  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  і напрямом напруженості вихрового магнітного поля ілюструє рис. 13.2. Звернімо увагу на те, що зв'язок напрямку  $\vec{H}$  і  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  визначається за правилом правого гвинта.

Вихрове магнітне поле, як відомо, створюється також струмами провідності (закон повного струму):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} dS. \quad (13.3)$$

Об'єднавши формули (13.2) і (13.3), можна записати

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} dS. \quad (13.4)$$

З рівності (13.4) випливає, що в природі існує два джерела вихрового магнітного поля: струми провідності  $I = \int_S \vec{j} dS$  і змінне в часі

електричне поле  $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} dS$ . Оскільки змінне в часі електричне поле створює магнітне поле так само, як і струми провідності, то природно було вважати, що  $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} dS = I_{\text{зм}}$  є також особливим струмом, який Дж. Максвелл назвав *струмом зміщення*.

Перейдемо до диференціального запису рівняння (13.4). З цієї метою застосуємо до лівої частини цього рівняння теорему Стокса і одержимо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} dS. \quad (13.5)$$

Тоді рівність (13.4) перепишемо так:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (13.6)$$

Оскільки поверхня інтегрування в (13.6) є довільною, то від рівності інтегралів можна перейти до рівності підінтегральних виразів

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (13.7)$$

Рівності (13.4) і (13.7) виражають узагальнений Дж. Максвеллом закон повного струму. З формули (13.7) видно, що вихрове магнітне поле створюється струмом провідності густиною  $\vec{j}$  та струмом

зміщення густиною  $\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Густину струму зміщення вимірюють у тих самих одиницях, що й густину струму провідності, тобто в А/м<sup>2</sup>.

Термін «струм зміщення», введений Дж. Максвеллом на основі уявлень про існування сфери і його зміщення в електричному полі, за сучасними поглядами на природу електромагнітного поля не є вдалим. Справді, взявши до уваги, що  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , можна записати

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (13.8)$$

Доданок  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  називають *поляризаційним струмом зміщення*. Цей струм пов'язаний зі зміщенням під дією електричного поля зв'язаних зарядів в атомах діелектриків і, отже, він має певну аналогію зі струмом провідності. Складова  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , яку називають *чистим струмом зміщення* і яка може існувати не тільки в діелектриках, а й у вакуумі, ніяких аналогів струму не має (не відбувається зміщення зарядів). Отже, цю складову називають струмом зміщення формально. Вона має єдину спільність зі струмами, яка полягає в однаковому характері збудження магнітного поля, що створюється струмами провідності і зміною електричного поля  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Ця складова струму зміщення не переносить зарядів, не виділяє джоулевого тепла у вакуумі, не проявляє хімічної дії.

**Приклад 13.1.** Показати, що в електричному колі з конденсатором лінії змінного струму провідності замикаються лініями струму зміщення між обкладками плоского конденсатора (рис. 13.3).

Розв'язання. Постійний струм у колі з конденсатором не проходить, а змінний — проходить. В усіх частинах послідовно з'єднаних провідників змінний струм провідності є однаковим. Між обкладками конденсатора, в діелектрику, вільних зарядів немає і, отже, немає струму провідності. Однак внаслідок перезарядження обкладок між ними виникає змінне електричне поле, яке утворює вихрове магнітне поле і є струмом зміщення. Сила змінного струму провідності в підвідних провідниках  $I = \frac{dq}{dt}$ . Зміна

заряду  $q$  на обкладках конденсатора зв'язана зі зміною потенціалу  $\Delta q = C \Delta \phi$ .

Для плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ . Отже,

$$\Delta q = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \Delta \phi = \epsilon_0 \epsilon E S, \text{ оскільки } \frac{\Delta \phi}{d} = E. \text{ Взв'язавши до уваги, що } \epsilon_0 \epsilon E = D, \text{ вираз для сили}$$

струму перепишемо так:  $I = \frac{dD}{dt} S$ , а густина струму  $j = \frac{dD}{dt} = j_{\text{зм}}$ . Отже, струм провідності в підвідних провідниках замикається рівним йому струмом зміщення між обкладками конденсатора, тобто лінії струму в довільному електричному колі завжди є замкненими. Наявність вихрового магнітного поля, лінії якого охоплюють силові лінії змінного електричного поля між обкладками конденсатора, перевірена експериментально і доведено, що індукція цього поля  $\vec{B}$  дорівнює індукції магнітного поля навколо підвідних провідників.

Система рівнянь Максвелла є узагальненим математичним записом основних експериментальних законів електромагнітних явищ у довільному середовищі. Ці рівняння становлять основу розробленої Дж. Максвеллом теорії макроскопічної електродинаміки, яку він послідовно вперше виклав у відомій праці «Трактат з електрики і магнетизму», що вийшла у світ у 1873 р. Сучасного вигляду ці рівняння набули завдяки працям Г. Герца та англійського фізика О.Хевісайда (1850—1925). Рівняння Максвелла встановлюють співвідношення між векторами електромагнітного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{H}$  та розподілом у просторі їх джерел: електричних зарядів і струмів. Обмеження, які накладаються на застосовність цих рівнянь, такі: тіла, вміщені в поле, є нерухомими; параметри  $\epsilon$ ,  $\mu$  та  $\sigma$ , які характеризують властивості речовини в кожній точці, є незмінними в часі і не залежать від температури та напруженості зовнішнього поля; в полі немає постійних магнітів, сегнетоелектриків та феромагнетиків.

В інтегральній формі система рівнянь Максвелла записується так:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (13.9)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (13.10)$$

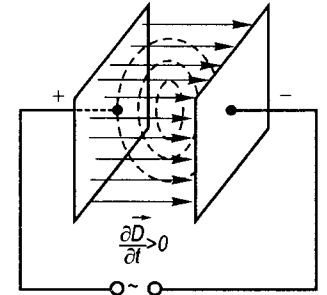


Рис. 13.3

$$\int_S \bar{B} d\bar{S} = 0; \quad (13.11)$$

$$\int_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho dV, \quad (13.12)$$

а у диференціальній —

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \quad (13.13)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad (13.14)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0; \quad (13.15)$$

$$\text{div } \bar{D} = \rho. \quad (13.16)$$

Перше рівняння Максвелла — це узагальнення закону Біо — Савара — Лапласа і є більш загальною формою закону повного струму, який відображає той експериментальний факт, що джерелами вихрового магнітного поля можуть бути струми провідності і струми зміщення.

Друге рівняння Максвелла є математичним записом експериментального закону електромагнітної індукції Фарадея. Узагальнений фізичний зміст його полягає в тому, що всяка зміна в часі магнітного поля спричиняє збудження вихрового електричного поля.

Третє рівняння Максвелла відображає експериментальний факт відсутності в природі магнітних зарядів, тобто відсутність джерел магнітного поля, подібних до джерел електричного поля (зарядів).

Четверте рівняння Максвелла є узагальненням на основі теореми Гауса закону Кулона і фізично вказує на існування в природі джерел електричного поля у вигляді електричних зарядів, розподілених у просторі з об'ємною густиною  $\rho$ .

Як видно, рівняння Максвелла не є симетричними відносно електричного і магнітного полів. Це зумовлено наявністю в природі джерел електричного поля (електричних зарядів) і відсутністю подібних джерел магнітного поля (магнітних зарядів, монополів). Рівняння Максвелла в інтегральній формі частіше використовують для розрахунків характеристик поля. Ці рівняння застосовують і тоді, коли є поверхні розриву, де характеристики поля і середовища змінюються стрибкоподібно. Разом з тим ці рівняння в диференціальній формі передбачають неперервність усіх характеристик поля і речовини в просторі й часі. Диференціальну систему рівнянь доповнюють граничними умовами

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau};$$

$$B_{2n} = B_{1n}; \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N,$$

зміст яких пояснювався раніше.

Система рівнянь Максвелла разом із граничними умовами не є замкненою системою рівнянь електромагнітного поля, оскільки вони не містять ніяких констант, що характеризують властивості середовища, в якому збуджується електромагнітне поле. Ці рівняння треба доповнити так званими матеріальними рівняннями, які для випадку слабких полів, що порівняно повільно змінюються в просторі і часі для ізотропних неферромагнітних і несегнетоелектричних середовищ, можуть бути записані у вигляді

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_0 \mu \bar{H}; \quad \bar{j} = \sigma \bar{E},$$

де  $\sigma$  — питома провідність провідника.

Константи  $\epsilon$ ,  $\mu$  і  $\sigma$  вводяться в теорію феноменологічно без зв'язку з атомно-молекулярною структурою речовини. Їх визначають експериментально.

Рівняння Максвелла разом з матеріальними рівняннями і граничними умовами становлять повну замкнену систему рівнянь, яка дає можливість розв'язати будь-яку задачу макроскопічної електродинаміки: відшукати вектори поля в кожній точці простору в довільний момент часу за відомим розподілом електричних зарядів і струмів у функції координат і часу або ж, навпаки, визначити розподіл зарядів і струмів за відомими значеннями векторів поля. Для стаціонарних полів  $\left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \right)$  система рівнянь

Максвелла розпадається на дві незалежні системи: на систему рівнянь електростатичного поля

$$\text{rot } \bar{E} = 0; \quad \text{div } \bar{D} = \rho; \quad \bar{D} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E};$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}$$

і систему рівнянь магнітостатичного поля

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j}; \quad \text{div } \bar{B} = 0; \quad \bar{B} = \mu_0 \mu \bar{H};$$

$$B_{2n} = B_{1n}; \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N.$$

Статичні електричні й магнітні поля є незалежними між собою. У цьому разі джерелами електричних полів є лише електричні заряди, а джерелами магнітних — лише струми провідності.

Для вакууму ( $\rho = 0$ ;  $\bar{j} = 0$ ) рівняння Максвелла для електричного і магнітного полів стають симетричними

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0; \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

У цьому разі джерелами вихрового магнітного поля є лише змінні в часі електричні поля, а джерелами вихрового електричного поля — лише змінні в часі магнітні поля.

Система рівнянь Максвелла описує величезну область фізичних явищ. Ці рівняння лежать в основі розрахунків задач електро- і радіотехніки, теорії і практики магнітної гідродинаміки, нелінійної оптики, вони відіграють велику роль у розвитку фізики плазми та у вирішенні проблем термоядерного синтезу, їх застосовують при розрахунках прискорювачів елементарних частинок, в астрофізиці тощо.

## Розділ 14. Електромагнітні хвилі

### § 14.1. Хвильове рівняння. Плоскі електромагнітні хвилі в однорідному середовищі, швидкість поширення їх

Розглянемо електромагнітне поле в однорідному ізотропному діелектрику ( $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ), в якому немає вільних електричних зарядів ( $\rho = 0$ ). Система рівнянь Максвелла за цих умов набуває вигляду

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (14.1)$$

З рівнянь (14.1) випливає існування електромагнітних збурень, або хвиль, що поширюються в просторі з певною скінченною швидкістю самостійно, незалежно від джерел, які спричинили виникнення даного електромагнітного поля. Справді, з рівнянь (14.1) видно, що будь-яка зміна в часі електричного поля  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  зумовлює виникнення змінного в просторі вихрового магнітного поля  $\operatorname{rot} \vec{B}$  і, у свою чергу, змінне в часі магнітне поле  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  спричиняє виникнення в сусідніх точках простору вихрового електричного поля  $\operatorname{rot} \vec{E}$ . Змінні електричне і магнітне поля взаємно обумовлюють одне одного. Вони існують в єдності, становлячи особливу форму матерії — електромагнітне поле, яке, виникнувши в певних точках простору, не заповнює

його миттєво, а поширюється у вигляді електромагнітних коливань, або хвиль, зі скінченною швидкістю, значення якої залежить від властивостей навколишнього середовища.

Хвильовий характер змінного електромагнітного поля впливає також із того, що рівняння (14.1) можна звести до хвильових диференціальних рівнянь, розв'язком яких є рівняння хвилі. Щоб з рівнянь (14.1) одержати хвильові рівняння, треба виключити, наприклад, з першого рівняння (14.1) змінну  $\vec{B}$  і звести його до однієї змінної  $\vec{E}$ . Для цього здиференціюємо обидві частини рівняння

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

за часом і врахуємо незалежність операцій диференціювання за часом і за координатами, оскільки середовище, в якому існує електромагнітне поле, вважають нерухомим. Одержимо  $\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ . Значення  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  підставимо з другого рівняння

$$(14.1). \text{ Тоді } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Без доведення скористаємося формулою математичної фізики  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$  (оскільки з (14.1)  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , тобто немає вільних зарядів), де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа. В результаті для вектора}$$

$\vec{E}$  одержимо хвильове диференціальне рівняння

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (14.2)$$

Проробивши аналогічні операції для другого рівняння (14.1), одержимо

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (14.3)$$

Введемо позначення  $\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu = 1/v^2$ . Тоді рівняння (14.2) і (14.3) запишуться у вигляді системи диференціальних хвильових рівнянь електромагнітного поля (див. т. 1, § 11.2)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (14.4)$$

Отже, вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  задовольняють те саме хвильове рівняння. Найпростішого вигляду рівняння (14.4) набувають для випадку, коли вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  залежать лише від однієї з координат, наприклад від  $z$ . Тоді частинні похідні від векторів поля по координатах  $x$  і  $y$  дорівнюватимуть нулеві і (14.4) запишуться так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} &= 0; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Частинним розв'язком (14.5) буде рівняння електромагнітної хвилі

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(z - vt); \\ \vec{B} &= \vec{B}(z - vt), \end{aligned} \quad (14.6)$$

для якої вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  є функціями того самого аргументу  $z - vt$ , який називають *фазою хвилі*.

