Тема 14. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчі інтервали для мат. сподівання. Довірчі інтервали для дисперсії.

Теоретичні відомості

Інтервальна оцінка визначається двома точками – початком і кінцем інтервалу. Інтервал $\left[\theta^*-\delta;\ \theta^*+\delta\right]$називають *довірчим*, якщо він містить невідомий параметр θ із заданою надійністю $P\left(\left|\theta^*-\theta\right|<\delta\right)=\gamma$.

Для оцінки математичного сподівання a-нормально розподіленої кількісної ознаки X за вибірковою середньою $\bar{x}_B$; якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ-генеральної сукупності, служить довірчий інтервал:

$$\bar{x}_B-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\delta$ – точність оцінки; n – об'єм вибірки; t – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$.

Якщо σ – невідоме і об'єм вибірки n>30, то використовують подвійну нерівність:

$$\bar{x}_B-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}},$$

де S – виправлене середнє квадратичне відхилення, t – знаходять за таблицею для заданих n і γ.

Приклади розв'язування задач

Побудова довірчого інтервалу для $M\left(X\right)$ при відомому значенні $\sigma_Г$ із заданою надійністю γ

Приклад 1. Визначити мінімальний обсяг вибірки n для того, щоб із надійністю $\gamma=0{,}98$ можна було дістати оцінку математичного сподівання нормально розподіленої сукупності $\varepsilon=0{,}2$, якщо середнє квадратичне відхилення в генеральній сукупності $\sigma=1{,}5$ і оцінка знаходиться за допомогою вибіркової середньої величини.

Розв'язання. Скориставшись формулою $P\left(\left|\bar{x}-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\beta\right)=\gamma,$ дістаємо $\beta=\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. Знайдемо n із формули $\varepsilon=\frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}},\ n=\frac{\beta^2\sigma^2}{\varepsilon^2}$. За таблицями функції Лапласа $\beta=\Phi^{-1}\left(0{,}49\right)=2{,}33,$ Отже, $n=\left(\frac{2{,}33\cdot1{,}5}{0{,}2}\right)^2\approx306.$

Приклад 2. Маємо такі дані про розміри основних фондів (у млн грн.) на 30-ти випадково вибраних підприємствах:

4,2; 2,4; 4,9; 6,7; 4,5; 2,7; 3,9; 2,1; 5,8; 4,0;

2,8; 7,8; 4,4; 6,6; 2,0; 6,2; 7,0; 8,1; 1,7,; 6,8;

9,4; 7,6; 6,3; 8,8; 6,5; 1,4; 4,6; 2,0; 7,2; 9,1.

Побудувати інтервальний статистичний розподіл із довжиною кроку h = 2 млн грн.

З надійністю $\gamma = 0{,}999$ знайти довірчий інтервал для $\bar{X}_{\text{Г}}$, якщо $\sigma_{\text{Г}} = 5$ млн грн.

Розв'язання. Інтервальний статистичний розподіл буде таким:

h = 2 млн грн.	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10]
n_i	9	7	10	4

Для визначення $\bar{x}_{\text{В}}$ необхідно побудувати дискретний статистичний розподіл, що має такий вигляд:

x_i^*	3	5	7	9
n_i	9	7	10	4

$n = \sum n_i = 30$.

Тоді

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{3\cdot 9 + 5\cdot 7 + 7\cdot 10 + 9\cdot 4}{30} = \frac{27+35+70+36}{30} =$$

$$= \frac{168}{30} = 5{,}6 \text{ млн грн.}$$

Для побудови довірчого інтервалу із заданою надійністю $\gamma = 0{,}999$ необхідно знайти x:

$$\varPhi(x) = 0{,}5\gamma = 0{,}5\cdot 0{,}999 = 0{,}4995 \to x \approx 3{,}4.$$

Обчислюємо кінці інтервалу:

$$\bar{x}_{\text{В}} - \frac{x\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} = 5{,}6 - \frac{3{,}4\cdot 5}{\sqrt{30}} = 5{,}6 - \frac{3{,}4\cdot 5}{5{,}5} = 5{,}6 - 3{,}1 = 2{,}5 \text{ млн грн.}$$

$$\bar{x}_{\text{В}} + \frac{x\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} = 5{,}6 + \frac{3{,}4\cdot 5}{\sqrt{30}} = 5{,}6 + \frac{3{,}4\cdot 5}{5{,}5} = 5{,}6 + 3{,}1 = 8{,}7 \text{ млн грн.}$$

Отже, довірчий інтервал для $\bar{x}_{\text{Г}}$ буде $2{,}5 < \bar{X}_{\text{Г}} < 8{,}7$.

Приклад. Якого значення має набувати надійність оцінки γ, щоб за обсягу вибірки n = 100 похибка її не перевищувала 0,01 при $\sigma_{\text{Г}} = 5$.

Розв'язання. Позначимо похибку вибірки

$$\frac{x\cdot\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} = \varepsilon \to x = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_{\text{Г}}} = \frac{0{,}01\sqrt{100}}{5} = \frac{0{,}01\cdot 10}{5} = 0{,}02.$$

Далі маємо:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_{\text{В}} - a}{\frac{\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}}}\right| < x\right) = 2\varPhi(x) = 2\varPhi(0{,}02) = 2\cdot 0{,}008 = 0{,}016.$$

Як бачимо, надійність мала.

