Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність математичних сподівань

Приклад. Ознаки X і Y двох генеральних сукупностей, елементами яких є однотипні заклепки, мають нормальний закон розподілу зі значеннями дисперсій D_x = 2,2 мм^2, D_y = 2,8 мм^2.

При реалізації двох вибірок із генеральних сукупностей дістали статистичні розподіли:

y_i	9,7	9,8	9,9	10	10,1	10,2
n'_i	2	3	5	4	1	1

x_j	8,9	9,2	9,5	9,8	10,1
n''_j	1	4	5	6	4

При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) < M(Y)$.

Розв'язання. Ураховуючи, що

$$n' = \sum n'_i = 15; \quad n'' = \sum n''_j = 20 \text{, обчислимо}$$

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_j\, n''_j}{n''} = \frac{8{,}9 \cdot 1 + 9{,}2 \cdot 4 + 9{,}5 \cdot 5 + 9{,}8 \cdot 6 + 10{,}1 \cdot 4}{20} =$$

$$= \frac{8{,}9 + 36{,}8 + 47{,}5 + 58{,}8 + 40{,}4}{20} = \frac{192{,}4}{20} = 9{,}62 \text{ мм.}$$

$$\bar{y}_В = \frac{\sum y_i\, n'_i}{n'} = \frac{9{,}7 \cdot 2 + 9{,}8 \cdot 3 + 9{,}9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 10{,}1 \cdot 1 + 10{,}2 \cdot 1}{15} =$$

$$= \frac{19{,}4 + 29{,}4 + 49{,}5 + 40 + 10{,}1 + 10{,}2}{15} = \frac{158{,}6}{15} \approx 10{,}57 \text{ мм.}$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : M(X) < M(Y)$ будуємо лівобічну критичну область, критичну точку для якої знаходимо з рівності

$$\Phi(z_{кр}) = -\frac{1 - 2\alpha}{2} = -\frac{1 - 2 \cdot 0{,}001}{2} = -\frac{0{,}998}{2} = -0{,}499 \to z_{кр} = -3{,}2 \,.$$

Лівобічна критична область зображена на рис. 132.

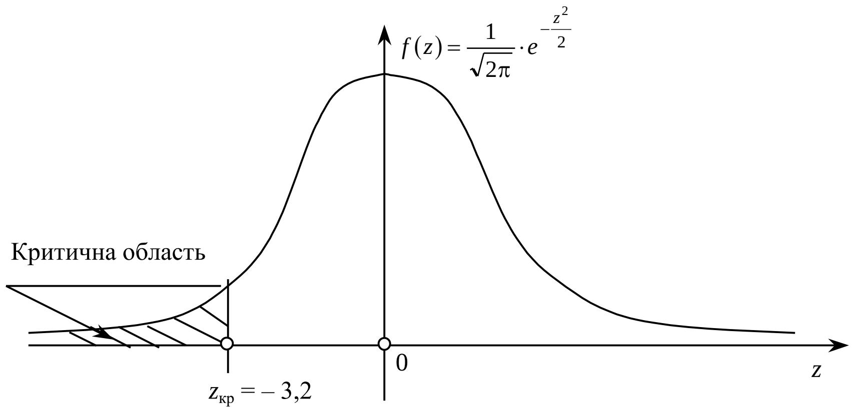

Рис. 132

Обчислюємо спостережуване значення критерію

$$Z^* = \frac{\bar{x}_В - \bar{y}_В}{\sqrt{\frac{D_x}{n''} + \frac{D_y}{n'}}} = \frac{9{,}62 - 10{,}57}{\sqrt{\frac{2{,}2}{20} + \frac{2{,}8}{15}}} = -\frac{0{,}95}{\sqrt{0{,}11 + 0{,}19}} =$$

$$= -\frac{0{,}95}{\sqrt{0{,}3}} = -\frac{0{,}95}{0{,}55} = -1{,}73.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-3,2; \infty)$, то відсутні підстави для відхилення $H_0 : M(X) = M(Y)$.