Розглянемо випадок сталої фази  $z - vt = z_0$ . Тоді  $z = z_0 + vt$  є рівнянням площини, перпендикулярної до осі  $Oz$ , яка переміщується в напрямі  $z$  зі швидкістю

$$\frac{dz}{dt} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}. \quad (14.7)$$

Швидкість поширення в просторі сталої фази називають *фазовою швидкістю*  $v$  електромагнітної хвилі. Фаза хвилі (14.6) в усіх точках площини  $z = z_0 + vt$  має однакове значення. Цю площину називають *площиною сталої фази хвилі або фронтом хвилі*. Вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  в усіх точках цієї площини мають певні сталі значення. Якщо  $z_0$  надавати різних числових значень, то одержимо сім'ю паралельних площин, перпендикулярних до осі  $Oz$ , що розміщені на різних відстанях від початку відліку осі  $Oz$ . На кожній з цих площин вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  мають сталі значення, які в цілому можуть відрізнитись при переході від площини до площини. Співвідношення між  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  визначаються рівняннями Максвелла (14.1). Якщо вектори хвилі мають однакове значення в усіх точках довільної площини, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі, то таку електромагнітну хвилю називають *плоскою*. Отже, рівняння (14.5) і їх розв'язок (14.6) описують плоску електромагнітну хвилю. Електромагнітна хвиля може поширюватись і у від'ємному напрямі осі  $Oz$ . Рівняння поверхні сталої фази в цьому разі матиме вигляд  $z = z_0 - vt$ , а рівняння хвилі  $\vec{E} = \vec{E}(z + vt)$ ;  $\vec{B} = \vec{B}(z + vt)$ . При поширенні двох плоских хвиль

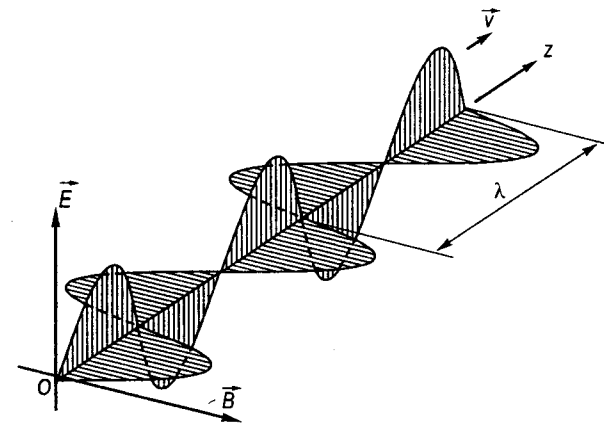


Рис. 14.1

у протилежних напрямках осі  $Oz$  утворюється результуюча стояча хвиля

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1(z - vt) + \vec{E}_2(z + vt); \\ \vec{B} &= \vec{B}_1(z - vt) + \vec{B}_2(z + vt). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Особливе значення в теорії і практиці мають *монохроматичні хвилі*, тобто хвилі, вектори яких змінюються з часом за гармонічним законом, або інакше, за синусоїдним чи косинусоїдним законом з однаковою частотою. Рівняння цих хвиль можуть бути записані так:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos \omega(t - z/v); \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos \omega(t - z/v), \end{aligned} \quad (14.9)$$

де  $\vec{E}_0$  і  $\vec{B}_0$  — сталі, які називають *амплітудами хвилі*. Введемо позначення  $k = \omega/v$ , і назвемо цю величину *хвильовим числом*. Тоді (14.9) запишуться так:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos (\omega t - kz); \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos (\omega t - kz). \end{aligned} \quad (14.10)$$

Надаючи координати  $z$  певних фіксованих значень, одержимо синусоїдні функції часу, які описують гармонічні коливання з циклічною (коловою) частотою  $\omega$ . Навпаки, для фіксованих значень часу  $t$  одержимо синусоїдний розподіл векторів хвилі  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  в просторі в заданий момент часу. У монохроматичній хвилі електричний і магнітний вектори поля завжди коливаються в однакових фазах (рис. 14.1). Як відомо, довжина хвилі  $\lambda$  дорівнює відстані, на яку поширюються гармонічні коливання за час один період  $T$ , тобто  $\lambda = vT = 2\pi v/\omega = 2\pi/k$ . З цієї



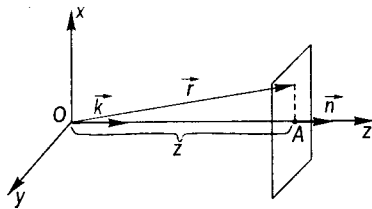


Рис. 14.2

хвилі в точці  $A$ . Радіус-вектор точки  $A$  —  $\vec{r}$ ,  $\vec{n}$  — одиничний вектор, нормальний до фронту хвилі. Напрямок його збігається з напрямком осі  $Oz$ . Тоді добуток  $kz$  можна записати так:  $kz = \vec{k}\vec{r}$  (де  $z = \vec{n}\vec{r}$  і  $\vec{k} = k\vec{n}$ ). Узагальнені рівняння (14.10) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}); \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}),\end{aligned}\quad (14.11)$$

або в комплексній формі

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}; \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.\end{aligned}\quad (14.12)$$

Рівняння (14.11) або (14.12) описують біжучу плоску монохроматичну хвилю, де хвильовий вектор  $\vec{k}$  визначає напрям поширення хвилі. Якщо хвиля поширюється в протилежному напрямі, то змінюється знак хвильового вектора  $\vec{k}$ :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}; \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}.\end{aligned}\quad (14.13)$$

При накладанні двох плоских монохроматичних хвиль, які поширюються в протилежних напрямках, одержимо результуючу стоячу хвилю, рівняння якої

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \vec{E}_{02} e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}; \\ \vec{B} &= \vec{B}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \vec{B}_{02} e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})},\end{aligned}\quad (14.14)$$

де  $E_{01}$ ,  $E_{02}$ ,  $B_{01}$ ,  $B_{02}$  не залежать від координат і часу.

Електромагнітні хвилі є поперечними. Вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{k}$  становлять правогвинтову трійку векторів.

Важливе значення в історичному розвитку електродинаміки та встановленні єдності між електромагнітними і світловими явищами мало обчислення на основі теорії Максвелла швидкості поширення

рівності можна дати означення хвильового числа:  $k = 2\pi/\lambda$  показує, скільки довжин хвиль вміщається на відстані  $2\pi$  (м).

Для довільного напрямку поширення монохроматичної хвилі рівняння (14.10) можна узагальнити (рис. 14.2). Нехай потрібно визначити вектори поля плоского фронту

електромагнітних хвиль в однорідному середовищі. З рівності (14.7) фазова швидкість плоскої хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}.\quad (14.15)$$

Для вакууму  $\epsilon = \mu = 1$ . Тоді

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2}} = 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)},$$

тобто  $v = c$  — швидкість світла у вакуумі. Поперечність плоских електромагнітних хвиль і те, що швидкість їх поширення у вакуумі дорівнює швидкості поширення світла, дали Дж. Максвеллу підставу зробити висновок, що світло є електромагнітною хвилею. Швидкість електромагнітних хвиль у довільному діелектричному середовищі з (14.15)

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},\quad (14.16)$$

де  $\epsilon$  і  $\mu$  — відносні діелектрична і магнітна проникності середовища. Формула (14.16) виражає закон Максвелла.

#### § 14.2. Енергія електромагнітної хвилі. Потік енергії. Вектор Умова — Пойнтінга

Для розв'язання задач макроскопічної електродинаміки систему рівнянь Максвелла доповнюють співвідношеннями, які виражають закон збереження енергії. На основі цих співвідношень встановлюють можливість поширення електромагнітної енергії у просторі. Як відомо, енергію електричного поля визначають за формулою  $W_e = 1/2 \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$ , а магнітного —  $W_m = 1/2 \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$ . Якщо в обме-

женому замкненому об'ємі є електромагнітне поле, то його енергію визначають як суму електричної і магнітної складових

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV.\quad (14.17)$$

Щоб встановити, що енергія електромагнітної хвилі поширюється у просторі, розглянемо найпростіший випадок поля у вакуумі, де немає струмів провідності. Перші два рівняння Максвелла для цього випадку запишуться так:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Помножимо перше з цих рівнянь на  $\vec{E}$ , а друге на  $\vec{H}$  і віднімемо від другого рівняння перше. Тоді

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\left( \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \quad (14.19)$$

Ліва частина цього рівняння на основі векторної тотожності, яка доводиться в математичній фізиці, дорівнює  $\operatorname{div}[\vec{E} \cdot \vec{H}]$ . У правій частині (14.19) зробимо перетворення, врахувавши при цьому, що  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  і  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ :

$$\begin{aligned} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right); \\ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right). \end{aligned}$$

З урахуванням цих перетворень (14.19) перепишемо так:

$$\operatorname{div}[\vec{E} \cdot \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \right), \quad (14.20)$$

або

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad (14.21)$$

де  $w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$  — об'ємна густина електромагнітної енергії,

а  $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$  називають *вектором Умова — Пойнтінга*.

З формули (14.21) видно, що  $\operatorname{div} \vec{P}$  дорівнює зміні електромагнітної енергії в одиниці об'єму за одиницю часу. Помноживши обидві частини (14.21) на  $dV$  і зінтегрувавши по  $V$ , встановимо зміну енергії за одиницю часу в довільному об'ємі  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = -\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV. \quad (14.22)$$

За теоремою Остроградського — Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = \oint_S \vec{P}_n dS.$$

Тоді

$$\oint_S \vec{P}_n dS = -\frac{\partial W}{\partial t}. \quad (14.23)$$

Потік вектора Умова — Пойнтінга крізь довільну замкнену поверхню  $S$ , що обмежує об'єм  $V$ , дорівнює зменшенню за одиницю часу запасу електромагнітної енергії  $W$ , яка міститься в об'ємі  $V$ . Зменшення енергії в умовах розглядуваної задачі може бути зумовлене лише витіканням її крізь поверхню  $S$  з об'єму  $V$ , оскільки інших перетворень енергії в об'ємі не відбувається.

Отже, електромагнітна енергія, подібно до рідини, витікає з об'єму  $V$ , де є її певний запас, крізь замкнену поверхню  $S$ , яка обмежує об'єм  $V$ , в кількості  $\oint_S \vec{P}_n dS$  (Дж/с). Модуль вектора Умова —

Пойнтінга визначає потік електромагнітної енергії за одиницю часу крізь одиницю поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення енергії:

$$|\vec{P}| = |[\vec{E} \cdot \vec{H}]|, \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{P}$  становлять правої вгвинтової трійки векторів. Напрямок вектора  $\vec{P}$  вказує напрям випромінювання електромагнітної енергії. Слід зазначити, що загальні уявлення про потік енергії в просторі вперше були розглянуті російським ученим М. О. Умовим у 1874 р. Тому вектор густини потоку енергії називають вектором Умова. Розробки М. О. Умова стосувалися переважно потоку енергії в пружних середовищах і в'язких рідинах. Через 11 років ідеї Умова були застосовані англійським фізиком Дж. Пойнтінгом (1852—1914) до вивчення потоку електромагнітної енергії. Він вперше отримав вираз  $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$ , тому вектор  $\vec{P}$  називають вектором Умова — Пойнтінга. Формули (14.21) і (14.23) виражають закон збереження енергії в електродинаміці, і його часто називають теоремою Умова — Пойнтінга.

**Приклад 14.1.** По провіднику проходить постійний електричний струм густиною  $j$ . Показати, що теплова енергія, яка виділяється в провіднику під час проходження струму, надходить з оточуючого провідник середовища крізь його бічну поверхню.

**Розв'язання.** Виділимо ділянку циліндричного провідника радіуса  $r$  (рис. 14.3). За законом Ома в провіднику зі струмом  $j$  у тому

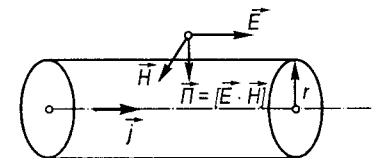


Рис. 14.3

самому напрямі існує напруженість поля  $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$ . З умови неперервності тангенціальної складової вектора  $\vec{E}$  на межі двох середовищ можна стверджувати, що така сама напруженість  $\vec{E}$  існує в точках поблизу провідника. Вектор напруженості магнітного поля біля поверхні провідника напрямлений по дотичній до його поверхні і лежить у площині, перпендикулярній до осі провідника  $\vec{H} \perp \vec{j}$ . Звідси випливає, що вектор Умова — Пойнтінга напрямлений по радіусу перпендикулярно до осі провідника. Обчислимо напруженість  $H$  на поверхні провідника

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{j\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2} jr.$$

Потік енергії за одиницю часу крізь одиницю поверхні провідника дорівнює векторові Умова — Пойнтінга

$$P = EH \sin \alpha = EH = \frac{j^2 r}{2\sigma},$$

де  $\sin \alpha = 1$ , оскільки  $\vec{E} \perp \vec{H}$ . Енергія, яка надходить у провідник крізь всю бічну поверхню провідника радіуса  $r$  і завдовжки  $l$  за 1 с,

$$W = P \cdot 2\pi r l = \frac{j^2 r^2 l}{\sigma} \quad (1)$$

За законом Джоуля — Ленца в диференціальній формі кількість тепла, що виділяється в провіднику радіуса  $r$  і завдовжки  $l$  за 1 с,

$$W' = \sigma E^2 \pi r^2 l = \frac{j^2 r^2 l}{\sigma} \quad (2)$$

Порівняння формул (1) і (2) показує, що вся теплова енергія, яка виділяється в провіднику під час проходження в ньому струму, надходить з оточуючого простору крізь бічну поверхню провідника. Отже, можна зробити висновок, що енергія, яка передається по провідниках електричним струмом, переміщається переважно в просторі, що оточує провідник. При цьому провідники відіграють роль напрямних ліній, уздовж яких поширюється електромагнітна енергія. Густина потоку енергії в довільній точці простору визначається вектором Умова — Пойнтінга.