Побудова довірчого інтервалу для $M(X)$ при невідомому значенні $\sigma_г$ із заданою надійністю γ

Приклад. У таблиці наведено відхилення діаметрів валиків, оброблених на верстаті, від номінального розміру:

$h = 5$ мк	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	15	75	100	50	10

Із надійністю $\gamma = 0{,}99$ побудувати довірчий інтервал для $M(X) = a$.

Розв'язання. Для побудови довірчого інтервалу необхідно знайти $\bar{x}_В$, S.

Для цього від інтервального статистичного розподілу, наведеного в умові задачі, необхідно перейти до дискретного, а саме:

x_i^*	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
n_i	15	75	100	50	10

Обчислимо $\bar{x}_В$:

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \left| \text{Оскільки } n = \sum n_i = 250 \right| =$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot 15 + 7{,}5 \cdot 75 + 12{,}5 \cdot 100 + 17{,}5 \cdot 50 + 22{,}5 \cdot 10}{250} =$$

$$= \frac{37{,}5 + 562{,}5 + 1250 + 875 + 225}{250} = \frac{2950}{250} = 11{,}8.$$

Отже, $\bar{x}_В = 11{,}8$ мк.

Визначимо $D_В$:

$$\frac{\sum \left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} = \frac{(2{,}5)^2 \cdot 15 + (7{,}5)^2 \cdot 75 + (12{,}5)^2 \cdot 100 + (17{,}5)^2 \cdot 50 + (22{,}5)^2 \cdot 10}{250} =$$

$$= \frac{93{,}75 + 4218{,}75 + 15625 + 15312{,}5 + 5062{,}5}{250} = \frac{40312{,}5}{250} = 161{,}25.$$

$$D_В = \frac{\sum \left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - \left(\bar{x}_В\right)^2 = 161{,}25 - (11{,}8)^2 = 161{,}25 - 139{,}24 = 22{,}01.$$

Обчислимо виправлене середнє квадратичне відхилення S:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_В} = \sqrt{\frac{250}{250-1} \cdot 22{,}01} \approx 4{,}7 \text{ мк.}$$

З огляду на великий (n = 250) обсяг вибірки можна вважати, що розподіл Стьюдента близький до нормального закону. Тоді за таблицею значення функції Лапласа

$$\Phi(t_\gamma) = 0{,}495 \to t_\gamma = 2{,}58.$$

Обчислимо кінці інтервалів:

$$\bar{x}_{\text{В}} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} = 11{,}8 - \frac{2{,}58 \cdot 4{,}7}{\sqrt{250}} = 11{,}8 - \frac{2{,}58 \cdot 4{,}7}{15{,}8} = 11{,}8 - 0{,}77 = 11{,}03 \text{ мк.}$$

$$\bar{x}_{\text{В}} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} = 11{,}8 + \frac{2{,}58 \cdot 4{,}7}{\sqrt{250}} = 11{,}8 + \frac{2{,}58 \cdot 4{,}7}{15{,}8} = 11{,}8 + 0{,}77 = 12{,}57 \text{ мк.}$$

Отож, довірчий інтервал для середнього значення відхилень буде таким:

$$11{,}03 < a < 12{,}57\,.$$

Звідси з надійністю $\gamma = 0{,}99$ (99%) можна стверджувати, що $a \in$ [11,03 мк; 12,57 мк].

Задачі

14.1. Під час перевірки 400 лампочок середній строк їх горіння становив 1220 год. Оцінити з надійністю $\gamma = 0{,}95$ математичне сподівання тривалості горіння, якщо $\sigma = 35$ год і в сукупності виконується нормальний закон розподілу.

14.2. На основі 100 спостережень було визначено, що в середньому для виробництва деталі потрібно 5,5 с, а $s^2 = 2{,}89$. Вважаючи, що тривалість виготовлення деталі розподілена нормально, знайти інтервальні оцінки для a і σ^2 з надійністю 0,96 і 0,98 відповідно.

14.3. Систематичні помилки вимірювального приладу дорівнюють нулю, а випадкові розподілені нормально з $\sigma = 20$ м. Потрібно, щоб абсолютне значення різниці між здобутим результатом і справжнім її значенням не перевищувало 10 м. Визначити, з якою ймовірністю ця вимога виконуватиметься, якщо береться середнє арифметичне n вимірювань і n = 4, 9, 16, 25.

14.4. У результаті вимірювання максимальної ємності 20 конденсаторів дістали такі числові характеристики: $\bar{x} = 4{,}47$, $s^2 = 0{,}0121$.Порівняти точність оцінки математичного сподівання a за допомогою $\bar{x}$ з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

14.5. Вибіркове дослідження прибутків підприємців за місяць дало результати:

Прибуток (тис.гр.)(x_i)	1	3	4	5	6	7
Частота (n_i)	1	1	2	3	2	1

Побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання, припускаючи, що генеральна сукупність X розподілена нормально з надійністю $\gamma = 0{,}95$, розрахувати інтервал для σ.

14.6. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал оцінки математичного сподівання a-нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі вибіркова середня $\overline{x}_B$, об'єм вибірки n та середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності:

а) $\overline{x}_B$ =14, n=25, σ=5;

б) $\overline{x}_B$ =2000, n=1600, σ=40.