Приклад. Для дослідження розтягування певного типу гуми після хімічного оброблення було відібрано шість її мотків, кожний з яких було розділено навпіл і одна його половина була піддана хімічній обробці, а друга — ні.

Потім за допомогою приладу, що вимірює розтягування матеріалу, мотки гуми були виміряні і результати вимірювання наведені у вигляді двох статистичних розподілів ознак X і Y, які мають нормальний закон розподілу з відомими значеннями генеральних дисперсій $D_x = 10$; $D_y = 16$.

y_i	16,7	17,2	17,3	18,1	18,4	19,1
n'_i	1	1	1	1	1	1

x_j	16,2	16,3	17	17,6	18,4
n''_j	1	1	2	1	1

При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правдивість нульової гіпотези

$H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_0 : M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Обчислимо значення $\bar{x}_В$, $\bar{y}_В$.

Оскільки $n' = n'' = 6$, то маємо:

$$\bar{y}_В = \frac{\sum y_i}{n'} = \frac{16{,}7 + 17{,}2 + 17{,}3 + 18{,}1 + 18{,}4 + 19{,}1}{6} = \frac{106{,}8}{6} = 17{,}8.$$

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_j n_j''}{n''} = \frac{16{,}2 \cdot 1 + 16{,}3 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 17{,}6 \cdot 1 + 18{,}4 \cdot 1}{6} =$$

$$= \frac{16{,}2 + 16{,}3 + 34 + 17{,}6 + 18{,}4}{6} = \frac{102{,}5}{6} = 17{,}08.$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : M(X) \neq M(Y)$ будується двобічна критична область.

Оскільки $z'_{кр} = -z''_{кр}$, то $z''_{кр}$ обчислюємо, використовуючи рівність

$$\Phi(z''_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}001}{2} = \frac{0{,}999}{2} = 0{,}4995 \to z''_{кр} = 3{,}4 \to z'_{кр} = -3{,}4.$$

Критична область зображена на рис. 133.

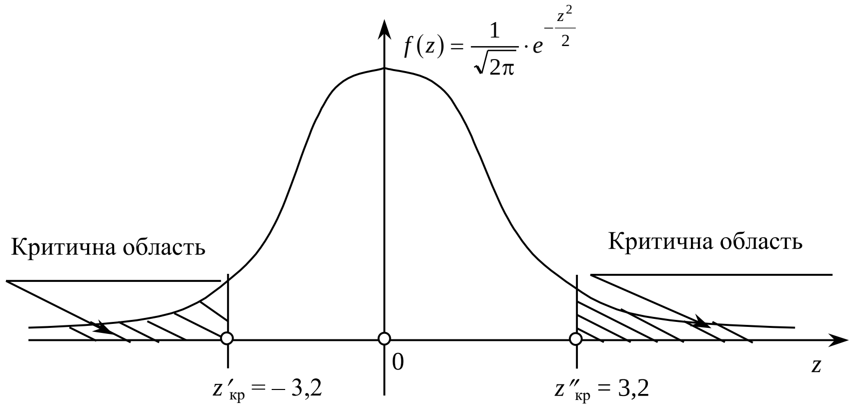

Рис. 133

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$Z^* = \frac{\bar{x}_В - \bar{y}_В}{\sqrt{\frac{D_x}{n''} + \frac{D_y}{n'}}} = \frac{17{,}08 - 17{,}8}{\sqrt{\frac{10}{6} + \frac{16}{6}}} = -\frac{0{,}72}{\sqrt{1{,}67 + 2{,}67}} =$$

$$= -\frac{0{,}72}{\sqrt{4{,}34}} = -\frac{0{,}72}{2{,}08} = -0{,}346.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-3{,}2;\ 3{,}2]$, то немає підстав відхиляти $H_0 : M(X) = M(Y)$.