Обчислимо потік вектора Умова — Пойнтінга  $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$  для плоских електромагнітних хвиль. Як уже зазначалося, вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  становлять правошпильову ортогональну трійку векторів. Отже, напрям вектора  $\vec{P}$  збігається з напрямом  $\vec{k}$ , тобто з напрямом поширення плоских хвиль. Тоді  $P = EH \sin \alpha = EH$  ( $\sin \alpha = 1$ ).

З рівнянь (14.2) і (14.3) можна зробити висновок, що в електромагнітній хвилі, яка поширюється в просторі, складові напруженостей  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  пропорційні між собою

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (14.24)$$

Тоді для  $P$  матимемо

$$P = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} E^2. \quad (14.25)$$

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2$ . Оскільки з (14.24)  $\epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2$ , то  $w = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2$ . Домножимо в (14.25) чисельник і знаменник на  $\epsilon_0 \epsilon$ . Одержимо

$$P = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} \epsilon_0 \epsilon E^2 = v w. \quad (14.26)$$

Потік енергії крізь одиницю поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення плоских електромагнітних хвиль, дорівнює  $v w$ . Отже, енергія плоских електромагнітних хвиль в однорідному ізоотропному середовищі переноситься у напрямі їх поширення зі швидкістю  $v$ .

### § 14.3. Випромінювання електромагнітних хвиль. Досліди Герца

Система зарядів і струмів, значення яких змінюються з часом, спричиняє виникнення взаємозв'язаних змінних електричних і магнітних полів. Ці змінні поля зумовлюють появу електромагнітних хвиль, що поширюються в просторі зі скінченною швидкістю. Отже, системою, що випромінює електромагнітні хвилі, може бути система змінних зарядів і струмів. Проте найбільший теоретичний і технічний інтерес мають випромінювальні системи у вигляді дипольних осциляторів, моменти яких змінюються за гармонічним законом  $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$ . Такими системами можуть бути антени різних типів або, наприклад, класична атомна система, в якій електрони коливаються за гармонічним законом відносно ядра атома. Найпростішою з подібних систем є точковий диполь, дипольний момент якого змінюється періодично в часі з певною частотою. Такий диполь (модель) називають *диполем Герца* (за ім'ям вченого, який вперше розрахував поле його випромінювання). Цінність вивчення закономірностей випромінювання диполя Герца як самої простої системи полягає в тому, що довільну складну випромінювальну систему, наприклад антену, в якій проходить змінний струм, завжди уявно можна розбити на велику кількість елементів струму, кожний з яких випромінює як диполь Герца. Суперпозиція полів окремих елементів дає електромагнітне поле всієї випромінювальної системи. Прототипом диполя Герца може бути сукупність двох металевих кульок, з'єднаних провідником (рис. 14.4). Якщо кулькам надати однакових за значенням, але протилежних за знаком зарядів, то в самій системі відбуватиметься коливальний процес перезарядки кульок. Якщо опір провідника є малим і втрати енергії на

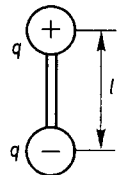


Рис. 14.4

випромінювання — невеликими, то коливальний процес перезарядки кульок продовжуватиметься досить довго і на відстанях  $r \gg l$  випромінювальна система поводитиме себе як точковий диполь Герца.

Повна теорія випромінювання дипольного осцилятора розглядається в курсі теоретичної електродинаміки. Зупинимося на аналізі окремих висновків теорії з тим, щоб ознайомитися з найхарактернішими особливостями поля дипольного осцилятора. Розглянемо два граничних випадки для векторів поля вібратора Герца: для малих відстаней і для великих порівняно з довжиною хвиль. Для малих відстаней теорія дає такі вирази для векторів поля у вакуумі:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\vec{p}_0}{R_0^3} + \frac{3}{R_0^3} \vec{n}(\vec{p}_0 \cdot \vec{n}) \right\} e^{i\omega t}; \quad (14.27)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} [\vec{p}_0 \cdot \vec{n}] \frac{1}{R_0^2} e^{i\omega t}, \quad (14.28)$$

де  $R_0$  — відстань від початку координат до точки спостереження;  $\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$  — одиничний вектор у напрямі  $\vec{R}_0$ . Рівність (14.27) визначає поле диполя, момент якого  $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}$ . Область простору, в якій існує таке поле, називають *дипольною* або *ближньою зоною*. Взнявши похідну від  $\vec{p}$  по часу  $\frac{d\vec{p}}{dt} = i\omega \vec{p}_0 e^{i\omega t}$ , рівність (14.28) можна записати так:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[ \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{n} \right]}{R_0^2}. \quad (14.29)$$

Припустимо, що  $\frac{d\vec{p}}{dt} = I \cdot \vec{l}$ . Тоді з (14.29) видно, що в дипольній зоні магнітне поле таке саме, як і поле елемента струму  $I \cdot \vec{l}$  за законом Біо — Савара — Лапласа.

Розглянемо вектори поля на відстанях, значно більших від довжини електромагнітної хвилі  $R_0 \gg \lambda$  (*хвильова зона*). Для цього випадку теорія випромінювання дипольного осцилятора дає такі вирази для векторів поля:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2}{R_0} [\vec{n}[\vec{p}_0 \cdot \vec{n}]] e^{i(\omega t - kR_0)}; \quad (14.30)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \omega k}{4\pi R_0} [\vec{p}_0 \cdot \vec{n}] e^{i(\omega t - kR_0)}. \quad (14.31)$$

З цих рівностей видно, що характеристики поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{n}$  становлять правої вгвинтової трійки векторів. Вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  змінюються за гармонічним законом і утворюють хвилю, амплітуда векторів якої змінюється обернено пропорційно відстані  $R_0$ . Щоб обчислити значення  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  в момент часу  $t$ , треба брати значення моменту диполя в момент  $t - R_0/v$ , тобто слід враховувати запізнення хвилі внаслідок скінченної швидкості її поширення (у вакуумі  $c$ ):

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega(t - R_0/c)}. \quad (14.32)$$

Взявши двічі похідну від (14.32), одержимо  $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}$ . Тоді (14.30) і (14.31) переписуться так:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}] \vec{n}] = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} [\ddot{\vec{B}} \cdot \vec{n}]; \quad (14.33)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c R_0} [\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}]. \quad (14.34)$$

Оскільки  $\vec{B} \perp \vec{n}$ , то з (14.33) випливає, що у хвильовій зоні  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E = B$ , або  $E = cB$ , як і для плоскої електромагнітної хвилі у вакуумі. Отже, у хвильовій зоні поширюється поперечна плоска електромагнітна хвиля. З рівності (14.34) видно, що вектор  $\vec{B}$  завжди перпендикулярний до  $\vec{p}$  і  $\vec{n}$ . Індукція поля хвилі

$$B = \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{p}}|}{4\pi c R_0} \sin \theta, \quad (14.35)$$

де  $\theta$  — кут між напрямом вектора  $\vec{p}$  і напрямом поширення хвилі  $\vec{n}$  (рис. 14.5). Вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до  $\vec{B}$  та  $\vec{n}$  і визначається з рівності (14.33):

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{4\pi c R_0} |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta. \quad (14.36)$$

З рівностей (14.35) і (14.36) випливає, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  мають найбільші значення в площині, перпендикулярній до напрямку вектора  $\vec{p}$ , тобто при  $\theta = \pi/2$ , і дорівнюють нулеві при  $\theta = 0$  або  $\theta = \pi$ .

Електромагнітна енергія, яка випромінюється дипольним осцилятором за одиницю часу кризь одиницю

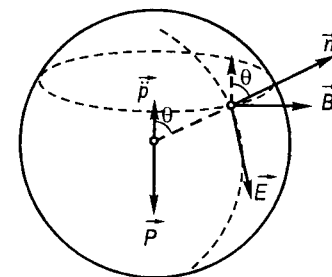


Рис. 14.5

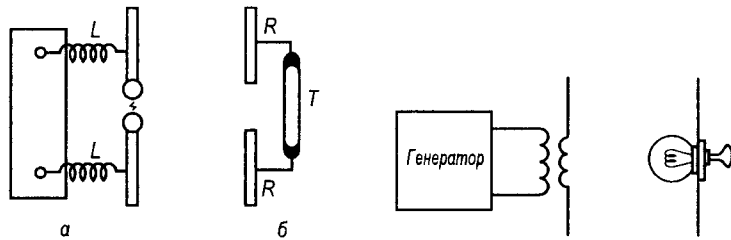


Рис. 14.6

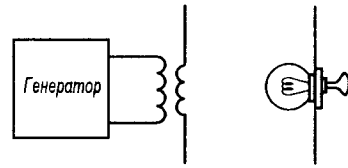


Рис. 14.7

поверхні, визначається вектором  $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$ . Враховуючи (14.32) і (14.33), а також те, що  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , одержимо

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\vec{p}^2}{R^2} \sin^2 \theta.$$

Отже, інтенсивність випромінювання дипольного осцилятора залежить від напрямку випромінювання за законом  $\sin^2 \theta$  і зменшується обернено пропорційно квадратові відстані до точки спостереження. Інтенсивність випромінювання є максимальною в напрямі, перпендикулярному до вектора  $\vec{p}$ , а енергія випромінювання в напрямі вектора  $\vec{p}$  дорівнює нулеві. Середня енергія випромінювання дипольного осцилятора, як показують розрахунки і дослід, швидко зростає зі збільшенням частоти. Вона пропорційна четвертому степеню частоти  $\omega$ . Тому для підвищення випромінювальної здатності антен використовують високочастотні струми.

Електромагнітні хвилі вперше експериментально одержав і дослідив Г. Герц у 1887—1888 рр. за допомогою так званого вібратора Герца. Він складався з двох однакових металевих стрижнів, які закінчувалися кульками, розміщеними на певній відстані (рис. 14.6, а). Стрижні з кульками під'єднувалися до високовольтного індуктора, і, якщо напруга на кульках досягала пробійного значення, між кульками виникала іскра й у вібраторі збуджувалися власні затухаючі електромагнітні коливання високої частоти. Для фіксації електромагнітних хвиль Г. Герц використовував різні типи резонаторів. Найпростішим є прямий відкритий резонатор (рис. 14.6, б). Якщо електромагнітна хвиля надходить до резонатора  $T$ , то у ньому збуджуються вимушені високочастотні струми, амплітуда яких є максимальною тоді, коли власна частота резонатора збігається з частотою випромінюючого вібратора (резонанс). Про такий струм можна було судити за наявністю іскри в зазорі резонатора або за свіченням газорозрядної трубки. У приладах Герца електромагнітні хвилі швидко затухали і мали малу потужність випромінювання. Сучасні лампові та напівпровідникові генератори дають гармонічні коливання знач-

ної потужності (рис. 14.7). Для виявлення випромінювання вібратора використовують малопотужну електричну лампочку, яка може переміщуватись уздовж резонатора. Особливо зручно використовувати лампочку у демонстраційних дослідах, коли відстані між вібратором і резонатором є малими, а сигнали в резонаторі — досить сильними. За допомогою вібратора електромагнітних хвиль і резонатора з індикатором можна провести ряд демонстраційних дослідів: прийом електромагнітних хвиль з інших аудиторій; показати, що електромагнітна хвиля вібратора є лінійно поляризованою і, отже, буде різною інтенсивність прийомного сигналу при повороті вібратора або резонатора навколо осі, яка їх з'єднує; демонстрацію прямолінійності поширення електромагнітних хвиль за допомогою параболічних металевих дзеркал; проходження електромагнітних хвиль крізь діелектричні середовища і відбивання їх та поглинання в провідниках; заломлення електромагнітних хвиль у призмах, виготовлених з діелектричної речовини, наприклад парафіну; подвійне променезаломлення в анізотропних кристалах тощо.

#### § 14.4. Поняття про системи передавання електромагнітної енергії

У § 14.2 розглянуто приклад передачі електромагнітної енергії вздовж провідника, по якому проходить постійний електричний струм. Цей приклад показує, що енергія струму, яка передається по провідниках, транспортується переважно в просторі, що оточує провідник, зі швидкістю, яка визначається властивостями речовини навколо провідників

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}.$$

Розглянемо інший приклад передавання енергії струму кабелем, що складається з центрального провідника радіуса  $r_1$  і провідної циліндричної оболонки радіуса  $r_2$ , простір між якими заповнений діелектриком (рис. 14.8). По центральному провіднику струм надходить до споживачів, а по оболонці повертається назад до генератора. Для спрощення розрахунків вважатимемо, що передавання енергії кабелем відбувається без втрат, тобто активний опір його дорівнює нулеві і провідники не нагріваються. За цієї умови можна нехтувати спадом напруги в провідниках і вважати, що спад напруги  $U$  відбувається лише на споживачах енергії. У такому разі вздовж усього кабелю різниця потенціалів

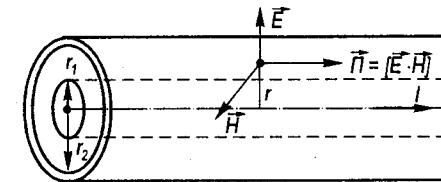


Рис. 14.8

між центральним провідником і оболонкою буде незмінною і дорівнюватиме  $U$ . Ця різниця потенціалів створює відповідне електричне поле. Оскільки втрати енергії в провідниках немає, то й потік вектора Умова — Пойнтінга в радіальному напрямі дорівнюватиме нулеві, а це означає, що дорівнює нулеві складова вектора  $\vec{E}$  вздовж провідника. Внаслідок аксіальної симетрії задачі можна стверджувати, що відмінною від нуля буде лише радіальна складова напруженості електричного поля  $\vec{E}_r$ , значення якої залежить від відстані точки спостереження до осі кабелю. За теоремою Гаусса

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon},$$

звідси

$$E_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l r} = \frac{a}{r},$$

де  $a = q/(2\pi\epsilon_0\epsilon l)$  — параметр, який визначається різницею потенціалів  $U$  між центральним провідником і оболонкою кабелю:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = a \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = a \ln(r_2/r_1).$$

Звідси

$$a = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)}; E_r = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}.$$

Напруженість магнітного поля на відстані від осі кабелю

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (r_1 < r < r_2).$$

Обчислимо вектор Умова — Пойнтінга, який визначає потік енергії вздовж кабелю:

$$\Pi = E_r H = \frac{1}{2\pi} \frac{IU}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2}. \quad (14.37)$$

Отже, у просторі між центральним провідником і оболонкою кабелю поширюється електромагнітна енергія, густина якої визначається формулою (14.37). Напрямок поширення енергії збігається з напрямом вектора  $\vec{\Pi}$ . Поза оболонкою кабелю напруженість електричного поля дорівнює нулеві і електромагнітної енергії там немає. Розрахунки показують, що повний потік електромагнітної енергії

крізь поперечний переріз кабелю (між центральним провідником і оболонкою) за 1 с

$$W = \int_S \Pi dS = IU. \quad (14.38)$$

Крім того, відомо, що при силі струму  $I$  в провідниках і напрузі  $U$  потужність, яка надходить до споживачів, також дорівнює  $IU$ . Звідси можна зробити висновок, що вся енергія, яка надходить по кабелю до споживачів, перетікає у вигляді електромагнітного поля в просторі між центральним провідником і оболонкою кабелю.

У випадку передачі енергії змінного струму малої частоти механізм перетікання енергії не змінюється. Якщо змінюється напрям струму в кабелі, то змінюються на протилежні напрями  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , а напрям вектора Умова — Пойнтінга залишається незмінним і, отже, перетікання енергії весь час залишається в напрямі до споживачів. При частотах струму, коли довжина електромагнітної хвилі має порядок відстані між провідниками, лінія передачі починає випромінювати електромагнітну енергію подібно до антени. Тому для передачі електричної енергії на високих частотах звичайні лінії передач є непридатними через великі втрати енергії в них. У таких випадках використовують спеціальні лінії передач — *хвилеводи*. Найчастіше це металеві труби з незмінною по всій довжині формою поперечного перерізу. Механізм передавання енергії хвилеводами ґрунтується на багаторазовому відбиванні електромагнітних хвиль від стінок хвилеводу. Теорія поширення хвиль по хвилеводах будується на використанні рівнянь Максвелла. Застосовують також *діелектричні хвилеводи* — стрижні з діелектрика або магнетика. Плоскі хвилі на межі діелектрика і зовнішнього середовища зазнають повного відбивання, утворюючи за хвилеводом поле, значення якого експоненціально спадає (поверхневі хвилі). Аналогом таких хвилеводів є волоконні системи.

Основною перевагою металевих хвилеводів порівняно з іншими лініями передач (двопровідною або коаксіальним кабелем) є відносно малі втрати енергії. Причина полягає в тому, що в закритих металевих хвилеводах повністю відсутнє випромінювання енергії в навколишній простір і менші втрати на джоулеве тепло. Залежно від довжини електромагнітних хвиль можуть застосовуватись хвилеводи різних систем. Для довгих хвиль це в основному різні лінії передач у вигляді двопровідних ліній або кабелів. Для хвиль, довжина яких  $\lambda = 10 - 20$  см (НВЧ), використовують так звані *радіохвилеводи* — металеві трубки або діелектричні стрижні різних форм поперечного перерізу. При переході в діапазон міліметрових, субміліметрових і оптичних довжин хвиль використовують так звані *квазіоптичні електродинамічні системи*. У квазіоптичних резонаторах групують хвилі, що

відрізняються структурою електромагнітного поля і частотою, в пучки (моди), які практично повністю відриваються від бокових стінок резонатора і можуть існувати без них самостійно. Так здійснюють перехід від повністю екранових систем до відкритих, які практично є системами спеціальних дзеркал (сферичних чи еліптичних) або лінз. Для оптичних довжин хвиль використовують *оптичні резонатори* — пристрої, в яких збуджуються стоячі або біжучі електромагнітні хвилі оптичного діапазону. Це також відкриті резонатори у вигляді сукупності дзеркал. Найпростішим оптичним резонатором є інтерферометр Фабрі — Перо, який складається з двох плоских паралельних дзеркал.

#### § 14.5. Електромагнітні хвилі вздовж проводів. Телеграфне рівняння. Хвильовий опір лінії

Постійні, або квазістаціонарні, струми від джерел до споживачів передають по так званих лініях передач (довгих лініях). Перші лінії передач з'явилися у 30-х роках XIX ст. в телеграфії. Пізніше такі лінії широко використовувались для передавання енергії змінного струму. Розрізняють екрановані лінії передач (типу коаксіального кабелю) і відкриті (двопровідні у вигляді циліндричних провідників і под.). У теорії зручно розглядати ідеальні лінії передач, в яких немає активного опору, тобто немає втрати енергії на нагрівання. У таких лініях поширюються строго поперечні електромагнітні хвилі. Напруженість електричного поля  $\vec{E}$  в цих лініях має форму поля в циліндричному конденсаторі (відмінною від нуля є лише радіальна складова  $\vec{E}$ ), а напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  напрямлена по дотичній у кожній точці замкнених концентричних силових ліній магнітного поля (як і навколо циліндричного провідника зі струмом). Електромагнітна енергія в лініях передач поширюється вздовж проводів зі швидкістю світла в середовищі, яким заповнений простір навколо лінії.

Процеси в лініях передач навіть у випадку порівняно великих частот, якщо не порушуються умови квазістаціонарності, описуються на основі законів квазістаціонарних струмів. У цьому разі лінію передач подумки розбивають на порівняно невеликі ділянки, у межах яких фази потенціалів і струмів мало відрізняються і, отже, у межах цих ділянок виконуються умови квазістаціонарності. Квазістаціонарні поля є поперечними, тому зручніше в теорії оперувати не векторами поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , а зарядами  $q$ , струмами  $I$  і потенціалами  $\phi$  (або  $U$ ). Процеси в лініях передач описуються так званими *телеграфними рівняннями*. Їх отримують з умови, що для ділянки квазістаціонарних струмів у кожний момент часу виконуються рівності, подібні до тих, які

виражають закон Ома і правила Кірхгофа для постійних струмів. Для двопровідної ідеальної лінії  $R = 0$  вони мають вигляд

$$\frac{\partial I}{\partial z} = C' \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -L' \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (14.39)$$

де  $C'$  і  $L'$  — електроємність та індуктивність одиниці довжини лінії. Перше рівняння (14.39) є законом збереження заряду на ділянці лінії  $dz$ . Зміна заряду  $\partial I \cdot dt$  пов'язана зі зміною потенціалу на ємності лінії, довжина якої  $dz$ . З другого рівняння (14.39) випливає, що зміна потенціалу  $\partial U$  на ділянці лінії  $dz$  пов'язана з ЕРС індукції  $L' dz \frac{\partial I}{\partial t}$ . Загальний розв'язок (14.39) при  $C' = \text{const}$  і  $L' = \text{const}$  становить суперпозицію хвиль

$$I = I_0 e^{i(\omega t \pm kz)}; \quad U = I_0 Z_{\text{хв}} e^{i(\omega t \pm kz)},$$

де  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $v = \frac{1}{\sqrt{C' L'}}$  — швидкість поширення хвиль у речовині, яка заповнює лінію передач;  $Z_{\text{хв}}$  — хвильовий опір лінії.

*Хвильовий опір лінії передач* вимірюється відношенням напруги до сили струму в довільній точці лінії, по якій поширюються хвилі. Він відіграє роль опору, який чинить лінія біжучій хвилі напруги і струму. Якщо немає втрат енергії, то  $Z_{\text{хв}} = \sqrt{L'/C'}$ . Для кабелю, що складається з двох циліндричних коаксіальних провідників з радіусами  $r_1$  і  $r_2$ , простір між якими заповнений однорідним середовищем зі сталими  $\epsilon$  і  $\mu$ ,

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln(r_2/r_1)}; \quad L' = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \ln(r_2/r_1).$$

Тоді

$$v = \frac{1}{\sqrt{C' L'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Оптимальні умови передавання енергії здійснюються в режимі біжучої хвилі, якщо опір споживачів приблизно дорівнює хвильовому опорі лінії передач. За наявності втрат енергії на нагрівання з'являються поздовжні складові напруженості  $\vec{E}$ . У цьому разі рівняння (14.39) наближено залишається правильним за умови, що поперечні розміри лінії передач є малими порівняно з довжиною хвилі  $\lambda$ .

Два паралельних провідники, зв'язані з джерелом змінного струму високої частоти ємносним або індуктивним зв'язком, удвоє яких може поширюватись електромагнітна енергія у вигляді хвиль,

є лініями передач, які називають *системою Лехера*. Системою Лехера є також кабель, розглянутий у § 14.4.

### § 14.6. Поширення електромагнітних хвиль в неоднорідних середовищах. Відбивання і заломлення електромагнітних хвиль

Якщо за допомогою параболічного дзеркала сформувати паралельний потік електромагнітних хвиль і спрямувати його на плоску межу поділу двох однорідних ізотропних діелектричних середовищ з різними матеріальними константами  $\epsilon$  і  $\mu$ , то ці хвилі частково відіб'ються, а частково перейдуть у друге середовище, змінивши напрям свого поширення (рис. 14.9,  $B$  — вібратор,  $P$  — резонатор). Отже, на межі поділу спостерігається відбивання і заломлення електромагнітних хвиль (подібно до відбивання і заломлення світлових променів). Відбивання електромагнітних хвиль добре спостерігати, якщо замість плоскої межі поділу діелектричних середовищ взяти дзеркало АС (металевий лист). Метали значно краще відбивають електромагнітні хвилі, ніж діелектрики. Дослідження показали, що для електромагнітних хвиль (як і для світлових променів) кут падіння хвилі дорівнює куту відбивання ( $\angle \alpha = \angle \beta$ ).

Заломлення електромагнітних хвиль можна спостерігати експериментально, якщо спрямувати паралельний пучок хвиль на велику призму з діелектрика, яким може бути сірка, парафін тощо (рис. 14.10). Подібні дослідження показали справедливість закону заломлення Снелліуса: *відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величиною постійною для даних двох діелектричних середовищ і не залежить від кута падіння*. Крім того, для більшості прозорих діелектричних середовищ було доведено, що

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \approx \sqrt{\epsilon} = n, \text{ як випливало з теорії}$$

Максвелла ( $n$  — відносний показник заломлення середовищ;  $\mu \approx 1$ ).

Задачу про відбивання і заломлення плоских електромагнітних хвиль на межі між діелектриками розв'язують

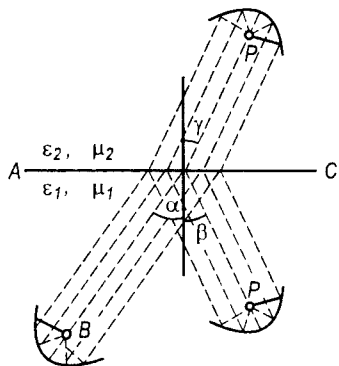


Рис. 14.9

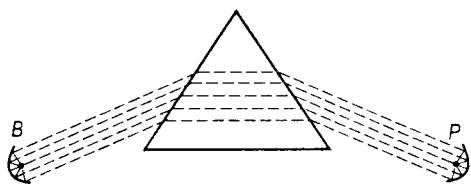


Рис. 14.10

теоретично за допомогою рівнянь Максвелла при заданих граничних умовах у курсі теоретичної електродинаміки. Тут лише зазначимо, що при відбиванні і заломленні в першому середовищі поширюються падаюча і відбита хвилі, а в другому — лише заломлена.

На межі поділу діелектричних середовищ енергія падаючої хвилі перерозподіляється між відбитою і заломленою. Цей перерозподіл інтенсивностей хвиль характеризують коефіцієнтами відбивання і заломлення. *Коефіцієнтом відбивання  $r$*  називають відношення інтенсивності відбитої хвилі до інтенсивності падаючої. Оскільки інтенсивність хвиль характеризують абсолютним значенням вектора Умова — Пойнтінга, то

$$r = \frac{\langle P_{\text{в}} \rangle}{\langle P_{\text{п}} \rangle},$$

де  $\langle P_{\text{в}} \rangle$  і  $\langle P_{\text{п}} \rangle$  — середня за період інтенсивність відповідно відбитої і падаючої хвилі. Аналогічно *коефіцієнтом заломлення  $\delta$*  називають відношення інтенсивності заломленої хвилі до інтенсивності падаючої

$$\delta = \frac{\langle P_{\text{з}} \rangle}{\langle P_{\text{п}} \rangle}.$$

Якщо прийняти, що електромагнітна енергія в діелектриках не перетворюється в інші види, то

$$\langle P_{\text{п}} \rangle = \langle P_{\text{в}} \rangle + \langle P_{\text{з}} \rangle.$$

Енергія падаючої хвилі повністю переходить в енергію відбитої і заломленої хвиль.

### § 14.7. Тиск електромагнітних хвиль

Під час відбивання або поглинання електромагнітні хвилі чинять тиск на тіла, на які вони падають. Цей висновок вперше зробив Дж. Максвелл. Він показав, що тиск електромагнітної хвилі зумовлений дією магнітного поля хвилі на електричні струми, які збуджуються в речовині електричною складовою поля хвилі, а також дією електричного поля хвилі на заряди, які індукуються в речовині під дією того самого електричного поля. При поширенні плоскої хвилі в провідному середовищі електричне поле хвилі збуджує у ньому струм з об'ємною густиною  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . З боку магнітного поля на елемент струму  $\vec{j} dV$  діє сила (рис. 14.11)

$$d\vec{F} = [\vec{j} \cdot \vec{B}] dV = \sigma [\vec{E} \cdot \vec{B}] dV, \quad (14.40)$$



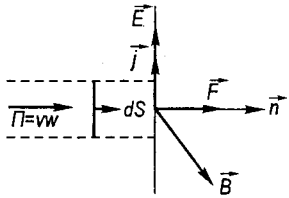


Рис. 14.11

напряг якої визначається вектором  $[\vec{E} \cdot \vec{B}]$ , тобто сила діє в напрямі поширення хвилі. Проведемо одиничну нормаль  $\vec{n}$  до плоскої поверхні межі поділу середовищ так, щоб її напрям збігався з напрямом поширення хвилі. Тоді рівність (14.40) можна переписати так:

$$d\vec{F} = \sigma[\vec{E} \cdot \vec{B}]dV = \vec{n}\sigma E B dV = \vec{n}j B dV = \vec{n} \frac{jE}{v} dV = \vec{n} \frac{dP}{v}. \quad (14.41)$$

У цих перетвореннях використані співвідношення  $E = vB$  та закон Джоуля — Ленца для електромагнітної енергії, яка перетворюється в теплову під час поглинання елементом об'єму провідного середовища за одиницю часу  $dP = jEdV$ . Потік енергії електромагнітних хвиль, яка поглинається за одиницю часу елементом провідної поверхні  $dS$ , на основі (14.26)  $dW = wdS$ . Ця енергія перетворюється в теплову, тому  $dW = dP$ . Із рівності (14.41) маємо

$$d\vec{F} = \vec{n}wdS.$$

Тиск електромагнітних хвиль як скалярна величина

$$p = \frac{d\vec{F}}{\vec{n}dS} = w, \quad (14.42)$$

де  $w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$  — об'ємна густина енергії електромагнітних хвиль.

Вище розглянуто ідеальну провідну поверхню, коли вся електромагнітна енергія хвилі повністю поглинається і перетворюється в теплову. Можливі також випадки часткового або повного відбивання електромагнітних хвиль. Тиск при цьому змінюється за значенням, хоча в кожному випадку виражається через потік падаючої енергії.

Визначимо імпульс електромагнітних хвиль. Якщо на поверхню провідного тіла падає енергія  $W$  протягом певного часу  $\Delta t$ , то середня сила, що діє на поверхню на основі (14.41), виразиться так:

$$\vec{F} = \vec{n} \frac{W}{\Delta t} \frac{1}{v}. \quad (14.43)$$

За законом Ньютона імпульс сили  $\vec{K}$ , який передається поверхні,

$$\vec{K} = \vec{F}\Delta t.$$

З урахуванням (14.43)

$$\vec{K} = \vec{n}W \frac{1}{v}. \quad (14.44)$$

Звідси випливає, що електромагнітні хвилі, які мають енергію  $W$  і поширюються в просторі зі швидкістю  $v$ , мають імпульс  $\vec{K}$ , направлений у бік поширення хвилі. Імпульс одиниці об'єму електромагнітної енергії

$$\vec{K}_0 = \vec{n}w \frac{1}{v}, \quad (14.45)$$

де  $\vec{K}_0 = \vec{K}/V$  і  $w = W/V$  ( $V$  — об'єм). Об'ємну густину імпульсу прийнято виражати через вектор Умова — Пойнтінга. Оскільки  $P = wv$ , то з (14.45)

$$\vec{K}_0 = \frac{\vec{P}}{v^2} = \frac{1}{v^2}[\vec{E} \cdot \vec{H}]. \quad (14.46)$$

Надзвичайно точний експеримент з визначення тиску світла у 1900 р. здійснив П. М. Лебедев. Результати досліджень узгоджуються з електромагнітною теорією світла.

#### § 14.8. Стоячі хвилі і резонанс у відрізках довгих ліній

Експериментально стоячі електромагнітні хвилі можна одержати, якщо від параболічного дзеркала вібратора хвилю спрямувати на плоске металеве дзеркало. Під час накладання відбитих хвиль на біжучі одержують стоячі хвилі з вузлом електричного поля на плоскому дзеркалі. Дослідження вузлів і пучностей стоячої хвилі проводять за допомогою резонатора. Визначивши відстань між пучностями або вузлами  $l$ , розраховують довжину хвилі:  $\lambda = 2l$ .

Стояча електромагнітна хвиля характеризується двома взаємно перпендикулярними векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . Якщо плоска монохроматична хвиля поширюється в додатному напрямі осі  $Ox$ , то її рівняння запишеться так:

$$E'_y = E_0 \cos(\omega t - kx); H'_z = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

Рівняння хвилі, яка поширюється у від'ємному напрямі осі  $Ox$ , можна одержати, якщо поміняти знак біля  $k$  і біля одного з векторів поля, наприклад  $\vec{H}$  (вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{k}$  становлять правогвинтову трійку векторів). Тоді

$$E'_y = E_0 \cos(\omega t + kx); H'_z = -H_0 \cos(\omega t + kx).$$

У разі накладання хвиль одержуємо

$$E_y = E'_y + E'_y; H_z = H'_z + H'_z,$$

або

$$E_y = 2E_0 \cos kx \cos \omega t; H_z = 2H_0 \sin kx \sin \omega t.$$

Це і є *рівняння стоячої електромагнітної хвилі*. Вона має дві складові: електричну і магнітну. Коливання електричної складової поля зсунуті по фазі відносно коливань магнітної складової на  $\pi/2$ . Пучності електричного поля збігаються з вузлами магнітного і навпаки. Вектор Умова — Пойнтінга дорівнює нулеві у вузлах і в пучностях як електричної, так і магнітної складових електромагнітного поля. Отже, енергія стоячої хвилі не переноситься в просторі, вона лише переміщується між вузлом (пучністю) електричного поля і пучністю (вузлом) магнітного поля.

У двопровідній лінії енергія біжучої монохроматичної електромагнітної хвилі поширюється вздовж проводів (вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є перпендикулярними до проводів, а вектор Умова — Пойнтінга  $\vec{P}$  паралельним проводам). Якщо лінія передач є необмеженою, то існує лише біжуча хвиля. У біжучій хвилі зміни струму й напруги збігаються по фазі. Якщо ж лінія передач є обмеженою, то на межі лінії і навколишнього середовища виникає відбита електромагнітна хвиля, яка, накладаючись на біжучу, утворює стоячу електромагнітну хвилю. Коливання струму і напруги в стоячій хвилі зсунуті по фазі на  $\pi/2$ . Якщо обмежена двопровідна лінія передач на кінцях є незамкненою, то там з'являються пучність напруги і вузол струму. Якщо ж лінія замкнена накоротко, то з'являються пучність струму і вузол напруги. Вузли струму збігаються з пучностями напруги, а вузли напруги збігаються з пучностями струму. В кожному з вузлів один із векторів  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$  дорівнює нулеві, а отже, і вектор Умова — Пойнтінга дорівнює нулеві. Електромагнітна енергія здійснює поширення між пучністю (вузлом) струму і сусіднім вузлом (пучністю) напруги. Напрявленого поширення енергії стоячою хвилею вздовж лінії передач не відбувається. Найбільші вимушені амплітудні зміни струму і напруги в стоячій хвилі відбуваються під час резонансу. При цьому вздовж лінії передач вміщається ціле число півхвиль, а частота вимушених коливань генератора збігається з власною частотою випромінювання лінії передач.

Стоячі електромагнітні хвилі у двопровідній лінії можна демонструвати в аудиторії, натягнувши вздовж неї паралельні між собою два оголені провідники на відстані близько 10 см. З одних кінців провідників установлюють ламповий генератор, що генерує хвилі 1 м завдовжки, індуктивно зв'язують його з лінією передач. Інші кінці провідників можна замкнути або залишити роз'єднаними. Як індикатор стоячих хвиль використовують неонові або звичайні, увімкнені в коло резонаторів, лампочки від кишенькових ліхтарів. Переміщуючи неонову лампочку вздовж провідників, спостерігають її загоран-

ня в пучностях і затухання у вузлах напруги. Звичайна лампочка, навпаки, загорається у пучностях і затухає у вузлах струму. Таким способом у 1891 р. незалежно один від одного австрійський фізик Е. Лехер (1856—1926) і французький фізик Блондо, вивчаючи стоячі хвилі, визначили швидкість поширення електромагнітних хвиль.

### § 14.9. Принцип радіозв'язку

Радіозв'язок передбачає передачу інформації на відстань без проводів за допомогою електромагнітних хвиль. Для здійснення радіозв'язку потрібно мати передавальну станцію (систему джерел електромагнітних хвиль і відповідних сигналів) та приймальну станцію (приймач електромагнітних хвиль разом із системою відтворення переданого сигналу). Джерелом електромагнітних хвиль може бути довільний провідник, по якому проходить змінний електричний струм. Однак якщо провідник замкнений і в ньому проходить змінний струм, для якого виконуються умови квазістаціонарності, то така система практично не випромінює. Це стосується довільної «закритої» системи замкнених або майже замкнених струмів, у тому числі й коливального контуру. Для збільшення інтенсивності випромінювання застосовують «відкриті» системи. У радіотехніці такою системою є *антена*.

Струми низької частоти не можуть бути використані в радіозв'язку, по-перше, тому що інтенсивність випромінювання провідників з такими струмами є дуже малою (потужність випромінювання пропорційна четвертому степеню частоти); по-друге, для збільшення енергії випромінювання треба збільшувати амплітуду коливань в антені, тобто потрібно збуджувати резонансні коливання, а це вимагає, щоб в антені вміщалося ціле число півхвиль, тому довжина антени для низьких частот має бути непомірно великою (для частот до  $10^3$  Гц — сотні і тисячі кілометрів). Тому в радіотехніці використовують струми високої частоти ( $10^5$ — $10^8$  Гц, що відповідає довжинам хвиль від 3 км до 3 м).

Для направленої випромінювання електромагнітних хвиль використовують також дециметрові й сантиметрові радіохвилі (частоти  $10^{10}$  Гц і більше).

Принцип радіозв'язку є таким. На передавальній станції струми від високочастотного генератора надходять в антену

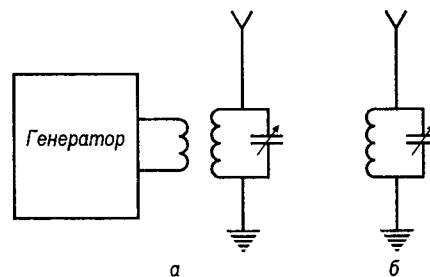


Рис. 14.12

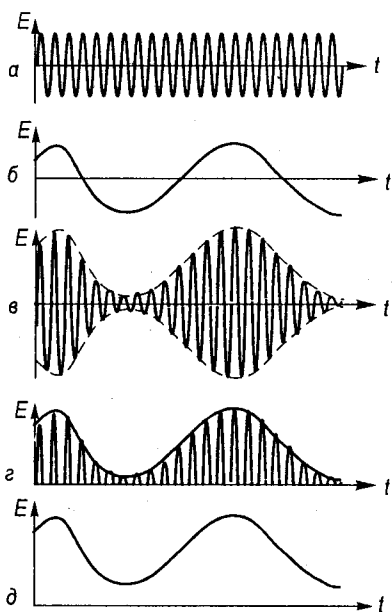


Рис. 14.13

амплітуду, частоту або фазу високочастотних електромагнітних гармонічних коливань змінюють за законом зміни сигналу звукової частоти. Такі перетворення називають *модуляцією*, а самі хвилі — *модульованими*. Модуляція може бути виконана зміною в часі амплітуди, частоти або фази високочастотного коливання. Найширше використовують амплітудну модуляцію.

Високочастотні електромагнітні гармонічні коливання переносять низькочастотний сигнал звукової частоти, тому їх частоту називають *несучою*. Якщо несуча частота  $\omega = 2\pi\nu$ , то рівняння для напруженості високочастотної хвилі, що змінюється за гармонічним законом зі сталою частотою  $\omega$  (рис. 14.13, а), матиме такий вигляд:

$$E = A_0 \cos \omega t.$$

На передавальній станції за допомогою мікрофона звукові сигнали перетворюються у низькочастотні електричні. Якщо перед мікрофоном розміщується джерело чистого музичного звуку (наприклад, камертон), то в його колі струм змінюється за гармонічним законом (рис. 14.13, б). Ці зміни накладаються на високочастотні коливання, і тому амплітуда високочастотних електромагнітних коливань змінюється за законом низької частоти. Так відбувається амплітудна модуляція. Тоді  $E = A_{\text{мод}} \cos \omega t$ . Модульована амплітуда є сумою по-

(рис. 14.12, а), настроєну в резонанс на частоту генератора, і в простір випромінюються високочастотні електромагнітні хвилі. Ці хвилі падають на антену приймача (рис. 14.12, б), також настроєну в резонанс на частоту передавача, збуджують у ній високочастотні струми, які підсилюються і можуть бути використані в місці розміщення приймача. Однак високочастотні сигнали не несуть ніякої інформації, оскільки вони не можуть бути сприйняті людиною безпосередньо або після перетворень їх у звукові сигнали такої самої частоти. Людина здатна сприймати звукові сигнали в межах частот від сотень до кількох тисяч герц. Електромагнітні сигнали таких частот не можуть бути використані в радіозв'язку через зазначені вище причини. Ця трудність у радіотехніці усувається тим, що

стійної складової несучої хвилі  $A_0$  і змінної в часі складової модульованих коливань  $A_{\text{мод}} = A_0 + A_0 f(t)$ , де  $f(t)$  — модулююча функція, яка для випадку музичного звуку має вигляд  $f(t) = k \cos \omega_0 t$  (тут  $k$  — коефіцієнт модуляції,  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  — циклічна звукова частота). Звідси  $A_{\text{мод}} = A_0(1 + k \cos \omega_0 t)$  і для  $E$  одержимо

$$E = A_0(1 + k \cos \omega_0 t) \cos \omega t.$$

З цієї формули видно, що амплітуда модульованих коливань (рис. 14.13, в) змінюється між  $A_{\text{max}} = A_0(1 + k)$  при  $\cos \omega_0 t = 1$  і  $A_{\text{min}} = A_0(1 - k)$  при  $\cos \omega_0 t = -1$ . Отже,  $k = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$ . Найвищим коефіцієнт модуляції буде при  $A_{\text{max}} = 2A_0$  і  $A_{\text{min}} = 0$ . Тоді  $k = 1$  або 100 %. Стандартизоване значення  $k = 30$  %. Вираз для  $E$  можна записати ще інакше, якщо виконати тригонометричні перетворення:

$$E = A_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} A_0 k \cos (\omega - \omega_0) t + \frac{1}{2} A_0 k \cos (\omega + \omega_0) t.$$

Звідси видно, що модульоване коливання складається із сукупності трьох гармонічних коливань з несучою частотою  $\omega$  та верхньою  $\omega + \omega_0$  і нижньою  $\omega - \omega_0$  бічними частотами спектра. Якщо звукові коливання є складними, то замість двох бічних частот будуть бічні смуги частот з обох сторін від несучої частоти. Різницю між найбільшою і найменшою частотами спектра називають *шириною спектра частот* або *смугою частот* передавача. Ширина бокової смуги залежить від характеру сигналу, що передається: для радіомовлення — 10 кГц, для телебачення — 6 МГц.

Модульовані коливання одержують за допомогою генераторів високих частот на електронних лампах або транзисторах. Модульовані електромагнітні хвилі випромінюються антенною передавача в навколишній простір і зі швидкістю світла досягають антени радіоприймача. Радіоприймач прямого підсилення складається з вибіркового пристрою, підсилювача високої частоти, детектора, підсилювача низької частоти, індикатора звукових коливань (телефон, гучномовець тощо). Електромагнітні хвилі, які надійшли від передавача, збуджують у системі приймача високочастотні модульовані струми. Однак такі струми можуть одночасно надходити в антену від багатьох радіостанцій або інших джерел. Тому радіоприймач має спеціальний пристрій, який забезпечує селективність відбору сигналу. Цей пристрій працює на основі явища резонансу, тобто настроюванням контуру приймальної антени в резонанс на несучу частоту даного передавача. При цьому радіоприймач виділятиме увесь спектр смуги частот передавача. Кожний радіоприймач розраховують на певний діапазон частот, який він може прийняти внаслідок змін власної

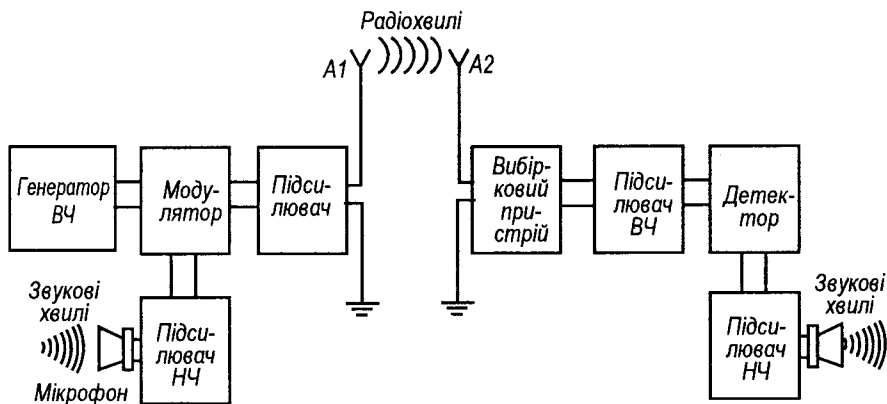


Рис. 14.14

частоти коливального контуру антени приймача в резонанс на різні частоти передавальних станцій.

Енергія прийнятого модульованого сигналу через розсіювання в просторі є надзвичайно малою. Тому цей сигнал спочатку підсилюється у підсилювачі високої частоти. Після такого підсилювання модульовані високочастотні коливання демодулюють. Модульовані коливання розкладають на складові: на коливання високої і низької частот. Демодуляцію здійснюють за допомогою детектора, основною частиною якого є діод, що має односторонню провідність. Після проходження модульованих коливань крізь детектор одержують високочастотні пульсуючі і низькочастотні коливання (рис. 14.13, з). Далі, використовуючи спеціальний фільтр, виділяють коливання звукової частоти (рис. 14.13, д). Структурну схему радіозв'язку показано на рис. 14.14.

Принцип радіозв'язку вперше розробив О. С. Попов, який 7 травня 1895 р. продемонстрував прийом грозових розрядів за допомогою сконструйованого ним радіоприймача, а 24 березня 1896 р. передав і прийняв на відстані першу радіограму «Генріх Герц». Тепер радіо широко використовують у народному господарстві, побуті, науці та техніці.

#### § 14.10. Принцип радіолокації

Електромагнітні хвилі від металевих (провідних) предметів відбиваються, якщо розміри предметів є більшими від довжини хвилі. Це явище лежить в основі радіолокації, тобто виявлення предметів (кораблів, літаків тощо) на відстані за допомогою радіохвиль. У радіолокації використовують радіохвилі сантимет-

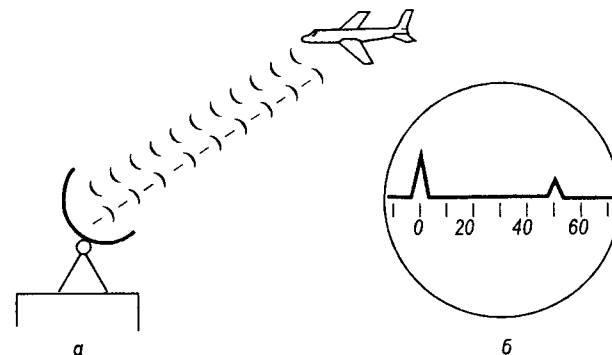


Рис. 14.15

рового і міліметрового діапазонів довжин хвиль з метою направленого їх випромінювання. Від потужного генератора по хвилеводу високочастотні електромагнітні коливання підводять до антени, яка має форму параболічного дзеркала і здатна випромінювати в простір вузький паралельний пучок хвиль. Ці хвилі, потрапляючи на металевий предмет, відбиваються від нього і частина енергії їх повертається назад на дзеркало, яке використовують у цьому разі як приймальну систему (рис. 14.15, а). У момент прийому сигналу випромінювання немає.

У момент, коли антеною посиляється сигнал, в електронно-променеву трубку надходить імпульс, який на екрані висвічує нульову поділку шкали далькості (рис. 14.15, б). Прийнятий сигнал після відбивання підсилюється і також подається на електронно-променеву трубку. На шкалі з'являється другий імпульс, зміщений відносно нульової поділки більше або менше залежно від часу між посланим і прийнятим сигналами. Оскільки швидкість хвиль  $c$ , то шкалу градуюють безпосередньо в кілометрах до перешкод. Сучасні радіолокатори виявляють предмети на відстанях у сотні кілометрів. Сфера застосування радіолокації весь час розширюється: спостереження Землі крізь хмари або в нічний час, спостереження за метеоритами, у військовій справі та ін.

#### § 14.11. Шкала електромагнітних хвиль

У природі існують електромагнітні хвилі різних частот. Шкала електромагнітних хвиль становить безперервну зміну частот від нуля (нескінченно довгі хвилі постійних струмів) до  $10^{23}$  Гц (довжина хвилі  $3 \cdot 10^{-15}$  м). Повний спектр електромагнітних хвиль наведено в табл. 14.1.

Таблиця 14.1

Частота $\nu$ , Гц	Довжина хвилі $\lambda$ , м	Назва діапазону	Джерела. Основні методи збудження
$0-10^3$	$\infty-3 \cdot 10^5$	Низькочастотні хвилі	Змінні струми. Генератори
$10^3-10^{12}$	$3 \cdot 10^5-3 \cdot 10^{-4}$	Радіохвилі	Генератори радіочастот. Генератори НВЧ
$8,6 \cdot 10^{11}-4 \cdot 10^{14}$	$3,5 \cdot 10^{-4}-7,5 \cdot 10^{-7}$	Інфрачервоне проміння	Теплове випромінювання тіл, що складаються з атомів і молекул
$4 \cdot 10^{14}-7,5 \cdot 10^{14}$	$7,5 \cdot 10^{-7}-4 \cdot 10^{-7}$	Видиме світло	Випромінювання атомів та молекул при нагріванні тіл і при електричних розрядах
$7,5 \cdot 10^{14}-6 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{-7}-5 \cdot 10^{-9}$	Ультрафіолетове проміння	Випромінювання тіл при високих температурах та атомів під час дії на них швидких електронів
$3 \cdot 10^{16}-3 \cdot 10^{20}$	$10^{-8}-10^{-12}$	Рентгенівське проміння	Випромінювання атомів при збудженні зовнішніх і внутрішніх електронів
$3 \cdot 10^{19}$ і більше	$10^{-11}$ і менше	Гамма-проміння	Ядерні процеси, радіоактивний розпад, космічні процеси

Межі між різними видами електромагнітного випромінювання є умовними, вони часто перекриваються. Назви різним діапазнам спектрів дано за способом їх збудження і за методами спостереження. Властивості різних діапазонів хвиль також відрізняються за їх дією та за проникною здатністю. Кожний з цих діапазонів має широке практичне застосування. В електродинаміці розглядають низькочастотні хвилі і радіохвилі. Інші частотні діапазони вивчають в оптиці та в атомній і ядерній фізиці.

## Іменний покажчик

Акулов М. С. 12  
Ампер А. 9, 264, 268, 345  
Аррениус С. 217  
Арцимович Л. А. 260  
Астон Ф. 248, 297

Бардін Дж. 155, 188  
Барнетт С. 333  
Бар'яхтар В. Г. 13  
Басов М. Г. 246  
Бенардос М. М. 254  
Біо Ж. 9, 270  
Боголюбов М. М. 13, 155  
Богуславський С. А. 200  
Бонч-Бруевич М. А. 206  
Браттейн У. 188  
Браун К. 293  
Буш Х. 293

Ван де Грааф Р. 57  
Варбург Е. 324  
Вебер В. 220, 307  
Вейс П. 324, 325, 334  
Векслер В. І. 298  
Він В. 248  
Вольта А. 9  
Ву Ц. 156  
Вул Б. М. 93

Гааз В. де 333  
Гальвані Л. 9  
Гаусс К. 10  
Гейзенберг В. 336  
Гельмгольц Г. 220, 348  
Генрі Дж. 10, 343  
Геріке О. 7  
Герц Г. 11, 247, 404, 424  
Гільберт У. 7  
Глушков В. М. 13  
Гольдман І. М. 93  
Гольдштейн Е. 248  
Грей С. 7  
Грузінцев О. П. 13

Давтян О. К. 229  
Дебай П. 217, 256

Деві Г. 9, 218  
Декарт Р. 404  
Денисенко Г. І. 13  
Джоуль Дж. 10  
Дірак П. 146, 263  
Дорфман Я. Г. 335  
Друде П. 139  
Дюфе Ш. Ф. 8

Едісон Т. 198, 228  
Ейнштейн А. 12, 333  
Ейхенвальд О. О. 403  
Епінус Ф. 8  
Ерстед Х. 9, 263, 345

Ірншоу С. 43

Завойський Є. К. 262, 322  
Зеебек Т. 190  
Зілов П. О. 13  
Зоммерфельд А. 145

Йоффе А. Ф. 12

Кавендіш Г. 9  
Кадомцев Б. Б. 260  
Камерлінг-Оннес Г. 153  
Капіца П. Л. 343  
Карлейль А. 218  
Керст Д. 298  
Кеттерінг 138  
Кобеко П. П. 93  
Копняев П. П. 13  
Косоногов Й. Й. 13  
Крукс У. 247  
Кулон Ш. 9  
Кундт А. 91  
Купер Л. 155  
Курчатов І. В. 93  
Кюрі Ж. 93, 99  
Кюрі П. 93, 99, 321, 329

Ландау Л. Д. 12, 330  
Ланжевєн П. 239, 321  
Лаплас П. 9, 270  
Лармор Дж. 319

Лебедев П. М. 11, 433  
Лебедев С. О. 13  
Легасов В. О. 247  
Ленард Ф. 248  
Ленгмюр І. 200, 254, 256  
Ленц Е. Х. 10  
Леру Ф. 194  
Лехер Е. 435  
Ліфшиць І. М. 12  
Ломоносов М. В. 8, 251  
Лоренц Л. 143  
Лоренц Х. 5  
Лоуренс Е. 298  
Лощкаръов В. Є. 13  
Льоб Т. 250

Макміллан Е. 298  
Максвелл Дж. 4, 220, 349, 402, 404, 431  
Мандельштам Л. І. 137  
Мейснер В. 154  
Мік Д. 250  
Міллікен Р. 12, 17  
Міткевич В. Ф. 254  
Мушенбрук П. 8

Неєль Л. 330  
Нейман Ф. 11  
Нернст В. 224  
Нестеренко А. Д. 13  
Нікольсон У. 218

Огава С. 93  
Оксенфельд Р. 154  
Ом Г. 10, 111  
Оствальд В. 229

Папалексі М. Д. 137  
Патон Б. Є. 13  
Паулі В. 146  
Пекар С. І. 13  
Пельтье Ж. 194  
Перрен Ж. 247  
Петров В. В. 8, 253  
Планте Г. 228  
Пойнтінг Дж. 419  
Попов О. С. 11, 438  
Пуллой І. П. 13

Ріке Е. 136  
Ріттер І. 218, 220

Ріхман Г. 8, 251  
Річардсон О. 202  
Резерфорд Е. 236, 239, 257  
Розінг Б. Л. 324  
Роуланд Г. 403  
Рудаков Л. І. 262

Савар Ф. 9, 270  
Сагдеев Р. З. 260  
Сіммер Р. 8  
Стерджен У. 343  
Столетов О. Г. 324  
Стоней Г. 17, 220  
Стюарт Ч. 137

Тамм І. Є. 12  
Таунсенд Дж. 243  
Тесла Н. 268  
Толмен Р. 137  
Томсон Дж. Дж. 11, 248, 286, 297  
Томсон У. (лорд Кельвін) 11, 197

Умов М. О. 11, 419  
Усагін І. П. 377

Фалес Мілетський 7  
Фарадей М. 10, 219, 220, 301, 320, 344, 402  
Фермі Е. 146  
Франклін Б. 8, 220, 251  
Френкель Я. І. 12, 336

Хевісайд О. 409  
Холл Е. 290  
Хрущов В. М. 13  
Хюккель Е. 217

Чиженко І. М. 13

Шведов Ф. Н. 13  
Шіллер М. М. 13  
Шоклі У. 188  
Шріффер Дж. 155

Юнгнер В. 228

Яблочков П. М. 377  
Якобі Б. С. 230

## Предметний покажчик

- Абсолютна одиниця заряду 23  
Автоколивальні системи 397  
Автотрансформатор 379  
Автоелектронна (холодна) емісія 213  
Активациі енергія 164  
Акумулятори 228  
Акцепторний рівень 167  
Амбіполярна дифузія 259  
Ампер (одиниця струму) 274  
Амплітуда напруги 364  
— струму 361  
Анод 199  
Анодні характеристики 207  
Антенна 435  
Антисегнетоелектрика 95  
Антиферомагнетизм 329  
Аперіодичний процес 392  
Асторовий темний простір 244  
База тріода 189  
Бетатрон 300  
Блискавка 251  
Бора магнетон 317  
Вебер (одиниця магнітного потоку) 306  
Векторний метод 365  
Вектор намагнічення 310  
— поляризації 70  
— Умова—Пойнтінга 418  
Випрямлення струму 187  
Випрямляч ламповий 204  
— однопівперіодний 204  
— двопівперіодний 205  
Вихрове поле 267  
Внутрішнє рівняння лампи 207  
Вольт-амперна характеристика 187  
Вольти ряд 172  
Гальванічний елемент 226  
— — Вольти 226  
— — Данієля 226  
Гальванопластика 230  
Гальваностегія 230  
Генератор електростатичний 57  
— змінного струму 379  
— магнітогідродинамічний 300  
— релаксаційний 400  
Генрі (одиниця індуктивності) 353  
Гіромагнітне відношення 316  
Гістерезис діелектричний 97  
— магнітний 327  
Градiєнт 52  
Граничні умови 85, 314  
Густина енергії електричного поля 105  
— — магнітного поля 360  
— заряду лінійна 21  
— — поверхнева 21  
— — об'ємна 21  
— струму 107  
— — зміщення 408  
— — насичення 236  
Дебаївський радіус 256  
Декремент затухання логарифмічний 391  
Джерело струму 116  
Дивергенція 42  
Диполь Герца 421  
— електричний 32  
— жорсткий 32  
— м'який 76  
Дипольна (ближня) зона 422  
Дисоціація електролітична 216  
Діамагнетика 317  
Діелектрики 65, 160, 68  
— неполярні 76  
— полярні 80  
Діелектрична проникність 26, 61, 68  
— сприйнятливості 71  
Діод напівпровідниковий 185  
— вакуумний 199  
Дірка 162  
Діркова (р-типу) провідність 163  
Добротність 392  
Доменні діелектричні 95  
— магнітні 325  
Домішкова провідність 164  
Донор 165  
Дослід Барнетта 333  
— Ейнштейна і де Гааза 333

- Мандельштам і Папалексі 137
- Мілікена 12
- Ейхенвальда й Роуланда 403
- Толмена і Стюарта 137
  
- Еквіпотенціальна поверхня 51
- Екстраструм замикання 356
  - розмикання 355
- Електричне поле 27
- Електричний диполь 32
  - заряд 15
  - опір 112
  - струм 105
- Електроємність 60
- Електроліз 217
- Електроліти 216
- Електромагніти 343
- Електрон 17
- Електрон-вольт 50
- Електронна лінза 294
- Електронний газ 140
  - мікроскоп 394
- Електронно-дірковий перехід 182
- Електронно-променева трубка 210
- Електропровідність власна 162
  - еквівалентна 223
- Електростатика 14
- Електростатична енергія 103
  - індукція 59
- Електростатичний генератор 59
- Елемент струму 265
- Емісія термоелектронна 198
- Емітер тріода 189
- Енергія Фермі 148
  - активації 164
- Ефект Мейснера 154
  - Холла 290
- Ємність акумулятора 228
  - електрична 60
  - конденсатора 61
  - плоского 61
  - сферичного 62
  - циліндричного 61
- Закон Ампера 268
  - загальний 269
  - Біо – Савара – Лапласа 271
  - Богуславського – Ленгмюра 200
  - Відемана – Франца 143
  - Вольти 171
  - Джоуля – Ленца 123
  - Дюлонга – Пті 145
  - заломлення Снелліуса 430
  - збереження заряду 20
  - індукції електромагнітної 349
- квантування електричного заряду 18
- Кулона 22
- Кюрі 321
- Кюрі–Вейса 98, 321
- Ома 111
  - в диференціальній формі 114
  - в комплексній формі 384
  - для електролітів 223
  - для змінного струму 370
  - для плазми 258
  - повного струму 278, 408
  - розведення Оствальда 218
  - Фарадея (перший, другий) 219
- Заряд електричний 15
  - вільний 67
  - зв'язаний 67
  - негативний 15
  - позитивний 15
  - поляризаційний 69
  - питомий 17
- Запірний шар 179
- Затухаючі коливання 391
- Зона валентна 158
  - вільна 158
  - гібридна 158
  - заборонена 157
- Імпеданс 384
- Індуктивність 353
- Індуктивний опір 367
- Індукція взаємна 357
  - поля електричного 74
  - магнітного 265
- Іон 16
- Іонізація 232
- Катіон 217
- Катод 199, 205
- Катодне випромінювання 247
  - світіння 244
- Квазістаціонарний процес 363
- Кварки 19
- Квантова електродинаміка 6
- Класичний радіус електрона 19
- Коефіцієнт взаємної індукції 358
  - відбивання 431
  - випрямлення діода 188
  - вторинної емісії 212
  - дисоціації 217
  - електронної теплопровідності 260
  - опору температурний 112
  - Пельтье 195
  - підсилення 208
  - потужності 376

- термо-ЕРС 190
- Томсона 198
- трансформації 378
- Коерцитивна сила 97, 328
- Колектор тріода 189
- Колівання власні 387
  - вимушені 392
  - електричні 386
  - затухаючі 389
  - модульовані 436
  - релаксаційні 400
- Конденсатор 61
- Константа дисоціації 218
- Контактна різниця потенціалів 171
- Крутизна сіткової характеристики 200, 207
  
- Ларморівська прецесія 319
  - частота 318
- Ленгмюрова частота 257
- Лінія магнітної індукції 267
  - струми 106
- Лінійна густина поверхневих струмів 314
- Лоренца сила 285
  
- Магнетики 309
- Магнітна проникність 313
  - сприйнятливості 313
- Магнітний потік 306
- Магнітні кола 339
  - лінзи 293
  - матеріали 336
  - моменти струмів 289
  - поля 263
  - потоки 306
- Магніт постійний 309, 343
- Магніторухійна сила 340
- Магнітостатика 265
- Маса спокою електрона 18
- Мас-аналізатор 296
- Мас-спектрограф 295
- Мейснера ефект 154
  - Томсона 288
- Мікроскоп електронний 294
  - тунельний 295
- Мікротрон 300
- Модуляція 436
- Момент дипольний електричний 32
  - струму магнітний 282
  
- Надпровідність 154
- Намагнічування 309
- Напівпровідники 105, 161
  - власні 162
  - електронні (*n*-типу) 160, 166

- Напруга електричного поля 50
  - керуюча 206
  - пробую газу 243
- Напруженість поля електричного 28
  - магнітного 312
  - насичення 83
  - сторонніх сил 117
  - холлівська 291
- Нормальний водневий електрод 225
  - електрохімічний потенціал 225
  - елемент Вестона 227
- Носії заряду 15
  - неосновні 167
  - основні 167
  
- Обмінні сили 336
- Ом (одиниця опору) 112
- Оператор Лапласа 52, 413
- Опір електричний 112
  - внутрішній 120
  - зовнішній 120
  - комплексний 120
  - диференціальний 201, 207
  - ємнісний 369
  - індуктивний 367
  - питомий 112
  - реактивний 370
  - статичний 200
- Орбітальний магнітний момент електрона 316
  
- Паливний елемент 228
- Парамагнетизм 320
- Петля гістерезису 327
- П'єзоелектрики 99
- Піроелектрики 91
- Плазма 254
- Плече диполя 32
- Подвійний електричний шар 225
- Поле вихрове 278, 349
  - диполя 32
  - електричне 27
  - електромагнітне 404
  - електростатичне 28
  - магнітне 264
  - однорідне 31
  - потенціальне (консервативне) 45, 276
- Поляризація діелектриків 67
  - дипольна (орієнтаційна) 80
  - електронна (індукційна) 76
  - іонна 85
  - електролітична 227
- Потенціал електростатичного поля 48
  - виходу електрона 171

— електрохімічний 224  
— іонізаційний 232  
Потенціальний бар'єр 179  
Потік магнітний 306  
— енергії електромагнітної 421  
Потужність струму змінного 374  
— — постійного 121  
Правило гвинта 267  
— Кірхгофа 129  
— Ленца 350  
— лівої руки 268  
— правої руки 351  
Прискорювач частинок 297  
Принцип суперпозиції 25  
Провідність вентиляна 185  
— власна 162  
— діркова 163, 167  
— домішкова 164  
— електронна 163  
— питома 113  
Провідники другого роду 105  
— нелінійні 115  
— першого роду 105, 216  
Промені каналові 248  
— катодні 247  
Протон 19  
Резонанс 396  
Резонансні циклічні прискорювачі 298  
Рекомбінація іонів 233  
Релаксація 152  
Рівень (енергія) Фермі 147  
— енергії 156  
Рівні акцепторні 167  
— донорні 165  
Рівняння Лапласа 52  
— Пуассона 52  
— неперервності 109  
Різниця потенціалів 50  
Робота виходу електрона 168  
— іонізації 232  
— сторонніх сил 118  
— струму постійного 121  
Розгалужені кола 129  
Розряд дуговий 253  
— іскровий 249  
— коронний 252  
— несамотійний 234  
— самотійний 240  
— тліючий 244  
Ротор вектора 45  
Рухливість іонів 222, 238  
Самоіндукція 253  
Сегнетоелектрика 92

Сила Ампера 268, 285  
— електрорушійна 118  
— Лоренца 285  
— магнітна 264  
— стороння 116  
— струму 106  
— термоелектрорушійна 190  
Силовa лінія 31  
Синхротрон 299  
Синхрофазотрон 300  
Система Лехера 430  
Сітка електронної лампи 205  
Сіткова характеристика 207  
Скін-ефект 352  
Снелліуса закон заломлення 430  
Соленоїд 275  
Сольвати 216  
Спад напруги 111, 119  
Спін електрона 308  
Сполучення зіркою 380  
— трикутником 380  
Спонтанна поляризація 90  
Статистика Фермі—Дірака 146  
Стример 250  
Струм анодний  
— вихровий (струм Фуко) 351  
— змінний 361  
— зміщення 407  
— квазістаціонарний 133, 363  
— конвекційний 106  
— короткого замикання 120  
— критичний 154  
— насичення 187, 199, 234  
— поляризації 106  
— провідності 105  
— стаціонарний 107  
— термоелектричний 190  
— термоелектронний 198  
Суперпозиція 25  
Телеграфне рівняння 428  
Температура (точка) Кюрі 92  
— Нееля 330  
Температурний коефіцієнт опору 112  
— — провідності 113  
Темний катодний простір 244  
Теорема Гаусса 36  
— єдиності 90  
— Ірншоу 43  
Теорія близькодії 10  
— далекодії 10  
— зонна 157  
— квантова металів 145  
— провідності електронна 139  
— Таунсенда 243

Термоелектрика 190  
Термопара 190  
Тесла (одиниця індукції магнітного поля) 268  
Томсона формула 389  
Транзистор 188  
Трансформатор 377  
Триод 205  
Трубка струму 106  
Тунельний електронний мікроскоп 295  
Фазова швидкість 414  
Фазотрон 299  
Фарад (одиниця електроємності) 60  
Фарадея число 219  
— досліди 344  
Ферити 330  
Феримагнетики 330  
Феромагнетики 324  
Формула Клаузіуса—Моссотті 78  
— Річардсона—Дешмана 202  
— Томсона 389  
Хвилевід 427  
Хвильова зона 422

Хвильове рівняння 412  
— число 415  
Хвильовий опір 429  
Хвиля електромагнітна 414  
Хімічний еквівалент 219  
Холла ефект 290  
— стала 291  
Циклічна частота власних коливань 388  
Циклотрон 300  
Циркуляція вектора 45  
Час затухання 391  
— релаксації 134, 152  
Частинки вироджені 146  
— неvirоджені 146  
Частота плазмова (ленгмюрова) 257  
Шкала хвиль електромагнітних 440  
Явище Зеєбека 190  
— магнітомеханічне 333  
— механомагнітне 333  
— Пельтье 194  
— Томсона 197



## Зміст

Вступ . . . . .	3
<b>Розділ 1. Електростатика . . . . .</b>	<b>14</b>
§ 1.1. Електричний заряд . . . . .	14
§ 1.2. Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона . . . . .	21
§ 1.3. Вплив середовища на взаємодію зарядів. Діелектрична проникність . . . . .	26
§ 1.4. Електричне поле . . . . .	27
§ 1.5. Напруженість електричного поля . . . . .	28
§ 1.6. Електричний диполь . . . . .	32
§ 1.7. Теорема Гаусса для електростатичних полів та її застосування . . . . .	36
§ 1.8. Теорема Гаусса в диференціальній формі . . . . .	41
§ 1.9. Теорема Ірншоу . . . . .	43
§ 1.10. Робота сил електричного поля. Потенціальний характер електростатичного поля . . . . .	44
§ 1.11. Потенціал та різниця потенціалів. Рівняння Пуассона . . . . .	48
§ 1.12. Розподіл зарядів на поверхні провідника . . . . .	56
§ 1.13. Провідники в електричному полі . . . . .	59
§ 1.14. Електрична ємність. Конденсатори . . . . .	60
§ 1.15. Діелектрики. Полярні і неполярні молекули. Вільні і зв'язані заряди . . . . .	64
§ 1.16. Поляризація діелектриків . . . . .	67
§ 1.17. Неполярні діелектрики. Електронна теорія поляризації неполярних діелектриків . . . . .	76
§ 1.18. Полярні діелектрики. Електронна теорія поляризації полярних діелектриків . . . . .	80
§ 1.19. Іонна поляризація . . . . .	84
§ 1.20. Електричне поле на межі двох середовищ. Граничні умови . . . . .	85
§ 1.21. Основна задача електростатики . . . . .	89
§ 1.22. Спонтанно поляризовані діелектрики . . . . .	90
§ 1.23. Сегнетоелектрика . . . . .	92
§ 1.24. П'єзоелектрика . . . . .	99
§ 1.25. Енергія взаємодії електричних зарядів . . . . .	101
§ 1.26. Енергія електростатичного поля . . . . .	103

<b>Розділ 2. Постійний електричний струм . . . . .</b>	<b>105</b>
§ 2.1. Електричний струм. Рівняння неперервності . . . . .	105
§ 2.2. Закон Ома. Опір провідників . . . . .	110
§ 2.3. Сторонні сили. Електрорушійна сила. Закон Ома для неоднорідної ділянки і повного кола . . . . .	115
§ 2.4. Робота і потужність електричного струму . . . . .	121
§ 2.5. Закон Джоуля — Ленца. Закон збереження енергії електричного поля . . . . .	123
§ 2.6. Електричне коло. Правила Кірхгофа . . . . .	126
§ 2.7. Квазістационарні струми . . . . .	133
<b>Розділ 3. Електропровідність твердих тіл . . . . .</b>	<b>135</b>
§ 3.1. Електричний струм у металах . . . . .	135
§ 3.2. Класична електронна теорія металів . . . . .	139
§ 3.3. Поняття про квантову теорію металів . . . . .	145
§ 3.4. Явище надпровідності . . . . .	153
§ 3.5. Енергетичний спектр електронів у кристалі. Метали, діелектрики і напівпровідники . . . . .	156
§ 3.6. Електропровідність напівпровідників . . . . .	161
<b>Розділ 4. Електричні явища в контактах . . . . .</b>	<b>168</b>
§ 4.1. Робота виходу електрона з металу . . . . .	168
§ 4.2. Контактна різниця потенціалів . . . . .	171
§ 4.3. Контакт металу з напівпровідником . . . . .	178
§ 4.4. Контакт електронного і діркового напівпровідників . . . . .	182
§ 4.5. Напівпровідникові діоди і тріоди (транзистори) . . . . .	185
§ 4.6. Термоелектричний струм . . . . .	190
§ 4.7. Явища Пельтье і Томсона . . . . .	194
<b>Розділ 5. Електричний струм у вакуумі . . . . .</b>	<b>198</b>
§ 5.1. Термоелектронна емісія. Залежність струму насичення від температури . . . . .	198
§ 5.2. Електронні лампи та їх застосування. Електронно-променева трубка . . . . .	204
§ 5.3. Вторинна та автоелектронна емісії . . . . .	211
<b>Розділ 6. Електричний струм у рідинах . . . . .</b>	<b>215</b>
§ 6.1. Електроліти. Електролітична дисоціація . . . . .	215
§ 6.2. Електроліз. Закони Фарадея . . . . .	218
§ 6.3. Електропровідність електролітів . . . . .	221
§ 6.4. Електрохімічні потенціали . . . . .	224
§ 6.5. Хімічні джерела струму . . . . .	226
§ 6.6. Застосування електролізу в техніці . . . . .	230
<b>Розділ 7. Електричний струм у газах . . . . .</b>	<b>232</b>
§ 7.1. Іонізація і рекомбінація . . . . .	232
§ 7.2. Несамостійний розряд у газах . . . . .	234

§ 7.3. Рухливість іонів . . . . .	238
§ 7.4. Самостійний розряд у газах . . . . .	240
§ 7.5. Тліючий розряд . . . . .	244
§ 7.6. Катодне та анодне (каналове) випромінювання . . . . .	247
§ 7.7. Іскровий розряд . . . . .	249
§ 7.8. Блискавка. Кульова блискавка . . . . .	251
§ 7.9. Коронний розряд . . . . .	252
§ 7.10. Дуговий розряд . . . . .	253
§ 7.11. Поняття про плазму . . . . .	254
§ 7.12. Нові способи збудження газового розряду . . . . .	261
<b>Розділ 8. Магнітне поле . . . . .</b>	<b>262</b>
§ 8.1. Поняття про магнетизм . . . . .	262
§ 8.2. Магнітне поле електричного струму. Індукція магнітного поля. Закон Ампера . . . . .	263
§ 8.3. Магнітна взаємодія струмів . . . . .	268
§ 8.4. Закон Біо — Савара — Лапласа. Магнітне поле прямого, колового і соленоїдного струмів . . . . .	270
§ 8.5. Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму . . . . .	276
§ 8.6. Контур зі струмом у магнітному полі. Магнітний момент струму . . . . .	281
§ 8.7. Дія електричного і магнітного полів на рухомий заряд. Сила Лоренца . . . . .	284
§ 8.8. Визначення питомого заряду електрона . . . . .	286
§ 8.9. Ефект Холла та його застосування . . . . .	290
§ 8.10. Магнітні лінзи. Електронний мікроскоп . . . . .	293
§ 8.11. Мас-спектрометр . . . . .	295
§ 8.12. Прискорювачі заряджених частинок . . . . .	297
§ 8.13. Магнітогідродинамічні генератори . . . . .	300
§ 8.14. Магнітне поле рухомого заряду. Відносний характер електричного і магнітного полів . . . . .	302
§ 8.15. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі. Магнітний потік . . . . .	305
<b>Розділ 9. Постійне магнітне поле в речовині . . . . .</b>	<b>307</b>
§ 9.1. Магнетики та їх намагнічування. Вектор намагнічення і його зв'язок з густиною струмів намагнічення . . . . .	307
§ 9.2. Магнітне поле в магнетиках. Вектор напруженості магнітного поля. Магнітна сприйнятливості і проникність магнетиків . . . . .	311
§ 9.3. Магнітні властивості атомів . . . . .	316
§ 9.4. Діамагнетики. Ларморовська прецесія. Незалежність діамагнітної сприйнятливості від температури . . . . .	317
§ 9.5. Парамагнетики. Механізм намагнічування . . . . .	320
§ 9.6. Електронний парамагнітний резонанс . . . . .	322

§ 9.7. Ядерний магнітний резонанс . . . . .	322
§ 9.8. Феромагнетики. Магнітний гістерезис. Закон Кюрі — Вейса. Антиферомагнетики. Феримагнетики . . . . .	324
§ 9.9. Магнітомеханічні (гіромагнітні) явища. Дослід Барнетта. Досліди Ейнштейна і де Гааза . . . . .	331
§ 9.10. Елементарна теорія феромагнетизму . . . . .	334
§ 9.11. Нові магнітні матеріали . . . . .	336
§ 9.12. Магнітні кола. Магніторушійна сила. Закони магнітного кола . . . . .	339
§ 9.13. Електромагніти та їх застосування . . . . .	343
<b>Розділ 10. Електромагнітна індукція . . . . .</b>	<b>344</b>
§ 10.1. Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея . . . . .	344
§ 10.2. Електрорушійна сила індукції. Закон електромагнітної індукції Фарадея і правило Ленца . . . . .	347
§ 10.3. Вихрові струми. Скін-ефект . . . . .	351
§ 10.4. Явище самоіндукції. Індуктивність . . . . .	352
§ 10.5. Явище взаємної індукції . . . . .	357
§ 10.6. Енергія магнітного поля струму. Енергія і густина енергії магнітного поля . . . . .	359
<b>Розділ 11. Квазістаціонарний струм . . . . .</b>	<b>361</b>
§ 11.1. Отримання змінної ЕРС . . . . .	361
§ 11.2. Квазістаціонарний струм. Діючі значення сили струму і напруги. Середнє значення сили змінного струму . . . . .	362
§ 11.3. Векторні діаграми . . . . .	365
§ 11.4. Опір, індуктивність і ємність у колі змінного струму. Закон Ома для змінного струму . . . . .	366
§ 11.5. Резонанс напруг . . . . .	371
§ 11.6. Резонанс струмів . . . . .	372
§ 11.7. Робота і потужність змінного струму . . . . .	374
§ 11.8. Передавання електричної енергії. Трансформатори . . . . .	377
§ 11.9. Трифазний струм . . . . .	379
§ 11.10. Метод комплексних амплітуд . . . . .	381
<b>Розділ 12. Електричні коливання . . . . .</b>	<b>386</b>
§ 12.1. Коливальний контур. Власні електричні коливання . . . . .	386
§ 12.2. Затухаючі коливання . . . . .	389
§ 12.3. Вимушені електричні коливання . . . . .	392
§ 12.4. Автоколивальні системи. Тріод і транзистор у колах генераторів незатухаючих коливань . . . . .	397
§ 12.5. Релаксаційні коливання . . . . .	400
<b>Розділ 13. Електромагнітне поле . . . . .</b>	<b>401</b>
§ 13.1. Вихрове електричне поле . . . . .	401

§ 13.2. Досліди Роуlanda та Ейхенвальда . . . . .	403
§ 13.3. Електромагнітне поле . . . . .	404
§ 13.4. Струм зміщення. Система рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формах. . . . .	405
<b>Розділ 14. Електромагнітні хвилі . . . . .</b>	<b>412</b>
§ 14.1. Хвильове рівняння. Плоскі електромагнітні хвилі в однорідному середовищі, швидкість поширення їх . . . . .	412
§ 14.2. Енергія електромагнітної хвилі. Потік енергії. Вектор Умова — Пойнтінга . . . . .	417
§ 14.3. Випромінювання електромагнітних хвиль. Досліди Герца . . . . .	421
§ 14.4. Поняття про системи передавання електромагнітної енергії . . . . .	425
§ 14.5. Електромагнітні хвилі вздовж проводів. Телеграфне рівняння. Хвильовий опір лінії . . . . .	428
§ 14.6. Поширення електромагнітних хвиль в неоднорідних середовищах. Відбивання і заломлення електромагнітних хвиль . . . . .	430
§ 14.7. Тиск електромагнітних хвиль . . . . .	431
§ 14.8. Стоячі хвилі і резонанс у відрізках довгих ліній. . . . .	433
§ 14.9. Принцип радіозв'язку . . . . .	435
§ 14.10. Принцип радіолокації . . . . .	438
§ 14.11. Шкала електромагнітних хвиль . . . . .	439
<b>Іменний покажчик . . . . .</b>	<b>441</b>
<b>Предметний покажчик . . . . .</b>	<b>443</b>

Навчальне видання

Кучерук Іван Митрофанович,  
Горбачук Іван Тихонович,  
Луцик Петро Павлович

## ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ТОМАХ

ТОМ 2

### Електрика і магнетизм

Редактор *С. К. Кашка*  
Оформлення художника *В. О. Гурлева*  
Художній редактор *С. В. Анненков*  
Коректори *Н. М. Мірошніченко, О. В. Боброва*  
Комп'ютерна верстка *В. Ф. Зелтиньша*

Підписано до друку 01.02.2001. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$ .  
Папір друк. № 1. Гарнітура Таймс. Друк офсетний.  
Умов. друк. арк. 26,51. Обл.-вид. арк. 27,86.  
Тираж 4000 прим. Зам. № 1-35.

Видавництво «Техніка». 04053 м. Київ,  
вул. Обсерваторна, 25.  
Свідоцтво про державну реєстрацію  
№ 02473145 від 22.12.95 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці  
09117 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.



**ДЕРЖАВНЕ СПЕЦІАЛІЗОВАНЕ  
ВИДАВНИЦТВО «ТЕХНІКА»  
ПРОПОНУЄ ПІДРУЧНИКИ**

*Готується до друку в 2001 р.*

**Збірник задач з фізики**

Автори: Гаркуша І. П., Горбачук І. Т., Курінний В. П. та ін.

Збірник містить близько 2200 задач з усіх розділів курсу, які мають широкий діапазон рівня складності. Відповіді до найскладніших задач супроводжуються вказівками та розв'язаннями. Різноманітний за змістом та рівнем складності набір задач дає змогу використовувати збірник також при вивченні загального курсу фізики у вузах з поглибленим вивченням фізики.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів та фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Мова українська.

**Вища математика. Збірник задач. У двох частинах.**

За редакцією П. П. Овчинникова.

Містить задачі та вправи з вищої математики для самостійної роботи студентів. Наведено приклади розв'язання типових задач, а до решти дано відповіді. У збірнику продовжується паралельне викладення матеріалу, що пропонується в теоретичному курсі "Вища математика", випущеному видавництвом "Техніка" в 2000 р. у двох частинах.

Для студентів технічних вузів.

Мова українська.

**Замовити і купити книжки можна у видавництві "Техніка"  
за адресою: 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.  
Тел. (044) 212-10-80, факс (044) 212-10-88**